Das Dynamiden-System

Redtenbacher, Ferdinand

Mannheim, 1857

Zusammendrückung eines parallelepipedischen Körpers

urn:nbn:de:bsz:31-266496

$$\left.\begin{aligned}
o &= \Sigma m\,(X y + X_2 y_2) + \Sigma m S \Big[(\mathfrak{H}\,\Delta y_0 + \mathfrak{K}\,\Delta y_0\,\Delta x_0^2)\,\Delta\xi + (\mathfrak{H}\,\Delta x_0 + \mathfrak{K}\,\Delta x_0\,\Delta y_0^2)\,\Delta v + \\
&\qquad + \mathfrak{K}\,\Delta x_0\,\Delta y_0\,\Delta z_0\,\Delta\zeta\Big] \\
o &= \Sigma m\,(Y z + Y_2 z_2) + \Sigma m S \Big[\mathfrak{K}\,\Delta x_0\,\Delta y_0\,\Delta z_0\,\Delta\xi + (\mathfrak{H}\,\Delta z_0 + \mathfrak{K}\,\Delta z_0\,\Delta y_0^2)\,\Delta v + \\
&\qquad + (\mathfrak{H}\,\Delta y_0 + \mathfrak{K}\,\Delta y_0\,\Delta z_0^2)\,\Delta\zeta\Big] \\
o &= \Sigma m\,(Z x + Z_2 x_2) + \Sigma m S \Big[(\mathfrak{H}\,\Delta z_0 + \mathfrak{K}\,\Delta z_0\,\Delta x_0^2)\,\Delta\xi + \mathfrak{K}\,\Delta x_0\,\Delta y_0\,\Delta z_0\,\Delta v + \\
&\qquad + (\mathfrak{H}\,\Delta x_0 + \mathfrak{K}\,\Delta x_0\,\Delta z_0^2)\,\Delta\zeta\Big]
\end{aligned}\right\} \quad (33)$$

Ausserdem bestehen auch noch die Gleichungen (15) und (16), nämlich:

$$\Sigma m\,(X + X_2) = o \qquad \Sigma m\,(Y + Y_2) = o \qquad \Sigma m\,(Z + Z_2) = o \quad .\;.\;(34)$$

$$\left.\begin{aligned}
\Sigma m\,(X y - Y x) + \Sigma m\,(X_2 y_2 - Y_2 x_2) &= o \\
\Sigma m\,(Y z - Z y) + \Sigma m\,(Y_2 z_2 - Z_2 y_2) &= o \\
\Sigma m\,(Z x - X z) + \Sigma m\,(Z_2 x_2 - X_2 z_2) &= o
\end{aligned}\right\} \;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\; (35)$$

Vermittelst dieser Gleichungen (32), (33), (34), (35) können zwar nicht alle, aber doch sehr viele das Gleichgewicht elastischer Körper betreffende Aufgaben gelöst werden.

Man kann sich in dieser Hinsicht zweierlei Hauptfragen stellen. Man kann entweder die natürliche Gestalt des Körpers und das deformirende Kräftesystem als gegeben betrachten und die Deformirung zu bestimmen suchen. In diesem Falle sind die Kräfte $X\,Y\,Z\,X_2\,Y_2\,Z_2$, so wie die Coordinaten $x_0\,y_0\,z_0$ gegeben, und sind die Coordinaten $\xi\,v\,\zeta$, so wie die Differenzen $\Delta\xi\;\Delta v\;\Delta\zeta$ zu suchen. In dieser Weise wird gewöhnlich bei analytischen Behandlungen die Frage gestellt; ihre Beantwortung führt aber unvermeidlich zu enormen Schwierigkeiten, weil die Verschiebungen $\xi\,v\,\zeta$ meistens äusserst complizirte Grössen sind. Man kann aber auch die Frage umkehren, indem man die Gestalt des Körpers und die Verschiebungen annimmt, die ja ganz beliebig sein können, dagegen das Kräftesystem zu bestimmen sucht, welches diese angenommenen Verschiebungen hervorzubringen vermag. Diese umgekehrte Fragestellung ist eigentlich diejenige, welche gewöhnlich bei technischen Aufgaben gestellt wird.

