

Badische Landesbibliothek Karlsruhe

Digitale Sammlung der Badischen Landesbibliothek Karlsruhe

Das Dynamiden-System

Redtenbacher, Ferdinand

Mannheim, 1857

Bestimmung des Modulus der Elastizität für feste Körper

[urn:nbn:de:bsz:31-266496](https://nbn-resolving.org/urn:nbn:de:bsz:31-266496)

und dies ist nun die wahre Beziehung, welche zwischen den Pressungen und Dichten oder spezifischen Gewichten eines Gases besteht, d. h. das wahre Mariott'sche Gesetz. Leider können die Zahlen, welche *Regnault* zum Behufe der Prüfung des gewöhnlichen Mariott'schen Gesetzes gesucht und gefunden hat, nicht gebraucht werden, um damit die Formel (14) zu prüfen, denn *Regnault* gibt in seinen Relations expérimentales etc. nur die Werthe von $\frac{N s_1}{N_1 s}$ und von $\frac{s_1}{s}$ an, nicht aber die absoluten Werthe der spezifischen Gewichte $s s_1$ des Gases, und es wird überhaupt sehr schwer halten, die Gleichung (14) durch Versuche ganz scharf zu prüfen, denn die Zahl der zu bestimmenden Constanten ist sehr gross, und ihr Betrag ist dagegen verschwindend klein, denn nach der That- sache gilt doch das gewöhnliche Mariott'sche Gesetz sehr nahe auch für sehr starke Compressionen.

In den Relations findet man z. B. Seite 421 angegeben, dass für atmosphärische Luft die Werthe des Quotienten $\frac{N s_1}{N_1 s}$ gleich 0.996490 und 0.987780 sind, wenn die Volums- verhältnisse im ersteren Falle 2, im letzteren 16 betragen. Das Mariott'sche Gesetz ist demnach noch bei einer 16fachen Verdichtung ziemlich genau.

Unsere Formel enthält noch eine Hauptschwierigkeit, die ich nicht zu bewältigen im Stande bin; das ist die Bestimmung von D^3 , d. h. die Bestimmung von dem Durchmesser einer Aetherhülle. Ich unterlasse es, die vielen weitläufigen aber vergeblichen Rechnungen hierher zu setzen, welche ich unternommen habe, um die Abhängigkeit zwischen D , s und t ausfindig zu machen.

Schon Seite 58, Gleichung (7), habe ich eine hypothetische Annäherungsformel für D^3 aufgestellt, allein mit derlei Formeln ist der Wissenschaft wenig gedient, denn wenn auch die Resultate ganz genau stimmen, so weiss man denn doch die Ursache nicht, und auf die Kenntniss der Ursachen kommt es vorzugsweise an.

Aus der Gleichung (14) ersieht man, dass *Regnault* wohl mit Recht gesagt hat: La vraie loi qui exprime les relations entre les volumes d'une même masse de gaz et les pressions qu'elle supporte, est évidemment trop complexe pour qu'on puisse espérer de la trouver uniquement par la méthode expérimentale.

BESTIMMUNG DES MODULUS DER ELASTIZITÄT FÜR FESTE KÖRPER.

Unsere Gleichung (11) gilt selbstverständlich auch für feste Körper, insofern man dieselben als Dynamidensysteme betrachten darf; wir können daher diese Gleichung zur Bestimmung des sogenannten Modulus der Elastizität benützen.

Nehmen wir an, ein fester Körper sei zuerst der Pressung N der atmosphärischen Luft ausgesetzt, und werde hierauf einem höheren äusseren Druck N_1 unterworfen, so wird seine Dichte zunehmen und von s in s_1 übergeben. Allein bei festen Körpern ist die Aenderung der Dichte stets äusserst klein, daher werden wir keinen merklichen Fehler begehen, wenn wir setzen:

$$\frac{N_1 - N}{s_1 - s} = \frac{dN}{ds} \dots \dots \dots (15)$$

Sucht man vermittelst (11) den Differenzialquotienten von N nach s und setzt seinen Werth in (15), so findet man :

