Die anfänglichen und die gegenwärtigen Erwärmungszustände der Weltkörper

Redtenbacher, Ferdinand

Mannheim, 1861

Berechnung der Wirkungsgrösse, die einem Ballungsakt entspricht

urn:nbn:de:bsz:31-266472

auf der Sonne noch auf irgend einem der selbstleuchtenden Fixsterne oder sonstiger selbstleuchtender Himmelskörper organisches Leben gefunden werden kann, sondern nur allein auf den durch Abkühlung dunkel gewordenen Planeten. Die Sonnen und Fixsterne sind also für die Planeten Licht- und Wärmequellen, welche auf denselben alles Leben und Wirken hervorbringen. Erst dann, wenn einmal eine Sonne durch Abkühlung eine feste Rinde erhalten hat, kann auf derselben organisches Leben zum Vorschein kommen.

Wenn man bedenkt, dass alle Weltkörper ihre Entstehung, ihre Bewegung, ihre Wärme- und Lichtzustände einem Gravitationsprozess verdanken; dass unsere Erde überdiess die mächtigsten Motoren, Wasser, Wind und Dampfkraft, so wie auch den ganzen Reichthum an organischem Leben, der Licht- und der Wärmewirkung der Sonne, also in letzter Instanz abermals einem Gravitationsprozess verdankt: so erkennt man den kolossalen Umfang der Rolle, welche die Gravitationskraft im Weltganzen zu spielen bestimmt ist, und die bewunderungswürdige Einfachheit der Mittel, welche die Natur zur Erreichung ihrer grossen Zwecke in Anwendung zu bringen weiss.

Berechnung der Wirkungsgrösse, die einem Ballungsakt entspricht.

Die Berechnung der Wirkungsgrösse, die einem Ballungsakt entspricht, unterliegt keiner besonderen Schwierigkeit, wenn man sich erlaubt anzunehmen: 1. dass ursprünglich die Stofftheilchen so weit von einander entfernt sind, dass kein merklicher Fehler begangen wird, wenn man bei der Berechnung der Wirkungsgrösse sich so benimmt, wie wenn der Stoff ursprünglich, d. h. vor dem Ballungsakt unendlich weit zerstreut gewesen ist; 2. dass durch die Ballung ein kugelförmiges Gebilde entsteht, in welchem die Masse gleichförmig und continuirlich vertheilt ist.

Es sei r_0 die initiale Entfernung zweier Massentheilchen m und m_1, r deren Entfernung in irgend einem beliebigen Augenblick während des Ballungsaktes, r_1 ihre Entfernung in dem gebildeten Ball, λ die Kraft, mit welcher sich vermöge der allgemeinen Gravitation zwei Masseneinheiten anziehen, wenn deren Entfernung gleich der Einheit ist. Dies vorausgesetzt, ist die Wirkung, welche entwickelt wird, indem die Massentheilchen aus der Entfernung r_0 in die Entfernung r_1 übergehen:

$$-\int_{r_0}^{r_1} \frac{m\, m_1\, \lambda}{r^2}\, d\, r$$

Verrichtet man die Integration, so findet man

$$\lambda\, m\, m_1 \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_0}\right)$$

Da wir annehmen, dass r_0 vielmal grösser ist als r_1, d. h. dass das ursprüngliche Volumen der im Raum zerstreuten Materie vielmals grösser war als das Volumen der geballten Masse, so dürfen wir $\frac{1}{r_0}$ gegen $\frac{1}{r_1}$ vernachlässigen. Die Wirkung, welche den Massentheilchen m und m_1 entspricht, wird demnach:

$$\frac{\lambda\, m\, m_1}{r_1}$$

Legen wir nun dem Zeichen r_1 den Sinn bei, dass es bedeutet die Entfernung irgend eines Massentheilchens der geballten Masse von dem Ort, den das ganz individuelle Massenatom m in der geballten Masse einnimmt, so ist:

$$\lambda\, m\, S \frac{m_1}{r_1}$$

die Wirkung, welche während des Ballungsaktes durch die Annäherung aller Massenatome an das Atom m entsteht. Diese Summe $S \frac{m_1}{r_1}$ kann nichts anderes sein, als eine gewisse Funktion der Entfernung des Atoms m vom Mittelpunkt der Kugel, die durch den Ballungsakt entsteht. Berechnen wir diese Summe für jedes Massenatom m, multipliziren jede dieser Summen mit dem Produkt $m \lambda$ und machen hierauf die Summen aller Produkte $m \lambda S \frac{m_1}{r_1}$, so erhalten wir den zweifachen Werth der Totalwirkung W, welche dem ganzen Ballungsakt entspricht; es ist demnach:

$$W = \frac{1}{2} \Sigma \left[m\, \lambda \left(S \frac{m_1}{r_1} \right) \right] \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

Wir müssen nun diesem symbolischen Ausdrucke eine für die Ausrechnung seines Werthes geeignete Form geben.