Um die Anwendung der erhaltenen Gleichungen zu zeigen, wollen wir einige Aufgaben lösen.

ZUSAMMENDRÜCKUNG EINES PARALLELEPIPEDISCHEN KÖRPERS.

Ein Körper habe im natürlichen Zustand die Gestalt eines Parallelepipeds. Das Material sei nicht nach allen Richtungen gleich leicht zusammendrückbar. Die Elastizitätsaxen seien den Kanten des Körpers parallel. Wir versetzen diesen Körper in einen andern Zustand, in welchem derselbe nach den Richtungen seiner Kanten gleichförmig zusammengedrückt ist, jedoch nach jeder Kantenrichtung in einem andern Maasse, und stellen uns die Frage, die Kräfte zu bestimmen, welche einen solchen Zustand herbeiführen können. In diesem Falle ist das Kräftesystem seiner Art nach leicht zu errathen. Wir müssen nämlich zunächst die auf die einzelnen Atome einwirkenden äusseren Kräfte $X m$ $Y m$ $Z m$ gleich Null setzen, und müssen ferner gegen die parallelen Flächen des Körpers gleichförmig vertheilte Pressungen von einer gewissen Intensität wirken lassen.

Legen wir das Coordinatensystem $O x$ $O y$ $O z$ so, dass der Anfangspunkt der Coordinaten mit dem Mittelpunkt einer Fläche des Parallelepipeds und dass die Axe $O x$ mit der geometrischen Axe der Gestalt des Körpers zusammenfällt, dass ferner die Axen $O y$ und $O z$ mit den beiden andern Kanten parallel werden, und nennen wir α β γ die linearen Verkürzungen des Parallelepipedes nach den Richtungen der Axen $O x$ $O y$ $O z$, dann ist offenbar zu setzen:

$$\left.\begin{aligned} \Delta \xi &= -\alpha\, \Delta x_0 \\ \Delta \upsilon &= -\beta\, \Delta y_0 \\ \Delta \zeta &= -\gamma\, \Delta z_0 \end{aligned}\right| \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (36)$$

Ferner:

$$X = Y = Z = o$$

Nennen wir ferner a b c die den Axen $O x$ $O y$ $O z$ parallelen Seiten des Körpers, $\mathfrak{X}$ $\mathfrak{Y}$ $\mathfrak{Z}$ die Pressungen, welche gegen jede Flächeneinheit der Begränzungsflächen $b c$ $a c$ $a b$ des Körpers wirken müssen, um die vorgeschriebenen Zusammenpressungen zu bewirken, so hat man:

$$\Sigma m\, (X x + X_2 x_2) = -a b c\, \mathfrak{X}$$

$$\Sigma m\, (Y y + Y_2 y_2) = -a b c\, \mathfrak{Y}$$

$$\Sigma m\, (Z z + Z_2 z_2) = -a b c\, \mathfrak{Z}$$

Die Gleichungen (32) werden demnach in diesem Falle:

$$+ a b c\, \mathfrak{X} = -\Sigma m S \left[(2\, \mathfrak{H}\, \Delta x_0 + \mathfrak{K}\, \Delta x_0^3)\, \alpha\, \Delta x_0 + \mathfrak{K}\, \Delta x_0^2\, \Delta y_0^2\, \beta + \mathfrak{K}\, \Delta x_0^2\, \Delta z_0^2\, \gamma \right]$$

$$+ a b c\, \mathfrak{Y} = -\Sigma m S \left[(2\, \mathfrak{H}\, \Delta y_0 + \mathfrak{K}\, \Delta y_0^3)\, \beta\, \Delta y_0 + \mathfrak{K}\, \Delta x_0^2\, \Delta y_0^2\, \alpha + \mathfrak{K}\, \Delta y_0^2\, \Delta z_0^2\, \gamma \right]$$

$$+ a b c\, \mathfrak{Z} = -\Sigma m S \left[(2\, \mathfrak{H}\, \Delta z_0 + \mathfrak{K}\, \Delta z_0^3)\, \gamma\, \Delta z_0 + \mathfrak{K}\, \Delta z_0^2\, \Delta y_0^2\, \beta + \mathfrak{K}\, \Delta z_0^2\, \Delta x_0^2\, \alpha \right]$$

