Projektive Untersuchungen über die Kreisverwandtschaften der nichteuklidischen Geometrie

Ludwig, Walther

1904

urn:nbn:de:bsz:31-270270

PROJEKTIVE UNTERSUCHUNGEN ÜBER DIE KREISVERWANDTSCHAFTEN DER NICHTEUKLIDISCHEN GEOMETRIE

VORGELEGT

ZUR ERLANGUNG DER VENIA LEGENDI
FÜR DIE FÄCHER DER MATHEMATIK UND DER
DARSTELLENDEN GEOMETRIE

AN DER

GROSSH. TECHN. HOCHSCHULE FRIDERICIANA ZU KARLSRUHE

VON

DR. PHIL. WALTHER LUDWIG
ASSISTENTEN DER DARSTELLENDEN GEOMETRIE

KARLSRUHE I. B.
DRUCK DER G. BRAUNSCHEN HOFBUCHDRUCKEREI
1904

PROJEKTIVE UNTERSUCHUNGEN ÜBER DIE KREISVERWANDTSCHAFTEN DER NICHTEUKLIDISCHEN GEOMETRIE

VORGELEGT

ZUR ERLANGUNG DER VENIA LEGENDI
FÜR DIE FÄCHER DER MATHEMATIK UND DER
DARSTELLENDEN GEOMETRIE

AN DER

GROSSH. TECHN. HOCHSCHULE FRIDERICIANA ZU KARLSRUHE

VON

DR: PHIL. WALTHER LUDWIG
ASSISTENTEN DER DARSTELLENDEN GEOMETRIE

KARLSRUHE I. B.
DRUCK DER G. BRAUNSCHEN HOFBUCHDRUCKEREI
1904

Referent: Herr Professor Dr. *F. Schur.*

Correferent: Herr Professor Dr. *A. Krazer.*

Einleitung.

S. Lie hat auf analytischem Wege[1]) die sämtlichen Berührungstransformationen bestimmt, die die geodätischen Kreise einer Fläche konstanter Krümmung zulassen. Über die Punkttransformationen unter ihnen besteht, soweit sie sich auf die euklidische Ebene beziehen, eine reiche Literatur, und in neuester Zeit haben die Herren F. Hausdorff[2]) und H. Liebmann[3]) diese Untersuchungen auch auf die nichteuklidische Geometrie ausgedehnt; was ferner die Zusammensetzung der Berührungstransformationen der Kreise in der euklidischen Ebene angeht, so hat Herr G. Scheffers[4]) auf synthetischem Wege gezeigt, daß dazu außer den Punkttransformationen nur zwei sehr einfache eigentliche Berührungstransformationen nötig sind, die „Dilatation" und die von ihm eingeführte „Z-Transformation".

Der Zweck der vorliegenden Arbeit nun ist es, auf eine einheitliche und übersichtliche Weise die Berührungstransformationen der Kreise für die drei ebenen Geometrien auf-

---

[1]) Vgl. Lie-Scheffers, „Geometrie der Berührungstransformationen", Bd I, Abschn. 1, Kap. 5

[2]) „Analytische Beiträge zur nichteuklidischen Geometrie". (Berichte über die Verhandlungen der Kgl. sächsischen Gesellschaft der Wissenschaften zu Leipzig, 1899, 51. Bd, S. 161.)

[3]) „Synthetische Ableitung der Kreisverwandtschaften in der Lobatschefskijschen Geometrie." (Ebenda, 1902, 54. Bd., S. 244)

[4]) „Synthetische Bestimmung aller Berührungstransformationen der Kreise in der Ebene." (Ebenda, 1899, 51. Bd, S. 145.)

zustellen und konstruktiv zu behandeln. Als besonders bequem bot sich hierfür die auch sonst viel gebrauchte Methode dar, von der Geometrie der Kreise auf der Kugel auszugehen und sie durch Projektion auf die Ebene zu übertragen; je nachdem das Projektionszentrum auf der Kugel oder in ihrem Innern oder außerhalb liegt, erhält man dann in der Ebene die parabolische (Euklid) oder die elliptische (Riemann) oder die hyperbolische Geometrie (Lobatschefskij); der Umriß der Kugel liefert den absoluten Kegelschnitt der betreffenden ebenen Geometrie, und jeder Kreis der Kugel geht in einen Kegelschnitt über, der den absoluten Kegelschnitt doppelt berührt und deshalb im Sinne der herrschenden ebenen Geometrie wiederum ein Kreis ist.

Die Punkttransformationen der Kreise auf der Kugel sind die Kollineationen der Kugel in sich, und hieraus erhellt, daß bei ihnen wesentlich neue Ergebnisse nicht gefunden werden konnten; doch sei auf die einfachen und wohl neuen Konstruktionen hingewiesen, die für die grundlegende Verwandtschaft der „Inversion“ in den beiden nichteuklidischen Ebenen angegeben sind. Die eigentlichen Berührungstransformationen der Kreise auf der Kugel dagegen führen zu einer interessanten Gruppe von zweideutigen Transformationen der Ebenen des Raumes; diese von mir mit dem Buchstaben „$\mathfrak{E}$“ bezeichneten Transformationen lassen sich sämtlich mit Hilfe der oben erwähnten Kollineationen aus ganz besonders einfachen unter ihnen, den „$\mathfrak{E}_0$-Transformationen“ zusammensetzen, und gerade die $\mathfrak{E}_0$-Transformationen liefern uns für die ebenen Geometrien die Dilatationen und die $\mathfrak{Z}$-Transformationen; dadurch wird der innere Grund des von Herrn Scheffers gefundenen Resultates aufgedeckt und dieses Resultat auch auf die nichteuklidischen Geometrien erweitert.

Da ich auf eine rein geometrische Behandlung der Berührungstransformationen Wert lege, weiche ich von der bisher wohl allein üblichen Betrachtungsweise insofern ab, als ich von einer jeden Transformation nicht nur einen Zweig und auch diesen nur im Innern eines gewissen Gebietes zu erfassen, sondern über die Transformation als Ganzes — in ihrer vollen Erstreckung über die Ebene und in ihrer vollen Vieldeutigkeit — Rechenschaft zu geben suche. Darin ist es auch begründet, daß die Voraussetzungen, von denen ich bei der Aufstellung der fraglichen Transformationen ausgehe, sehr enge, zunächst sogar scheinbar zu enge sind; doch zeigt das Resultat durch den Vergleich mit den allgemein gültigen Ergebnissen Lies, daß die gemachten Voraussetzungen gerechtfertigt sind und von den sämtlichen Berührungstransformationen der Kreise erfüllt werden.

Es sei mir noch gestattet, Herrn Professor Dr. F. Schur an dieser Stelle für den mir bei der Abfassung dieser Arbeit in liebenswürdigster Weise erteilten Rat meinen ergebensten und verbindlichsten Dank auszusprechen.

Erster Abschnitt.

Die einfachsten Punktverwandtschaften, die Kreise in Kreise überführen.

§ I. Die Kollineationen, die eine Kugel in sich selbst verwandeln.

1. Die einfachsten Kreisverwandtschaften der Ebene werden wir aus den einfachsten Kreisverwandtschaften der Kugel erhalten. *Deshalb setzen wir auf einer Kugel Φ eine umkehrbar eindeutige, algebraische Punktverwandtschaft $\mathfrak{P}$ voraus, die jedem Kreis wieder einen Kreis zuordnet*; sie führt die Kreise, die durch zwei feste Punkte gehen, über in die Kreise, die durch die entsprechenden beiden Punkte laufen. Fassen wir die Ebenen der Kreise ins Auge, so erhalten wir durch $\mathfrak{P}$ eine umkehrbar eindeutige Verwandtschaft der Ebenen des Raumes, die jeden Ebenenbüschel wieder in einen Ebenenbüschel überführt, also eine Kollineation; und zwar vertauscht sie die Berührungsebenen von Φ untereinander, da jeder Punkt von Φ als Kreis aufzufassen ist, dessen Ebene die Kugel Φ berührt. Mit dieser Kollineation der Ebenen des Raumes ist eine Kollineation der Punkte des Raumes verbunden, die die Punkte von Φ unter einander vertauscht, und eben diese so erzeugte Verwandtschaft zwischen den Punkten von Φ ist unsere $\mathfrak{P}$. Wir sehen hieraus:

Die umkehrbar eindeutigen Punktverwandtschaften auf einer Kugel, die Kreise in Kreise überführen, werden durch die Kollineationen des Raumes erzeugt, die die Kugel in sich selbst transformieren.

2. Die Kollineationen nun, die eine Fläche II. Grades in sich transformieren, zerfallen bekanntlich[1]) in zwei Arten; durch eine Kollineation der ersten Art wird jede Regelschar der Fläche projektiv auf sich selbst, durch eine Kollineation der zweiten Art projektiv auf die andere Regelschar bezogen; jede Kollineation der ersten Art läßt sich durch eine gerade, jede der zweiten Art durch eine ungerade Anzahl von involutorischen Homologien (Zentralkollineationen) zusammensetzen, bei deren jeder das Homologiezentrum und die Hauptebene in bezug auf die Fläche II. Grades polar sind. Diese Zusammensetzung, auf die es uns hier ankommt, läßt sich unabhängig von den Regelscharen der Fläche, die ja bei unserer Kugel imaginär werden, folgendermaßen ableiten:

Gegeben seien drei Paare entsprechender Punkte A, A'; B, B'; C, C' auf Φ. Dann gibt es zwischen den Feldern der Ebenen $\delta \equiv (ABC)$ und $\delta' \equiv (A'B'C')$ eine Kollineation, die die in ihnen befindlichen Kreise der Kugel so ineinander überführt, daß A und A', B und B', C und C' einander zugeordnet sind; sie ist bestimmt, wenn man zu diesen drei Punktepaaren als viertes noch etwa den Pol der Geraden $\overline{AB}$ i. Bez. auf den in δ gelegenen Kreis und den Pol der Geraden $\overline{A'B'}$ i. Bez. auf den in δ' gelegenen Kreis hinzunimmt. Sind nun in dieser Kollineation X, X' irgend zwei einander entsprechende Punkte und sind ferner D und D' die i. Bez. auf Φ genommenen Pole von δ und δ', so müssen in jeder Kollineation, die Φ so in sich selbst überführt, daß A und A', B und B', C und C' gepaart sind, auch X und X', D und D' Paare entsprechender Punkte sein. Von den unendlich vielen Kollineationen, die durch diese fünf — nicht in allgemeiner Lage befindlichen — Punktepaare be-

[1]) F. Klein, Math. Ann. Bd. 4, S. 412 u. 622. H. G. Zeuthen, Math. Ann. Bd. 18, S. 33 ff. R. Sturm, Math. Ann. Bd. 26, S. 464 ff.

stimmt sind, gibt es zwei, die Φ in sich transformieren; wir erhalten sie, wenn E der eine Schnittpunkt von $\overline{DX}$ mit Φ ist und wenn $\overline{D'X'}$ Φ in E_1' und E_2' schneidet, durch die fünf Punktpaare

$$A, A'; \ B, B'; \ C, C'; \ D, D'; \ E, E_1'$$

bezw.

$$A, A'; \ B, B'; \ C, C'; \ D, D'; \ E, E_2'$$

und erkennen, daß die eine aus der anderen durch Hinzufügung der involutorischen Homologie entsteht, die D' zum Zentrum und δ' zur Hauptebene hat. Wir finden also:

Sind auf einer Kugel drei Punktepaare gegeben, so gibt es zwei Kollineationen der Kugel in sich, in denen diese Punktepaare Paare entsprechender Punkte sind; jede dieser Kollineationen lässt sich aus der anderen durch Hinzufügung einer involutorischen Homologie ableiten.

