Das Dynamiden-System

Redtenbacher, Ferdinand

Mannheim, 1857

Umgestaltung der Gleichgewichtsgleichungen (17) und (18)

urn:nbn:de:bsz:31-266496

Linien bilden. Oder handelt es sich um die Drehung eines Stabes, so nimmt man an: 1) dass alle Atome, welche ursprünglich in einem Querschnitt liegen, durch die Drehung ihre relative Lage gegen einander nicht ändern; 2) dass der Winkel, um welchen zwei Querschnitte des Stabes durch die Drehung gegen einander gewendet werden, dem Abstand der Querschnitte proportional ist. Man nimmt also jedesmal bei jedem Problem gewisse Gegeneinander-Verschiebungen der Atome an, berechnet die diesen Verschiebungen entsprechenden Kräfte, indem man dieselben den Verschiebungen proportional setzt, und sucht hierauf die Bedingungen des Gleichgewichts.

Auf diese Weise umgeht man durch mehr oder weniger naturgemässe Annahmen die Hauptschwierigkeiten des Problems, nämlich die Bestimmung der Verschiebungen, kommt aber zu Resultaten, welche mit den Thatsachen in den meisten Fällen eben so gut stimmen, wie die bis jetzt im Gebiete der Physik durchgeführten Rechnungen. Allein durch diese leichte Behandlung dieser Aufgaben ist zunächst für die Wissenschaft nicht viel gewonnen, und werden die technischen Fragen keineswegs vollständig beantwortet. Denn es ist in dieser letzteren Hinsicht gerade von besonderer Wichtigkeit, die Umstände und Bedingungen kennen zu lernen, unter welchen diese Annahmen zulässig sind, denn nur dann, wenn dies der Fall ist, werden die Rechnungsresultate eine hinreichende Genauigkeit gewähren können, und nur dann, wenn im deformirten Zustand eines Körpers solche Atomlagerungen vorhanden sind, wie bei der Rechnung vorausgesetzt wird, kann dieser Körper als ein solides Glied einer technischen Construktion dienen; denn wenn z. B. an den unteren Kanten eines nach abwärts gebogenen stabförmigen Körpers nicht blos Zusammendrückungen, sondern gleichzeitig Faltungen eintreten, oder wenn dieser Körper auch zu einer Drehung leicht inclinirt, so kann derselbe nicht als ein solides Construktionsglied gelten.

Es ist daher für diese praktischen Fragen von grosser Wichtigkeit, die Bedingungen kennen zu lernen, unter welchen der deformirte Zustand eines Körpers gerade von der Art sein wird, wie bei der Rechnung vorausgesetzt wird, und diese Bedingungen können vermittelst der Gleichungen (17) und (18) ausfindig gemacht werden.

UMGESTALTUNG DER GLEICHGEWICHTSGLEICHUNGEN (17) UND (18).

Die Gleichungen (17) und (18) können in einer Weise umgestaltet werden, dass die Lösung der Gleichgewichtsprobleme elastischer Körper sehr vereinfacht wird.

Wir wollen einen Gleichgewichtszustand einen natürlichen nennen, wenn der Körper nur allein der Thätigkeit der inneren Kräfte überlassen ist, also keinerlei äussere Kräfte einwirken; dagegen einen erzwungenen, wenn auf den Körper nicht nur innere, sondern auch äussere Kräfte einwirken. Für den natürlichen Gleichgewichtszustand ist also zu setzen:

$$X = Y = Z = X_0 = Y_0 = Z_0 = 0$$

Es seien nun für den natürlichen Gleichgewichtszustand des Körpers $x_0\ y_0\ z_0$ die Coordinaten eines Atoms A des Körpers, $x_0 + \Delta x_0$, $y_0 + \Delta y_0$, $z_0 + \Delta z_0$ die Coordinaten eines andern Atoms A_1 des gleichen Körpers. Wird nun dieser Körper durch die Einwirkung von äusseren Kräften $X\ Y\ Z\ X_2\ Y_2\ Z_2$ deformirt, so werden die Atome A und A_1 in dem nun erzwungenen Gleichgewichtszustand gewisse Positionen haben, deren Coordinaten wir beziehungsweise mit $x\ y\ z$, $x + \Delta x$, $y + \Delta y$, $z + \Delta z$ bezeichnen wollen.