Allein weil bei der vorausgesetzten Verschiebung der Atome im erzwungenen Gleichgewichtszustand die Gruppirungsweise der Atome um jedes Atom herum ganz die gleiche ist, so haben die Summen S für alle Punkte den gleichen Werth; man erhält daher die durch Σ angedeuteten Summen, wenn man die Masse m jedes Atoms mit der gleichen Summe S multiplizirt und alles addirt; und folglich kann man schreiben:

$$\left.\begin{aligned} +\,\mathrm{abc}\,\mathfrak{X} &= -\,\mathrm{M}\,\mathrm{S}\left[(2\,\mathfrak{H}\,\varDelta x_0^2 + \mathfrak{K}\,\varDelta x_0^4)\,\alpha + \mathfrak{K}\,\varDelta x_0^2\,\varDelta y_0^2\,\beta + \mathfrak{K}\,\varDelta x_0^2\,\varDelta z_0^2\,\gamma\right] \\ +\,\mathrm{abc}\,\mathfrak{Y} &= -\,\mathrm{M}\,\mathrm{S}\left[\mathfrak{K}\,\varDelta x_0^2\,\varDelta y_0^2\,\alpha + (2\,\mathfrak{H}\,\varDelta y_0^2 + \mathfrak{K}\,\varDelta y_0^4)\,\beta + \mathfrak{K}\,\varDelta y_0^2\,\varDelta z_0^2\,\gamma\right] \\ +\,\mathrm{abc}\,\mathfrak{Z} &= -\,\mathrm{M}\,\mathrm{S}\left[\mathfrak{K}\,\varDelta x_0^2\,\varDelta z_0^2\,\alpha + \mathfrak{K}\,\varDelta y_0^2\,\varDelta z_0^2\,\beta + (2\,\mathfrak{H}\,\varDelta z_0^2 + \mathfrak{K}\,\varDelta z_0^4)\,\gamma\right] \end{aligned}\right\} \quad . \quad (37)$$

wobei M die Masse des Körpers bezeichnet.

Berücksichtigt man, dass im natürlichen Gleichgewichtszustand wegen Gleichung (31)

$$\mathrm{M}\,\mathrm{S}\,\mathfrak{H}\,\varDelta x_0^2 = 0 \qquad \mathrm{M}\,\mathrm{S}\,\mathfrak{H}\,\varDelta y_0^2 = 0 \qquad \mathrm{M}\,\mathrm{S}\,\mathfrak{H}\,\varDelta z_0^2 = 0$$

ist, setzt zur Abkürzung :

