Das Dynamiden-System

Redtenbacher, Ferdinand

Mannheim, 1857

Aufstellung der Bewegungsgleichungen

urn:nbn:de:bsz:31-266496

DRITTER ABSCHNITT.

Bewegung eines Dynamidensystems.

A. Körperschwingungen oder Bewegung der wägbaren Atome.

AUFSTELLUNG DER BEWEGUNGSGLEICHUNGEN.

Die Schwingungen der wägbaren Atome sind schon oftmals analytisch behandelt worden, und es ist nicht meine Absicht, zu den schon vorhandenen Behandlungen dieses Gegenstandes eine neue hinzuzufügen; allein die Differenzialgleichungen der Bewegung eines Systems von wägbaren Atomen muss ich dennoch herleiten und aufstellen, theils um zu zeigen, wie diese aus dem Dynamidensystem hervorgehen, insbesondere aber, um den Unterschied zwischen Körper- und Aetherschwingungen klar hervorheben zu können, was bisher noch nicht geschehen ist, und was namentlich auch *Cauchy* nicht gethan hat.

Es ist kaum nothwendig, zu sagen, dass wir nur mässige, d. h. solche Erschütterungen betrachten werden, für welche man, wie schon in der Einleitung, Seite 25, auseinandergesetzt wurde, annehmen darf, dass Aetherschwingungen keine Körperschwingungen, und Körperschwingungen keine Aetherschwingungen hervorrufen.

Wir denken uns also, dass die Körperatome eines Dynamidensystems mit Elastizitätsaxen durch eine äussere Einwirkung in Bewegung gesetzt werden, und legen uns die Aufgabe vor, den Bewegungszustand der Körperatome nach Verlauf einer beliebigen Zeit zu bestimmen.

Die Voraussetzungen, welche wir dabei theils machen müssen, theils machen dürfen, sind folgende.

1. Da wir ein Dynamidensystem mit Elastizitätsaxen voraussetzen, so müssen wir nothwendig die Atome als kleine Körperchen von bestimmter, wenn auch unbekannter Gestalt betrachten, denn nur wenn die Atome axige Gestalt haben und nicht blose Punkte oder Kügelchen sind, kann im Gleichgewichtszustand eine ungleiche Elastizität

nach verschiedenen Richtungen vorhanden sein. *Cauchy* legt seinen Untersuchungen ein aus Körperpunkten bestehendes Medium zu Grunde, nimmt aber gleichwohl an, dass die Elastizität um jeden Punkt herum nach verschiedenen Richtungen verschieden sei. Dies ist ein Widerspruch, ist eine Unmöglichkeit, daher eine schwache Seite von *Cauchy's* Theorie.

2. Da die Masse der Aetheratome einer Hülle gegen die Masse des Kernes verschwindend klein ist, so kann diese Masse der Aetherhüllen als solche die Bewegung der Körperatome nicht merklich alteriren; wir dürfen also die Masse der Aetherhüllen ganz vernachlässigen.

3. Es ist nicht erlaubt, die Kräfte zu vernachlässigen, welche in den Aetheratomen ihren Sitz haben, denn diese Kräfte sind sehr energisch, obgleich die Masse der Aetheratome sehr klein ist. Wir müssen daher für die Kraft, mit welcher irgend eine Dynamide mit ihrem ganzen Kräftesystem auf die Masse eines Körperatoms einwirkt, die Funktion $m m_1 f(r)$ in Rechnung bringen, welche wir in Nr. 55 genauer bestimmt haben. Wollte man die Genauigkeit sehr weit treiben, so müsste man zu dem für $m m f(r)$ gefundenen Ausdruck noch ein Glied hinzufügen, welches von der Form der Körperatome abhinge und überdies noch mit der Richtung von r veränderlich wäre, denn wenn die Körperatome bestimmte Gestalten haben, richtet sich streng genommen die Wechselwirkung zweier Atome nicht nur nach der Entfernung r ihrer Schwerpunkte, sondern auch nach der Gestalt der Atome und nach ihrer Stellung gegen die Linie r.

Hiermit ist nun das Atomsystem, auf welchem die Körperschwingungen beruhen, charakterisirt, und, wie wir in der Folge sehen werden, von dem System, auf welchem die Lichtschwingungen beruhen, wesentlich verschieden.

Wir gehen nun zur Rechnung über.

Um die Position jedes Atoms angeben zu können, legen wir ein rechtwinkliges Coordinatensystem Ox Oy Oz zu Grund.

