Das Dynamiden-System

Redtenbacher, Ferdinand

Mannheim, 1857

Wechselwirkung zweier Dynamiden

urn:nbn:de:bsz:31-266496

ZWEITER ABSCHNITT.

Ueber das Gleichgewicht eines Dynamidensystems.

WECHSELWIRKUNG ZWEIER DYNAMIDEN.

Eine mathematisch genaue Berechnung der Wechselwirkung zweier Dynamiden, mit Berücksichtigung der Gestalten der Kerne und der Aethergruppirung in den Dynamiden ist mit unüberwindlichen Schwierigkeiten verbunden; wir müssen uns also mit einer Annäherung begnügen. Wir nehmen an: 1) die Entfernung der Dynamiden sei sehr gross nicht nur im Verhältniss zu den Dimensionen der Kerne, sondern selbst im Verhältniss zu den Dimensionen der Hüllen. Unter dieser Voraussetzung begehen wir keinen merklichen Fehler, wenn wir bei der Berechnung der Wechselwirkung die Kerne der Dynamiden wie materielle Punkte behandeln. 2) Die Aetherhüllen seien von kubischer Gestalt, und die Atome seien in denselben gleichförmig dicht gruppirt. Das ist in der Natur nicht möglich, aber gleichwohl werden wir auch durch diese Annahme, wenn die Entfernung der Dynamiden sehr gross ist, keinen merklichen Fehler begehen, weil überhaupt unter dieser Voraussetzung die Anziehung von der Gestalt der Hüllen und von der Gruppirung des Aethers beinahe nicht abhängt.

Es seien Fig. 7:

A und A_1 die Schwerpunkte der Kerne der beiden Dynamiden, deren Wechselwirkung berechnet werden soll;

$\overline{A A_1} = r$ die Entfernung der Schwerpunkte der Dynamiden;

a ein Aetheratom der Dynamide von A;

a_1 ein Aetheratom der Dynamide von A_1;

$\left.\begin{array}{l} A\,a = \varrho \\ A_1 a_1 = \varrho_1 \end{array}\right\}$ die Entfernungen dieser Aetheratome von ihren Kernen;

m die Masse des Kernes der Dynamide A;

m_1 die Masse des Kernes der Dynamide A_1;

μ die Masse jedes Aetheratoms der Hüllen von A;

μ_1 die Masse jedes Aetheratoms der Hüllen von A_1.

Diese Massen μ und μ_1, so wie auch m und m_1 sind zwar gleich gross, es ist jedoch für die Rechnung angemessen, sie so zu behandeln, als wären sie ungleich.

Fällen wir von a und a_1 auf die Richtung der Verbindungslinie von A und A_1 die Perpendikel $a\,b$ $a_1\,b_1$ und setzen $\overline{A\,b} = x$ $\overline{A_1\,b_1} = x_1$. Die Wechselwirkungen zweier Atome sind gewisse Funktionen ihrer Entfernungen, die wir durch die Symbole $F(\;)$ $G(\;)$ $J(\;)$ bezeichnen wollen. Ersteres bezieht sich auf die Wechselwirkung zweier Körperatome; das zweite auf die Wechselwirkung zwischen einem Körperatom und einem Aetheratom; das dritte auf die Wechselwirkung zweier Aetheratome.

Die totale Wechselwirkung der Dynamiden können wir durch $m\,m_1\,f(r)$ ausdrücken.

Dies vorausgesetzt, und die Eingangs ausgesprochene Annahme berücksichtigend, kann man nun mit ziemlicher Genauigkeit schreiben:

$$m\,m_1\,f(r) = \Sigma\Sigma\,\mu\,\mu_1\,J(r + x_1 - x) - m\,m_1\,F(r) - \Sigma\,m\,\mu_1\,G(r + x_1) - \Sigma\,m_1\,\mu\,G(r - x) \qquad (1)$$

wobei $\Sigma\Sigma$ Summenzeichen sind, die sich auf sämmtliche Aetheratome der Hüllen beziehen. Die abstossenden Kräfte sind positiv, die anziehend wirkenden sind negativ in Rechnung gebracht. Fällt der Werth des ganzen Ausdruckes rechter Hand des Gleichheitszeichens positiv aus, so ist die Wechselwirkung $m\,m_1\,f(r)$ eine Abstossung; fällt jener Ausdruck negativ aus, so ist die Wechselwirkung $m\,m_1\,f(r)$ eine Anziehung.