3. Diese beiden Kollineationen nun bauen wir in folgender Weise aus involutorischen Homologien auf, deren Zentrum und Hauptebene reell und i. Bez. auf Φ polar sind: Zuerst nehmen wir eine der Homologien, deren Zentren die Scheitel der beiden Kegel des durch Φ und das Ebenenpaar δ, δ' bestimmten Büschels von Flächen II. Grades ist; diese Scheitel sind immer reell, weil Φ keine reellen Geraden trägt. Die Homologie führt δ in δ' und dabei die Punkte A, B, C in drei Punkte A_1, B_1, C_1 des in δ', befindlichen Kreises der Φ über. Zu zweit kommt die Homologie, deren Zentrum der Schnittpunkt der Geraden $\overline{A_1 B'}$ und $\overline{B_1 A'}$ ist; in ihr entspricht dem A_1 der B', dem B_1 der A' und dem C_1 ein Punkt C_2 desselben Kreises. Zu dritt nehmen wir die Homologie, deren Zentrum der Schnittpunkt der Geraden $\overline{A'B'}$ und $\overline{C_2 C'}$ ist und die deshalb A' und B', sowie C_2 und C' einander zuordnet. Durch die Aufeinanderfolge dieser drei Homologien erhalten wir eine Kollineation der Kugel Φ in sich, bei der A, A'; B, B'; C, C' gepaart sind, also eine der beiden oben gefundenen; die andere folgt aus ihr, wenn wir noch als vierte die involutorische Homologie hinzufügen, die

D' zum Zentrum und δ' zur Hauptebene hat. — Die Anzahl der Homologien kann sich in besonderen Fällen vermindern: Erstens kann schon die erste Homologie A in A', B in B', C in C' überführen, nämlich wenn $\overline{AA'}$, $\overline{BB'}$, $\overline{CC'}$ durch einen Punkt laufen. Zweitens kann es möglich werden, die zweite Homologie so zu wählen, daß sie direkt A_1 mit A', B_1 mit B', C_1 mit C' vertauscht, wenn nämlich $\overline{A_1A'}$, $\overline{B_1B'}$, $\overline{C_1C'}$ durch einen Punkt gehen. — Wir haben hier den bekannten Satz gefunden:

Jede reelle Kollineation, die eine Fläche II. Grades in sich selbst überführt, läßt sich aus höchstens vier reellen involutorischen Homologien zusammensetzen.

§ 2. Die aus der involutorischen Homologie folgenden ebenen Kreisverwandtschaften.

1. Wir projizieren die Kugel Φ aus einem Punkte S auf eine Ebene σ, die wir uns der Einfachheit halber als Polarebene von S i. Bez. auf Φ oder, wenn S auf Φ liegt, als Parallelebene zu der in S berührenden Tangentialebene von Φ denken; in σ nehmen wir den Umriß von Φ zum absoluten Kegelschnitt der Maßgeometrie. Dann folgen aus den kollinearen Punktverwandtschaften der Kugel Φ in σ Punktverwandtschaften, die Kreise in Kreise verwandeln, und zwar lassen sie sich sämtlich aus denen unter ihnen zusammensetzen, die durch die Projektion aus den involutorischen Homologien der Kugel entstehen. Wir wollen uns deshalb nur mit diesen besonders einfachen Kreisverwandtschaften beschäftigen.

Es sei also eine involutorische Homologie gegeben, deren Zentrum C' und deren Hauptebene γ' reell und zu einander polar in bezug auf Φ sind. γ' wird entweder Φ reell schneiden oder nicht; dagegen können wir den Fall, daß γ' die Φ berührt, ausschließen, da er eine Ausartung ist, in der alle außerhalb von γ' befindlichen Punkte dem C' entsprechen. Das Projektionszentrum S ferner kann mit C' identisch sein oder in γ' oder an einer beliebigen Stelle des

Raumes liegen: Hieraus ergeben sich die verschiedenen Fälle der aus der Homologie (C', γ') folgenden ebenen Kreisverwandtschaften.

2. Nehmen wir zunächst S auf Φ an, so ergibt sich in σ, wenn S in γ' liegt, die *Spiegelung an einer Geraden,* sonst aber *die Inversion* (Transformation durch reziproke Radien) *der parabolischen Geometrie*; der Hauptkreis der Inversion ist das Bild des reellen oder imaginären Schnittkreises von γ' mit Φ.

Ist S kein Punkt von Φ, so erhalten wir in σ die elliptische oder die hyperbolische Geometrie. Der Fall, daß $S \equiv C'$, ist uninteressant, da er zur *identischen Transformation* führt. Liegt S in γ', so haben wir in σ eine ebene involutorische Homologie, die zum Zentrum das Bild C von C' und zur Hauptgeraden die Schnittlinie $c \equiv \overline{\sigma\gamma'}$ hat; sie führt den absoluten Kegelschnitt in sich selbst über und ist die *Spiegelung der nichteuklidischen Geometrie.* Die Spiegelung findet also in der elliptischen Geometrie immer gleichzeitig an einem Punkt C und an seiner absoluten Polare c statt; in der hyperbolischen Geometrie aber kann man, je nachdem C im Innern des absoluten Kreises liegt oder nicht, je nachdem also C im Sinne der nichteuklidischen Geometrie ein eigentlicher Punkt ist oder nicht, die Spiegelung an einem Punkte und die Spiegelung an einer Geraden unterscheiden; doch sind das nicht von einander unabhängige Arten, da immer aus zwei ebenen involutorischen Homologien, von denen jede ihr Zentrum in der Hauptgeraden der anderen hat, eine involutorische Homologie folgt, deren Zentrum der Schnittpunkt der Hauptgeraden und deren Hauptgerade die Verbindungslinie der Zentren jener beiden sind.

3. Bei allgemeiner Lage des Projektionszentrums S erhalten wir in σ eine Transformation, die der Analogie zur parabolischen Geometrie wegen auch als *Inversion* bezeichnet wird, obwohl sie wesentlich andere Eigenschaften hat als die parabolische Inversion. Sie ist zunächst nicht mehr eindeutig: Ein Punkt Y von σ ist das Bild zweier Kugelpunkte

Y_1', Y_2', und diesen entsprechen in der Homologie (C', γ') zwei Punkte $\mathfrak{Y}_1'$, $\mathfrak{Y}_2'$, die i. A. in σ verschiedene Bilder $\mathfrak{Y}_1$, $\mathfrak{Y}_2$ haben; $\mathfrak{Y}_1$ und $\mathfrak{Y}_2$ nun sind die dem Y in der Inversion zugeordneten Punkte, und umgekehrt findet man, wenn man ihre entsprechenden Punkte in derselben Weise sucht, immer als einen derselben den Punkt Y. Das heißt: *Die nichteuklidische Inversion ist eine durchweg involutorische zweideutige Verwandtschaft.*

Der Bildpunkt C des Homologiezentrums C' ist dadurch ausgezeichnet, daß er mit den beiden ihm entsprechenden Punkten zusammenfällt; er möge *das Zentrum* und seine absolute Polare $c \equiv \overline{\sigma\gamma'}$ *die Axe der Inversion* heißen. — Ein Kreis ferner von σ geht durch die Inversion i. A. in zwei Kreise über, und auch hierbei findet involutorisches Entsprechen statt; die Kreise, die C zum Mittelpunkt und c zur Mittellinie[1]) haben, vertauschen sich untereinander; insbesondere fällt der als *Hauptkreis der Inversion* zu bezeichnende Bildkreis des in γ' befindlichen Kugelkreises mit dem einen der beiden ihm zugeordneten Kreise zusammen. Dem absoluten Kegelschnitt entspricht nur ein Kreis, der *Fluchtkreis.* — Eine Gerade der Ebene σ ist das Bild nur eines Kugelkreises und wird deshalb durch die Inversion in nur einen Kreis verwandelt; insbesondere entsprechen die durch das Zentrum C laufenden Geraden, die wir füglich als *Durchmesser der Inversion* bezeichnen werden, je sich selbst. Also liegt ein Punkt Y mit den beiden ihm in der Inversion zugeordneten Punkten $\mathfrak{Y}_1$ und $\mathfrak{Y}_2$ auf demselben Durchmesser; so entsteht auf jedem Durchmesser eine involutorische Korrespondenz [2], von deren Verzweigungs- und Koinzidenzpunkten je zwei in den Punkt C und die anderen beiden in die Schnittpunkte U_1, U_2 des Durchmessers mit dem absoluten Kegelschnitt, bzw. in seine Schnittpunkte H_1, H_2 mit dem Hauptkreis fallen; von diesen fünf singulären Punkten der Korrespondenz ist immer einer durch die vier übrigen be-

---

[1]) Die Mittellinie eines Kreises ist die Verbindungsgerade seiner beiden Berührungspunkte mit dem absoluten Kegelschnitt; ihr absoluter Pol ist der Mittelpunkt des Kreises.

stimmt, da C der eine Doppelpunkt der durch die Punktepaare U_1, U_2 und H_1, H_2 definierten Involution ist.

4. Die auf einem Durchmesser d der Inversion bestehende involutorische Korrespondenz [2] ist das Bild der vermöge der Homologie (C', γ') herrschenden Involution auf dem Kreise der Kugel Φ, dessen Bild d ist. Diesen Kreis denken wir uns mit seiner ganzen Ebene um d in die Ebene σ heruntergeklappt und haben dann in dieser die folgende Figur[1]): Die durch das Inversionszentrum C gehende Gerade d schneidet den absoluten Kreis in U_1, U_2, den Hauptkreis in H_1, H_2, die Axe c der Inversion in D; durch U_1 und U_2 geht ein Kegelschnitt μ, unser heruntergeklappter Kugelkreis, und auf ihm besteht eine Involution, deren Zentrum J der heruntergeklappte Punkt C' ist; diese Involution wird aus dem i. Bez. auf μ genommenen Pol P von d, dem heruntergeklappten Punkt S, auf die Gerade d projiziert und ergibt auf ihr die Korrespondenz. — Da H_1 und H_2 die Bilder der Doppelpunkte der auf μ bestehenden Involution sind, können wir J folgendermaßen konstruieren: Wir schneiden die Strahlen $\overline{PH_1}$ und $\overline{PH_2}$ mit μ in zwei solchen Punkten $H_1{}^*$ und $H_2{}^*$, daß die Gerade $i \equiv \overline{H_1{}^* H_2{}^*}$ durch D läuft, und suchen ihren Pol J i. Bez. auf μ. Hierbei gibt es zwei Möglichkeiten; aber, da jede von ihnen aus der anderen durch Anwendung der involutorischen Homologie mit P als Zentrum und d als Hauptgerade hervorgeht, liefern beide auf d dieselbe Korrespondenz. — Wir erhalten aber auch stets dieselbe Korrespondenz auf d, wenn wir die analoge Figur mit irgend einem durch U_1 und U_2 laufenden Kegelschnitt ν konstruieren; denn es schneiden sich, wenn Q, $K_1{}^*$ usw. die den Punkten P, $H_1{}^*$ usw. der ersten Figur analogen Punkte sind, $\overline{PH_1{}^*}$ und $\overline{QK_1{}^*}$ im Punkte H_1 von d, und deshalb führt die ebene Homologie, in der der Punkt $(\overline{PQ}, \overline{H_1{}^*K_1{}^*})$ Zentrum, die Gerade d Hauptgerade und das Paar P, Q ein Paar ent-

[1]) Zur Veranschaulichung kann Fig. 1 dienen: Der dortige Kreis AK ist als Kegelschnitt μ zu nehmen.

sprechender Punkte ist, den Punkt K_1^* in H_1^*, folglich auch den Kegelschnitt ν in μ und überhaupt die ganze zweite Figur in die erste über.