Es seien für den Gleichgewichtszustand x y z, für den zur Zeit t vorhandenen Bewegungszustand $x+\xi$ $y+v$ $z+\zeta$ die Coordinaten des Schwerpunktes eines Körperatoms m; ferner für den Gleichgewichtszustand $x+\Delta x$ $y+\Delta y$ $z+\Delta z$ und für den nach Verlauf der Zeit t vorhandenen Bewegungszustand $x+\xi+\Delta(x+\xi)$, $y+v+\Delta(y+v)$, $z+\zeta+\Delta(z+\zeta)$ die Coordinaten des Schwerpunktes eines zweiten Körperatoms m_1.

Im Gleichgewichtszustand sind die nach den Richtungen Ox Oy Oz zerlegten Kräfte, mit welchen das Atom m_1 gegen m_1 einwirkt:

$$-m m_1 f(r) \frac{\Delta x}{r} \qquad -m m_1 f(r) \frac{\Delta y}{r} \qquad -m m_1 f(r) \frac{\Delta z}{r}$$

Drei von den Bedingungen des Gleichgewichtes des Atoms m sind daher:

$$\left.\begin{aligned} S\, m\, m_1\, f(r)\, \frac{\Delta x}{r} &= o \\ S\, m\, m_1\, f(r)\, \frac{\Delta y}{r} &= o \\ S\, m\, m_1\, f(r)\, \frac{\Delta z}{r} &= o \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

Zur Zeit t sind dagegen die Kräfte, mit welchen das Atom m nach den positiven Richtungen der Axen Ox Oy Oz von allen anderen Dynamiden des Systems zur Bewegung angeregt wird:

$$- S\, m\, m_1\, f(r+\varrho)\, \frac{\Delta x + \Delta \xi}{r+\varrho} \qquad - S\, m\, m_1\, f(r+\varrho)\, \frac{\Delta y + \Delta v}{r+\varrho}$$

$$- S\, m\, m_1\, f(r+\varrho)\, \frac{\Delta z + \Delta \zeta}{r+\varrho}$$

wobei $r+\varrho$ die Entfernung der Schwerpunkte der Atome m und m_1 zur Zeit t bezeichnet. Zu dieser Zeit t sind ferner diese Kräfte:

$$2\, m\, \frac{d^2 \xi}{dt^2} \qquad 2\, m\, \frac{d^2 v}{dt^2} \qquad 2\, m\, \frac{d^2 \zeta}{dt^2} \quad ^{*)}$$

---

*) Ich muss hier bemerken, dass meine Differenzialgleichungen der Bewegung einer Masse von denen anderer Schriftsteller abweichen, weil ich die Masse M eines Körpers nicht durch den Quotienten aus dem Gewicht P des Körpers und der Beschleunigung g durch die Schwere, also nicht durch $\frac{P}{g}$, sondern durch $\frac{P}{2g}$ ausdrücke. Heisst also K eine in Kilogrammen ausgedrückte Kraft, welche auf einen Körper treibend einwirkt, dessen Gewicht P und dessen Masse M ist, so setze ich:

$$M = \frac{P}{2g} \qquad \frac{d^2 x}{dt^2} = g\, \frac{K}{P} = \frac{1}{2}\, \frac{K}{M}$$

Zu dieser Abweichung habe ich mich entschlossen, um für das Prinzip der lebendigen Kräfte eine einfache und naturgemässe Ausdrucksweise zu erhalten. Bezeichnet man durch V die Geschwindigkeit, die in einem Körper, dessen Gewicht P ist, eintritt, wenn auf denselben eine constante Kraft K durch einen Weg S einwirkt, so ist nach meiner Bezeichnungsart:

$$K\, s = \frac{P}{2g}\, V^2 = P\, \frac{V^2}{2g} = M\, V^2$$

Ich nenne nun ebenfalls das Produkt $M V^2$ aus Masse ($M = \frac{P}{2g}$ wie ich sie messe) in das Quadrat der Geschwindigkeit: lebendige Kraft, und das Produkt $K s$ aus Kraft und Weg: Arbeit oder Wirkung; kann aber nun sagen, dass Arbeit und lebendige Kraft äquivalente Dinge sind.

Die Differenzialgleichungen der Bewegung des Atoms m sind demnach:

$$\left.\begin{aligned}
2\frac{d^2\xi}{dt^2} + S\,m_1\,f(r+\varrho)\,\frac{\varDelta x + \varDelta\xi}{r+\varrho} &= 0\\
2\frac{d^2 v}{dt^2} + S\,m_1\,f(r+\varrho)\,\frac{\varDelta y + \varDelta v}{r+\varrho} &= 0\\
2\frac{d^2\zeta}{dt^2} + S\,m_1\,f(r+\varrho)\,\frac{\varDelta z + \varDelta\zeta}{r+\varrho} &= 0
\end{aligned}\right\} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (2)$$