Da wir voraussetzen, dass die grössten Werthe von x und x_1 gegen r sehr klein sind, so dürfen wir vermöge des Taylor'schen Satzes schreiben:

$$\begin{aligned}
J(r + x_1 - x) &= J(r) + \frac{d\,J(r)}{d\,r}(x_1 - x) + \frac{1}{2}\frac{d^2 J(r)}{d\,r^2}(x_1 - x)^2 \\
G(r + x_1) &= G(r) + \frac{d\,G(r)}{d\,r}\,x_1 + \frac{1}{2}\frac{d^2 G(r)}{d\,r^2}\,x_1^2 \\
G(r - x) &= G(r) - \frac{d\,G(r)}{d\,r}\,x + \frac{1}{2}\frac{d^2 G(r)}{d\,r^2}\,x^2
\end{aligned}$$

demnach auch:

$$\left.\begin{aligned}
\Sigma\Sigma\,\mu\,\mu_1\,J(r + x_1 - x) &= J(r)\,\Sigma\Sigma\,\mu\,\mu_1 + \frac{d\,J(r)}{d\,r}\,\Sigma\Sigma\,\mu\,\mu_1\,(x_1 - x) \\
&\quad + \frac{1}{2}\frac{d^2 J(r)}{d\,r^2}\,\Sigma\Sigma\,\mu\,\mu_1\,(x_1 - x)^2 \\
\Sigma\,m\,\mu_1\,G(r + x_1) &= G(r)\,\Sigma\,m\,\mu_1 + \frac{d\,G(r)}{d\,r}\,\Sigma\,m\,\mu_1\,x_1 \\
&\quad + \frac{1}{2}\frac{d^2 G(r)}{d\,r^2}\,\Sigma\,m\,\mu_1\,x_1^2 \\
\Sigma\,m_1\,\mu\,G(r - x) &= G(r)\,\Sigma\,m_1\,\mu - \frac{d\,G(r)}{d\,r}\,\Sigma\,m_1\,\mu\,x \\
&\quad + \frac{1}{2}\frac{d^2 G(r)}{d\,r^2}\,\Sigma\,m_1\,\mu\,x^2
\end{aligned}\right\} \quad . \; . \; (2)$$

Bezeichnen wir durch q das Atomgewicht und durch c die Wärmecapazität des Stoffes, so ist vermöge (6), Seite 32 :

$$\Sigma \mu = \Sigma \mu_1 = q c \mu$$

Da wir ferner annehmen dürfen, dass sich die Kerne im Massenmittelpunkt der Aetherhülle befinden, so ist :

$$\Sigma \mu x = \Sigma \mu_1 x_1 = 0$$

Daher werden die Ausdrücke (2) :

$$\left.\begin{aligned} \Sigma \Sigma \mu \mu_1 J(r + x_1 - x) &= q^2 c^2 \mu^2 J(r) + \frac{1}{2} \frac{d^2 J(r)}{dr^2} \Sigma \Sigma \mu \mu_1 (x^2 + x_1^2) \\ \Sigma m \mu_1 G(r + x_1) &= m q c \mu\, G(r) + \frac{m}{2} \frac{d^2 G(r)}{dr^2} \Sigma \mu_1 x_1^2 \\ \Sigma m_1 \mu G(r - x) &= m_1 q c \mu\, G(r) + \frac{m_1}{2} \frac{d^2 G(r)}{dr^2} \Sigma \mu x^2 \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad (3)$$

Diese Summe rechter Hand des Gleichheitszeichens können wir ausrechnen, weil wir eine kubische Form der Aetherhüllen und eine gleichmässig dichte Gruppirung der Aetheratome innerhalb der Hüllen vorausgesetzt haben.