$$\left.\begin{aligned} \mathrm{S}\,\mathfrak{K}\,\varDelta x_0^4 &= \mathrm{S}\,\frac{m_1}{2}\,\frac{1}{r_0}\,\frac{d\left(\frac{1}{r_0}\,f(r_0)\right)}{d\,r_0}\,\varDelta x_0^4 = -\,\mathfrak{L} \\ \mathrm{S}\,\mathfrak{K}\,\varDelta y_0^4 &= \mathrm{S}\,\frac{m_1}{2}\,\frac{1}{r_0}\,\frac{d\left(\frac{1}{r_0}\,f(r_0)\right)}{d\,r_0}\,\varDelta y_0^4 = -\,\mathfrak{M} \\ \mathrm{S}\,\mathfrak{K}\,\varDelta z_0^4 &= \mathrm{S}\,\frac{m_1}{2}\,\frac{1}{r_0}\,\frac{d\left(\frac{1}{r_0}\,f(r_0)\right)}{d\,r_0}\,\varDelta z_0^4 = -\,\mathfrak{N} \\ \mathrm{S}\,\mathfrak{K}\,\varDelta x_0^2\,\varDelta y_0^2 &= \mathrm{S}\,\frac{m_1}{2}\,\frac{1}{r_0}\,\frac{d\left(\frac{1}{r^0}\,f(r_0)\right)}{d\,r_0}\,\varDelta x_0^2\,\varDelta y_0^2 = -\,\mathfrak{P} \\ \mathrm{S}\,\mathfrak{K}\,\varDelta y_0^2\,\varDelta z_0^2 &= \mathrm{S}\,\frac{m_1}{2}\,\frac{1}{r_0}\,\frac{d\left(\frac{1}{r_0}\,f(r_0)\right)}{d\,r_0}\,\varDelta y_0^2\,\varDelta z_0^2 = -\,\mathfrak{Q} \\ \mathrm{S}\,\mathfrak{K}\,\varDelta z_0^2\,\varDelta x_0^2 &= \mathrm{S}\,\frac{m_1}{2}\,\frac{1}{r_0}\,\frac{d\left(\frac{1}{r_0}\,f(r_0)\right)}{d\,r_0}\,\varDelta z_0^2\,\varDelta x_0^2 = -\,\mathfrak{R} \end{aligned}\right\} \quad . \; . \; . \quad (38)$$

und berücksichtigt noch, dass $\frac{M}{abc} = \frac{s_0}{2g}$ ist, wobei s_0 das spezifische Gewicht des Körpers im natürlichen Zustand bezeichnet, so findet man aus (37) :

$$\left.\begin{aligned} \mathfrak{X} &= \frac{s_0}{2g}\,(\alpha\,\mathfrak{L} + \beta\,\mathfrak{P} + \gamma\,\mathfrak{R}) \\ \mathfrak{Y} &= \frac{s_0}{2g}\,(\alpha\,\mathfrak{P} + \beta\,\mathfrak{M} + \gamma\,\mathfrak{Q}) \\ \mathfrak{Z} &= \frac{s_0}{2g}\,(\alpha\,\mathfrak{R} + \beta\,\mathfrak{Q} + \gamma\,\mathfrak{N}) \end{aligned}\right\} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (39)$$

Dies sind endlich die Intensitäten der Pressungen gegen die Flächen des Parallelepipeds, durch welche nach den Richtungen der Axen $0x$ $0y$ $0z$ die linearen Zusammendrückungen α β γ hervorgebracht werden.

Diese Ausdrücke werden für eine isotrope Gruppirung der Atome sehr einfach. Es ist nämlich in diesem Falle :

$$\left.\begin{array}{c} \mathfrak{P} = \mathfrak{Q} = \mathfrak{R} \\ \mathfrak{L} = \mathfrak{M} = \mathfrak{N} = 3\,\mathfrak{R} \end{array}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (40)$$

Diese Gleichheiten sind selbstverständlich, mit Ausnahme der letzten, die eines Beweises bedarf, den zuerst *Cauchy* in seiner Lichttheorie in folgender Weise gegeben hat.

Legen wir durch den Punkt $x\ y\ z$ zwei Coordinatensysteme $0\,\Delta x_0$ $0\,\Delta y_0$ $0\,\Delta z_0$ $0\,\Delta x_1$ $0\,\Delta y_1$ $0\,\Delta z_1$ in solcher Weise, dass die Axen $0\,\Delta z_0$ und $0\,\Delta z_1$ zusammenfallen und mit der Axe $0\,z$ parallel sind, dass jedoch die Axen $0\,\Delta x_0$ und $0\,\Delta x_1$ einen beliebigen Winkel ψ bilden. Dies vorausgesetzt, haben wir :

$$\Delta x_1 = \Delta x_0 \cos.\psi - \Delta y_0 \sin.\psi$$
$$\Delta y_1 = \Delta x_0 \sin.\psi + \Delta y_0 \cos.\psi$$

