

Badische Landesbibliothek Karlsruhe

Digitale Sammlung der Badischen Landesbibliothek Karlsruhe

Das Dynamiden-System

Redtenbacher, Ferdinand

Mannheim, 1857

Gleichgewicht eines Dynamidensystems mit Elastizitätsachsen

[urn:nbn:de:bsz:31-266496](https://nbn-resolving.org/urn:nbn:de:bsz:31-266496)

GLEICHGEWICHT EINES DYNAMIDENSYSTEMS MIT ELASTIZITÄTSAXEN.

Die vollständigen Bedingungen des Gleichgewichts eines Dynamidensystems mit Elastizitätsaxen würden die Position und Stellung jeder einzelnen Dynamide des Systems bestimmen. Die Aufsuchung dieser vollständigen Bedingungen führt zu einem Gewühle von analytischen Formeln, die ich nicht zu bewältigen im Stande war. Vermittelt des Prinzipes der virtuellen Geschwindigkeit kann man aber ohne Schwierigkeit einige Beziehungen, welche die Positionen der Dynamiden im Gleichgewichtszustand charakterisiren, auf folgende Art ausfindig machen.

Es seien :

- x, y, z die Coordinaten des Schwerpunktes einer Dynamide Λ ;
- x_1, y_1, z_1 die Coordinaten des Schwerpunktes einer anderen Dynamide Λ_1 ;
- X, Y, Z die Kräfte, welche von aussen her auf die Masseneinheit der Dynamide Λ parallel mit den Coordinatenachsen einwirken;
- X_2, Y_2, Z_2 Kräfte, welche nach den positiven Richtungen der Coordinatenachsen auf die Masseneinheit einer an der Oberfläche des Körpers befindlichen Dynamide Λ_2 von aussen her einwirken;
- x_2, y_2, z_2 die Coordinaten dieses Punktes Λ_2 an der Oberfläche;
- m und m_1 die Massen der Dynamiden Λ und Λ_1 ;
- r die Entfernung der Schwerpunkte dieser Dynamiden;
- $m, m_1, f(r)$ die Wechselwirkung zweier Dynamiden, welche Seite 52 berechnet wurde.

Da jede Dynamide nach jeder Richtung vollkommen frei beweglich ist, so dürfen wir nach dem Prinzip der virtuellen Geschwindigkeit jeder Dynamide eine beliebige Verschiebung ertheilen, und muss für den Gleichgewichtszustand die algebraische Summe der diesen Verschiebungen entsprechenden virtuellen Arbeiten aller Kräfte gleich Null sein. Bezeichnen wir durch :

$\left. \begin{array}{l} \delta x, \delta y, \delta z \\ \delta x_1, \delta y_1, \delta z_1 \\ \delta x_2, \delta y_2, \delta z_2 \end{array} \right\}$ die willkürlichen unendlich kleinen Verschiebungen der Dynamiden $\Lambda, \Lambda_1, \Lambda_2$, gemessen nach den Coordinatenachsen,

so sind :

$$\left. \begin{array}{l} m(X \delta x + Y \delta y + Z \delta z) \\ m(X_2 \delta x_2 + Y_2 \delta y_2 + Z_2 \delta z_2) \end{array} \right\} \dots \dots \dots (1)$$

die virtuellen Arbeiten, welche zweien der äusseren Kräften entsprechen, und ist :

$$m, m_1, f(r) \left\{ \begin{array}{l} \frac{x_1 - x}{r} \delta x_1 + \frac{y_1 - y}{r} \delta y_1 + \frac{z_1 - z}{r} \delta z_1 \\ - \frac{x_1 - x}{r} \delta x - \frac{y_1 - y}{r} \delta y - \frac{z_1 - z}{r} \delta z \end{array} \right\} \dots \dots \dots (2)$$

die virtuelle Arbeit, welche der Distanzänderung der Dynamiden Λ und Λ_1 entspricht.

