Das Dynamiden-System

Redtenbacher, Ferdinand

Mannheim, 1857

Wirkungsgrösse, welche einer Zusammendrückung oder Ausdehnung eines rechtwinkligen Prismas entspricht

urn:nbn:de:bsz:31-266496

Für ein nach allen Richtungen gleich elastisches Medium ist $\mathfrak{A} = \mathfrak{B}$, und dann wird

$$W = -\frac{1}{2}\frac{\Theta^2}{l^2}\Sigma(m y_0^2 + m z_0^2)\mathfrak{A} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (7)$$

Allein es ist $\Sigma m (y_0^2 + z_0^2)$ das als Masse ausgedrückte Trägheitsmoment des Cylinders in Bezug auf seine geometrische Axe, oder es ist:

$$\Sigma m (y_0^2 + z_0^2) = \frac{\pi}{4g} s_0 \, l \, A^4$$

wobei s_0 das Gewicht der Kubikeinheit des Materials bezeichnet, aus welchem der Cylinder besteht, l die Länge, A den Halbmesser des Cylinders. Wir erhalten daher:

$$W = -\frac{\pi}{8g}\mathfrak{A}\frac{\Theta^2 A^4}{l} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (8)$$

Für eine schwache Drehung aus dem natürlichen Zustand in einen erzwungenen um einen Torsionswinkel Θ ist aber eine äussere Wirkung $\frac{1}{2} P R \Theta$ nothwendig. Wir erhalten daher:

$$\frac{1}{2} P R \Theta + \left(-\frac{\pi}{8g}\mathfrak{A}\frac{\Theta^2 \mathfrak{A}^4}{l}\right) = 0$$

und hieraus folgt:

$$\Theta = \frac{4g}{\pi\mathfrak{A}}\frac{P R l}{A^4}$$

Die Constante $\frac{\pi\mathfrak{A}}{2g}$ nennt man den Modulus der Elastizität des Materials für Torsion; bezeichnet man denselben mit G, setzt also:

$$G = \frac{\pi\mathfrak{A}}{4g}$$

so wird schliesslich:

$$\Theta = \frac{P R l}{G A^4} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (9)$$

WIRKUNGSGRÖSSE, WELCHE EINER ZUSAMMENDRÜCKUNG ODER AUSDEHNUNG EINES RECHTWINKLIGEN PRISMAS ENTSPRICHT.

Nehmen wir an, ein rechtwinkliges Prisma werde nach den Richtungen seiner drei Axen gleichförmig ausgedehnt, und es seien die linearen Ausdehnungen nach den drei Axen $O x$ $O y$ $O z$, beziehungsweise α β γ, dann ist:

$$\varDelta\xi = \alpha\,\varDelta x_0$$

$$\varDelta v = \beta\,\varDelta y_0$$

$$\varDelta\zeta = \gamma\,\varDelta z_0$$

demnach:

$$\varDelta x_0\,\varDelta\xi + \varDelta y_0\,\varDelta v + \varDelta z_0\,\varDelta\zeta = \alpha\,\varDelta x_0^2 + \beta\,\varDelta y_0^2 + \gamma\,\varDelta z_0^2$$

und folglich wird:

$$W = \frac{1}{2}\,\Sigma m\,S\,m_1 \left\{ \begin{array}{l} \frac{f(r_0)}{r_0}\,(\alpha\varDelta x_0^2 + \beta\,\varDelta y_0^2 + \gamma\,\varDelta z_0^2) + \\ + \frac{1}{2}\,\frac{d\,f(r_0)}{d\,r_0}\,\frac{1}{r_0^2}\,(\alpha\,\varDelta x_0^2 + \beta\,\varDelta y_0^2 + \gamma\,\varDelta z_0^2)^2 \end{array} \right\}$$

oder:

$$W = \frac{1}{2}\,\Sigma m \left\{ \begin{array}{l} \alpha\,S\,m_1\,\frac{f(r_0)}{r_0}\,\varDelta x_0^2 + \beta\,S\,m_1\,\frac{f(r_0)}{r_0}\,\varDelta y_0^2 + \gamma\,S\,m_1\,\frac{f(r_0)}{r_0}\,\varDelta z_0^2 \\ + \alpha^2\,S\,\frac{m_1}{2}\,\frac{d\,f(r_0)}{d\,r_0}\,\frac{\varDelta x_0^4}{r_0^2} + \beta^2\,S\,\frac{m_1}{2}\,\frac{d\,f(r_0)}{d\,r_0}\,\frac{\varDelta y_0^4}{r_0^2} + \gamma^2\,S\,\frac{m_1}{2}\,\frac{d\,f(r_0)}{d\,r_0}\,\frac{\varDelta z_0^4}{r_0^2} \\ + 2\,\alpha\beta\,S\,\frac{m_1}{2}\,\frac{d\,f(r_0)}{d\,r_0}\,\frac{\varDelta x_0^2\,\varDelta y_0^2}{r_0^2} + 2\,\alpha\gamma\,S\,\frac{m_1}{2}\,\frac{d\,f(r_0)}{d\,r_0}\,\frac{\varDelta x_0^2\,\varDelta z_0^2}{r_0^2} \\ + 2\,\beta\gamma\,S\,\frac{m_1}{2}\,\frac{d\,f(r_0)}{d\,r_0}\,\frac{\varDelta y_0^2\,\varDelta z_0^2}{r_0^2} \end{array} \right\}$$