Auf diese Weise können wir auf jedem Durchmesser der Inversion die involutorische Korrespondenz [2] konstruieren; da in einer Ebene mit gegebenem absoluten Kegelschnitt die Punkte U_1, U_2 immer bekannt sind und da die Punkte C, H_1, H_2 durch den Hauptkreis bestimmt sind, ist die ganze Inversion durch ihren Hauptkreis definiert. Wie wir die obige Konstruktion reell ausführen, wenn U_1, U_2 oder H_1, H_2 imaginär sind, wollen wir hier nicht untersuchen, da wir einfachere Konstruktionen ableiten werden; es genügt, folgendes festgestellt zu haben:

Die Inversion der nichteuklidischen Geometrien ist durch ihren Hauptkreis völlig bestimmt; ein Punkt liegt mit den beiden ihm zugeordneten immer auf demselben Durchmesser des Hauptkreises; so entsteht auf jedem Durchmesser d eine involutorische Korrespondenz [2], die zwei Verzweigungspunkte in den Schnittpunkten von d mit dem absoluten Kegelschnitt, zwei Koinzidenzpunkte in den Schnittpunkten von d mit dem Hauptkreis und zwei vereinigte Verzweigungs- und Koinzidenzpunkte im Inversionszentrum hat und die sich aus diesen Elementen konstruieren lässt.

§ 3. Die Inversion der hyperbolischen Geometrie.

1. Für die hyperbolische Geometrie läßt sich unmittelbar aus den Erörterungen des vorigen Paragraphen eine einfache Konstruktion der Inversion herleiten; man nimmt nämlich den absoluten Kegelschnitt selbst bei der Konstruktion der involutorischen Korrespondenz [2] auf *jedem* Durchmesser zu Hilfe. Also verfährt man bei irgend einem Durchmesser d der Inversion so: Ist P sein absoluter Pol, der auf der Axe c der Inversion liegt und zugleich der Pol von d i. Bez. auf den Hauptkreis ist, und begegnet d der c in D und dem Hauptkreis in H_1 und H_2, so schneidet man $\overline{PH_1}$ und $\overline{PH_2}$ mit dem absoluten Kegelschnitt in zwei solchen Punkten

H_1^* und H_2^*, daß die Gerade $i \equiv \overline{H_1^* H_2^*}$ durch D läuft; den absoluten Pol J von i macht man zum Zentrum einer Involution auf dem absoluten Kegelschnitt und projiziert diese aus P auf d.[1])

Betrachten wir, wie üblich, das Innere des absoluten Kegelschnittes als maßgebend, so sind H_1 und H_2 reell, wenn der Hauptkreis reell, und imaginär, wenn er imaginär ist. Im letzteren Falle ist der Hauptkreis durch sein reelles Polarsystem gegeben; $\overline{PH_1}$ und $\overline{PH_2}$ nun, die ja die aus P an den Hauptkreis gehenden Tangenten sind, sind dann definiert als die Doppelelemente der im Strahlenbüschel (P) durch das Polarsystem erzeugten Involution, und i ist definiert als eine der beiden aus D kommenden Geraden, auf denen die infolge des absoluten Polarsystems bestehende Involution perspektiv ist zu der soeben im Strahlenbüschel (P) erwähnten. Wenn also der Hauptkreis imaginär ist, wird man irgend zwei gepaarte Strahlen aus (P), m und n, nehmen, zwischen ihren Punktreihen die projektive Zuordnung der einander im absoluten Polarsystem konjugierten Punkte herstellen und an den durch diese beiden projektiven Punktreihen erzeugten Kegelschnitt (m, n) aus D die Tangenten legen; das sind die gesuchten beiden Geraden, da auf jeder von ihnen die beiden Paare sich in (P) entsprechender Strahlen: $\overline{PD}$ und $\overline{PC}$, m und n, auch zwei Punktepaare der absoluten Involution einschneiden. Diese Geraden sind immer reell: Der Hauptkreis kann nämlich nur imaginär werden, wenn C im Innern des absoluten Kegelschnittes liegt; denn nur in diesem Falle ist es möglich, daß, wenn wir zu unserer räumlichen Figur zurückkehren, das Homologiezentrum C' im Innern der Kugel Φ liegt und daß somit die Hauptebene γ' die Φ nicht reell schneidet. Dann aber befinden sich P und D außerhalb des absoluten Kegelschnittes, und wir können es so einrichten, daß[2]) m, zwischen C und D hindurchlaufend, ihn reell schneidet; der absolute Pol M von m wird jetzt

[1]) Siehe Fig. 1.
[2]) Siehe Fig. 2.

auf d zwischen m und D liegen und, da $\overline{PC}$, $\overline{PD}$ und m, n zwei Paare einer elliptischen Involution sind, auch durch n nicht von D getrennt werden. Das heißt aber, da der Kegelschnitt (m, n) die Geraden m und n in ihren Schnittpunkten mit d berührt, also d in denselben Punkten, in denen m und n es tun, schneidet: D und M sind entweder gleichzeitig innere oder gleichzeitig äußere Punkte in bezug auf (m, n); das letztere aber findet statt, da die von M kommenden Tangenten des (m, n) identisch sind mit den von M an den absoluten Kegelschnitt gehenden, nach unserer Wahl von m reellen Tangenten.

2. Wir denken uns nun die Konstruktion von i für einen Durchmesser d ausgeführt; dann können wir diese Figur nach und nach in alle die Figuren verwandeln, die für die anderen Durchmesser nötig sind, wenn wir auf sie nach und nach die Kollineationen anwenden, die das dem absoluten Kegelschnitt und dem Hauptkreis gemeinsame Tangentialdreieck zum Fundamentaldreieck haben[1]); denn diese Kollineationen lassen den absoluten Kegelschnitt, C, c und alle Kreise mit dem Mittelpunkt C je in sich selbst übergehen. Daraus folgt, daß die für alle Durchmesser d konstruierten Geraden i einen ganz bestimmten Kreis mit dem Mittelpunkt C berühren; also brauchen wir die Konstruktion von i nur einmal zu machen, um dadurch diesen, wie wir ihn nennen wollen, *„ersten Hilfskreis“* zu bestimmen. Doch können wir auch den im hyperbolischen Maßsystem gemessenen Radius des ersten Hilfskreises durch den des Hauptkreises ausdrücken; dazu brauchen wir den folgenden

Hilfssatz: Projiziert man aus einem Punkte T zwei auf einem Kegelschnitt liegende Punkte X^*, Y^* auf die Polare t von T in die Punkte X, Y und schneidet t mit dem Kegelschnitt in den Punkten W_1, W_2, so besteht die Doppelverhältnisgleichung:

$$(W_1 W_2 X Y) = (W_1 W_2 X^* Y^*)^2.$$

---

[1]) Diese Kollineationen sind die um C ausgeführten Drehungen der hyperbolischen Geometrie und gehören als solche zu den Kreisverwandtschaften.

[Beweis: Die Verbindungslinien von X^* und Y^* bzw. mit den beiden weiteren Schnittpunkten der Strahlen $\overline{TY^*}$ und $\overline{TX^*}$ mit dem Kegelschnitt gehen durch denselben Punkt Z der Geraden t; daher ist

$$(W_1\, W_2\, X^*\, Y^*) \doteq (W_1\, W_2\, XZ) = (W_1\, W_2\, ZY)$$

und, da die Identität

$$(W_1\, W_2\, XY) = (W_1\, W_2\, XZ) \cdot (W_1\, W_2\, ZY)$$

gilt,

$$(W_1\, W_2\, XY) = (W_1\, W_2\, X^*\, Y^*)^2.]$$

Es seien nun U_1, U_2 wieder die Schnittpunkte von d und ferner V_1, V_2 diejenigen der Geraden $\overline{PC}$ mit dem absoluten Kegelschnitt, so ist

$$(U_1\, U_2\, V_1\, V_2) = -1,$$

und es folgt durch einfache Umrechnung:

$$(V_1\, V_2\, U_1\, H_1^*) = \frac{(V_1\, U_2\, U_1\, H_1^*)}{(V_2\, U_2\, U_1\, H_1^*)} = \frac{(U_1\, U_2\, V_1\, H_1^*) + 1}{(U_1\, U_2\, V_1\, H_1^*) - 1}$$

als Beziehung zwischen den Doppelverhältnissen der beiden auf dem absoluten Kegelschnitt liegenden Punktwürfe

$$U_1,\ U_2,\ V_1,\ H_1^* \text{ und } V_1,\ V_2,\ U_1,\ H_1^*.$$

Projizieren wir den ersten Punktwurf aus P auf d und den zweiten aus D auf $\overline{PC}$, so gehen sie über in die Würfe

$$U_1,\ U_2,\ C,\ H_1 \text{ und } V_1,\ V_2,\ C,\ K_1,$$

wobei K_1 der Schnittpunkt von $\overline{PC}$ mit $\overline{DH_1^*} \equiv i$ und somit der Berührungspunkt von i am ersten Hilfskreis ist. Nach unserem Hilfssatz ist nun

$$(V_1\, V_2\, CK_1) = \left(\frac{\sqrt{(U_1\, U_2\, CH_1)} + 1}{\sqrt{(U_1\, U_2\, CH_1)} - 1}\right)^2,$$

und das ist eine Gleichung zwischen den Radien des Haupt- und des Hilfskreises, da dieselben durch die Doppelverhältnisse $(U_1\, U_2\, CH_1)$ und $(V_1\, V_2\, CK_1)$ gemessen werden.[1]) — Es gibt

[1]) Die beiden Kreise fallen zusammen, wenn $(U_1\, U_2\, CH_1) = 3 + \sqrt{2}$ ist; dann lassen der absolute Kegelschnitt und der Hauptkreis Ponceletsche Vierecke zu.

aber noch eine andere Deutung der letzten Gleichung; bezeichnen wir nämlich mit v_1 und v_2 die aus D kommenden Tangenten $\overline{DV_1}$ und $\overline{DV_2}$ des absoluten Kegelschnittes, so wird durch das mit $(V_1\, V_2\, CK_1)$ gleiche Doppelverhältnis $(v_1\, v_2\, d\, i)$ der Winkel zwischen d und i gemessen; derselbe hat demnach für alle Durchmesser der Inversion denselben Wert und soll kurz *„der Winkel der Inversion“* heißen. Sein Komplementwinkel, der durch $(v_1\, v_2\, i\, c) = -\frac{1}{(v_1\, v_2\, d\, i)}$ gemessen wird, ist der Winkel zwischen i und der Inversionsaxe c und ebenfalls konstant, wie es ja sein muß, da i einen Kreis berührt, dessen Mittellinie c ist.

