Die anfänglichen und die gegenwärtigen Erwärmungszustände der Weltkörper

Redtenbacher, Ferdinand

Mannheim, 1861

Der Abkühlungsprozess

Hieraus sieht man, dass der Ballungsakt, selbst bei der nicht besonders grossen Erde, mit einer Energie geschieht, die eine Initialtemperatur von 55200 Graden hervorzubringen vermag.

Vermittelst der Tabelle (Seite 11) und der so eben für die Erde gefundenen Initialtemperatur ergeben sich nun für die übrigen Planeten und für die Sonne nachstehende absolute Werthe:

	u_0 Absolute Werthe.	
Merkur	22080°	etwa 4/5 dieses
Venus	52440°	
Erde	55200°	
Mars	12696°	
Jupiter	1656000°	
Saturn	662400°	
Uranus	210800°	
Sonne	178075200°	

Die Initialtemperatur der Sonne übersteigt, wie man sieht, alle Vorstellungen.

Der Abkühlungsprozess.

Um die Temperatur zu berechnen, welche in den Weltkörpern durch die Abkühlung in dem kalten Weltraum entsteht, wollen wir die Ergebnisse benützen, welche Poisson in seinen Abhandlungen über die Wärmevertheilung gefunden hat. Im Journal de l'école polytechnique, tome XII, page 317, untersuchte Poisson die Abkühlung einer homogenen Kugel, welche initial so erwärmt ist, dass die Temperatur jedes Punktes, dessen Entfernung vom Mittelpunkt gleich r ist, durch eine gegebene Funktion von r [durch $f(r)$] ausgedrückt wird. Die Rechnung zeigt, dass die Temperatur u eines Punktes, dessen Entfernung gleich r ist, nachdem die Abkühlung durch eine Zeit t gedauert hat, ausgedrückt werden kann durch eine Summenformel, in welcher nebst verschiedenen Constanten t r und eine gewisse Grösse ϱ erscheint. Das Summenzeichen bezieht sich auf ϱ, und die sämmtlichen Werthe von ϱ, auf welche sich das Summenzeichen bezieht, sind die unendlich vielen Wurzeln einer gewissen transcendenten Gleichung. Allein wenn man eine sehr lange Abkühlungszeit annimmt, hat nur ein einziges Glied der Summe einen erheblichen Werth, und zwar ist es dasjenige, welches der kleinsten Wurzel der transcendenten Gleichung entspricht.

Der Grenzzustand der Erwärmung nähert sich daher einem gewissen Werthe, der durch ein einziges Glied ausgedrückt werden kann und diesen Werth wollen wir zu unseren Betrachtungen benützen.

Nennt man:

R den Halbmesser der Erde;
a den Wärmeleitungscoeffizienten des Materials, aus welchem die Kugel besteht;
b den Wärmeausstrahlungscoeffizienten;
t die Abkühlungszeit, die also sehr gross gedacht wird;
f (r) das Gesetz der initialen Erwärmung der Kugel, d. h. der Erwärmung zur Zeit $t=0$;
r die Entfernung eines beliebigen Punktes der Kugel vom Centrum;
u die Temperatur zur Zeit t in der Entfernung r;
0 die Temperatur des Weltraums;

so ist für den oben bezeichneten Grenzzustand:

Théorie de la chaleur pag 377

$$u = \frac{2}{R r} e^{-\frac{a^2 \pi^2}{R^2} t} \left(\sin\frac{\pi r}{R} - \frac{\pi r}{b R^2} \cos\frac{\pi r}{R}\right) \int_0^R \sin\frac{\pi r}{R} f(r)\, r\, d r \quad . \quad (9)$$

Nehmen wir nun an, im Initialzustand sei in der ganzen Kugelmasse in constanter Temperatur u_0 vorhanden gewesen, so ist $f(r) = u_0 = \text{constant}$, und dann wird:

$$\int_0^R \sin\frac{\pi r}{R} f(r)\, r\, d r = \frac{u_0}{\pi} R^2$$

folglich wegen (9):

$$u = \frac{2 u_0}{\pi r} R \left(\sin\frac{\pi r}{R} - \frac{\pi r}{b R^2} \cos\frac{\pi r}{R}\right) e^{-\frac{a^2 \pi^2}{R^2} t} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (10)$$