Da wir einen stabilen Gleichgewichtszustand und eine sehr schwache Erschütterung voraussetzen, so werden wir keinen merklichen Fehler begehen, wenn wir $\xi\ v\ \zeta$ und $\varDelta\xi\ \varDelta v\ \varDelta\zeta$ als sehr kleine Grössen ansehen, und uns erlauben, in allen folgenden Rechnungen diejenigen Glieder zu vernachlässigen, welche Produkte aus Potenzen dieser Grössen enthalten. Nun ist:

$$r^2 = \varDelta x^2 + \varDelta y^2 + \varDelta z^2$$

$$(r+\varrho)^2 = (\varDelta x + \varDelta\xi)^2 + (\varDelta y + \varDelta v)^2 + (\varDelta z + \varDelta\zeta)^2$$

Entwickelt man diese Potenzen, vernachlässigt die Quadrate von $\varDelta\xi\ \varDelta v\ \varDelta\zeta$ und berücksichtigt den Werth von r^2, so folgt:

$$\varrho = \frac{1}{r}\,(\varDelta x\,\varDelta\xi + \varDelta y\,\varDelta v + \varDelta z\,\varDelta\zeta) \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (3)$$

Nach dem Taylor'schen Satz ist ferner, wenn man die Glieder, welche von den zweiten und den höheren Potenzen von ϱ abhängen, vernachlässigt:

$$\frac{f(r+\varrho)}{r+\varrho} = \frac{f(r)}{r} + \frac{d\left(\frac{1}{r}\,f(r)\right)}{dr}\,\varrho \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (4)$$

Führt man diesen Werth von $\frac{f(r+\varrho)}{r+\varrho}$ in die Gleichungen (2) ein, so werden dieselben:

$$\left.\begin{aligned}
2\frac{d^2\xi}{dt^2} + S\,m_1\left[\frac{f(r)}{r} + \frac{d\left(\frac{1}{r}\,f(r)\right)}{dr}\,\varrho\right](\varDelta x + \varDelta\xi) &= 0\\
2\frac{d^2 v}{dt^2} + S\,m_1\left[\frac{f(r)}{r} + \frac{d\left(\frac{1}{r}\,f(r)\right)}{dr}\,\varrho\right](\varDelta y + \varDelta v) &= 0\\
2\frac{d^2\zeta}{dt^2} + S\,m_1\left[\frac{f(r)}{r} + \frac{d\left(\frac{1}{r}\,f(r)\right)}{dr}\,\varrho\right](\varDelta z + \varDelta\zeta) &= 0
\end{aligned}\right\} \quad . \; . \; . \; . \quad (5)$$

Berücksichtigt man die Gleichgewichtsgleichungen (1) und vernachlässigt die Glieder, welche mit $\varrho \varDelta \xi \quad \varrho \varDelta v \quad \varrho \varDelta \zeta$ multiplizirt wären, so findet man:

$$\left.\begin{aligned}
2\frac{d^2\xi}{dt^2} + S\, m_1 \left[\frac{f(r)}{r}\varDelta\xi + \frac{d\left(\frac{1}{r}f(r)\right)}{dr}\varrho\varDelta x\right] = 0 \\
2\frac{d^2 v}{dt^2} + S\, m_1 \left[\frac{f(r)}{r}\varDelta v + \frac{d\left(\frac{1}{r}f(r)\right)}{dr}\varrho\varDelta y\right] = 0 \\
2\frac{d^2\zeta}{dt^2} + S\, m_1 \left[\frac{f(r)}{r}\varDelta\zeta + \frac{d\left(\frac{1}{r}f(r)\right)}{dr}\varrho\varDelta z\right] = 0
\end{aligned}\right\} \cdots\cdots (6)$$

Führt man endlich für ϱ den Werth ein, welchen die Gleichung (3) darbietet, und setzt zur Abkürzung:

$$\left.\begin{aligned}
\mathfrak{A}_2 = \frac{m_1}{r}\left[f(r) + \frac{d\left(\frac{1}{r}f(r)\right)}{dr}\varDelta x^2\right] \\
\mathfrak{B}_2 = \frac{m_1}{r}\left[f(r) + \frac{d\left(\frac{1}{r}f(r)\right)}{dr}\varDelta y^2\right] \\
\mathfrak{C}_2 = \frac{m_1}{r}\left[f(r) + \frac{d\left(\frac{1}{r}f(r)\right)}{dr}\varDelta z^2\right]
\end{aligned}\right\} \cdots\cdots (7)$$