$$\begin{aligned} \frac{N_1 - N}{s_1 - s} &= \mathfrak{A} C^2 \frac{\alpha + 2}{3} s^{\frac{\alpha - 1}{3}} - \mathfrak{B} C \frac{\beta + 2}{3} s^{\frac{\beta - 1}{3}} - \mathfrak{G} \frac{\gamma + 2}{3} s^{\frac{\gamma - 1}{3}} + \\ &+ \left(\mathfrak{D} C^2 \frac{\alpha + 4}{3} s^{\frac{\alpha + 1}{3}} - \mathfrak{G} C \frac{\beta + 4}{3} s^{\frac{\beta + 1}{3}} \right) D^2 \end{aligned}$$

oder wenn wir auch hier $\alpha = 1$ setzen :

$$\left. \begin{aligned} \frac{N_1 - N}{s_1 - s} &= \mathfrak{A} C^2 - \mathfrak{B} C \frac{\beta + 2}{3} s^{\frac{\beta - 1}{3}} - \mathfrak{G} \frac{\gamma + 2}{3} s^{\frac{\gamma - 1}{3}} + \\ &+ \left(\mathfrak{D} C^2 \frac{5}{3} s^{\frac{2}{3}} - \mathfrak{G} C \frac{\beta + 4}{3} s^{\frac{\beta + 1}{3}} \right) D^2 \end{aligned} \right\} \dots \dots (16)$$

Nennt man λ die lineare Zusammendrückung des Körpers, d. h. die Verkürzung jeder Längeneinheit, oder endlich die Annäherung zweier Körperatome, deren Entfernung bei dem Druck N gleich einer Längeneinheit war, so ist für so schwache Zusammendrückungen, wie sie bei festen Körpern vorkommen :

$$s_1 - s = 3 \lambda s \dots \dots \dots (17)$$

Nennt man ferner ϵ den Modulus der Elastizität in dem üblichen Sinne, so ist zu setzen :

$$\lambda \epsilon = N_1 - N \dots \dots \dots (18)$$

Führt man diese Resultate (17) und (18) in (16) ein, so erhält man einen Ausdruck, aus welchem folgt :

$$\epsilon = 3 \mathfrak{A} C^2 s \left[1 - \frac{\mathfrak{B}}{\mathfrak{A} C} \frac{\beta + 2}{3} s^{\frac{\beta - 1}{3}} - \frac{\mathfrak{G}}{\mathfrak{A} C^2} \frac{\gamma + 2}{3} s^{\frac{\gamma - 1}{3}} + \left(\frac{\mathfrak{D}}{\mathfrak{A}} \frac{5}{3} s^{\frac{2}{3}} - \frac{\mathfrak{G}}{\mathfrak{A} C} \frac{\beta + 4}{3} s^{\frac{\beta + 1}{3}} \right) D^2 \right] (19)$$

Dieser Ausdruck ist auch für eine gleichförmige Ausdehnung des Körpers richtig. Die Richtigkeit dieses Ausdruckes vorausgesetzt, so folgt aus demselben, dass der Modulus der Elastizität eines Materials (wegen s) von der Dichte und (wegen D²) von der Temperatur desselben abhängt. Auch richtet sich derselbe nach der Wärmecapazität des Stoffes. Eine scharfe Prüfung dieser Gleichung (19) durch Versuche wird schwerlich möglich werden, denn zur Bestimmung aller in dieser Gleichung erscheinenden Constanten wäre eine grosse Anzahl von äusserst genauen Versuchen nothwendig, und zur Prüfung der-

selben müsste man noch zwei- bis dreimal so viel Versuche machen. Diese Versuche sind äusserst schwierig mit hinreichender Genauigkeit durchzuführen, weil sich bei festen Körpern die Dichte nur um sehr wenig ändert, und der geringste Fehler in der Bestimmung der Dichte sehr beträchtliche Ungenauigkeiten veranlassen kann.

Die gewiss sehr schätzenswerthen Versuche *Wertheim's* über die Bestimmung des Modulus der Elastizität sind nicht im entferntesten genügend, um die Gleichung (19) durch numerische Rechnungen prüfen zu können, aber ich glaube, die Folgerungen, welche *Wertheim* aus seinen Versuchen zieht, vollständig hierher setzen zu sollen, obgleich einige derselben auf Verhältnisse Bezug haben, die uns in diesem Augenblick nicht berühren. Diese Folgerungen sind: *Mémoires de physique mécanique*, par *Wertheim* Pag. (67) :

Conclusions.

