Das Dynamiden-System

Redtenbacher, Ferdinand

Mannheim, 1857

Drehung eines Stabes

urn:nbn:de:bsz:31-266496

Demnach wird :

$$\int \mathrm{m\,m_1\,f}\,(r_0 + \varrho)\,d\,\varrho = \mathrm{m\,m_1} \int \left[f\,(r_0) + \frac{d\,f\,(r_0)}{d\,r_0}\,\varrho \right] d\,\varrho$$

$$= \mathrm{m\,m_1} \left[f\,(r_0)\,\varrho + \frac{1}{2}\,\frac{d\,f\,(r_0)}{d\,r_0}\,\varrho^2 \right]$$

und hiermit ist die Arbeit berechnet, um zwei Atome aus der Entfernung r_0, welche sie im natürlichen Zustand haben, in die Entfernung $r_0 + \varrho$ zu bringen, und es ist nun ferner :

$$W = \frac{1}{2}\,\Sigma\,\mathrm{m}\,S\,\mathrm{m_1} \left[f\,(r_0)\,\varrho + \frac{1}{2}\,\frac{d\,f\,(r_0)}{d\,r_0}\,\varrho^2 \right] \quad \ldots\ldots \quad (1)$$

die totale Arbeit, welche durch die Distanzänderung aller Atome entwickelt wird.

Hierbei bezieht sich das Zeichen S auf die Aenderung der Entfernungen aller Atome B gegen das Atom A. Das Zeichen Σ hingegen bezieht sich überhaupt auf alle Punkte A des Körpers.

Wegen der Kleinheit von ϱ können wir auch hier wiederum schreiben :

$$\varrho = \frac{1}{r_0}\,(\Delta x_0\,\Delta \xi + \Delta y_0\,\Delta v + \Delta z_0\,\Delta \zeta) \quad \ldots\ldots\ldots \quad (2)$$

und wenn wir diesen Werth in (1) einführen, finden wir :

$$W = \left\{ \begin{aligned} & \frac{1}{2}\,\Sigma\,\mathrm{m}\,S\,\mathrm{m_1} \Big[f\,(r_0)\,\frac{1}{r_0}\,(\Delta x_0\,\Delta \xi + \Delta y_0\,\Delta v + \Delta z_0\,\Delta \zeta) + \\ & \quad + \frac{1}{2}\,\frac{d\,f\,(r_0)}{d\,r_0}\,\frac{1}{r_0^2}\,(\Delta x_0\,\Delta \xi + \Delta y_0\,\Delta v + \Delta z_0\,\Delta \zeta)^2 \Big] \end{aligned} \right\} \quad \ldots \quad (3)$$

Dieser Ausdruck liesse sich noch weiter analytisch ausbilden, er kann jedoch auch in der Form (3) ganz gut gebraucht werden, wenn die durch die Deformirung entstehenden Verschiebungen der Punkte als gegebene Grössen angesehen werden dürfen.

DREHUNG EINES STABES.

Wir wollen diesen Ausdruck benützen, um die Arbeit zu berechnen, welche einer Verdrehung eines cylindrischen Stabes entspricht.

Wenn wir annehmen : 1) dass bei einer Drehung des Stabes alle Atome, welche im ursprünglichen Zustand in einem und demselben Querschnitt lagen, durch die Drehung ihre relative Lage gegen einander nicht ändern; 2) dass alle Atome, welche im natürlichen Zustand eine zur Axe des Stabes parallele Faser bildeten, durch die Drehung des Stabes die Gestalt einer Schraubenlinie annehmen; 3) dass die Axe der x in die geometrische Axe des Cylinders gelegt wird, so erhalten wir für die Verschiebung $\xi\ \upsilon\ \zeta$ irgend eines Punktes, dessen Coordinaten im natürlichen Zustand $x_0\ y_0\ z_0$ sind, folgende Werthe:

$$\left.\begin{aligned} \xi &= 0 \\ \upsilon &= -\frac{\Theta}{l} x_0 z_0 \\ \zeta &= +\frac{\Theta}{l} x_0 y_0 \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (4)$$

wobei l die Länge des Cylinders und Θ den Winkel bezeichnet, um welchen die Endflächen des Stabes gegen einander verdreht sind.