Nennen wir:

ϱ und ϱ_1 die Entfernungen der Atome m und m_1 in der geballten Masse vom Mittelpunkt derselben;

Θ den Winkel, welchen die Radien ϱ und ϱ_1 gegen einander bilden; so ist:

$$r_1^2 = \varrho^2 + \varrho_1^2 - 2\,\varrho\,\varrho_1 \cos\Theta \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

Legen wir durch den Radius ϱ irgend eine fixe Ebene und bezeichnen durch ω den Neigungswinkel derselben mit der Ebene des Dreiecks, das durch die drei Linien $\varrho\,\varrho_1\,r_1$ gebildet wird, und betrachten m_1 als diejenige Masse, welche in dem Raum eingeschlossen ist, der durch die drei unendlich kleinen Dimensionen $\varrho_1\,d\,\Theta$, $d\,\varrho_1$, $\varrho_1 \sin\Theta\,d\,\omega$ bestimmt wird, so können wir schreiben:

$$m_1 = \mu\,\varrho_1\,d\,\Theta\,d\,\varrho_1\,\varrho_1 \sin\Theta\,d\,\omega$$
$$m_1 = \mu\,\varrho_1^2 \sin\Theta\,d\,\varrho_1\,d\,\Theta\,d\,\omega \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$

wobei μ die Masse bedeutet, welche die Volumeneinheit der geballten Masse enthält.

Wir können daher schreiben:

$$S\,\frac{m_1}{r_1} = \mu \iiint \frac{\varrho_1^2 \sin\Theta\,d\,\varrho_1\,d\,\Theta\,d\,\omega}{\sqrt{\varrho^2 + \varrho_1^2 - 2\,\varrho\,\varrho_1 \cos\Theta}} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4)$$

Da diese Summe auf den ganzen Ball auszudehnen ist, so sind die Integrationen auszuführen:

für ϱ_1	von	0	bis	R
„ ω	„	0	„	2π
„ Θ	„	0	„	π

wobei R den Halbmesser des Balles bezeichnet.

Die Integration in Bezug auf ω gibt:

$$S\,\frac{m_1}{r_1} = 2\,\pi\,\mu \iint \frac{\varrho_1^2 \sin\Theta\,d\,\varrho_1\,d\,\Theta}{\sqrt{\varrho^2 + \varrho_1^2 - 2\,\varrho\,\varrho_1 \cos\Theta}}$$

Nun ist:

$$\sin\Theta\,d\,\Theta = -\,d\,(\cos\Theta)$$

demnach:

$$S\,\frac{m_1}{r_1} = 2\,\pi\,\mu \int \varrho_1^2\,d\,\varrho_1 \left(\int \frac{-\,d\,(\cos\Theta)}{\sqrt{\varrho^2 + \varrho_1^2 - 2\,\varrho\,\varrho_1 \cos\Theta}} \right)$$

Coord. von m_1: $\rho_1 \cos\varphi \cos\psi$, $\rho_1 \sin\varphi \cos\psi$, $\rho_1 \sin\psi$; Volumen $\rho_1^2 \cos\psi\, d\rho_1\, d\varphi\, d\psi$; legt man ρ in die z-Axe, so sind die Coord. von m: 0, 0, ρ, also $r_1^2 = \rho^2 + \rho_1^2 - 2\rho\rho_1 \sin\psi$, u.

$$S\frac{m_1}{r_1} = \mu \int_0^R \rho_1^2\, \partial\rho_1 \int_0^{2\pi} \partial\varphi \int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} \frac{\cos\psi\, \partial\psi}{\sqrt{\rho^2 + \rho_1^2 - 2\rho\rho_1 \sin\psi}}$$

$\Theta = \frac{\pi}{2} - \psi$, $\omega = \varphi$.