1. Le coefficient d'élasticité n'est pas constant pour un même métal; toutes les circonstances qui augmentent la densité le font grandir, et réciproquement.

Dies ist auch bei unserem Ausdruck (19) der Fall. ϵ wächst mit ρ .

2. Les vibrations longitudinales et transversales conduisent sensiblement au même coefficient d'élasticité.
3. Les vibrations conduisent à des coefficients d'élasticité plus grands que ceux qu'on obtient par l'allongement. Cette différence provient de l'accélération de mouvement produite par la chaleur dégagée.
4. Par suite, le son dans les corps solides est dû aux ondes avec condensation, et l'on pourra, au moyen de la formule donnée par *Duhamel*, se servir du rapport entre la vitesse théorique et réelle du son, pour trouver le rapport de la chaleur spécifique sans pression constante. Ce rapport est plus grand pour les métaux recuits que pour ceux non recuits.
5. Le coefficient d'élasticité diminue constamment avec l'élévation de la température, depuis 15 degrés jusqu'à 200 degrés, dans un rapport plus rapide que celui qu'on déduirait de la dilatation correspondante. Cela a lieu pour tous les métaux, excepté le fer et l'acier. Pour ceux-là si l'on prend les températures pour abscisses, et les coefficients d'élasticité correspondants pour ordonnées, les courbes qui représentent la marche de leur élasticité en fonction de ces températures s'élèvent depuis 15 degrés jusqu'à 100 degrés, puis elles ont un point d'inflexion situé entre 100 et 200 degrés.

Auch unsere Formel zeigt, dass der Modulus der Elastizität von der Temperatur abhängt, weil D mit der Temperatur t veränderlich ist, allein da ich nicht im Stande bin, die wahre Abhängigkeit zwischen D und t anzugeben, so ist eine genauere Vergleichung der obigen Erfahrungen mit unserer Theorie nicht möglich. Für die Mehrzahl der Metalle nimmt ϵ ab, wenn t wächst. Für Eisen und Stahl findet jedoch das Gegenteil statt.

Da unser D^2 mit t stets wächst, so kann unsere Formel mit dieser Erfahrung nur dann stimmen, wenn der mit D^2 multiplizierte in Klammern eingeschlossene Ausdruck für Eisen und Stahl positiv, für die übrigen Metalle jedoch negativ ist.

6. L'aimantation ne change pas sensiblement l'élasticité du fer.
7. L'allongement des verges ou fils, par l'application de charge, ne change leurs densités que très-peu; le coefficient d'élasticité ne doit donc aussi varier que de peu dans les diverses positions d'équilibre. C'est, en effet, ce qui a lieu tant que les charges n'approchent pas de très-près celle qui produit la rupture. La loi de *Gerstner* se trouve donc confirmée sur tous les métaux qui atteignent encore sensiblement une position d'équilibre, après avoir dépassé leur limite d'élasticité.

Unsere Gleichung ist für den Fall gefunden, dass der Körper nach allen Richtungen entweder gleichförmig ausgedehnt oder gleichförmig comprimirt werde, kann also auf Stäbe, die nur nach ihrer Länge gedehnt werden, nicht angewendet werden; sie ist jedoch mit der unter Nr. 7 ausgesprochenen Erfahrung in keinem Widerspruch.

8. Les allongements permanents ne se font pas par sauts, par saccades, mais d'une manière continue; en modifiant convenablement la charge et sa durée d'action, on pourra produire tel allongement permanent qu'on voudra.

Wenn ein Körper, dessen Atome axig gestaltet sind, was man bei Metallen wohl annehmen muss, nach einer Richtung stark gedehnt wird, müssen nothwendig Aenderungen in der Stellung und Gruppierung der Atome eintreten, und der Körper wird daher durch jede solche Dehnung gleichsam zu einem anderen Stoff.