3. Wenn wir nun unsere Konstruktion in der Sprache der nichteuklidischen Geometrie schildern wollen, dürfen wir nur mit *„eigentlichen“*, d. h. im Innern des absoluten Kegelschnittes befindlichen Elementen arbeiten. Wir unterscheiden demnach zwei Arten der Inversion:

Die zentrale Inversion, deren Zentrum ein eigentlicher Punkt ist, und

die axiale Inversion, deren Axe eine eigentliche Gerade ist.

Der Hauptkreis ist ja, falls er reell ist, immer ein eigentlicher Kreis. Bei der zentralen Inversion mit reellem Hauptkreis ist, wie leicht ersichtlich, auch der erste Hilfskreis ein solcher; die eine zu einem Durchmesser d gehörige Gerade i erhalten wir ohne Benutzung des uneigentlichen Punktes D, wenn wir den zu d im absoluten Polarsystem konjugierten Durchmesser $\overline{PC}$ mit dem ersten Hilfskreis schneiden und in einem der Schnittpunkte die Tangente ziehen. Die Involution auf dem absoluten Kegelschnitt endlich ist mit der Spiegelung an der Geraden i identisch. Also können wir sagen:

Hat die zentrale Inversion einen reellen Hauptkreis, so konstruiert man die einem Punkte Y entsprechenden beiden Punkte $\mathfrak{Y}_1, \mathfrak{Y}_2$ folgendermaßen: Man legt durch Y den Durchmesser d der Inversion, schneidet den zu ihm senkrechten

Durchmesser mit dem ersten Hilfskreis[1]) *und zieht in dem einen Schnittpunkt die Tangente i an diesen; an i spiegelt man das in Y auf d errichtete Lot und konstruiert zu der so erhaltenen Geraden die beiden Parallelen, die zu d senkrecht sind; deren Schnittpunkte mit d sind die gesuchten Punkte* $\mathfrak{Y}_1$ *und* $\mathfrak{Y}_2$.

Bei der zentralen Inversion mit imaginärem Hauptkreis ist der erste Hilfskreis kein eigentlicher Kreis, wohl aber der ihm im absoluten Polarsystem zugeordnete, der die Punkte J trägt; diesen, wie wir ihn nennen wollen, *„zweiten Hilfskreis“* können wir direkt konstruieren, wenn wir die für den ersten Hilfskreis angegebenen Konstruktionen i. Bez. auf den absoluten Kegelschnitt polarisieren. Wir haben also:

Hat die zentrale Inversion einen imaginären Hauptkreis, so konstruiert man die einem Punkte Y zugeordneten Punkte $\mathfrak{Y}_1, \mathfrak{Y}_2$ *folgendermaßen: Man legt durch Y den Durchmesser d der Inversion, schneidet den zu ihm senkrechten Durchmesser mit dem zweiten Hilfskreis und spiegelt an dem einen der beiden Schnittpunkte, J, das in Y auf d errichtete Lot; zu der so erhaltenen Geraden zieht man die beiden Parallelen, die zu d senkrecht sind, und hat in den Schnittpunkten derselben mit d die gesuchten Punkte* $\mathfrak{Y}_1$ *und* $\mathfrak{Y}_2$.

Die axiale Inversion hat immer einen reellen Hauptkreis; aber, wie man sich leicht überzeugt, sind beide Hilfskreise uneigentliche Kreise; doch kommt man hier bequem ohne sie aus:

In der axialen Inversion konstruiert man[2]) *zu einem Punkt Y die ihm zugeordneten Punkte* $\mathfrak{Y}_1$, $\mathfrak{Y}_2$ *folgendermaßen: Man fällt aus Y auf die Axe der Inversion das Lot d, dessen Fußpunkt D sei; dann errichtet man in dem einen Schnittpunkt von d mit dem Hauptkreis wieder das Lot auf d und zieht dazu durch D die eine Parallele i — oder, was dasselbe ist, man legt durch D die eine Gerade i,*

---

[1]) Siehe Seite 13.

[2]) Siehe Fig. 3.

die mit d „den Winkel der Inversion“ bildet —; an i spiegelt man das in Y auf d errichtete Lot und sucht zu der so erhaltenen Geraden die beiden zugleich auf d senkrechten Parallelen; diese schneiden in d die Punkte $\mathfrak{Y}_1$ *und* $\mathfrak{Y}_2$ *ein.*

Bei der axialen Inversion kann der Fall eintreten, daß ihre Axe c den Fluchtkreis vertritt, d. h. daß jedem Punkt der Axe c die beiden unendlich fernen Punkte des durch ihn gehenden Durchmessers d entsprechen; nach der oben angegebenen Konstruktion geschieht das, sobald c durch die Spiegelung an i in d übergeht. Dieser Fall gibt, wie man ohne besondere Mühe zeigen kann, die von Herrn Liebmann „L-Transformation“ genannte Abart der Inversion.

§ 4. Die Inversion der elliptischen Geometrie.

1. Die in § 2 angegebene Konstruktion der Inversion läßt sich in der elliptischen Ebene, weil dort der absolute Kegelschnitt imaginär ist, nicht so einfach gestalten, wie es in § 3 für die hyperbolische Ebene geschehen ist. Deshalb wollen wir jetzt eine ganz andere Konstruktion der Inversion ableiten, die in der elliptischen Ebene brauchbar ist; sie ist übrigens auch in der hyperbolischen Ebene bei der zentralen Inversion anwendbar. Wir kehren zu dem Ende noch einmal zu der Kugel Φ und zu der auf ihr durch die involutorische Homologie (C', γ') erzeugten Verwandtschaft zurück und setzen dabei voraus, daß die aus dem Projektionszentrum S nach C' gehende Gerade, wie sie es ja im elliptischen Falle tut, die Kugel Φ in zwei reellen Punkten C_1' und C_2' schneidet. Jeder Kreis nun von Φ, der dem durch C_1' und C_2' bestimmten Kreisbüschel $(C_1' C_2')$ angehört, geht durch die Homologie (C', γ') in sich selbst über; ferner sind, wenn t_1' und t_2' zwei beliebige, die Kugel Φ in C_1', bzw. C_2' berührende und sich auf der Geraden $\overline{\gamma'\sigma}$ schneidende Tangenten sind, die beiden Ebenenbüschel (t_1') und (t_2') und mit ihnen auch die durch sie in Φ eingeschnittenen Kreisbüschel einander projektiv zugeordnet. Soll nun zu einem Punkt Y' der Kugel der ihm in der Homologie (C', γ') entsprechende

$\mathfrak{Y}'$ gefunden werden, so legen wir durch Y' erstens den Kreis $(C_1' C_2' Y')$ aus dem Büschel $(C_1' C_2')$; dann nehmen wir entweder den durch Y' gehenden Kreis aus dem Büschel (t_1') und schneiden den ihm entsprechenden aus dem Büschel (t_2') mit $(C_1' C_2' Y')$ — oder wir nehmen den durch Y' gehenden Kreis aus (t_2') und schneiden den ihm entsprechenden aus (t_1') mit dem Kreise $(C_1' C_2' Y')$; beide Male erhalten wir denselben Punkt $\mathfrak{Y}'$. Wie gestaltet sich das nun, wenn wir die Kugel Φ aus dem Punkte S auf seine Polarebene σ projizieren?

Die Punkte C_1', C_2' gehen in das Zentrum C der Inversion über, der Kreisbüschel $(C_1' C_2')$ in den Durchmesserbüschel und die beiden Kreisbüschel (t_1') und (t_2') in denselben Büschel (t) von Kreisen, die alle einen bestimmten Durchmesser t im Punkte C berühren; da jeder Kreis aus (t) das Bild eines Kreises aus (t_1') und eines aus (t_2') ist, folgt aus der Projektivität zwischen diesen letzten beiden Büscheln, daß infolge der Inversion im Kreisbüschel (t) eine involutorische Korrespondenz [2] herrscht. Ein Punkt Y von σ nun ist das Bild zweier Kugelpunkte Y_1' und Y_2'; diese bestimmen auf der Kugel vier Kreise, die wir mit

$$(t_1', Y_1'),\ (t_2', Y_2'),\ (t_1', Y_2'),\ (t_2', Y_1')$$

bezeichnen können und von denen immer die ersten beiden und die letzten beiden dasselbe Bild haben; sind ferner $\mathfrak{Y}_1'$ und $\mathfrak{Y}_2'$ auf der Kugel durch die Homologie (C', γ') den Punkten Y_1' und Y_2' zugeordnet, so entsprechen den oben aufgezählten vier Kreisen der Reihe nach die Kreise

$$(t_2', \mathfrak{Y}_1'),\ (t_1', \mathfrak{Y}_2'),\ (t_2', \mathfrak{Y}_2'),\ (t_1', \mathfrak{Y}_1'),$$

die i. A. lauter verschiedene Bilder in σ haben. Da Y_1', Y_2', $\mathfrak{Y}_1'$, $\mathfrak{Y}_2'$ auf demselben Kreis aus dem Büschel $(C_1' C_2')$ liegen, folgt hieraus: Durch einen Punkt Y von σ gehen zwei Kreise des Büschels (t); sowohl die beiden Kreise, die dem einen, als auch die beiden, die dem anderen von ihnen durch die in (t) bestehende involutorische Korrespondenz [2] zugeordnet sind, schneiden in den Durchmesser $\overline{CY}$ die zwei

Punkte $\mathfrak{Y}_1$ und $\mathfrak{Y}_2$ ein, die dem Y in der Inversion entsprechen. Können wir also die involutorische Korrespondenz [2] in (t) konstruieren, so können wir zu jedem Punkte Y die Punkte $\mathfrak{Y}_1$ und $\mathfrak{Y}_2$ finden, außer wenn Y auf t selbst liegt; in diesem Fall wird man einen anderen, dem Büschel (t) analogen Kreisbüschel zu Hilfe nehmen; aus praktischen Gründen wird man dies schon tun, wenn Y nahe an t liegt.