Allgemein ist:

$$\int \frac{-\mathrm{d}(\cos\Theta)}{\sqrt{\varrho^2+\varrho_1^{\,2}-2\varrho\varrho_1\cos\Theta}} = \frac{2}{2\varrho\varrho_1}\sqrt{\varrho^2+\varrho_1^{\,2}-2\varrho\varrho_1\cos\Theta}$$

demnach:

$$\int_{-1}^{1}\quad \cancel{\int_0^{\pi}} \frac{-\mathrm{d}(\cos\Theta)}{\sqrt{\varrho^2+\varrho_1^{\,2}-2\varrho\varrho_1\cos\Theta}} = \frac{1}{\varrho\varrho_1}\Big[(\varrho+\varrho_1)-(\varrho-\varrho_1)\Big] = \frac{2}{\varrho} \quad \text{wenn } \rho > \rho_1$$

$$= \frac{1}{\rho\rho_1}\Big[(\rho+\rho_1)-(\rho_1-\rho)\Big] = \frac{2}{\rho_1}, \quad \text{"} \ \rho < \rho_1$$

und folglich erhalten wir:

$$|3 \qquad S\frac{m_1}{r_1} = 2\pi\mu\int_0^R \frac{2\varrho_1^{\,2}\,\mathrm{d}\varrho_1}{\varrho} = \frac{4\pi\mu}{\varrho}\frac{R^3}{3} \;\Big|\; 2\pi\mu\int_0^{\rho}\frac{2\rho_1^2}{\rho}\partial\rho_1 + 2\pi\mu\int_{\rho}^{R}\frac{2\rho_1^2}{\rho_1}\partial\rho_1$$

Diesen Werth in (1) angeführt, erhält man: $= 2\pi\mu\left(R^2-\frac{1}{3}\rho^2\right)$

$$W = \frac{1}{2}\Sigma m\lambda\frac{4\pi\mu}{\varrho}\frac{R^3}{3} = \frac{2}{3}\pi\lambda\mu R^3\Sigma\frac{m}{\varrho} \quad . \; . \; . \; . \quad (5)$$

Denken wir uns mit ϱ und $\varrho+\mathrm{d}\varrho$ zwei Kugelflächen beschrieben, so ist die zwischen denselben enthaltene Masse gleich $4\varrho^2\pi.\mathrm{d}\varrho\mu$. Der Antheil der Summe $\Sigma\frac{m}{\varrho}$, welcher dieser Masse entspricht, ist demnach $4\varrho\pi\mu\mathrm{d}\varrho$ und der Totalwerth ist:

$$\Sigma\frac{m}{\varrho} = \int_0^R 4\pi\mu.\varrho\,\mathrm{d}\varrho = 2\pi\mu R^2$$

$$W = \frac{4}{6}\lambda R^5\pi^2\mu^2 - \frac{1}{3}\pi\mu^2\lambda\int_0^R 4\rho^4\pi\,d\rho = \frac{16}{15}\lambda\pi^2\mu^2R^5$$

Wir erhalten demnach:

$$W = \frac{2}{3}\pi\lambda\mu R^3.2\pi\mu R^2 = \frac{4}{3}\pi^2\mu^2\lambda R^5 \quad . \; . \; . \; . \quad (6)$$

woraus man zunächst ersieht, dass die Ballungswirkung der fünften Potenz des Radius von dem entstandenen Ball proportional ist, also bei grossen Bällen ungemein gross wird.

Temperatur des Balles.

Nimmt man an, dass diese ganze Wirkung zuletzt, wenn die Ballung geschehen ist, in den Aether der Dynamiden übergeht und Schwingungen erzeugt, die der Wärme entsprechen, und dass alle Dynamiden in gleicher Weise erschüttert werden, so dass in allen gleiche Temperaturen eintreten, so lässt sich diese Temperatur u_0 leicht berechnen.

$$W = \frac{1}{2}\Sigma m\lambda\, 2\pi\mu\left(R^2-\frac{1}{3}\rho^2\right) = \frac{1}{2}2\pi\mu\lambda R^2\Sigma m - \frac{1}{3}\pi\mu\lambda\Sigma m\rho^2$$

$$= \pi\mu\lambda R^2 4R^3\pi \ldots$$

Nennt man $\mathfrak{S}$ die Wärmemenge (in Wärmeeinheiten ausgedrückt), welche erforderlich ist um einer Masseneinheit des Balles eine Temperaturerhöhung von einem Grad zu ertheilen, so ist: $\frac{4}{3} R^3 \pi \mu \mathfrak{S} u_0$ die Wärmemenge, welche erforderlich ist, um der Masse $\frac{4}{3} R^3 \pi \mu$ des Balles eine Temperaturerhöhung von u_0 Grad zu ertheilen. Nennt man weiter $k = 424$ Kilogramm-Meter die Wirkungsgrösse, welche einer Wärmeeinheit entspricht, so ist:

$$\frac{4}{3} R^3 \pi \mu \mathfrak{S} u_0 k.$$

die in Kilogramm-Metern ausgedrückte Wirkungsgrösse, welche erforderlich ist, um die geballte Masse von 0° Temperatur bis u_0 Grad zu erwärmen. Wenn wir annehmen, dass die ursprüngliche Temperatur der Materie 0° war, so erhalten wir demnach:

$$W = \frac{4}{3} \pi^2 \lambda \mu^2 R^5 = \frac{4}{3} R^3 \pi \mu \mathfrak{S} u_0 k$$ 16/15

Demnach:

$$u_0 = \frac{\pi \lambda \mu R^2}{k \mathfrak{S}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (7)$$ 4/5

Hiermit ist nun die Temperatur der geballten Masse berechnet, und man sieht, dass dieselbe dem Quadrat des Halbmessers des Balles proportional ist, dass sich demnach die mittleren Temperaturen der Weltkörper wie die zweiten Potenzen ihrer Halbmesser oder wie ihre Oberflächen verhalten.

Numerische Rechnungen. Relative Werthe.

Nimmt man an, dass $\mathfrak{S}$ für alle Planeten und für die Sonne den gleichen Werth hat, so findet man nach den bekannten Massen und Durchmessern dieser Weltkörper die nachstehenden Resultate (Ettingshausen's Physik, Seite 198):

	Durchmesser. $2R$	Masse. $\frac{4}{3} R^3 \pi \mu$	Initialtemperatur u_0
Merkur. . . .	0·39	0·16	0·40
Venus	0·97	0·92	0·95
Erde	1·00	1·00	1·00
Mars	0·56	0·13	0·23
Jupiter. . . .	11·56	340	30·00
Saturn	9·61	98	12·00
Uranus. . . .	4·26	17	4·00
Sonne	110	354936	3226

Die absoluten Werthe der initialen Temperaturen.

Wendet man die Formel (7) auf die Erde an, so hat man:

R Halbmesser der Erde . . . $R = 6366200$ Meter.

Nennen wir M die Masse der Erde, q das Gewicht eines gewissen Körpers an der Oberfläche der Erde, an einem Ort, wo die Beschleunigung beim freien Fall $g = 9{\cdot}808$ Meter beträgt; m die Masse dieses Körpers, mithin $m = \frac{q}{2g}$; so ist:

$m = \frac{q}{g}$

$$\lambda \frac{M m}{R^2} = q, \quad \lambda = \frac{q R^2}{M m}$$

Es ist aber:

$$M = \frac{4}{3} R^3 \pi \mu, \quad m = \frac{q}{2g}$$

demnach wird:

$\lambda = \frac{3g}{4\pi R}$

$$\lambda = \frac{6g}{4\pi\mu} \cdot \frac{1}{R}$$

Führt man diesen Werth von λ in (7) ein, so findet man:

$u_0 = \frac{3}{5} \frac{g}{\mathfrak{C} k} R$

$$u_0 = \frac{6}{4} \frac{g}{\mathfrak{C} k} \cdot R \quad \text{. . . . .} \quad (8)$$

$\mathfrak{C}$ ist die Anzahl der Wärmeeinheiten, welche erforderlich sind, um einer Masseneinheit eines Körpers eine Temperaturerhöhung von einem Grad zu ertheilen. Aber nach unserer Art der Massenmessung ist eine Masseneinheit gleich der Masse eines Körpers, der an einem Ort, wo die Beschleunigung durch den freien Fall $g = 9{\cdot}808$ Meter beträgt, $2 \times 9.808 = 20$ Kilogramm (nahe) wiegt. $\mathfrak{C}$ ist mithin die Anzahl der Wärmeeinheiten, die erforderlich sind, um 20 Kilogrammen Erdmasse eine Temperaturerhöhung von einem Grad zu ertheilen. Nimmt man an, dass die Erdmasse grösstentheils aus geschmolzener Erde besteht, so kann man die Wärmekapazität von 1 Kilogramm Gewicht $= 0{\cdot}2$ (Wasser $= 1$) annehmen, und dann ist $\mathfrak{C} = 20 \times 0{\cdot}2 = 4$.

