Das Dynamiden-System

Redtenbacher, Ferdinand

Mannheim, 1857

Wirkung, welche der Deformirung eines Körpers entspricht

urn:nbn:de:bsz:31-266496

Diese Ergebnisse (43) bis (46) unserer Rechnung stimmen mit den analogen von *Cauchy* und *Lamé* gefundenen überein, wollen aber mit den von *Wertheim* gefundenen Versuchsresultaten nicht genau harmoniren. Der Grund hievon liegt nach meiner Ansicht wahrscheinlich in einer ungenauen Berechnung der Doppelsummen

$$\Sigma\, m\, S\, (\ldots)$$

Die Summe S bezieht sich auf alle $\Delta x\ \Delta y\ \Delta z$, d. h. auf alle Punkte, die um einen gewissen Punkt $x\ y\ z$ herumgelagert sind; die Summe Σ dagegen überhaupt auf alle $x\ y\ z$, d. h. auf alle Punkte des Körpers. Nun haben wir angenommen, dass die Summe $S\,(\ldots)$ für jeden Punkt des Körpers ein und denselben Werth habe, und dies ist selbst bei einem isotropen Medium nur für die innern, nicht aber für die an der Oberfläche und in der Nähe derselben gelegenen Punkte richtig, denn jeder begränzte Körper hat, wie die Erfahrung beweist und wie auch aus unserer Theorie mit Nothwendigkeit folgt, so zu sagen ein Häutchen, in welchem eine andere Dichte stattfindet, als im Innern des Körpers. Es ist also bei der Berechnung jener Doppelsumme nicht erlaubt, $S\,(\ldots)$ für alle Punkte als constant zu betrachten und

$$\Sigma\, m\, S\, (\ldots) = M\, S\, (\ldots)$$

zu setzen.

WIRKUNG, WELCHE DER DEFORMIRUNG EINES KÖRPERS ENTSPRICHT.

Wir legen uns nun die Aufgabe vor, die Wirkungsgrösse oder Arbeitsgrösse zu bestimmen, welche einer Deformirung eines elastischen Körpers entspricht.

Es sei r_0 die Entfernung zweier Atome A und B im natürlichen Zustand des Körpers; $r_0 + \varrho$ die Entfernung der gleichen Atome in irgend einem Augenblick während der Deformirung; $d(r_0 + \varrho) = d\varrho$ die Zunahme der Entfernung der gleicheu Atome, während die Deformirung noch unendlich wenig weiter fortschreitet, so ist:

$$m\, m_1\, f(r_0 + \varrho)\, d\varrho$$

die Arbeit, welche der Distanzänderung der Atome A und B um $d\varrho$ entspricht, demnach

$$\int_0^{\varrho} m\, m_1\, f(r_0 + \varrho)\, d\varrho$$

die Arbeit, welche einer Distanzänderung ϱ entspricht.

Wenn wir überhaupt nur eine schwache Deformirung voraussetzen, ist ϱ gegen r_0 sehr klein; wir können daher nach dem *Taylor*'schen Satz schreiben:

$$f(r_0 + \varrho) = f(r_0) + \frac{d\, f(r_0)}{d\, r_0}\, \varrho$$

Demnach wird:

$$\int m\, m_1\, f(r_0 + \varrho)\, d\varrho = m\, m_1 \int \left[f(r_0) + \frac{d f(r_0)}{d r_0}\, \varrho \right] d\varrho$$

$$= m\, m_1 \left[f(r_0)\, \varrho + \frac{1}{2} \frac{d f(r_0)}{d r_0}\, \varrho^2 \right]$$

und hiermit ist die Arbeit berechnet, um zwei Atome aus der Entfernung r_0, welche sie im natürlichen Zustand haben, in die Entfernung $r_0 + \varrho$ zu bringen, und es ist nun ferner:

$$W = \frac{1}{2}\, \Sigma\, m\, S\, m_1 \left[f(r_0)\, \varrho + \frac{1}{2} \frac{d f(r_0)}{d r_0}\, \varrho^2 \right] \quad \ldots\ldots \quad (1)$$

die totale Arbeit, welche durch die Distanzänderung aller Atome entwickelt wird.

Hierbei bezieht sich das Zeichen S auf die Aenderung der Entfernungen aller Atome B gegen das Atom A. Das Zeichen Σ hingegen bezieht sich überhaupt auf alle Punkte A des Körpers.

Wegen der Kleinheit von ϱ können wir auch hier wiederum schreiben:

$$\varrho = \frac{1}{r_0} (\Delta x_0\, \Delta \xi + \Delta y_0\, \Delta v + \Delta z_0\, \Delta \zeta) \quad \ldots\ldots \quad (2)$$

und wenn wir diesen Werth in (1) einführen, finden wir:

$$W = \left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{2}\, \Sigma\, m\, S\, m_1 \left[f(r_0) \frac{1}{r_0} (\Delta x_0\, \Delta \xi + \Delta y_0\, \Delta v + \Delta z_0\, \Delta \zeta) + \right. \\ \left. \quad + \frac{1}{2} \frac{d f(r_0)}{d r_0} \frac{1}{r_0^2} (\Delta x_0\, \Delta \xi + \Delta y_0\, \Delta v + \Delta z_0\, \Delta \zeta)^2 \right] \end{array} \right\} \quad \ldots \quad (3)$$

Dieser Ausdruck liesse sich noch weiter analytisch ausbilden, er kann jedoch auch in der Form (3) ganz gut gebraucht werden, wenn die durch die Deformirung entstehenden Verschiebungen der Punkte als gegebene Grössen angesehen werden dürfen.

DREHUNG EINES STABES.

Wir wollen diesen Ausdruck benützen, um die Arbeit zu berechnen, welche einer Verdrehung eines cylindrischen Stabes entspricht.

Wenn wir annehmen: 1) dass bei einer Drehung des Stabes alle Atome, welche im ursprünglichen Zustand in einem und demselben Querschnitt lagen, durch die Drehung ihre relative Lage gegen einander nicht ändern; 2) dass alle Atome, welche im natürlichen Zustand eine zur Axe des Stabes parallele Faser bildeten, durch die Drehung des Stabes die Gestalt einer Schraubenlinie annehmen; 3) dass die Axe der x in die