2. Zu einer Konstruktion der involutorischen Korrespondenz [2] im Büschel (t) gelangen wir folgendermaßen: Ist T der Punkt, in dem t die Axe c der Inversion schneidet, durch den also auch t_1' und t_2' laufen, so gehen durch jede Gerade des Strahlenbüschels (T, γ') zwei einander in der Homologie (C', γ') zugeordnete Ebenen aus den Ebenenbüscheln (t_1') und (t_2'); hieraus folgt durch die Projektion aus S auf σ, daß jede Gerade des Strahlenbüschels (T, σ) zwei Kreise des Büschels (t) bestimmt, die den Hauptkreis der Inversion in denselben beiden (eventuell imaginären) Punkten wie sie schneiden und die einander in der Inversion zugeordnet sind. Eine solche Gerade aus dem Strahlenbüschel (T, σ) wollen wir eine „*Hauptsehne*" der beiden durch sie bestimmten Kreise nennen; jeder Kreis aus (t) besitzt, da er das Bild zweier Kugelkreise ist, zwei Hauptsehnen, und diese sind immer reell. Hiernach können wir bereits die Konstruktion der Inversion folgendermaßen schildern:

Ist in der elliptischen Ebene eine Inversion durch ihren Hauptkreis gegeben, so konstruiert man zu einem Punkt Y die beiden zugeordneten Punkte $\mathfrak{Y}_1$ und $\mathfrak{Y}_2$, indem man durch Y und das Zentrum C der Inversion einen Kreis legt und die beiden Kreise aufsucht, die jenen Kreis in C berühren und mit ihm je eine Hauptsehne gemeinsam haben; diese beiden Kreise schneiden $\mathfrak{Y}_1$ und $\mathfrak{Y}_2$ in den Durchmesser $\overline{CY}$ ein.

Kehren wir wieder zu unserem Kreisbüschel (t) zurück, so erkennen wir leicht, daß auch die Mittellinie eines jeden Kreises $\varkappa$ aus ihm durch den Punkt T geht; denn sie wird in σ eingeschnitten durch die Ebenen der beiden Kugelkreise

$\varkappa_1'$ und $\varkappa_2'$, deren Bild $\varkappa$ ist, und diese Ebenen gehen durch t_1', bzw. t_2'. Da andererseits die Ebenen von $\varkappa_1'$ und $\varkappa_2'$ in γ' die Geraden einschneiden, deren Bilder die Hauptsehnen von $\varkappa$ sind, ergibt sich ohne weiteres der folgende Satz, der die obige Konstruktion vereinfacht:

Ist in der elliptischen Ebene eine Inversion und ein Büschel von Kreisen gegeben, die durch das Inversionszentrum gehen und daselbst eine gemeinsame Tangente t besitzen, so laufen ihre Mittellinien und ihre Hauptsehnen durch denselben Punkt, in dem t die Axe c der Inversion schneidet. In diesem Strahlenbüschel bestehen zwei Projektivitäten derart, dass durch sie jedem Strahl die Hauptsehnen des Kreises zugeordnet sind, dessen Mittellinie er ist, und dass umgekehrt durch die inversen Projektivitäten jedem Strahl die Mittellinien der beiden Kreise zugewiesen werden, deren gemeinsame Hauptsehne er ist. In beiden Projektivitäten sind c und t die Koinzidenzstrahlen.

Um die beiden Projektivitäten völlig zu bestimmen, muß man für jede ein Paar entsprechender Strahlen kennen; es wird sich also darum handeln, für einen beliebigen Kreis $\varkappa$ aus dem Büschel (t) die Hauptsehnen zu finden, auch wenn $\varkappa$ den Hauptkreis nicht reell schneidet, wenn man von dem Hauptkreis nur sein Polarsystem besitzt. Der Punkt T nun ist als Schnittpunkt zweier gemeinsamer Sehnen der beiden Kreise ein Eckpunkt des ihnen gemeinsamen Polardreiecks; deshalb geht durch ihn der Kegelschnitt, dessen Punkte gleichzeitig in den Polarsystemen beider Kreise den Punkten irgend einer beliebig gewählten Geraden g konjugiert sind. Die Punktreihe des Kegelschnittes und die von g sind durch diese Beziehung zu einander projektiv gemacht; projizieren wir beide aus T, so erhalten wir im Strahlenbüschel (T) eine Projektivität, und von deren Koinzidenzstrahlen trägt jeder außer dem durch T und den Schnittpunkt mit seiner Polare gebildeten Paar in beiden Polarsystemen konjugierter Punkte noch ein zweites; also sind auf jedem der beiden Koinzidenzstrahlen die beiden Involutionen von i. Bez. auf $\varkappa$, bzw.

auf den Hauptkreis konjugierten Punkten identisch; das heißt, jeder dieser Strahlen schneidet $\varkappa$ und den Hauptkreis in denselben beiden Punkten, ist eine Hauptsehne von $\varkappa$. So können wir die Hauptsehnen von $\varkappa$ auch bei imaginärem Hauptkreis konstruieren; wir brauchen nach dem früheren nicht erst nachzuweisen, daß wir immer zwei reelle Geraden erhalten.

Zweiter Abschnitt.

Die einfachsten Berührungstransformationen, die Kreise in Kreise überführen.

§ I. Aufstellung der einfachsten Transformationen „$\mathfrak{E}$" der Ebenen des Raumes, die auf einer Kugel eine Berührungstransformation der Kreise erzeugen.

1. Da ein Punkt in der Theorie der Berührungstransformationen als Elementverein aufzufassen ist, wird man, wenn es sich um die Berührungstransformationen der Kreise handelt, jeden Punkt als einen Kreis ansehen müssen. Um recht einfache Verhältnisse zu erhalten, machen wir die

Voraussetzung: Auf einer Kugel Φ bestehe eine algebraische Berührungstransformation $\mathfrak{B}$, die jedem Punkt einen einzigen Kreis zuordnet, der nicht nebenbei auch noch zu einem anderen Punkte gehört, und die jeden Kreis in eine Kurve überführt, die sich aus lauter Kreisen zusammensetzt; dasselbe verlangen wir von der inversen Transformation $\mathfrak{B}^{-1}$.

Mit $\mathfrak{B}$ verbunden ist eine algebraische Verwandtschaft $\mathfrak{E}$ zwischen den Ebenen des Raumes, und wir können uns umgekehrt $\mathfrak{B}$ durch $\mathfrak{E}$ erzeugt denken. Da ein Punkt von Φ ein Kreis ist, dessen Ebene Φ berührt, sehen wir:

Die mit $\mathfrak{B}$ verbundene algebraische Ebenenverwandtschaft $\mathfrak{E}$ ordnet jeder Berührungsebene der Kugel Φ eindeutig eine Ebene zu, die nicht nebenbei noch einer anderen Berührungsebene entspricht.

Sie führt also Φ in eine von ihr verschiedene algebraische Fläche Φ' über, so daß zwischen den Berührungsebenen der beiden Flächen eine ein-eindeutige Zuordnung besteht. Welches ist nun die Klasse der Φ'? In welcher geometrischen Beziehung stehen Φ und Φ'? Kann die Zuordnung zwischen den Berührungsebenen von Φ und Φ' als Teil einer durchweg eindeutigen bekannten Transformation der Ebenen des Raumes dargestellt werden? Dies sind die Fragen, die sich hier sofort erheben und deren Beantwortung uns zugleich zu einer konstruktiven Definition der Transformation $\mathfrak{E}$ verhelfen wird.

2. Wir nehmen eine Ebene ε und betrachten den in ihr befindlichen Kreis (ε) von Φ als Enveloppe des Systems seiner Punkte; durch Anwendung von $\mathfrak{B}$ erhalten wir hieraus ein System von Kreisen, dessen Enveloppe sich aus lauter Kreisen (ε_1'), (ε_2'), (ε_3'), ..., zusammensetzen soll; die Ebenen der Kreise des Systems sind durch $\mathfrak{E}$ eindeutig den Ebenen zugeordnet, die Φ in den Punkten von (ε) berühren, und umhüllen eine der Φ' umschriebene abwickelbare Fläche; deren Schnittkurve mit der Kugel Φ ist nun die Enveloppe des obigen Kreissystems und setzt sich deshalb zusammen aus den Kreisen (ε_1'), (ε_2'), (ε_3'), ..., deren Ebenen ε_1', ε_2', ε_3' .... in der Verwandtschaft $\mathfrak{E}$ der Ebene ε entsprechen.

Besteht die Schnittkurve nur aus *einem* Kreise, so kann die abwickelbare Fläche nur ein Kegel II. Grades sein, der Φ längs dieses Kreises berührt; wenn das durchweg stattfindet, ordnet $\mathfrak{E}$ jeder Tangentialebene von Φ nur wieder Tangentialebenen von Φ zu und erzeugt deshalb auf Φ keine eigentliche Berührungstransformation, sondern eine Punkttransformation. — Setzt sich aber die Schnittkurve aus *zwei* Kreisen zusammen, so besteht die abwickelbare Fläche aus lauter Ebenen, die diese beiden Kreise gleichzeitig berühren, und kann infolgedessen nur der eine der beiden Kegel II. Grades sein, die durch die beiden Kreise hindurchgelegt werden können; auf diesen einfachsten Fall wollen wir uns hier beschränken und machen deshalb die weitere

Voraussetzung: Die Berührungstransformation $\mathfrak{B}$ *ordne jedem Kreise zwei Kreise zu, (die eventuell zusammenfallen können).*

Nach dem vorangegangenen folgt aus ihr:

Die Verwandtschaft $\mathfrak{C}$ *ist zweideutig; einen Tangentialkegel der Kugel* Φ *führt sie in einen Kegel II. Grades über, der* Φ *in zwei Punkten berührt, und die Ebenen* ε_1', ε_2' *der Kreise, in denen der letztere die Kugel schneidet, sind gerade die durch* $\mathfrak{C}$ *der Ebene* ε *zugeordneten Ebenen, wenn* ε *die Ebene des Berührungskreises des Tangentialkegels ist.*

3. Nehmen wir nun einen Kreis (ε) der Kugel Φ und auf ihm ein Linienelement l, dessen Punkt P sei, so ist l das den beiden Elementvereinen P und (ε) gemeinsame Linienelement; da P durch die Berührungstransformation $\mathfrak{B}$ in einen Kreis (π') verwandelt wird, sind die dem l entsprechenden Linienelemente diejenigen, die die zu (ε) gehörigen Kreise (ε_1') und (ε_2') mit dem Kreis (π') gemein haben, und das sind, da nach dem vorangegangenen die Ebene π' die Kreise (ε_1') und (ε_2') berührt, zwei, auf jedem der Kreise (ε_1') und (ε_2') eins. Demnach fließt aus unseren Voraussetzungen der Satz:

Durch $\mathfrak{B}$ *wird jedes Linienelement* l *in zwei Linienelemente* l_1' *und* l_2' *übergeführt, die in derselben Ebene liegen. Wenn* l *einen Kreis* (ε) *durchläuft, so beschreiben* l_1' *und* l_2' *je einen der ihm zugeordneten Kreise* (ε_1') *und* (ε_2'). *Umgekehrt gehören* l_1' *und* l_2' *nur dann bzw. den Kreisen* (ε_1') *und* (ε_2') *an, wenn* l *ein Element des Kreises* (ε) *ist.*

Hierbei kann der Fall eintreten, daß (ε_1') und (ε_2') ein Element l_0' gemeinsam haben; dann gibt es auf (ε) ein Element l_0, dessen beide entsprechenden in l_0' vereinigt sind. Solcher Elemente ist jedoch höchstens eine einfach unendliche Anzahl vorhanden, da durch $\mathfrak{B}$ dem Punkt von l_0 der Punkt von l_0' zugeordnet ist, während wir vorausgesetzt haben, daß i. A. ein Punkt in einen wirklichen Kreis übergehen soll. Diese Elemente l_0 und l_0' bilden zwei Elementvereine, die wir später finden werden.