$9{\cdot}808 = 10(?)$

$\mathfrak{C} = 10 \times 0{\cdot}2 = 2$

Setzt man in (8) $R = 6366200$, $\mathfrak{C} = 4$, $g = 9{\cdot}808$, $k = 424$, so findet man:

$$u_0 = \frac{6 \times 9{\cdot}808 \times 6366200}{4 \times 4 \times 424} = 55200 \text{ Grad}$$

$$u_0 = \frac{3 \cdot 9{\cdot}808 \cdot 6366200}{5 \cdot 2 \cdot 424} = \frac{4}{5} \cdot 55200 = 44161 = 44200(?)$$

Hieraus sieht man, dass der Ballungsakt, selbst bei der nicht besonders grossen Erde, mit einer Energie geschieht, die eine Initialtemperatur von 55200 Graden hervorzubringen vermag.

Vermittelst der Tabelle (Seite 11) und der so eben für die Erde gefundenen Initialtemperatur ergeben sich nun für die übrigen Planeten und für die Sonne nachstehende absolute Werthe:

	u_0 Absolute Werthe.	
Merkur	22080°	um 4/5 [illegible]
Venus	52440°	
Erde	55200°	
Mars	12696°	
Jupiter	1656000°	
Saturn	662400°	
Uranus	210800°	
Sonne	178075200°	

Die Initialtemperatur der Sonne übersteigt, wie man sieht, alle Vorstellungen.

Der Abkühlungsprozess.

Um die Temperatur zu berechnen, welche in den Weltkörpern durch die Abkühlung in dem kalten Weltraum entsteht, wollen wir die Ergebnisse benützen, welche Poisson in seinen Abhandlungen über die Wärmevertheilung gefunden hat. Im Journal de l'école polytechnique, tome XII, page 317, untersuchte Poisson die Abkühlung einer homogenen Kugel, welche initial so erwärmt ist, dass die Temperatur jedes Punktes, dessen Entfernung vom Mittelpunkt gleich r ist, durch eine gegebene Funktion von r [durch $f(r)$] ausgedrückt wird. Die Rechnung zeigt, dass die Temperatur u eines Punktes, dessen Entfernung gleich r ist, nachdem die Abkühlung durch eine Zeit t gedauert hat, ausgedrückt werden kann durch eine Summenformel, in welcher nebst verschiedenen Constanten t r und eine gewisse Grösse ϱ erscheint. Das Summenzeichen bezieht sich auf ϱ, und die sämmtlichen Werthe von ϱ, auf welche sich das Summenzeichen bezieht, sind die unendlich vielen Wurzeln einer gewissen transcendenten Gleichung. Allein wenn man eine sehr lange Abkühlungszeit annimmt, hat nur ein einziges Glied der Summe einen erheblichen Werth, und zwar ist es dasjenige, welches der kleinsten Wurzel der transcendenten Gleichung entspricht.

Der Grenzzustand der Erwärmung nähert sich daher einem gewissen Werthe, der durch ein einziges Glied ausgedrückt werden kann und diesen Werth wollen wir zu unseren Betrachtungen benützen.

Nennt man:

R den Halbmesser der Erde;
a den Wärmeleitungscoeffizienten des Materials, aus welchem die Kugel besteht;
b den Wärmeausstrahlungscoeffizienten;
t die Abkühlungszeit, die also sehr gross gedacht wird;
f(r) das Gesetz der initialen Erwärmung der Kugel, d. h. der Erwärmung zur Zeit $t = 0$;
r die Entfernung eines beliebigen Punktes der Kugel vom Centrum;
u die Temperatur zur Zeit t in der Entfernung r;
0 die Temperatur des Weltraums;

so ist für den oben bezeichneten Grenzzustand:

Théorie de la chaleur

pag 377

$$u = \frac{2}{Rr} e^{-\frac{a^2 \pi^2}{R^2} t} \left(\sin \frac{\pi r}{R} - \frac{\pi r}{bR^2} \cos \frac{\pi r}{R}\right) \int_0^R \sin \frac{\pi r}{R} f(r)\, r\, dr \quad . \quad (9)$$

Nehmen wir nun an, im Initialzustand sei in der ganzen Kugelmasse in constanter Temperatur u_0 vorhanden gewesen, so ist $f(r) = u_0 =$ constant, und dann wird:

$$\int_0^R \sin \frac{\pi r}{R} f(r)\, r\, dr = \frac{u_0}{\pi} R^2$$

folglich wegen (9):

$$u = \frac{2 u_0}{\pi r} R \left(\sin \frac{\pi r}{R} - \frac{\pi r}{bR^2} \cos \frac{\pi r}{R}\right) e^{-\frac{a^2 \pi^2}{R^2} t} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (10)$$