9. Une vraie limite d'élasticité n'existe pas, et si l'on n'observe pas d'allongements permanents pour les premières charges, c'est qu'on ne les a pas laissées agir pendant assez de temps, et que la verge, soumise à l'expérience, est trop courte, relativement au degré d'exactitude de l'instrument qui sert aux mesures.

Les valeurs de l'allongement maximum et de la cohésion dépendent aussi beaucoup de la manière d'opérer; on trouve la première d'autant plus grande, et la seconde d'autant plus petite, que l'on augmente plus lentement les charges. On voit à combien d'arbitraire est soumise la détermination du plus petit et du plus grand allongement permanent, et qu'on ne saurait, avec *M. Lagerhjelm*, fonder une loi sur leurs valeurs.

10. La résistance à la rupture est considérablement diminuée par le recuit. L'élévation de la température jusqu'à 200 degrés ne diminue pas de beaucoup la cohésion des métaux recuits d'avance.
11. Le produit ϵe^7 du module d'élasticité par la septième puissance de la distance des molécules, ou le produit $\epsilon s^{-\frac{7}{3}}$ est le même pour la plupart des métaux.

Dies folgt aus unserer Gleichung nicht, ist aber auch nach den von *Wertheim* gefundenen Zahlen so ungenau, dass man diese Folgerung (11) nicht anerkennen kann.

Wenn wir in unserer langen Formel (19) alle auf die Einheit folgenden Glieder des Ausdruckes in der Klammer ganz weglassen, gewiss also sehr derb d'rein gehen, so würde aus derselben folgen, dass annähernd $\frac{\epsilon}{C^2 s}$ für alle Metalle constant wäre, und das ist in der That wenigstens eben so genau richtig als obiger Ausspruch von *Wertheim*.

	s	ϵ	c	$\log. \frac{\epsilon}{C^2 s}$
Blei	11.215	1775	0.0314	5.3010
Eisen	7.848	20869	0.1138	5.3463
Gold	18.514	5584	0.0324	5.4578
Kupfer	8.933	12450	0.0951	5.2041
Zink	7.146	9021	0.0955	5.1461

Damit ist wenigstens gezeigt, dass selbst bei einer wahren Misshandlung unserer theoretischen Resultate dennoch Zahlen herauskommen, die sich sehen lassen dürfen.

Formeln dieser Art, wie (19) ist, können mit den bis jetzt bestimmten physikalischen Elementen der Stoffe gar nicht geprüft werden, weil diese Elemente nicht einem und demselben individuellen Stoff entnommen sind. Angenommen z. B., die Beziehung

$$\frac{\epsilon}{C^2 s} = \text{const.}$$

wäre wirklich eine Wahrheit, was gewiss nicht der Fall ist, so könnte man für diese Constante den rechten Werth nicht finden, wenn man für s das spezifische Gewicht eines gewissen Eisens, für c die Wärmecapazität eines andern Eisens, und für ϵ den Modulus der Elastizität eines dritten Eisens in Rechnung brächte, sondern nur dann, wenn die Grössen $\epsilon c s$ von einem und demselben Stück Eisen bekannt wären.

Es ist meine Ueberzeugung, dass die den festen Substanzen entsprechenden physikalischen Fundamentalzahlen von Grund aus neu bestimmt werden müssen. Die ganze Million von Versuchen, die mit Eisen gemacht wurden, um das spezifische Gewicht, die Wärmecapazität, den Modulus der Elastizität, die absolute Festigkeit, das Wärme- und Elektrizitäts-Leitungsvermögen dieses Stoffs zu bestimmen, ist beinahe vergeblich gemacht, denn es ist mit diesem ganzen Zahlengetümmel nicht möglich, irgend einen Zusammenhang zwischen den genannten physikalischen Elementen des Eisens ausfindig zu machen, oder ein auf mathematischem Wege gefundenes Resultat zu prüfen, wo hingegen eine vollständige Bestimmung aller physikalischen Elemente von einigen wenigen Stückchen Eisen zur Entdeckung jenes Zusammenhanges führen könnte. Die Naturforscher haben fort und fort das Wort „Thatsache“ im Munde, wenn man aber diese Dinge mit scharfem Blick ansieht, fangen diese feststehenden Thatsachen alle zu wackeln an, oder fallen gar zu Boden.