Aus (4) folgt:

$$\Delta\xi = 0$$

$$\Delta\upsilon = -\frac{\Theta}{l}\left[(x_0 + \Delta x_0)(z_0 + \Delta z_0) - x_0 z_0\right]$$

$$\Delta\zeta = +\frac{\Theta}{l}\left[(x_0 + \Delta x_0)(y_0 + \Delta y_0) - x_0 y_0\right]$$

oder:

$$\Delta\xi = 0$$

$$\Delta\upsilon = -\frac{\Theta}{l}(x_0 \Delta z_0 + z_0 \Delta x_0 + \Delta x_0 \Delta z_0)$$

$$\Delta\zeta = +\frac{\Theta}{l}(x_0 \Delta y_0 + y_0 \Delta x_0 + \Delta x_0 \Delta y_0)$$

und man findet nun ferner:

$$\Delta x_0 \Delta\xi + \Delta y_0 \Delta\upsilon + \Delta z_0 \Delta\zeta = \frac{\Theta}{l}(y_0 \Delta x_0 \Delta z_0 - z_0 \Delta x_0 \Delta y_0)$$

Substituirt man diesen Ausdruck in (3) und berücksichtigt, dass $y_0\ z_0$ vor das Summenzeichen S, nicht aber vor das Summenzeichen Σ gesetzt werden dürfen, berücksichtig aber auch noch, dass alle Glieder der Summe S verschwinden, in welchen nur gerade Potenzen von $\Delta x_0\ \Delta y_0\ \Delta z_0$ vorkommen, so erhält man:

$$W = -\frac{1}{2}\frac{\Theta^2}{l^2}\Sigma(m\mathfrak{A}y_0^2 + m\mathfrak{B}z_0^2) \quad \ldots\ldots\ldots (5)$$

wobei zur Abkürzung gesetzt wurde:

$$\left.\begin{aligned} \mathfrak{A} &= -S\frac{m}{2}\frac{df(r_0)}{dr_0}\frac{\Delta x_0^2 \Delta z_0^2}{r_0^3} \\ \mathfrak{B} &= -S\frac{m}{2}\frac{df(r_0)}{dr_0}\frac{\Delta x_0^2 \Delta y_0^2}{r_0^3} \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots (6)$$

Für ein nach allen Richtungen gleich elastisches Medium ist $\mathfrak{A} = \mathfrak{B}$, und dann wird

$$W = -\frac{1}{2}\frac{\Theta^2}{l^2}\,\Sigma\,(m\,y_0^2 + m\,z_0^2)\,\mathfrak{A} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (7)$$

Allein es ist $\Sigma m\,(y_0^2 + z_0^2)$ das als Masse ausgedrückte Trägheitsmoment des Cylinders in Bezug auf seine geometrische Axe, oder es ist :

$$\Sigma m\,(y_0^2 + z_0^2) = \frac{\pi}{4g}\,s_0\,l\,A^4$$

wobei s_0 das Gewicht der Kubikeinheit des Materials bezeichnet, aus welchem der Cylinder besteht, l die Länge, A den Halbmesser des Cylinders. Wir erhalten daher :

$$W = -\frac{\pi}{8g}\,\mathfrak{A}\,\frac{\Theta^2 A^4}{l} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (8)$$

Für eine schwache Drehung aus dem natürlichen Zustand in einen erzwungenen um einen Torsionswinkel Θ ist aber eine äussere Wirkung $\frac{1}{2}\,P\,R\,\Theta$ nothwendig. Wir erhalten daher :

$$\frac{1}{2}\,P\,R\,\Theta + \left(-\frac{\pi}{8g}\,\mathfrak{A}\,\frac{\Theta^2 \mathfrak{A}^4}{l}\right) = 0$$

und hieraus folgt :

$$\Theta = \frac{4g}{\pi\mathfrak{A}}\,\frac{P\,R\,l}{A^4}$$

Die Constante $\frac{\pi\mathfrak{A}}{2g}$ nennt man den Modulus der Elastizität des Materials für Torsion; bezeichnet man denselben mit G, setzt also :

$$G = \frac{\pi\mathfrak{A}}{4g}$$

so wird schliesslich :

$$\Theta = \frac{P\,R\,l}{G\,A^4} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (9)$$

WIRKUNGSGRÖSSE, WELCHE EINER ZUSAMMENDRÜCKUNG ODER AUSDEHNUNG EINES RECHTWINKLIGEN PRISMAS ENTSPRICHT.

Nehmen wir an, ein rechtwinkliges Prisma werde nach den Richtungen seiner drei Axen gleichförmig ausgedehnt, und es seien die linearen Ausdehnungen nach den drei Axen $O\,x$ $O\,y$ $O\,z$, beziehungsweise α β γ, dann ist :