Bezeichnen wir die relativen Coordinaten von A_1 gegen A mit $\Delta x \Delta y \Delta z$, setzen demnach :

$$\left. \begin{aligned} x_1 - x &= \Delta x \\ y_1 - y &= \Delta y \\ z_1 - z &= \Delta z \end{aligned} \right\}$$

so wird der Ausdruck (2) :

$$m_1 f(r) \left[\frac{\Delta x}{r} \delta(\Delta x) + \frac{\Delta y}{r} \delta(\Delta y) + \frac{\Delta z}{r} \delta(\Delta z) \right]$$

Die Summe der virtuellen Arbeiten, welche den Distanzänderungen sämtlicher Dynamiden gegen die Dynamide A entspricht, ist demnach :

$$\sum m_1 f(r) \left[\frac{\Delta x}{r} \delta(\Delta x) + \frac{\Delta y}{r} \delta(\Delta y) + \frac{\Delta z}{r} \delta(\Delta z) \right] \dots \dots \dots (3)$$

wobei sich das Summenzeichen \sum auf alle $\Delta x \Delta y \Delta z$, also auf alle m_1 bezieht; und die Summe der virtuellen Arbeiten, welche der Distanzänderung jeder Dynamide gegen jede andere entspricht, ist endlich :

$$\frac{1}{2} \sum \sum m_1 f(r) \left[\frac{\Delta x}{r} \delta(\Delta x) + \frac{\Delta y}{r} \delta(\Delta y) + \frac{\Delta z}{r} \delta(\Delta z) \right] \dots \dots \dots (4)$$

wobei sich das Summenzeichen \sum auf alle Massen m oder auf alle $x y z$ bezieht. Dieser Ausdruck fordert, dass man für jede Dynamide des Systems die dem Ausdruck (3) analoge Grösse berechnen, und alle diese Grössen addiren, aber schliesslich von dieser Summe nur die Hälfte nehmen soll. Der Faktor $\frac{1}{2}$ rührt daher, dass durch die Summirungen \sum und \sum jede virtuelle Arbeit zweimal genommen wird, während sie nach dem Prinzip der virtuellen Geschwindigkeit nur einmal genommen werden darf.

Wenn auf das Dynamidensystem keine oder solche äussere Kräfte einwirkten, dass die Elastizität oder die Dynamidengruppirung um jede Dynamide des Systems herum von ganz gleicher Beschaffenheit wäre, würde der Ausdruck (3) für jede Dynamide den gleichen Werth haben, mit Ausnahme derjenigen Dynamiden, die sich ganz in der Nähe der Oberfläche des Systems befinden, und dann erhielte man statt des Ausdruckes (4) sehr nahe :

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{M}{m} \sum m_1 f(r) \left[\frac{\Delta x}{r} \delta(\Delta x) + \frac{\Delta y}{r} \delta(\Delta y) + \frac{\Delta z}{r} \delta(\Delta z) \right] \dots \dots \dots (5)$$

Wenn wir aber in Bezug auf die äusseren Kräfte keine Beschränkung annehmen, so erhalten wir nach dem Prinzip der virtuellen Geschwindigkeit als Gleichgewichtsbedingung :

$$0 = \left\{ \begin{aligned} &\Sigma m (X \delta x + Y \delta y + Z \delta z) + \Sigma m (X_2 \delta x_2 + Y_2 \delta y_2 + Z_2 \delta z_2) + \\ &+ \frac{1}{2} \Sigma m S m_1 f(r) \left[\frac{Ax}{r} \delta(Ax) + \frac{Ay}{r} \delta(Ay) + \frac{Az}{r} \delta(Az) \right] \end{aligned} \right\} \dots (6)$$

Da nun die Verschiebungen absolut willkürlich sind, so dürfen wir uns erlauben zu setzen :

$$\left. \begin{aligned} \delta x &= h_0 + h_1 x + h_2 y + h_3 z \\ \delta y &= k_0 + k_1 x + k_2 y + k_3 z \\ \delta z &= l_0 + l_1 x + l_2 y + l_3 z \end{aligned} \right\} \dots (7)$$

wobei $h_0, h_1, h_2, h_3, k_0, k_1, k_2, k_3, l_0, l_1, l_2, l_3$ unendlich kleine, aber absolut willkürliche Größen bezeichnen; und dann erhalten wir :

$$\Sigma m (X \delta x + Y \delta y + Z \delta z) = \Sigma m \left\{ \begin{aligned} &X (h_0 + h_1 x + h_2 y + h_3 z) \\ &Y (k_0 + k_1 x + k_2 y + k_3 z) \\ &Z (l_0 + l_1 x + l_2 y + l_3 z) \end{aligned} \right\}$$

oder :