Nennen wir D die Seite von diesem Kubus, e die Entfernung zweier unmittelbar neben einander befindlichen Aetheratome, und stellen wir uns auch noch vor, dass die Aetheratome nach geradlinigen Reihen gelagert sind, wie Fig. 8 andeutet, so ist :

$\frac{D}{e}$ die Anzahl der Aetheratome einer Reihe;

$\left(\frac{D}{e}\right)^2$ die Anzahl der Aetheratome einer Schichte;

$\left(\frac{D}{e}\right)^3 = q c$ die Anzahl der Aetheratome einer ganzen Hülle.

und es ist ferner sehr nahe :

$$\Sigma \mu x^2 = 2 \mu \left(\frac{D}{e}\right)^2 \left[e^2 + 4 e^2 + 9 e^2 + \ldots\ldots \left(\frac{D}{2e}\right)^2 e^2\right]$$

$$= 2 \mu D^2 \left[1 + 4 + 9 + \ldots\ldots \left(\frac{D}{2e}\right)^2\right]$$

$$= 2 \mu D^2 \frac{\frac{D}{2e}\left(\frac{D}{2e} + 1\right)\left(\frac{D}{e} + 1\right)}{6}$$

oder weil die Einheit sowohl gegen $\frac{D}{2e}$ als auch gegen $\frac{D}{e}$ vernachlässigt werden kann :

$$\left.\begin{aligned} \Sigma \mu x^2 &= \frac{\mu D^3}{12 e^3} = \frac{\mu D^2}{12}\left(\frac{D}{e}\right)^3 = \frac{\mu c q D^2}{12} \\ \text{Eben so ist auch:} \quad & \\ \Sigma \mu_1 x_1^2 &= \frac{\mu c q D^2}{12} \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (4)$$

und endlich finden wir:

$$\begin{aligned} \Sigma\Sigma \mu \mu_1 (x^2 + x_1^2) &= \Sigma\Sigma \mu \mu_1 x^2 + \Sigma\Sigma \mu \mu_1 x_1^2 \\ &= 2\, c q \mu \frac{c q \mu}{12} D^2 \\ &= \frac{1}{6}\, c^2 q^2 \mu^2 D^2 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (5) \end{aligned}$$

Führt man diese Rechnungsresultate (4) und (5) in (3) ein, so erhält man:

$$\left.\begin{aligned} \Sigma\Sigma \mu \mu_1\, J(r + x_1 - x) &= c^2 q^2 \mu^2 \left[J(r) + \frac{1}{12} \frac{d^2 J(r)}{dr^2} D^2 \right] \\ \Sigma m \mu_1\, G(r + x_1) &= m c q \mu \left[G(r) + \frac{1}{24} \frac{d^2 G(r)}{dr^2} D^2 \right] \\ \Sigma m_1 \mu\, G(r - x) &= m_1 c q \mu \left[G(r) + \frac{1}{24} \frac{d^2 G(r)}{dr^2} D^2 \right] \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (5)$$

Führt man endlich diese Resultate (5) in die Gleichung (1) ein, so findet man:

$$m m_1 f(r) = \left\{ \begin{aligned} & c^2 q^2 \mu^2 J(r) - 2 m c q \mu G(r) - m m_1 F(r) \\ & + \frac{c q \mu}{12} \left[c q \mu \frac{d^2 J(r)}{d r^2} - m \frac{d^2 G(r)}{d r^2} \right] D^2 \end{aligned} \right\} \quad \ldots\ldots \quad (6)$$