Hieraus folgt :

$$\Delta x_1^4 = \Delta x_0^4 \cos.^4\psi - 4\,\Delta x_0^3\,\Delta y_0 \cos.^3\psi \sin.\psi + 6\,\Delta x_0^2\,\Delta y_0^2 \sin.^2\psi \cos.^2\psi - 4\,\Delta x_0\,\Delta y_0^3 \cos.\psi \sin.^3\psi + \Delta y_0^4 \sin.^4\psi$$

$$\Delta y_1^4 = \Delta x_0^4 \sin.^4\psi + 4\,\Delta x_0^3\,\Delta y_0 \sin.^3\psi \cos.\psi + 6\,\Delta x_0^2\,\Delta y_0^2 \sin.^2\psi \cos.^2\psi + 4\,\Delta x_0\,\Delta y_0^3 \sin.\psi \cos.^3\psi + \Delta y_0^4 \cos.^4\psi$$

Ist nun die Gruppirungsweise der Atome um die Axe $0\,\Delta z$ herum ganz gleich, so muss sein :

$$-\mathrm{L} = \mathrm{S}\,\frac{m_1}{2}\,\frac{1}{r_0}\,\frac{d\left(\frac{1}{r_0}\,f(r_0)\right)}{d\,r_0}\,\Delta x_0^4 = \mathrm{S}\,\frac{m_1}{2}\,\frac{1}{r_0}\,\frac{d\left(\frac{1}{r_0}\,f(r_0)\right)}{d\,r_0}\,\Delta x_1^4$$

$$-\mathrm{M} = \mathrm{S}\,\frac{m_1}{2}\,\frac{1}{r_0}\,\frac{d\left(\frac{1}{r_0}\,f(r_0)\right)}{d\,r_0}\,\Delta y_0^4 = \mathrm{S}\,\frac{m_1}{2}\,\frac{1}{r_0}\,\frac{d\left(\frac{1}{r_0}\,f(r_0)\right)}{d\,r_0}\,\Delta y_1^4$$

Setzt man für Δx_1^4 und Δy_1^4 die vorhergehenden Werthe und berücksichtigt, dass überhaupt für jedes homogene Medium alle Summen verschwinden, in welchen ungerade Potenzen von Δx_0 Δy_0 Δz_0 vorkommen, so findet man :

$$\mathfrak{L} = \mathfrak{L} \cos.^4\psi + \mathfrak{M} \sin.^4\psi + 6\,\mathfrak{R} \sin.^2\psi \cos.^2\psi$$
$$\mathfrak{M} = \mathfrak{L} \sin.^4\psi + \mathfrak{M} \cos.^4\psi + 6\,\mathfrak{R} \sin.^2\psi \cos.^2\psi$$

Hieraus folgt zunächst $\mathfrak{L} = \mathfrak{M}$, und dann wird :

$$\mathfrak{L} = \mathfrak{L}\,(\cos.^4\psi + \sin.^4\psi) + 6\,\mathfrak{N}\,\sin.^2\psi\,\cos.^2\psi$$

Es ist aber :

$$\cos.^4\psi + \sin.^4\psi = 1 - 2\,\sin.^2\psi\,\cos.^2\psi$$

daher :

$$\mathfrak{L} = \mathfrak{L} - 2\,\mathfrak{L}\,\sin.^2\psi\,\cos.^2\psi + 6\,\sin.^2\psi\,\cos.^2\psi\,\mathfrak{N}$$

oder :

$$\mathfrak{L} = \mathfrak{M} = 3\,\mathfrak{N}$$

was zu beweisen war. Vermöge der für ein isotropes Medium bestehenden Beziehungen (40) werden die Gleichungen (39) :

$$\left.\begin{aligned}
\mathfrak{X} &= \frac{s_0}{2\,g}\,\mathfrak{L}\left[\alpha + \frac{1}{3}\,(\beta + \gamma)\right] \\
\mathfrak{Y} &= \frac{s_0}{2\,g}\,\mathfrak{L}\left[\beta + \frac{1}{3}\,(\alpha + \gamma)\right] \\
\mathfrak{Z} &= \frac{s_0}{2\,g}\,\mathfrak{L}\left[\gamma + \frac{1}{3}\,(\alpha + \beta)\right]
\end{aligned}\right\} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (41)$$