$$\Sigma m (X \delta x + Y \delta y + Z \delta z) = \left\{ \begin{aligned} &h_0 \Sigma m X + k_0 \Sigma m Y + l_0 \Sigma m Z \\ &h_1 \Sigma m X x + h_2 \Sigma m X y + h_3 \Sigma m X z \\ &k_1 \Sigma m Y x + k_2 \Sigma m Y y + k_3 \Sigma m Y z \\ &l_1 \Sigma m Z x + l_2 \Sigma m Z y + l_3 \Sigma m Z z \end{aligned} \right\} \dots (8)$$

ferner :

$$\Sigma m (X_2 \delta x_2 + Y_2 \delta y_2 + Z_2 \delta z_2) = \left\{ \begin{aligned} &h_0 \Sigma m X_2 + k_0 \Sigma m Y_2 + l_0 \Sigma m Z_2 \\ &h_1 \Sigma m X_2 x_2 + h_2 \Sigma m X_2 y_2 + h_3 \Sigma m X_2 z_2 \\ &k_1 \Sigma m Y_2 x_2 + k_2 \Sigma m Y_2 y_2 + k_3 \Sigma m Y_2 z_2 \\ &l_1 \Sigma m Z_2 x_2 + l_2 \Sigma m Z_2 y_2 + l_3 \Sigma m Z_2 z_2 \end{aligned} \right\} (9)$$

endlich wird :

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2} \Sigma m S m_1 f(r) \left[\frac{Ax}{r} \delta(Ax) + \frac{Ay}{r} \delta(Ay) + \frac{Az}{r} \delta(Az) \right] = \\ &= \frac{1}{2} \Sigma m \left\{ \begin{aligned} &S m_1 f(r) \frac{Ax}{r} (h_1 Ax + h_2 Ay + h_3 Az) \\ &S m_1 f(r) \frac{Ay}{r} (k_1 Ax + k_2 Ay + k_3 Az) \\ &S m_1 f(r) \frac{Az}{r} (l_1 Ax + l_2 Ay + l_3 Az) \end{aligned} \right\} \end{aligned}$$

oder auch :

$$\frac{1}{2} \sum m S m_i f(r) \left[\frac{\Delta x}{r} \delta(\Delta x) + \frac{\Delta y}{r} \delta(\Delta y) + \frac{\Delta z}{r} \delta(\Delta z) \right] =$$

$$= \left\{ \begin{array}{l} h_1 \frac{1}{2} \sum m S m_i f(r) \frac{\Delta x^2}{r} + h_2 \frac{1}{2} \sum m S m_i f(r) \frac{\Delta x \Delta y}{r} + h_3 \frac{1}{2} \sum m S m_i f(r) \frac{\Delta x \Delta z}{r} \\ k_1 \frac{1}{2} \sum m S m_i f(r) \frac{\Delta x \Delta y}{r} + k_2 \frac{1}{2} \sum m S m_i f(r) \frac{\Delta y^2}{r} + k_3 \frac{1}{2} \sum m S m_i f(r) \frac{\Delta y \Delta z}{r} \\ l_1 \frac{1}{2} \sum m S m_i f(r) \frac{\Delta x \Delta z}{r} + l_2 \frac{1}{2} \sum m S m_i f(r) \frac{\Delta y \Delta z}{r} + l_3 \frac{1}{2} \sum m S m_i f(r) \frac{\Delta z^2}{r} \end{array} \right\} \quad (10)$$

Setzen wir die Werthe, welche die Gleichungen (8), (9) und (10) darbieten, in die Gleichung (6), und ordnen die Glieder, so finden wir :

$$0 = \left\{ \begin{array}{l} h_0 \sum m (X + X_1) + k_0 \sum m (Y + Y_1) + l_0 \sum m (Z + Z_1) \\ h_1 \left[\sum m (X x + X_1 x_1) + \frac{1}{2} \sum m S m_i f(r) \frac{\Delta x^2}{r} \right] \\ h_2 \left[\sum m (X y + X_1 y_1) + \frac{1}{2} \sum m S m_i f(r) \frac{\Delta x \Delta y}{r} \right] \\ h_3 \left[\sum m (X z + X_1 z_1) + \frac{1}{2} \sum m S m_i f(r) \frac{\Delta x \Delta z}{r} \right] \\ k_1 \left[\sum m (Y x + Y_1 x_1) + \frac{1}{2} \sum m S m_i f(r) \frac{\Delta x \Delta y}{r} \right] \\ k_2 \left[\sum m (Y y + Y_1 y_1) + \frac{1}{2} \sum m S m_i f(r) \frac{\Delta y^2}{r} \right] \\ k_3 \left[\sum m (Y z + Y_1 z_1) + \frac{1}{2} \sum m S m_i f(r) \frac{\Delta y \Delta z}{r} \right] \\ l_1 \left[\sum m (Z x + Z_1 x_1) + \frac{1}{2} \sum m S m_i f(r) \frac{\Delta x \Delta z}{r} \right] \\ l_2 \left[\sum m (Z y + Z_1 y_1) + \frac{1}{2} \sum m S m_i f(r) \frac{\Delta y \Delta z}{r} \right] \\ l_3 \left[\sum m (Z z + Z_1 z_1) + \frac{1}{2} \sum m S m_i f(r) \frac{\Delta z^2}{r} \right] \end{array} \right.$$