Nennen wir $\xi\ v\ \zeta$, $\xi + \Delta\xi$, $v + \Delta v$, $\zeta + \Delta\zeta$ die Aenderungen, welche in den Coordinaten der Atome A und A_1 bei dem Uebergang aus dem natürlichen Gleichgewichtszustand in den erzwungenen eingetreten sind; setzen demnach:

$$\left.\begin{array}{ll} \xi = x - x_0 & \xi + \Delta\xi = x + \Delta x - (x_0 + \Delta x_0) \\ v = y - y_0 & v + \Delta v = y + \Delta y - (y_0 + \Delta y_0) \\ \zeta = z - z_0 & \zeta + \Delta\zeta = z + \Delta z - (z_0 + \Delta z_0) \end{array}\right\} \quad \ldots \quad (24)$$

so erhalten wir:

$$\left.\begin{array}{l} \Delta x = \Delta x_0 + \Delta\xi \\ \Delta y = \Delta y_0 + \Delta v \\ \Delta z = \Delta z_0 + \Delta\zeta \end{array}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (25)$$

Nennen wir endlich noch r_0 und $r_0 + \varrho$ die Entfernungen der Atome A und A_1 im natürlichen und im erzwungenen Gleichgewicht, so ist:

$$\left.\begin{array}{r} r_0^2 = \Delta x_0^2 + \Delta y_0^2 + \Delta z_0^2 \\ (r_0 + \varrho)^2 = (\Delta x_0 + \Delta\xi)^2 + (\Delta y_0 + \Delta v)^2 + (\Delta z_0 + \Delta\zeta)^2 \end{array}\right\} \quad \ldots \quad (26)$$

Wir wollen von nun an voraussetzen, dass der Körper bei dem Uebergang aus dem natürlichen in den erzwungenen Gleichgewichtszustand nur um äusserst wenig deformirt werde; dann wird es erlaubt sein, im weiteren Verlauf der Rechnung $\Delta\xi\ \Delta v\ \Delta\zeta$ als unendlich kleine Grössen zu behandeln, und alle Glieder, welche zweite oder höhere Dimensionen dieser Grössen enthalten zu vernachlässigen.

Unter diesen Voraussetzungen folgt zunächst aus den Gleichungen (26):

$$\varrho = \frac{1}{r_0}(\Delta x_0\, \Delta\xi + \Delta y_0\, \Delta v + \Delta z_0\, \Delta\zeta) \quad \ldots\ldots\ldots \quad (27)$$

folgt ferner aus dem *Taylor*'schen Satz:

$$\frac{f(r)}{r} = \frac{f(r_0)}{r_0} + \frac{d\left(\frac{1}{r_0} f(r_0)\right)}{d r_0}\,\varrho$$

oder wenn man für ϱ seinen Werth aus (27) setzt :

$$\frac{f(r)}{r} = \frac{f(r_0)}{r_0} + \frac{1}{r_0} \frac{d\left(\frac{1}{r_0} f(r_0)\right)}{d r_0} (\Delta x_0 \, \Delta \xi + \Delta y_0 \, \Delta \upsilon + \Delta z_0 \, \Delta \zeta) \quad . \; . \; . \quad (28)$$

Wenn man die Glieder, welche zweite Dimensionen von $\Delta \xi \;\; \Delta \upsilon \;\; \Delta \zeta$ enthalten, vernachlässigt, findet man aus (25) :

$$\left.\begin{array}{l|l}
\Delta x^2 = \Delta x_0^2 + 2 \, \Delta x_0 \, \Delta \xi & \Delta x \, \Delta y = \Delta x_0 \, \Delta y_0 + (\Delta x_0 \, \Delta \upsilon + \Delta y_0 \, \Delta \xi) \\
\Delta y^2 = \Delta y_0^2 + 2 \, \Delta y_0 \, \Delta \upsilon & \Delta x \, \Delta z = \Delta x_0 \, \Delta z_0 + (\Delta x_0 \, \Delta \zeta + \Delta z_0 \, \Delta \xi) \\
\Delta z^2 = \Delta z_0^2 + 2 \, \Delta z_0 \, \Delta \zeta & \Delta y \, \Delta z = \Delta x_0 \, \Delta z_0 + (\Delta y_0 \, \Delta \zeta + \Delta z_0 \, \Delta \upsilon)
\end{array}\right\} \quad (29)$$