Nehmen wir jetzt zwei Kreise (ε) und (η), die ein Element l gemeinsam haben, so wird jedes der ihm entsprechenden Elemente l_1' und l_2' einem der Kreise angehören, der dem (ε), und einem der Kreise, der dem (η) zugeordnet ist; das ist aber nicht anders möglich, als daß etwa (ε_1') und (η_1') sich in l_1', (ε_2') und (η_2') sich in l_2' berühren. Deshalb müssen, wenn wir alle Kreise ins Auge fassen, die sich in l berühren, die ihnen entsprechenden sich in zwei Büschel ordnen, nämlich in den Büschel der sich in l_1' und in den Büschel der sich in l_2' berührenden Kreise. Hiernach hat die Ebenentransformation $\mathfrak{E}$ die folgende charakteristische Eigenschaft:

Dreht sich eine Ebene ε um eine Tangente t der Kugel Φ, so beschreiben die beiden ihr durch $\mathfrak{E}$ zugeordneten Ebenen ε_1', ε_2' zwei Ebenenbüschel, deren Axen t_1' und t_2' ebenfalls Φ berühren. t_1' und t_2' schneiden sich und bestimmen die Ebene, die der durch t laufenden Berührungsebene von Φ entspricht.

Wegen der sich hierin ausdrückenden engen Beziehung der Kugel Φ zur Transformation $\mathfrak{E}$ wollen wir Φ als die *„Grundkugel"* von $\mathfrak{E}$ bezeichnen.

4. Wir haben soeben eine mit $\mathfrak{E}$ verbundene zweideutige Beziehung zwischen den Tangenten der Grundkugel aufgefunden; wir wissen von ihr nach den Erörterungen, die sich an den vorletzten Satz der vorigen Nummer schließen, daß es höchstens eine einfach unendliche Anzahl von Tangenten t_0 gibt, deren beide entsprechenden sich in eine, t_0', vereinigen, und daß nur dann, wenn eine Tangente t in einer Ebene ε liegt, auch die entsprechenden Tangenten t_1', t_2' bzw. den entsprechenden Ebenen ε_1, ε_2' angehören. Es tritt nun sofort die Frage auf nach dem Gebilde der Tangenten, die den durch einen Punkt R gehenden Tangenten entsprechen. Wir haben dabei drei Fälle zu unterscheiden:

a) *R ist ein Punkt der Grundkugel:* Dann liegen alle durch R gehenden Tangenten in der zu R gehörigen Berührungsebene ϱ von Φ, und die ihnen entsprechenden bilden

den Tangentenbüschel des Kreises von Φ, der in der Ebene ϱ' liegt, die der ϱ durch $\mathfrak{E}$ zugeordnet ist.

b) *R liegt nicht auf der Grundkugel, aber empfängt (mindestens) eine Tangente t_0, deren entsprechende sich in einer, t_0', vereinigt haben:* Es seien a eine weitere Tangente aus R und a_1', a_2' die ihr entsprechenden; der Ebene $(t_0\, a)$ sind dann durch $\mathfrak{E}$ die Ebenen $(t_0'\, a_1')$ und $(t_0'\, a_2')$ zugeordnet, und deshalb muß t_0' durch den Schnittpunkt R' von a_1' und a_2' gehen. Dasselbe gilt für alle Tangenten aus R; ist x eine von ihnen und x_1' die eine ihr entsprechende Tangente, so kann, da x nicht in der Ebene $(t_0\, a)$ liegt, x_1' weder der Ebene $(t_0'\, a_1')$ noch der Ebene $(t_0'\, a_2')$ angehören; da aber x und a in einer Ebene liegen, muß x_1' mindestens eine der beiden Geraden a_1' und a_2' treffen, und das ist nach dem vorigen nur möglich im Punkte R'. In diesem Fall also schicken die Tangenten des Punktes R ihre entsprechenden sämtlich durch denselben Punkt R'.

c) *R ist ein Punkt des Raumes in allgemeiner Lage:* Dann nehmen wir zunächst zwei Tangenten a und b, die durch R gehen und deren zugeordnete Tangenten a_1', a_2', b_1', b_2' von einander verschieden sind. a_1' und a_2' schneiden sich und ebenso b_1' und b_2'; ferner werden noch der Ebene (ab) etwa die Ebenen $(a_1'\, b_1')$ und $(a_2'\, b_2')$ entsprechen, so daß sich auch a_1' und b_1', sowie a_2' und b_2' schneiden. Da b nicht in der Berührungsebene von Φ liegt, die durch a läuft, gehören weder b_1' noch b_2' der jener entsprechenden Ebene $(a_1'\, a_2')$ an; ebensowenig auch a_1' und a_2' der Ebene $(b_1'\, b_2')$. Aus diesem Grunde müssen die vier Geraden a_1', a_2', b_1', b_2' *entweder* ein windschiefes Vierseit bilden *oder* alle durch denselben Punkt laufen; aber es ist nicht möglich, daß etwa b_1' durch den Schnittpunkt von a_1' und a_2' geht und b_2' nicht. — Laufen nun die vier Geraden durch denselben Punkt R', so nehmen wir eine beliebige weitere Tangente x aus R und die eine, x_1', der ihr entsprechenden Tangenten; da x nicht in der Ebene (ab) und deshalb x_1' nicht in den Ebenen $(a_1'\, b_1')$ und $(a_2'\, b_2')$ liegt, da ferner x_1'

mindestens eine der Geraden a_1', a_2' und eine der Geraden b_1', b_2' treffen muß, kann x_1', wenn es nicht auch durch R' läuft, nur eine Gerade einer der Ebenen $(a_1' \, b_2')$ und $(a_2' \, b_1')$ sein. Die betreffende Ebene aber müßte dann sowohl der Ebene $(a \, x)$ wie der Ebene $(b \, x)$ entsprechen, und zwar unabhängig von der Wahl von x; dies würde eine Ausartung der Transformation $\mathfrak{C}$ bedeuten, die wir ausschließen können. Mithin muß x_1' durch R' laufen, und wir kommen auf den vorigen Fall zurück; in der Tat gehen jetzt auch durch R Tangenten, die nur je eine einzige entsprechende haben, nämlich die Verzweigungselemente der Korrespondenz, die zwischen den Kanten der aus R und R' an Φ kommenden Tangentialkegel durch unsere Verwandtschaft erzeugt wird. — Wenn also R ein Punkt des Raumes in allgemeiner Lage ist, bilden a_1', a_2', b_1', b_2' *immer* ein windschiefes Vierseit; nehmen wir dann eine beliebige Tangente x aus R, so können, wie früher, die ihr entsprechenden Tangenten x_1' und x_2' keine Geraden der Ebenen $(a_1' \, a_2')$, $(b_1' \, b_2')$, $(a_1' \, b_1')$, $(a_2' \, b_2')$ dieses Vierseits sein. Da aber x_1' und x_2' je eine der vier Seiten des Vierseits schneiden müssen, so kann das nur so geschehen, daß etwa x_1' die Geraden a_1', b_2' und x_2' die Geraden a_2', b_1' trifft. Lassen wir daher x den aus R an Φ kommenden Tangentialkegel durchlaufen, so wird x_1' an den Geraden a_1', b_2' und x_2' an den Geraden a_2', b_1' entlang gleiten, dabei immer die Fläche Φ berührend. Hieraus aber ergibt sich mit Leichtigkeit, daß x_1' und x_2' zwei verbundene Regelscharen beschreiben, deren Trägerfläche P' die Grundkugel Φ in unendlich vielen Punkten, also längs eines Kreises berührt. — Indem wir die ersten beiden Fälle als Ausartungen des dritten Falles ansehen, fassen wir unser Ergebnis so zusammen:

Dreht sich eine Tangente der Grundkugel um einen Punkt R, so beschreiben die beiden ihr durch $\mathfrak{C}$ zugeordneten Tangenten ein Paar verbundener Regelscharen, deren Trägerfläche P' die Grundkugel längs eines Kreises berührt.

Aus diesem Satz folgt sofort:

Jeder Ebene ε aus R entsprechen vermöge $\mathfrak{E}$ zwei Berührungsebenen von P'.

Oder:

$\mathfrak{E}$ führt ein Ebenenbündel in eine Fläche II. Klasse über, die die Grundkugel längs eines Kreises berührt.

5. Genau dieselben Überlegungen können wir nach unseren Voraussetzungen mit den beiden inversen Transformationen $\mathfrak{B}^{-1}$ und $\mathfrak{E}^{-1}$ anstellen; wir wollen die Bezeichnung so einrichten, daß wir sagen: Durch $\mathfrak{E}^{-1}$ sind einer Ebene ε' die Ebenen ε_1 und ε_2 zugeordnet usw. Insbesondere geht die Grundkugel Φ, die wir auch mit Ψ' bezeichnen, durch $\mathfrak{E}^{-1}$ in eine Fläche Ψ über. Nach den vorangegangenen Erörterungen können wir jetzt die Art der Flächen Φ' und Ψ bestimmen. Um die Klasse von Φ' zu finden, sehen wir nach, was für ein Tangentialkegel aus irgend einem Punkte R' an Φ' geht: Dem Ebenenbündel (R') entspricht vermöge $\mathfrak{E}^{-1}$ eine Fläche II. Grades P, die, gleichviel ob sie allgemein ist oder ausartet, mit Φ einen und nur einen Tangentialkegel gemein hat; keine andere Ebene außer den Berührungsebenen von P schickt eine der ihr durch $\mathfrak{E}$ zugeordneten Ebenen durch R'. Also wird der aus R' an Φ' gehende Tangentialkegel durch die Ebenen gebildet, die den gemeinsamen Berührungsebenen von Φ und P (eindeutig) entsprechen; da diese einen Tangentialkegel von Φ umhüllen, ist er nach dem letzten Satz von No. 2 dieses Paragraphen ein Kegel II. Grades, der Φ in zwei Punkten berührt. Daraus folgt als Antwort auf die ersten beiden der anfangs aufgestellten Fragen:

Die Flächen Φ' und Ψ, in die die Grundkugel $\Phi \equiv \Psi'$ durch $\mathfrak{E}$ und $\mathfrak{E}^{-1}$ übergeht, sind Flächen II. Grades und berühren sie je längs eines Kreises. Die Ebenen dieser Kreise seien als die „Hauptebenen“ φ' und ψ bezeichnet.

6. Umgekehrt wird Ψ durch $\mathfrak{E}$ in eine Fläche verwandelt, von der $\Psi' \equiv \Phi$ ein Teil ist; und zwar ist immer eine der Ebenen ε_1' und ε_2', die einer Berührungsebene ε von Ψ entsprechen, Berührungsebene von Φ. Berührt also

ε zugleich Φ und Ψ, so fallen ε_1' und ε_2' in eine Ebene zusammen, die zugleich Φ' und $\Psi' \equiv \Phi$ berühren muß. Das heißt aber:

Den gemeinsamen Berührungsebenen von Ψ und Φ entsprechen in $\mathfrak{E}$ eindeutig diejenigen von Φ und Φ'; infolgedessen ist auch der Hauptebene ψ durch $\mathfrak{E}$ die Hauptebene φ' eindeutig zugeordnet und ebenso jeder in ψ befindlichen Tangente von Φ eine in φ' befindliche.