Berücksichtigt man, dass wegen Gleichungen (31), Seite 81

$$S\,m_1\,\frac{f(r_0)}{r_0}\,\varDelta x_0^2 = 0 \qquad S\,m_1\,\frac{f(r_0)}{r_0}\,\varDelta y_0^2 = 0 \qquad S\,m_1\,\frac{f(r_0)}{r_0}\,\varDelta z_0^2 = 0$$

ist, setzt zur Abkürzung:

$$-\,S\,\frac{m_1}{2}\,\frac{d\,f(r_0)}{d\,r_0}\,\frac{\varDelta x_0^4}{r_0^2} = \mathfrak{L}$$

$$-\,S\,\frac{m_1}{2}\,\frac{d\,f(r_0)}{d\,r_0}\,\frac{\varDelta y_0^4}{r_0^2} = \mathfrak{M}$$

$$-\,S\,\frac{m_1}{2}\,\frac{d\,f(r_0)}{d\,r_0}\,\frac{\varDelta z_0^4}{r_0^2} = \mathfrak{N}$$

$$- \mathrm{s} \frac{m_1}{2} \frac{d f(r_0)}{d r_0} \frac{\Delta x_0^2 \, \Delta y_0^2}{r_0^3} = \mathfrak{P}$$

$$- \mathrm{s} \frac{m_1}{2} \frac{d f(r_0)}{d r_0} \frac{\Delta y_0^2 \, \Delta z_0^2}{r_0^3} = \mathfrak{Q}$$

$$- \mathrm{s} \frac{m_1}{2} \frac{d f(r_0)}{d r_0} \frac{\Delta z_0^2 \, \Delta x_0^2}{r_0^3} = \mathfrak{R}$$

und berücksichtigt ferner noch, dass die Summen s für alle Punkte des Körpers einerlei Werth haben, so findet man:

$$W = - \frac{1}{2} M (\alpha^2 \mathfrak{L} + \beta^2 \mathfrak{M} + \gamma^2 \mathfrak{N} + 2 \alpha \beta \mathfrak{P} + 2 \alpha \gamma \mathfrak{R} + 2 \beta \gamma \mathfrak{Q})$$

Allein für eine schwache, aber gleichförmige Ausdehnung eines rechtwinkligen Prismas nach seinen drei Axen ist die Wirkung der äusseren Kräfte, welche diese Ausdehnungen hervorbringen können:

$$\frac{1}{2} \left[\mathfrak{X} (b\,c)\, \alpha\, a + \mathfrak{Y} (a\,c)\, \beta\, b + \mathfrak{Z} (a\,b)\, \gamma\, c \right] = \frac{1}{2} V (\alpha \mathfrak{X} + \beta \mathfrak{Y} + \gamma \mathfrak{Z})$$

wobei V das Volumen des Körpers bedeutet. Wir erhalten daher:

$$\frac{1}{2} V (\alpha \mathfrak{X} + \beta \mathfrak{Y} + \gamma \mathfrak{Z}) =$$

$$+ \frac{1}{2} M (\alpha^2 \mathfrak{L} + \beta^2 \mathfrak{M} + \gamma^2 \mathfrak{N} + 2 \alpha \beta \mathfrak{P} + 2 \alpha \gamma \mathfrak{R} + 2 \beta \gamma \mathfrak{Q})$$

oder weil $\frac{M}{V} = \frac{s_0}{2 g}$ ist:

$$\alpha \mathfrak{X} + \beta \mathfrak{Y} + \gamma \mathfrak{Z} = \frac{s_0}{2 g} (\alpha^2 \mathfrak{L} + \beta^2 \mathfrak{M} + \gamma^2 \mathfrak{N} + 2 \alpha \beta \mathfrak{P} + 2 \alpha \gamma \mathfrak{R} + 2 \beta \gamma \mathfrak{Q})$$

Ist die Elastizität des Stoffes nach allen Richtungen gleich gross, so ist:

$$\mathfrak{P} = \mathfrak{Q} = \mathfrak{R}$$

$$\mathfrak{L} = \mathfrak{M} = \mathfrak{N} = 3 \mathfrak{R}$$

und dann wird:

$$\alpha \mathfrak{X} + \beta \mathfrak{Y} + \gamma \mathfrak{Z} =$$

$$= \frac{s_0}{2\,g} \left\{ \alpha \left[\alpha + \frac{1}{3} (\beta + \gamma) \right] + \beta \left[\beta + \frac{1}{3} (\alpha + \gamma) \right] + \gamma \left[\gamma + \frac{1}{3} (\alpha + \beta) \right] \right\} \mathfrak{L}$$

Diese Gleichung folgt auch aus den Gleichungen (41), Seite 86, wenn man dieselben mit α β γ multiplizirt und dann die Summe nimmt.