Dies sind nun für einen parallelepipedischen Stab, der aus einer isotropen Substanz besteht, die Intensitäten der Pressungen gegen die parallelen Begränzungsflächen, welche nach den Richtungen der Kräfte die linearen Zusammenpressungen $\alpha\;\beta\;\gamma$ hervorbringen. Umgekehrt kann man aus den Gleichungen (41) $\alpha\;\beta\;\gamma$ durch $\mathfrak{X}\;\mathfrak{Y}\;\mathfrak{Z}$ ausdrücken, also die linearen Zusammenpressungen berechnen, welche durch diese Kräfte entstehen.

Man findet :

$$\left.\begin{aligned}
\alpha &= \frac{3}{10}\left[4\,\mathfrak{X} - (\mathfrak{Y} + \mathfrak{Z})\right]\frac{2\,g}{s_0\,\mathfrak{L}} \\
\beta &= \frac{3}{10}\left[4\,\mathfrak{Y} - (\mathfrak{X} + \mathfrak{Z})\right]\frac{2\,g}{s_0\,\mathfrak{L}} \\
\gamma &= \frac{3}{10}\left[4\,\mathfrak{Z} - (\mathfrak{X} + \mathfrak{Y})\right]\frac{2\,g}{s_0\,\mathfrak{L}}
\end{aligned}\right\} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (42)$$

Die Volumenänderung einer Volumseinheit ist daher :

$$\alpha + \beta + \gamma = \frac{3}{10}\,(2\,\mathfrak{X} + 2\,\mathfrak{Y} + 2\,\mathfrak{Z})\,\frac{2\,g}{s_0\,\mathfrak{L}}$$

Die Gleichungen (33), (34), (35) werden bei dem vorliegenden Problem identisch erfüllt. Betrachten wir einige spezielle Fälle.

1. Haben die gegen die Seitenflächen des Prisma wirkenden Kräfte gleiche Intensitäten, ist also:

$$\mathfrak{X} = \mathfrak{Y} = \mathfrak{Z}$$

so findet man aus dieser Gleichung (42):

$$\alpha = \beta = \gamma = \frac{3}{5} \, \frac{2\,g}{s_0 \, \mathfrak{L}} \, \mathfrak{X} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (43)$$

2. Wird der Stab nach der Richtung $o\,x$ zusammengedrückt und wirken sonst keine Kräfte auf denselben ein, ist also:

$$\mathfrak{Y} = \mathfrak{Z} = 0$$

so geben die Gleichungen (42) folgende Werthe:

$$\left.\begin{aligned} \alpha &= \frac{6}{5} \, \frac{2\,g}{s_0 \, \mathfrak{L}} \, \mathfrak{X} \\ \beta = \gamma &= -\frac{3}{10} \, \frac{2\,g}{s_0 \, \mathfrak{L}} \, \mathfrak{X} \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (44)$$

Der Stab dehnt sich also nach der Quere aus, und es ist:

$$\beta = \gamma = -\frac{\alpha}{4}$$

3. Will man nur allein eine Zusammendrückung nach der Richtung $o\,x$ bewirken, und die Querschnittsänderung nach den Richtungen $o\,y$ $o\,z$ verhindern, so sind gewisse Pressungen $\mathfrak{Y}$ und $\mathfrak{Z}$ nothwendig. Für diesen Fall ist:

$$\beta = \gamma = 0$$

und die Gleichungen (41) geben:

$$\left.\begin{aligned} \alpha &= \frac{2\,g}{s_0 \, \mathfrak{L}} \, \mathfrak{X} \\ \mathfrak{Y} = \mathfrak{Z} &= \frac{1}{3} \, \frac{s_0 \, \mathfrak{L}}{2\,g} \, \alpha = \frac{1}{3} \, \mathfrak{X} \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (45)$$