Bezeichnet man, wie üblich, mit g die Beschleunigung durch die Schwere beim freien Fall der Körper, so ist:

$$m = m_1 = \frac{q}{2 g}$$

setzt man ferner:

$$2 g \mu c = C$$

so bedeutet C eine der Wärmecapazität proportionale Grösse, und man findet mit Berücksichtigung derselben aus (6):

$$f(r) = C^2 J(r) - 2 C G(r) - F(r) + \frac{C}{12} \left[C \frac{d^2 J(r)}{d r^2} - \frac{d^2 G(r)}{d r^2} \right] D^2 \quad \ldots \quad (7)$$

Dies ist die mysteriöse Funktion, welche *Cauchy* seinen Untersuchungen über das einfache Medium zu Grunde legt. Dieselbe besteht theils aus positiven, theils aus negativen Gliedern; ihr Betrag kann daher je nach Umständen positiv oder negativ ausfallen.

Ist $f(r)$ positiv, so ist die Wechselwirkung der Dynamiden eine Abstossung; ist $f(r)$ negativ, so ist diese Wechselwirkung eine Anziehung.

Diese Wechselwirkung hängt nicht blos von der Entfernung r der Dynamidenkerne, sondern auch von der in der Gewichtseinheit des Stoffes enthaltenen Aethermasse oder von der Wärmecapazität des Stoffes, und endlich auch noch von der Temperatur des Stoffes ab; denn im schwingenden Zustand des Aethers sind die Hüllen grösser, ist also D grösser als im ruhigen Zustand. Freilich begehen wir abermals einen kleinen Fehler, wenn wir den Ausdruck (7) auch für den Fall gelten lassen, wenn sich der Aether im schwingenden Zustand befindet, allein es ist aus der Natur der Sache herauszufühlen, dass dieser Fehler von keinem Belang sein kann. Die Wechselwirkung zweier Dynamiden verschwindet, wenn $f(r) = o$ wird, und dies ist der Fall für:

$$D_1^2 = \frac{12}{C} \frac{F(r) + 2CG(r) - C^2 J(r)}{C\frac{d^2 J(r)}{dr^2} - \frac{d^2 G(r)}{dr^2}} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (8)$$

Da wir voraussetzen, dass die Funktionen $J(r)$ $G(r)$ $F(r)$ mit dem Wachsen von r äusserst rasch abnehmen, so sind die zweiten Differenzialquotienten dieser Funktionen im Verhältniss zu den Funktionen selbst sehr kleine Grössen; man wird sich also für gewisse Rechnungen erlauben dürfen, das mit D^2 multiplizirte Glied des Ausdruckes (7) ganz zu vernachlässigen, und dann wird:

$$f(r) = C^2 J(r) - 2CG(r) - F(r) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (9)$$

GLEICHGEWICHT EINES NACH ALLEN RICHTUNGEN GLEICH ELASTISCHEN (ISOTROPEN) DYNAMIDEN-SYSTEMS.

Denken wir uns, ein nach allen Richtungen gleich elastisches Dynamidensystem befinde sich unter der Einwirkung eines äusseren Druckes im Gleichgewicht, und suchen wir die Bedingungen dieses Gleichgewichtes auszumitteln.

Wir lassen alle Bezeichnungen, die wir in der vorhergehenden Untersuchung gewählt haben, auch hier gelten, und bezeichnen noch durch N den äusseren auf Compression wirkenden Druck, der auf jede Flächeneinheit der Oberfläche des Systems ausgeübt wird.

Wenden wir auf dieses im Gleichgewicht befindliche Dynamidensystem das Prinzip der virtuellen Geschwindigkeit an, so müssen wir in dem System eine den Zusammenhang desselben nicht aufhebende Verschiebung vornehmen. Da aber alle Atome vollkommen frei beweglich sind, so können wir mit jedem derselben eine ganz beliebige unendlich kleine Verschiebung vornehmen, es ist daher auch erlaubt, solche Verschiebungen eintreten zu lassen, die einer gleichmässigen Ausdehnung der ganzen Masse entsprechen, ohne dabei in den Aetherhüllen Verschiebungen der Aetheratome gegen die Kerne vorzunehmen.