Nehmen wir daher einen Punkt P von ψ und die beiden durch ihn gehenden und in ψ liegenden Tangenten a, b von Φ, so sind diesen durch $\mathfrak{E}$ eindeutig zwei Tangenten a', b' in φ zugeordnet. Nun sei c eine dritte durch P laufende Tangente; dann entsprechen der Ebene $\alpha \equiv (bc)$ zwei Ebenen α_1', α_2' aus a' und der Ebene $\beta \equiv (ca)$ zwei Ebenen β_1', β_2' aus b'; da aber $c \equiv \overline{\alpha\beta}$, müssen die ihr zugeordneten Tangenten c_1', c_2' je die Schnittlinie einer der Ebenen α_1', α_2' mit einer der Ebenen β_1', β_2' sein und deshalb beide durch den Schnittpunkt P' von a' und b' gehen. Wir haben also den schon früher angedeuteten Fall:

Dreht sich eine Tangente der Grundkugel um einen Punkt der Hauptebene ψ, so bilden die ihr in $\mathfrak{E}$ entsprechenden einen Kegel, dessen Scheitel in der Hauptebene φ' liegt.

Oder:

Ein Ebenenbündel, dessen Scheitel ein Punkt der Hauptebene ψ ist, wird durch $\mathfrak{E}$ wieder in ein solches, aber mit dem Scheitel in φ', übergeführt.

Dasselbe gilt natürlich auch für $\mathfrak{E}^{-1}$ unter Vertauschung von ψ und φ'; mithin erhalten wir *zwischen den Punktfeldern von ψ und φ' eine umkehrbar eindeutige algebraische Zuordnung.*

Sind P und P' zwei in ihr zusammengeordnete Punkte, so gehen die Ebenen, die vermöge $\mathfrak{E}$ den Ebenen aus P entsprechen, sämtlich durch P', und die Ebenen, die vermöge $\mathfrak{E}^{-1}$ den Ebenen aus P' entsprechen, sämtlich durch P. Wenn Q und Q' ein zweites Paar zusammengehöriger Punkte von ψ und φ' sind, so folgt das analoge für die Ebenen, die durch $\overline{PQ}$ und die durch $\overline{P'Q'}$ gehen; wir haben also erstens den Satz:

Ein Ebenenbüschel, dessen Axe in der Hauptebene ψ liegt, wird durch $\mathfrak{C}$ wieder in einen solchen, mit der Axe in φ', übergeführt, und es besteht zwischen den beiden Büscheln eine Korrespondenz [2|2].

Zweitens erkennen wir, daß wir auch *zwischen den Geradenfeldern von ψ und φ' eine umkehrbar eindeutige algebraische Zuordnung haben.* Die beiden Verwandtschaften zwischen den Punktfeldern und zwischen den Geradenfeldern von ψ und φ' stehen offensichtlich in der Beziehung zu einander, daß in ihnen inzidenten Elementen wieder inzidente Elemente entsprechen; daraus folgt:

Durch $\mathfrak{C}$ wird zwischen den Feldern der beiden Hauptebenen ψ und φ' eine Kollineation erzeugt.

§ 2. Konstruktion der Transformation $\mathfrak{C}$.

1. Wir können jetzt an die Beantwortung der dritten im vorigen Paragraphen aufgestellten Frage gehen; und zwar werden wir eine räumliche Kollineation aufweisen, die ebenfalls die durch $\mathfrak{C}$ zwischen den Ebenen der Klassenflächen Φ und Φ' hervorgerufene eindeutige Beziehung erzeugt. Zu diesem Zweck erinnern wir uns, wie wir zu einer Ebene ε die beiden entsprechenden ε_1' und ε_2' gefunden haben: Der zu ε gehörige Tangentialkegel E von Φ ging durch $\mathfrak{C}$ über in einen Tangentialkegel E' von Φ' und dieser schnitt zwei Kreise in Φ ein, deren Ebenen ε_1' und ε_2' waren. E' nun berührt Φ in zwei Punkten, den Durchstoßpunkten der Geraden $\overline{\varepsilon_1' \varepsilon_2'}$ durch Φ, und diese liegen auf dem Hauptkreis (φ') der Grundkugel Φ; also haben wir das folgende Resultat, das allerdings schon im vorletzten Satze des vorigen Paragraphen enthalten ist:

Die beiden Ebenen, die durch $\mathfrak{C}$ irgend einer Ebene zugeordnet sind, schneiden sich stets in einer Geraden der Hauptebene φ'.

Die Gerade $g' \equiv \overline{\varepsilon_1' \varphi'} \equiv \overline{\varepsilon_2' \varphi'}$ entspricht in der Kollineation der Felder ψ und φ' der Geraden $g \equiv \overline{\varepsilon\psi}$. Ersichtlich geht durch g' auch die Ebene ε'' des Kegelschnittes, in dem E', die Φ' berührt, und *diese Ebene* ε'' *ist der Ebene* ε *eindeutig zugeordnet.* — Drehen wir ε um eine Gerade m, so bewegt sich der Scheitel des Tangentialkegels E auf der i. Bez. auf Φ reziproken Polare von m; da dabei die aus dieser Polare an Φ gehenden Tangentialebenen τ_1, τ_2 festbleiben, bewegt sich der Kegel E' so, daß ihm immer die den Ebenen τ_1, τ_2 zugeordneten beiden Tangentialebenen von Φ' angehören, das heißt so, daß sein Scheitel die Schnittgerade derselben durchläuft. Damit haben wir gezeigt: *Wenn sich* ε *um eine Gerade* m *dreht, beschreibt auch* ε'' *einen Ebenenbüschel* (m''). — Gleichzeitig durchlaufen die beiden Geraden $g \equiv \overline{\varepsilon\psi}$ und $g'' \equiv \overline{\varepsilon'' \varphi'}$ die Strahlenbüschel um die Punkte (m, ψ) und (m'', φ'), die aufeinander durch die Kollineation zwischen ψ φ' projektiv bezogen sind; folglich sind auch die zu ihnen perspektiven *von* ε *und* ε'' *beschriebenen Ebenenbüschel* (m) *und* (m'') *projektiv.* Das heißt aber, daß auch *die Beziehung zwischen* ε *und* ε'' *eine Kollineation ist.* Diese Kollineation nun führt Φ ebenso in Φ' über, wie es $\mathfrak{E}$ tut; denn, sobald ε die Φ berührt, fallen ε_1', ε_2' und ε'' in dieselbe Berührungsebene von Φ' zusammen. Also ist sie die gesuchte eindeutige Verwandtschaft der Ebenen des Raumes, und wir haben gefunden:

Mit jeder Transformation $\mathfrak{E}$ *ist eine Kollineation* $\mathfrak{C}$ *derart verbunden, daß* $\mathfrak{C}$ *die Grundkugel* Φ *in ebendieselbe Fläche* Φ' *überführt wie* $\mathfrak{E}$, *und zwar auch in derselben Weise.*

Gleichzeitig hat sich der Satz ergeben:

Dreht sich eine Ebene um eine Tangente der Grundkugel, so dreht sich jede der beiden ihr entsprechenden Ebenen dazu projektiv um je eine andere Tangente.

2. Hieraus folgt sofort eine Konstruktion der Transformation $\mathfrak{E}$:

Um die einer Ebene ε *vermöge* $\mathfrak{E}$ *entsprechenden Ebenen* ε_1', ε_2' *zu konstruieren, nehme man die der* ε *durch* $\mathfrak{C}$ *zuge-*

ordnete Ebene ε'' *und schneide den zu* ε'' *gehörigen Tangentialkegel von* Φ' *mit* Φ; *die Ebenen der beiden erhaltenen Kreise sind* ε_1' *und* ε_2'.[1])

Diese Konstruktion nun können wir ausführen, wenn uns nur die Kollineation $\mathfrak{C}$ und das Polarsystem von Φ gegeben sind; dies werden uns die folgenden Betrachtungen lehren. Erstens nämlich schneidet auf einer Kante k des Tangentialkegels E' der durch Φ und Φ' bestimmte Büschel von Flächen II. Grades eine Involution ein, deren Doppelpunkte der Schnittpunkt von k mit der Hauptebene φ' und der Berührungspunkt von k mit Φ', d. h. der Schnittpunkt von k mit ε'', sind; in dieser Involution bilden die Schnittpunkte von k mit Φ, d. h. mit ε_1' und ε_2', ein Paar, und deshalb ist

$$(\varphi' \, \varepsilon'' \, \varepsilon_1' \, \varepsilon_2') = -1.$$

Zweitens aber geht außer dem Kegel E', dessen Scheitel N sei, durch die beiden Kreise, die Φ in ε_1' und ε_2' hat, noch ein zweiter Kegel II. Grades, dessen Scheitel M dem N im Polarsystem von Φ konjugiert ist und von ihm durch ε_1', ε_2' harmonisch getrennt wird; die Polarebenen μ und ν von M und N verbinden die Gerade $\overline{\varepsilon_1' \, \varphi'} \equiv \overline{\varepsilon_2' \, \varphi'}$ bzw. mit N und M, und deshalb ist auch

$$(\mu \, \nu \, \varepsilon_1' \, \varepsilon_2') = -1.$$

μ und ν sind einander im Polarsystem von Φ konjugiert, μ und ε'' aber, da N der i. Bez. auf Φ' genommene Pol von ε'' ist, im Polarsystem von Φ'; ist daher λ die Ebene aus dem Büschel $\overline{\varepsilon\psi}$, die im Polarsystem von Φ der ε konjugiert ist, so ist μ die ihr durch die Kollineation $\mathfrak{C}$ zugeordnete Ebene. Hieraus ergibt sich die folgende Konstruktion:

Um die einer Ebene ε *vermöge* $\mathfrak{C}$ *entsprechenden Ebenen* ε_1', ε_2' *zu konstruieren, suche man die durch* $\overline{\varepsilon\psi}$ *gehende und im Polarsystem von* Φ *der* ε *konjugierte Ebene* λ, *nehme die der* ε *und der* λ *durch die Kollineation* $\mathfrak{C}$ *zugeordneten Ebenen* ε'' *und* μ, *die sich in einer Geraden von* φ' *schneiden, und*

[1]) Das ebene Analogon dieser Konstruktion siehe in Fig.4

endlich die durch dieselbe Gerade gehende und zu μ im Polarsystem von Φ konjugierte Ebene ν; dann sind ε_1' und ε_2' die Doppelebenen der Involution, die durch die Ebenenpaare φ', ε'' und μ, ν bestimmt ist.[1])

Die Konstruktion versagt jedoch in zwei Fällen, die wir hier nur angeben wollen, ohne näher auf sie einzugehen. Der erste Fall tritt ein, wenn ε die Hauptebene ψ in einer Tangente von Φ schneidet; denn dann ist λ und folglich auch μ Tangentialebene von Φ und somit ν unbestimmt. Der zweite Fall ist der, daß ε durch den i. Bez. auf Φ genommenen Pol der Hauptebene ψ geht; denn dann wird $\lambda \equiv \psi$ und somit $\mu \equiv \varphi'$, während ε'' und ν beide durch den Pol der Hauptebene φ' laufen und ebenfalls zusammenfallen; die Ebenen ε_1', ε_2', die diesen Ebenen ε entsprechen, umhüllen nach dem früheren eine Fläche II. Grades, die Φ längs des Hauptkreises (φ') berührt.