$$\left.\begin{aligned}
\mathfrak{D}_2 = \frac{m_1}{r}\frac{d\left(\frac{1}{r}f(r)\right)}{dr}\varDelta y\,\varDelta z \\
\mathfrak{E}_2 = \frac{m_1}{r}\frac{d\left(\frac{1}{r}f(r)\right)}{dr}\varDelta z\,\varDelta x \\
\mathfrak{F}_2 = \frac{m_1}{r}\frac{d\left(\frac{1}{r}f(r)\right)}{dr}\varDelta x\,\varDelta y
\end{aligned}\right\} \cdots\cdots (8)$$

so werden die Gleichungen (6):

$$\left.\begin{aligned}
2\frac{d^2\xi}{dt^2} + S(\mathfrak{A}_2\varDelta\xi + \mathfrak{F}_2\varDelta v + \mathfrak{E}_2\varDelta\zeta) = 0 \\
2\frac{d^2 v}{dt^2} + S(\mathfrak{F}_2\varDelta\xi + \mathfrak{B}_2\varDelta v + \mathfrak{D}_2\varDelta\zeta) = 0 \\
2\frac{d^2\zeta}{dt^2} + S(\mathfrak{E}_2\varDelta\xi + \mathfrak{D}_2\varDelta v + \mathfrak{C}_2\varDelta\zeta) = 0
\end{aligned}\right\} \cdots\cdots (9)$$

Dies sind also die Differenzialgleichungen der Bewegung der Körperatome. Sie sind der Form nach identisch mit denjenigen, welche *Cauchy* für ein System von Körperpunkten aufgefunden, aber auch auf Aetherschwingungen angewendet hat, was, wie wir in der Folge sehen werden, ein Missbrauch genannt werden muss.

Ich werde mich mit der Integration dieser Gleichungen aus zwei Gründen nicht befassen; 1) könnte ich, wenn ich diese Integration bewerkstelligen wollte, nichts anderes thun, als dem wohlbekannten, von *Cauchy* gelehrten Weg nachgehen; 2) werde ich in der Folge genöthigt sein, die Differenzialgleichungen, welche ich für die Bewegung des Aethers aufstelle, zu integriren, und die Gleichungen (9) sind, wie sich zeigen wird, der Form nach nur spezielle Fälle von den Aethergleichungen; die Integration dieser letzteren schliesst also auch die Integration der ersteren in sich.

Der Zweck, weshalb ich hier diese Gleichungen für die Bewegung der Körperatome aufgestellt habe, ist, wie gesagt, nur der, um den Unterschied zwischen Aether- und Körperschwingungen klar hervorheben zu können.

Ich will nun noch bemerken, dass die Grössen $\mathfrak{A}_2$ $\mathfrak{B}_2$ $\mathfrak{C}_2$ $\mathfrak{D}_2$ $\mathfrak{E}_2$ $\mathfrak{F}_2$ mit dem Wachsen von r äusserst rasch abnehmen, weil sie theilweise von gegenseitigen Anziehungen der Körperatome abhängen, Anziehungen, welche wahrscheinlich viel rascher abnehmen, als die Abstossungen der Aetheratome.

Um den Gebrauch dieser Bewegungsgleichungen und der im vorigen Abschnitt aufgestellten Gleichgewichtsgleichungen zu erklären, will ich die Schwingungen eines linearen Systems (Saite oder Kette) und die Schwingungen eines ebenen Systems (Membrane) berechnen, werde mich jedoch in die Interpretation der Resultate nicht einlassen, weil es mir nur darum zu thun ist, zu zeigen, wie man und dass man zu richtigen Resultaten gelangt.

SCHWINGUNGEN EINES LINEAREN SYSTEMS ODER EINER VOLLKOMMEN BIEGSAMEN KETTE.

Denken wir uns, eine geradlinige Reihe von Dynamiden werde zuerst ähnlich wie eine Saite durch Kräfte, welche die letzten Dynamiden der Reihe anfassen, gespannt, hierauf aus ihrer gespannten Gleichgewichtslage gebracht und sich selbst überlassen, so werden gewisse Schwingungen entstehen, die wir berechnen wollen.

Lassen wir die Axe der $o\,x$ mit der Dynamidenreihe zusammenfallen, so ist für dieselbe $\Delta y = \Delta z = o$, daher sind die Gleichungen der Bewegung vermöge (9):

$$\left.\begin{aligned}
o &= 2\,\frac{d^2\xi}{dt^2} + S\,\frac{m_1}{r}\left[f(r) + \frac{d\left(\frac{1}{r}\,f(r)\right)}{dr}\,\Delta x^2\right]\Delta\xi \\
o &= 2\,\frac{d^2 v}{dt^2} + S\,\frac{m_1}{r}\,f(r)\,\Delta v \\
o &= 2\,\frac{d^2\zeta}{dt^2} + S\,\frac{m_1}{r}\,f(r)\,\Delta\zeta
\end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (1)$$