Bezeichnen wir die Temperatur im Mittelpunkt mit $\left(\begin{smallmatrix} u \\ r=0 \end{smallmatrix}\right)$, an der Oberfläche mit $\left(\begin{smallmatrix} u \\ r=R \end{smallmatrix}\right)$, so folgt aus (10):

$$\left(\begin{matrix} u \\ r=0 \end{matrix}\right) = 2 u_0 e^{-\frac{a^2 \pi^2}{R^2} t} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (11)$$

$$\left(u_{r=R}\right) = \frac{2\,u_0}{b\,R}\, e^{-\frac{a^2 \pi^2}{R^2} t} \quad \dots\dots\dots\dots \quad (12)$$

Allein wir haben früher gefunden (Gleichung 7):

$$u_0 = \frac{\pi \lambda \mu R^2}{k\, \mathfrak{G}}$$

4/5

daher wird:

$$\left(u_{r=0}\right) = \frac{2 \pi \lambda \mu}{k\, \mathfrak{G}} R^2 e^{-\frac{a^2 \pi^2}{R^2} t} \quad \dots\dots\dots \quad (13)$$

8/5

$$\left(u_{r=R}\right) = \frac{2 \pi \lambda \mu}{k\, \mathfrak{G}\, b} R\, e^{-\frac{a^2 \pi^2}{R^2} t} \quad \dots\dots\dots\dots \quad (14)$$

8/5

Die Exponentialgrösse $e^{-\frac{a^2 \pi^2}{R^2} t}$ wächst mit R, und zwar in einem starken Maasse; daher finden wir aus den Ausdrücken (13) (14), dass die Grenztemperaturen, welchen die Weltkörper sich nach und nach nähern, bei den grossen Körpern vielmals grösser sind als bei den kleinen Körpern.

Aus dem Ausdruck (9) für u folgt, wenn man $r = 0$ setzt:

$$\left(u_{r=0}\right) = 2\, u_0 \left(1 - \frac{1}{b\,R}\right) e^{-\frac{a^2 \pi^2}{R^2} t} \quad \dots\dots\dots \quad (15)$$

Durch Division der Ausdrücke (9) und (15) ergibt sich:

$$u = \left(u_{r=0}\right) \frac{\frac{1}{\pi} \frac{R}{r} \sin \pi \frac{r}{R} - \frac{1}{b\,R} \cos \pi \frac{r}{R}}{1 - \frac{1}{b\,R}} \quad \dots\dots \quad (16)$$

Für die Erde wie für jeden Weltkörper ist $\frac{1}{b\,R}$ eine gegen die Einheit verschwindend kleine Grösse; daher erhält man annähernd:

$$u = \left(u_{r=0}\right) \frac{\sin \pi \frac{r}{R}}{\pi \frac{r}{R}} \quad \dots\dots\dots \quad (17)$$

Dieser Ausdruck bestimmt das Gesetz, nach welchem die Temperatur vom Mittelpunkt an gegen die Oberfläche der Kugel hin abnimmt.

Durch Differenziation des Ausdruckes (17) findet man:

$$\frac{du}{dr} = \frac{\left(\begin{matrix}u \\ r=0\end{matrix}\right)}{r}\left[\cos\pi\frac{r}{R} - \frac{\sin\pi\frac{r}{R}}{\pi\frac{r}{R}}\right] \quad \ldots\ldots \quad (18)$$

Dieser Ausdruck gibt an, um wie viel die Temperatur abnimmt, wenn man sich um eine Längeneinheit vom Mittelpunkt der Kugel weiter entfernt.

Am Mittelpunkt selbst ist $r = 0$ und wird:

$$\left(\frac{du}{dr}\right)_{r=0} = 0 \quad \ldots\ldots\ldots \quad (19)$$

An der Oberfläche ist $r = R$ und wird:

$$\left(\frac{du}{dr}\right)_{r=R} = -\frac{\left(\begin{matrix}u \\ r=0\end{matrix}\right)}{R} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (20)$$

Diese Berechnungen über die Abkühlung sind nur als ungefähre Schätzungen zu betrachten, indem die theoretischen Formeln unter der Voraussetzung gewonnen wurden, dass die ganze Masse der Kugel in jeder Hinsicht vollkommen homogen ist, was bei der Erde und bei den übrigen Weltkörpern nicht der Fall ist.