Da nun die unendlich kleinen Grössen $h_0, k_0, l_0, h_1, k_1, l_1, h_2, k_2, l_2, h_3, k_3, l_3$ von einander ganz unabhängig und überhaupt ganz willkürlich sind, so kann die letzte Gleichung nur bestehen, wenn jeder mit einer solchen willkürlichen Grösse multiplizierte Factor gleich Null ist. Demnach bestehen im Gleichgewichtszustand des Mediums folgende Beziehungen :

$$\left. \begin{aligned} \Sigma m(X + X_2) &= 0 \\ \Sigma m(Y + Y_2) &= 0 \\ \Sigma m(Z + Z_2) &= 0 \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (11)$$

$$\left. \begin{aligned} \Sigma m(Xx + X_2 x_2) + \frac{1}{2} \Sigma m S m_1 f(r) \frac{\Delta x^2}{r} &= 0 \\ \Sigma m(Xy + X_2 y_2) + \frac{1}{2} \Sigma m S m_1 f(r) \frac{\Delta x \Delta y}{r} &= 0 \\ \Sigma m(Xz + X_2 z_2) + \frac{1}{2} \Sigma m S m_1 f(r) \frac{\Delta x \Delta z}{r} &= 0 \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (12)$$

$$\left. \begin{aligned} \Sigma m(Yx + Y_2 x_2) + \frac{1}{2} \Sigma m S m_1 f(r) \frac{\Delta x \Delta y}{r} &= 0 \\ \Sigma m(Yy + Y_2 y_2) + \frac{1}{2} \Sigma m S m_1 f(r) \frac{\Delta y^2}{r} &= 0 \\ \Sigma m(Yz + Y_2 z_2) + \frac{1}{2} \Sigma m S m_1 f(r) \frac{\Delta y \Delta z}{r} &= 0 \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (13)$$

$$\left. \begin{aligned} \Sigma m(Zx + Z_2 x_2) + \frac{1}{2} \Sigma m S m_1 f(r) \frac{\Delta x \Delta z}{r} &= 0 \\ \Sigma m(Zy + Z_2 y_2) + \frac{1}{2} \Sigma m S m_1 f(r) \frac{\Delta y \Delta z}{r} &= 0 \\ \Sigma m(Zz + Z_2 z_2) + \frac{1}{2} \Sigma m S m_1 f(r) \frac{\Delta z^2}{r} &= 0 \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (14)$$

Aus diesen Gleichungen folgt auch :

$$\left. \begin{aligned} \Sigma m(X + X_2) &= 0 \\ \Sigma m(Y + Y_2) &= 0 \\ \Sigma m(Z + Z_2) &= 0 \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (15)$$

$$\left. \begin{aligned} \Sigma m(Xy - Yx) + \Sigma m(X_2 y_2 - Y_2 x_2) &= 0 \\ \Sigma m(Xz - Zx) + \Sigma m(X_2 z_2 - Z_2 x_2) &= 0 \\ \Sigma m(Yz - Zy) + \Sigma m(Y_2 z_2 - Z_2 y_2) &= 0 \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (16)$$

$$\left. \begin{aligned} \Sigma m(Xx + X_2 x_2) + \frac{1}{2} \Sigma m S m_1 f(r) \frac{\Delta x^2}{r} &= 0 \\ \Sigma m(Yy + Y_2 y_2) + \frac{1}{2} \Sigma m S m_1 f(r) \frac{\Delta y^2}{r} &= 0 \\ \Sigma m(Zz + Z_2 z_2) + \frac{1}{2} \Sigma m S m_1 f(r) \frac{\Delta z^2}{r} &= 0 \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (17)$$

$$\left. \begin{aligned} \Sigma m (Xy + X_2 y_2) + \frac{1}{2} \Sigma m S m_1 f(r) \frac{\Delta x \Delta y}{r} = 0 \\ \Sigma m (Yz + Y_2 z_2) + \frac{1}{2} \Sigma m S m_1 f(r) \frac{\Delta y \Delta z}{r} = 0 \\ \Sigma m (Zx + Z_2 x_2) + \frac{1}{2} \Sigma m S m_1 f(r) \frac{\Delta z \Delta x}{r} = 0 \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (18)$$

Die Gleichungen (15) und (16) sind bekanntlich die Bedingungen, welche zwischen den äusseren auf einen Körper einwirkenden Kräften im Gleichgewichtszustand erfüllt sein müssen.