Den reziproken Werth der Grösse $\frac{6}{5} \frac{2\,g}{s_0 \, \mathfrak{L}}$, welche vermöge (44) die lineare Ausdehnung oder Zusammendrückung ausdrückt, welche entsteht, wenn auf den Stab nur dehnende oder nur zusammendrückende Kräfte wirken, deren Intensistät $= 1$ ist, nennt man den Modulus der Elastizität des Materials. Wir bezeichnen denselben mit ε, setzen also:

$$\varepsilon = \frac{5}{6} \, \frac{s_0 \, \mathfrak{L}}{2\,g} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (46)$$

Diese Ergebnisse (43) bis (46) unserer Rechnung stimmen mit den analogen von *Cauchy* und *Lamé* gefundenen überein, wollen aber mit den von *Wertheim* gefundenen Versuchsresultaten nicht genau harmoniren. Der Grund hievon liegt nach meiner Ansicht wahrscheinlich in einer ungenauen Berechnung der Doppelsummen

$$\Sigma \, m \, S \, (\ldots)$$

Die Summe S bezieht sich auf alle $\Delta x \; \Delta y \; \Delta z$, d. h. auf alle Punkte, die um einen gewissen Punkt $x \, y \, z$ herumgelagert sind; die Summe Σ dagegen überhaupt auf alle $x \, y \, z$, d. h. auf alle Punkte des Körpers. Nun haben wir angenommen, dass die Summe $S(\ldots)$ für jeden Punkt des Körpers ein und denselben Werth habe, und dies ist selbst bei einem isotropen Medium nur für die innern, nicht aber für die an der Oberfläche und in der Nähe derselben gelegenen Punkte richtig, denn jeder begränzte Körper hat, wie die Erfahrung beweist und wie auch aus unserer Theorie mit Nothwendigkeit folgt, so zu sagen ein Häutchen, in welchem eine andere Dichte stattfindet, als im Innern des Körpers. Es ist also bei der Berechnung jener Doppelsumme nicht erlaubt, $S(\ldots)$ für alle Punkte als constant zu betrachten und

$$\Sigma \, m \, S \, (\ldots) = M \, S \, (\ldots)$$

zu setzen.

WIRKUNG, WELCHE DER DEFORMIRUNG EINES KÖRPERS ENTSPRICHT.

Wir legen uns nun die Aufgabe vor, die Wirkungsgrösse oder Arbeitsgrösse zu bestimmen, welche einer Deformirung eines elastischen Körpers entspricht.

Es sei r_0 die Entfernung zweier Atome A und B im natürlichen Zustand des Körpers; $r_0 + \varrho$ die Entfernung der gleichen Atome in irgend einem Augenblick während der Deformirung; $d(r_0 + \varrho) = d\varrho$ die Zunahme der Entfernung der gleicheu Atome, während die Deformirung noch unendlich wenig weiter fortschreitet, so ist:

$$m \, m_1 \, f(r_0 + \varrho) \, d\varrho$$

die Arbeit, welche der Distanzänderung der Atome A und B um $d\varrho$ entspricht, demnach

$$\int_0^{\varrho} m \, m_1 \, f(r_0 + \varrho) \, d\varrho$$

die Arbeit, welche einer Distanzänderung ϱ entspricht.

Wenn wir überhaupt nur eine schwache Deformirung voraussetzen, ist ϱ gegen r_0 sehr klein; wir können daher nach dem *Taylor*'schen Satz schreiben:

$$f(r_0 + \varrho) = f(r_0) + \frac{d \, f(r_0)}{d \, r_0} \, \varrho$$