Bezeichnen wir die Temperatur im Mittelpunkt mit $\left(\substack{u \\ r=0}\right)$, an der Oberfläche mit $\left(\substack{u \\ r=R}\right)$, so folgt aus (10):

$$\left(\substack{u \\ r=0}\right) = 2 u_0 e^{-\frac{a^2 \pi^2}{R^2} t} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (11)$$

$$\left(\underset{r=R}{u}\right)=\frac{2u_0}{bR}\, e^{-\frac{a^2\pi^2}{R^2}t} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (12)$$

Allein wir haben früher gefunden (Gleichung 7):

$$u_0=\sqrt{\frac{\pi\lambda\mu R^2}{k\,\mathfrak{G}}}$$

4/5

daher wird:

$$\left(\underset{r=0}{u}\right)=\frac{2\pi\lambda\mu}{k\,\mathfrak{G}}\, R^2 e^{-\frac{a^2\pi^2}{R^2}t} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (13)$$

8/5

$$\left(\underset{r=R}{u}\right)=\frac{2\pi\lambda\mu}{k\,\mathfrak{G}\, b}\, R\, e^{-\frac{a^2\pi^2}{R^2}t} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (14)$$

8/5

Die Exponentialgrösse $e^{-\frac{a^2\pi^2}{R^2}t}$ wächst mit R, und zwar in einem starken Maasse; daher finden wir aus den Ausdrücken (13) (14), dass die Grenztemperaturen, welchen die Weltkörper sich nach und nach nähern, bei den grossen Körpern vielmals grösser sind als bei den kleinen Körpern.

Aus dem Ausdruck (9) für u folgt, wenn man $r=0$ setzt:

$$\left(\underset{r=0}{u}\right)=2u_0\left(1-\frac{1}{bR}\right)e^{-\frac{a^2\pi^2}{R^2}t} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (15)$$

Durch Division der Ausdrücke (9) und (15) ergibt sich:

$$u=\left(\underset{r=0}{u}\right)\frac{\frac{1}{\pi}\frac{R}{r}\sin\pi\frac{r}{R}-\frac{1}{bR}\cos\pi\frac{r}{R}}{1-\frac{1}{bR}} \quad \ldots\ldots \quad (16)$$

Für die Erde wie für jeden Weltkörper ist $\frac{1}{bR}$ eine gegen die Einheit verschwindend kleine Grösse; daher erhält man annähernd:

$$u=\left(\underset{r=0}{u}\right)\frac{\sin\pi\frac{r}{R}}{\pi\frac{r}{R}} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (17)$$

Dieser Ausdruck bestimmt das Gesetz, nach welchem die Temperatur vom Mittelpunkt an gegen die Oberfläche der Kugel hin abnimmt.

Durch Differenziation des Ausdruckes (17) findet man:

$$\frac{d\,u}{d\,r} = \frac{\left(\begin{matrix}u \\ r=0\end{matrix}\right)}{r}\left[\cos\pi\frac{r}{R} - \frac{\sin\pi\frac{r}{R}}{\pi\frac{r}{R}}\right] \quad . \; . \; . \; . \; . \quad (18)$$

Dieser Ausdruck gibt an, um wie viel die Temperatur abnimmt, wenn man sich um eine Längeneinheit vom Mittelpunkt der Kugel weiter entfernt.

Am Mittelpunkt selbst ist $r = 0$ und wird:

$$\left(\frac{d\,u}{d\,r}\right)_{r=0} = 0 \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (19)$$

An der Oberfläche ist $r = R$ und wird:

$$\left(\frac{d\,u}{d\,r}\right)_{r=R} = -\frac{\left(\begin{matrix}u \\ r=0\end{matrix}\right)}{R} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (20)$$

Diese Berechnungen über die Abkühlung sind nur als ungefähre Schätzungen zu betrachten, indem die theoretischen Formeln unter der Voraussetzung gewonnen wurden, dass die ganze Masse der Kugel in jeder Hinsicht vollkommen homogen ist, was bei der Erde und bei den übrigen Weltkörpern nicht der Fall ist.