Die Gleichungen (17) und (18) sind gewisse Beziehungen zwischen den äusseren und inneren Kräften des Systems.

Steht das System nur unter der Einwirkung der inneren Kräfte, sind also $X = Y = Z = X_0 = Y_0 = Z_0 = 0$, so hat man vermöge (17) und (18):

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{2} \Sigma m S m_1 f(r) \frac{\Delta x^2}{r} = 0 \\ \frac{1}{2} \Sigma m S m_1 f(r) \frac{\Delta y^2}{r} = 0 \\ \frac{1}{2} \Sigma m S m_1 f(r) \frac{\Delta z^2}{r} = 0 \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (19)$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{2} \Sigma m S m_1 f(r) \frac{\Delta x \Delta y}{r} = 0 \\ \frac{1}{2} \Sigma m S m_1 f(r) \frac{\Delta y \Delta z}{r} = 0 \\ \frac{1}{2} \Sigma m S m_1 f(r) \frac{\Delta z \Delta x}{r} = 0 \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (20)$$

oder auch weil in diesem Falle das Summenzeichen Σ weggelassen, und dafür der constante Faktor $\frac{M}{m}$ gesetzt werden darf:

$$\left. \begin{aligned} S m_1 \frac{f(r)}{r} \Delta x^2 = 0 \\ S m_1 \frac{f(r)}{r} \Delta y^2 = 0 \\ S m_1 \frac{f(r)}{r} \Delta z^2 = 0 \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (21)$$

$$\left. \begin{aligned} 8 m_1 \frac{f(r)}{r} \Delta x \Delta y &= 0 \\ 8 m_1 \frac{f(r)}{r} \Delta x \Delta z &= 0 \\ 8 m_1 \frac{f(r)}{r} \Delta y \Delta z &= 0 \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (22)$$

Die Beziehungen (22) sind für sich klar, wenn die Gruppierung der Dynamiden von der Art ist, dass jedem Punkt, dessen relative Coordinaten $\Delta x \Delta y \Delta z$ sind, ein anderer Punkt entspricht, dessen Coordinaten $-\Delta x -\Delta y -\Delta z$ sind. Aber die Gleichungen (21) waren nicht vorauszusetzen, und man sieht aus denselben, dass $f(r)$ für gewisse Werthe von r positiv, für andere dagegen negativ sein muss, was auch in der That nach unseren Untersuchungen über die Natur von $f(r)$ der Fall ist. Denn wir haben Seite 55 gefunden :

$$f(r) = C^2 J(r) - 2 C G(r) - F(r) + \frac{C}{12} \left[C \frac{d^2 J(r)}{dr^2} - \frac{d^2 G(r)}{dr^2} \right] D^2 \dots \dots (23)$$

Will man die Sache ganz streng nehmen, so darf in dieser Untersuchung für $f(r)$ nicht dieser Ausdruck (23) gesetzt werden, denn in diesem ist der Einfluss der Gestalt vernachlässigt, sondern man müsste in den Gleichungen bis inclusive (22) $f(r)$ als eine Funktion ansehen, die nicht bloß mit r , sondern auch mit der Richtung von r veränderlich wäre. Denn da wir ein Medium voraussetzen, das nach verschiedenen Richtungen verschiedene Elastizitäten besitzt, so ist die Anziehung zweier Atome, die in einer der Elastizitätsaxen liegen, anders als die Anziehung zweier Atome, die in einer anderen Elastizitätsaxe sind.