Substituirt man diese Resultate (27), (28), (29) in die Gleichungen (17) und (18), setzt zur Abkürzung :

$$\left.\begin{array}{r}
\frac{m_1}{2} \frac{f(r_0)}{r_0} = \mathfrak{H} \\[2ex]
\frac{m_1}{2} \frac{1}{r_0} \frac{d\left(\frac{1}{r_0} f(r_0)\right)}{d r_0} = \mathfrak{K}
\end{array}\right\} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (30)$$

und berücksichtigt, dass im natürlichen Gleichgewicht :

$$\left.\begin{array}{l}
\Sigma \, m \, S \, \mathfrak{H} \, \Delta x_0^2 = o \\
\Sigma \, m \, S \, \mathfrak{H} \, \Delta y_0^2 = o \\
\Sigma \, m \, S \, \mathfrak{H} \, \Delta z_0^2 = o \\
\Sigma \, m \, S \, \mathfrak{H} \, \Delta x_0 \, \Delta y_0 = o \\
\Sigma \, m \, S \, \mathfrak{H} \, \Delta x_0 \, \Delta z_0 = o \\
\Sigma \, m \, S \, \mathfrak{H} \, \Delta y_0 \, \Delta z_0 = o
\end{array}\right\} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (31)$$

ist, so erhalten die Gleichungen (17) und (18) folgende Gestalten :

$$\left.\begin{array}{l}
o = \Sigma \, m \, (X x + X_2 x_2) + \Sigma \, m \, S \left[(2 \, \mathfrak{H} \, \Delta x_0 + \mathfrak{K} \, \Delta x_0^3) \, \Delta \xi + \mathfrak{K} \, \Delta x_0^2 \, \Delta y_0 \, \Delta \upsilon + \mathfrak{K} \, \Delta x_0^2 \, \Delta z_0 \, \Delta \zeta\right] \\
o = \Sigma \, m \, (Y y + Y_2 y_2) + \Sigma \, m \, S \left[(2 \, \mathfrak{H} \, \Delta y_0 + \mathfrak{K} \, \Delta y_0^3) \, \Delta \upsilon + \mathfrak{K} \, \Delta y_0^2 \, \Delta x_0 \, \Delta \xi + \mathfrak{K} \, \Delta y_0^2 \, \Delta z_0 \, \Delta \zeta\right] \\
o = \Sigma \, m \, (Z z + Z_2 z_2) + \Sigma \, m \, S \left[(2 \, \mathfrak{H} \, \Delta z_0 + \mathfrak{K} \, \Delta z_0^3) \, \Delta \zeta + \mathfrak{K} \, \Delta z_0^2 \, \Delta y_0 \, \Delta \upsilon + \mathfrak{K} \, \Delta z_0^2 \, \Delta x_0 \, \Delta \xi\right]
\end{array}\right\} \quad (32)$$