Die Gleichungen (17) und (18) leisten zur Lösung von vielen Problemen vortreffliche Dienste; sie können insbesondere als Grundlage zu einer Theorie des Gleichgewichtes elastischer Körper gebraucht werden. Will man den Gleichgewichtszustand eines Stabes, der durch die Einwirkung äusserer Kräfte gebogen oder gedreht wird, mit vollkommener Schärfe bestimmen, so hat man es mit einem ausserordentlich schwierigen Probleme zu thun, dessen vollkommene Lösung noch lange nicht gelingen wird, wovon man sich am besten durch die Arbeiten *Lamb's* in seiner „Théorie de l'élasticité“ überzeugen kann. Für die praktischen Zwecke des Ingenieur- und Maschinenfaches macht man sich die Sache sehr bequem, und kommt dennoch zu Resultaten, die wenigstens eben so genau sind als die genauesten, welche heut zu Tag die Physik aufzuweisen hat, mit Ausnahme der optischen. Handelt es sich um einen Stab, der durch äussere Kräfte gebogen wird, so nimmt man an : 1) dass alle Atome, welche ursprünglich in einem Querschnitt des Stabes lagen, nach erfolgter Biegung in einem auf der Biegungslinie normalen Querschnitt liegen; 2) dass die Atome eines und desselben Querschnittes durch die Biegung ihre relative Gegeneinanderlagerung nicht ändern; 3) dass alle ursprünglich geraden zur Axe des Stabes parallelen Fasern nach erfolgter Biegung äqui-distante

Linien bilden. Oder handelt es sich um die Drehung eines Stabes, so nimmt man an : 1) dass alle Atome, welche ursprünglich in einem Querschnitt liegen, durch die Drehung ihre relative Lage gegen einander nicht ändern; 2) dass der Winkel, um welchen zwei Querschnitte des Stabes durch die Drehung gegen einander gewendet werden, dem Abstand der Querschnitte proportional ist. Man nimmt also jedesmal bei jedem Problem gewisse Gegeneinander-Verschiebungen der Atome an, berechnet die diesen Verschiebungen entsprechenden Kräfte, indem man dieselben den Verschiebungen proportional setzt, und sucht hierauf die Bedingungen des Gleichgewichts.

Auf diese Weise umgeht man durch mehr oder weniger naturgemässe Annahmen die Hauptschwierigkeiten des Problems, nämlich die Bestimmung der Verschiebungen, kommt aber zu Resultaten, welche mit den Thatsachen in den meisten Fällen eben so gut stimmen, wie die bis jetzt im Gebiete der Physik durchgeführten Rechnungen. Allein durch diese leichte Behandlung dieser Aufgaben ist zunächst für die Wissenschaft nicht viel gewonnen, und werden die technischen Fragen keineswegs vollständig beantwortet. Denn es ist in dieser letzteren Hinsicht gerade von besonderer Wichtigkeit, die Umstände und Bedingungen kennen zu lernen, unter welchen diese Annahmen zulässig sind, denn nur dann, wenn dies der Fall ist, werden die Rechnungsergebnisse eine hinreichende Genauigkeit gewähren können, und nur dann, wenn im deformirten Zustand eines Körpers solche Atomlagerungen vorhanden sind, wie bei der Rechnung vorausgesetzt wird, kann dieser Körper als ein solides Glied einer technischen Konstruktion dienen; denn wenn z. B. an den unteren Kanten eines nach abwärts gebogenen stabförmigen Körpers nicht blos Zusammendrückungen, sondern gleichzeitig Faltungen eintreten, oder wenn dieser Körper auch zu einer Drehung leicht inclinirt, so kann derselbe nicht als ein solides Konstruktionsglied gelten.

Es ist daher für diese praktischen Fragen von grosser Wichtigkeit, die Bedingungen kennen zu lernen, unter welchen der deformirte Zustand eines Körpers gerade von der Art sein wird, wie bei der Rechnung vorausgesetzt wird, und diese Bedingungen können mittelst der Gleichungen (17) und (18) ausfindig gemacht werden.

UMGESTALTUNG DER GLEICHGEWICHTSGLEICHUNGEN

(17) UND (18).

Die Gleichungen (17) und (18) können in einer Weise umgestaltet werden, dass die Lösung der Gleichgewichtsprobleme elastischer Körper sehr vereinfacht wird.

Wir wollen einen Gleichgewichtszustand einen natürlichen nennen, wenn der Körper nur allein der Thätigkeit der inneren Kräfte überlassen ist, also keinerlei äussere Kräfte einwirken; dagegen einen erzwungenen, wenn auf den Körper nicht nur innere, sondern auch äussere Kräfte einwirken. Für den natürlichen Gleichgewichtszustand ist also zu setzen :

$$X = Y = Z = X_0 = Y_0 = Z_0 = 0$$