$$
\left.
\begin{aligned}
o &= \Sigma m\,(X\,y + X_2\,y_2) + \Sigma m S\left[(\mathfrak{H}\,\Delta y_0 + \mathfrak{K}\,\Delta y_0\,\Delta x_0^2)\,\Delta\xi + (\mathfrak{H}\,\Delta x_0 + \mathfrak{K}\,\Delta x_0\,\Delta y_0^2)\,\Delta v + \right.\\
&\qquad\qquad \left. + \mathfrak{K}\,\Delta x_0\,\Delta y_0\,\Delta z_0\,\Delta\zeta\right]\\
o &= \Sigma m\,(Y\,z + Y_2\,z_2) + \Sigma m S\left[\mathfrak{K}\,\Delta x_0\,\Delta y_0\,\Delta z_0\,\Delta\xi + (\mathfrak{H}\,\Delta z_0 + \mathfrak{K}\,\Delta z_0\,\Delta y_0^2)\,\Delta v + \right.\\
&\qquad\qquad \left. + (\mathfrak{H}\,\Delta y_0 + \mathfrak{K}\,\Delta y_0\,\Delta z_0^2)\,\Delta\zeta\right]\\
o &= \Sigma m\,(Z\,x + Z_2\,x_2) + \Sigma m S\left[(\mathfrak{H}\,\Delta z_0 + \mathfrak{K}\,\Delta z_0\,\Delta x_0^2)\,\Delta\xi + \mathfrak{K}\,\Delta x_0\,\Delta y_0\,\Delta z_0\,\Delta v + \right.\\
&\qquad\qquad \left. + (\mathfrak{H}\,\Delta x_0 + \mathfrak{K}\,\Delta x_0\,\Delta z_0^2)\,\Delta\zeta\right]
\end{aligned}
\right\} \quad (33)
$$

Ausserdem bestehen auch noch die Gleichungen (15) und (16), nämlich:

$$\Sigma m\,(X + X_2) = o \qquad \Sigma m\,(Y + Y_2) = o \qquad \Sigma m\,(Z + Z_2) = o \quad . \; . \; . \quad (34)$$

$$
\left.
\begin{aligned}
\Sigma m\,(X\,y - Y\,x) + \Sigma m\,(X_2\,y_2 - Y_2\,x_2) &= o\\
\Sigma m\,(Y\,z - Z\,y) + \Sigma m\,(Y_2\,z_2 - Z_2\,y_2) &= o\\
\Sigma m\,(Z\,x - X\,z) + \Sigma m\,(Z_2\,x_2 - X_2\,z_2) &= o
\end{aligned}
\right\} \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (35)
$$

Vermittelst dieser Gleichungen (32), (33), (34), (35) können zwar nicht alle, aber doch sehr viele das Gleichgewicht elastischer Körper betreffende Aufgaben gelöst werden.

Man kann sich in dieser Hinsicht zweierlei Hauptfragen stellen. Man kann entweder die natürliche Gestalt des Körpers und das deformirende Kräftesystem als gegeben betrachten und die Deformirung zu bestimmen suchen. In diesem Falle sind die Kräfte $X\,Y\,Z\,X_2\,Y_2\,Z_2$, so wie die Coordinaten $x_0\,y_0\,z_0$ gegeben, und sind die Coordinaten $\xi\,v\,\zeta$, so wie die Differenzen $\Delta\xi\;\Delta v\;\Delta\zeta$ zu suchen. In dieser Weise wird gewöhnlich bei analytischen Behandlungen die Frage gestellt; ihre Beantwortung führt aber unvermeidlich zu enormen Schwierigkeiten, weil die Verschiebungen $\xi\,v\,\zeta$ meistens äusserst complizirte Grössen sind. Man kann aber auch die Frage umkehren, indem man die Gestalt des Körpers und die Verschiebungen annimmt, die ja ganz beliebig sein können, dagegen das Kräftesystem zu bestimmen sucht, welches diese angenommenen Verschiebungen hervorzubringen vermag. Diese umgekehrte Fragestellung ist eigentlich diejenige, welche gewöhnlich bei technischen Aufgaben gestellt wird.

Um die Anwendung der erhaltenen Gleichungen zu zeigen, wollen wir einige Aufgaben lösen.

ZUSAMMENDRÜCKUNG EINES PARALLELEPIPEDISCHEN KÖRPERS.

Ein Körper habe im natürlichen Zustand die Gestalt eines Parallelepipeds. Das Material sei nicht nach allen Richtungen gleich leicht zusammendrückbar. Die Elastizitätsaxen seien den Kanten des Körpers parallel. Wir versetzen diesen Körper in einen andern Zustand, in welchem derselbe nach den Richtungen seiner Kanten gleichförmig zusammengedrückt ist, jedoch nach jeder Kantenrichtung in einem andern Maasse, und