3. Genau dieselben Betrachtungen können wir mit der inversen Transformation $\mathfrak{C}^{-1}$ anstellen; auch mit ihr ist eine Kollineation verbunden, die wir mit $\mathfrak{C}^{*-1}$ bezeichnen wollen, und es handelt sich darum, den Zusammenhang von $\mathfrak{C}$ und $\mathfrak{C}^*$ aufzufinden. $\mathfrak{C}^{*-1}$ nun führt die Grundfläche $\Phi \equiv \Psi'$ in derselben Weise in die Fläche Ψ über, wie $\mathfrak{C}^{-1}$ es tut; einer Ebene ε also, die Ψ berührt, wird umgekehrt durch $\mathfrak{C}^*$ eine Berührungsebene ε_1' von $\Psi' \equiv \Phi$ und durch $\mathfrak{C}$ dieselbe Ebene ε_1' und eine zweite Ebene ε_2' zugeordnet. ε_1' und ε_2' bestimmen aber zusammen mit Φ einen Kegel II. Grades, der seinen Scheitel im Berührungspunkt von ε_1' hat und die Fläche Φ' längs eines Kegelschnittes berührt; die Ebene ε'' dieses Kegelschnittes ist also im Polarsystem $\mathfrak{R}'$ von Φ' die Polarebene desjenigen Punktes von Φ, in dem die durch $\mathfrak{C}^*$ der ε zugeordnete Ebene ε_1' berührt; das heißt: Nennen wir das Polarsystem von Φ $\mathfrak{R}$, so entspricht die ε'' der ε in der Kollineation $(\mathfrak{C}^*\mathfrak{R}\mathfrak{R}')$. Andererseits aber ist ε'' die der ε durch $\mathfrak{C}$ zugeordnete Ebene; mithin sehen wir, daß bei ihrer Anwendung auf die Ebenen von Ψ die beiden Kollineationen

[1]) Das ebene Analogon siehe wiederum in Fig. 4.

$\mathfrak{C}$ und $(\mathfrak{C}^*\mathfrak{R}\mathfrak{R}')$ dasselbe Resultat ergeben; sie sind deshalb durchweg mit einander identisch:

$$\mathfrak{C} = \mathfrak{C}^*\mathfrak{R}\mathfrak{R}'.$$

Hieraus folgt, da

$$\mathfrak{R}^{-1} = \mathfrak{R},\ \mathfrak{R}'^{-1} = \mathfrak{R}',\ \mathfrak{R}' = \mathfrak{C}^{-1}\mathfrak{R}\mathfrak{C},$$

die Beziehung

$$\mathfrak{C}^* = \mathfrak{R}\mathfrak{C}\mathfrak{R},$$

das heißt:

$\mathfrak{C}^*$ ist die vermittelst des Polarsystems von Φ transformierte $\mathfrak{C}$ — und umgekehrt.

Da ferner jeder Ebene, die Φ in einem Punkte der Hauptebene ψ berührt, durch $\mathfrak{C}$ umkehrbar eindeutig eine Ebene zugeordnet ist, die Φ in einem Punkte der Hauptebene φ' berührt, sind die durch $\mathfrak{C}$ und $\mathfrak{C}^*$ erzeugten Projektivitäten zwischen den Punktreihen der Hauptkreise (ψ) und (φ') zu einander invers, und hieraus folgt:

$\mathfrak{C}$ und $\mathfrak{C}^*$ erzeugen zwischen den Feldern der Hauptebenen ψ und φ' zwei inverse Kollineationen.

Zum Schluß heben wir noch den folgenden Satz hervor, der aus den Erörterungen dieses Paragraphen fließt:

Ist die Grundkugel Φ gegeben, so bestimmt jede Kollineation, die Φ in eine sie längs eines Kreises berührende Fläche überführt, eindeutig eine Transformation $\mathfrak{C}$.

§ 3. Die aus zwei Transformationen $\mathfrak{C}$ folgenden Transformationen.

1. Wenn wir von unseren Transformationen $\mathfrak{C}$ zwei, $\mathfrak{C}_{\mathrm{I}}$ und $\mathfrak{C}_{\mathrm{II}}$, nehmen, die dieselbe Grundkugel Φ besitzen, und zuerst die $\mathfrak{C}_{\mathrm{I}}$ und hernach die $\mathfrak{C}_{\mathrm{II}}$ anwenden, so resultiert eine Transformation $(\mathfrak{C}_{\mathrm{I}} \cdot \mathfrak{C}_{\mathrm{II}})$, die jeder Berührungsebene von Φ zwei und jeder anderen Ebene vier Ebenen zuordnet; auch sie erzeugt auf Φ eine Berührungstransformation der Kreise, und deshalb ist es von Interesse sie zu untersuchen. Auch hierbei wird die Fläche eine besondere Rolle spielen, in die Φ übergeht; es ist das die Fläche, in die durch $\mathfrak{C}_{\mathrm{II}}$ die Fläche Φ'_{I} verwandelt wird, die in der $\mathfrak{C}_{\mathrm{I}}$ der

Φ selbst entspricht. Wir haben also zunächst die Frage zu beantworten: Was für eine Fläche X' entspricht in einer Transformation $\mathfrak{E}$ einer Fläche II. Grades X, die die Grundkugel Φ längs eines Kreises berührt?

2. Wir untersuchen zuerst den Torsus K', in den durch $\mathfrak{E}$ ein Berührungskegel von X, also ein Kegel II. Grades K übergeht, der Φ in zwei Punkten berührt. Sei also R' ein beliebiger Punkt, so umhüllen die Ebenen ε, die mindestens eine der ihnen in $\mathfrak{E}$ zugeordneten Ebenen ε_1', ε_2' durch R' schicken, die i. A. nicht ausartende Fläche II. Grades P, in die das Ebenenbündel (R') durch $\mathfrak{E}^{-1}$ verwandelt wird, und zwar geht, wenn die Ebenen ε_1' und ε_2' von einander verschieden sind, immer nur eine von ihnen durch R', da im anderen Fall R' auf ihrer Schnittlinie und somit in der Hauptebene φ' liegen müßte. Also erhalten wir aus den vier Ebenen, die den Klassenflächen K und P gemeinsam sind, gerade vier Berührungsebenen von K' die durch R' laufen; das heißt: K' ist von der IV. Klasse. Da nun K die Grundkugel Φ in zwei Kreisen (α) und (β) schneidet, muß K' sie in den vier Kreisen (α_1'), (α_2'), (β_1'), (β_2') durchsetzen und deshalb in zwei Kegel II. Grades, K_1' und K_2', zerfallen, die Φ ebenfalls je in zwei Punkten berühren. Ferner besteht zwischen dem Tangentenbüschel des Kreises (α) und jedem der Tangentenbüschel der Kreise (α_1') und (α_2') vermöge $\mathfrak{E}$ eine eindeutige Beziehung: Jeder Tangente t von (α) ist eine Tangente t_1' von (α_1') und eine Tangente t_2' von (α_2') derart zugeordnet, daß durch $\mathfrak{E}$ einer jeden Ebene aus t eine Ebene aus t_1' und eine aus t_2' korrespondiert. Diese beiden Beziehungen sind demnach perspektiv zu der durch $\mathfrak{E}$ hervorgerufenen projektiven Beziehung zwischen den Ebenen des Kegels, der die Grundkugel Φ längs (α) berührt, und den Ebenen des ihm durch $\mathfrak{E}$ zugeordneten Tangentialkegels von Φ', der (α_1') und (α_2') in Φ einschneidet, und deshalb ebenfalls projektiv. Hieraus folgt nun der Satz:

Läßt man eine Ebene die Tangentialebenen eines die Grundkugel zweipunktig berührenden Kegels II. Grades *durchlaufen, so bewegen sich die ihr in $\mathfrak{E}$ entsprechenden beiden Ebenen dazu projektiv in den Tangentialebenenbüscheln zweier ebensolchen Kegel.*

3. Unsere Fläche X nun besitzt, da sie Φ längs eines Kreises berührt, lauter Tangentialkegel wie K; zwei davon hat sie mit der Fläche P gemeinsam, die wieder in $\mathfrak{E}^{-1}$ irgend einem Punkte R' entspricht; jeder dieser Kegel geht nach dem vorigen Satze in zwei Kegel über, von denen immer der eine R' zum Scheitel hat; weitere Tangentialebenen der Fläche X' laufen außerhalb jener Kegel nicht durch R', und wir erkennen deshalb, daß X' eine Fläche IV. Klasse ist, die aus jedem Punkt des Raumes einen Tangentialkegel empfängt, der in zwei die Grundkugel je in zwei Punkten berührende Kegel II. Grades zerfällt; daher[1]) besteht X aus zwei Flächen II. Grades, X_1' und X_2', die Φ je längs eines Kreises berühren, und zwar sind *diese Berührungskreise reell oder imaginär, je nachdem X mit der Fläche Ψ, in die Φ durch $\mathfrak{E}^{-1}$ übergeht, reelle oder imaginäre Tangentialkegel gemeinsam hat.* — Nehmen wir nun einen Tangentialkegel K von X, dessen Scheitel in der Hauptebene ψ liegt, so haben die ihm zugeordneten Kegel K_1' und K_2' denselben, in der Hauptebene φ' gelegenen Scheitel und sind die aus diesem Punkt an X_1' und X_2' gehenden Tangentialkegel, etwa K_1' an X_1' und K_2' an X_2'; lassen wir also eine Ebene ε den K durchlaufen, so beschreibt von den entsprechenden Ebenen ε_1' den K_1' und ε_2' den K_2', und hieraus folgt, daß überhaupt von den beiden Ebenen, die einer Berührungsebene von X entsprechen, immer die eine X_1' und die andere X_2' berührt. Mithin besteht zwischen den Tangentialebenen von X einerseits und denen von X_1' sowohl wie von X_2' andererseits eine eindeutige Beziehung; diese beiden Beziehungen müssen aber Kollineationen sein, da nach dem letzten Satz in jeder von ihnen jede zwei sich entsprechenden Tangentialkegel zu einander projektiv sind. Wir haben also:

[1]) E. E. Kummer, Crelles Journal, Bd. 64, S. 66—76.

Läßt man eine Ebene die Berührungsebenen einer Fläche II. Grades durchlaufen, die die Grundkugel der Transformation $\mathfrak{E}$ längs eines Kreises berührt, so durchlaufen die beiden entsprechenden Ebenen dazu kollinear die Tangentialebenen je einer Fläche II. Grades, die die Grundkugel ebenfalls längs eines Kreises berührt.

4. Jetzt kehren wir wieder zu unseren beiden $\mathfrak{E}$-Transformationen $\mathfrak{E}_{\mathrm{I}}$ und $\mathfrak{E}_{\mathrm{II}}$ zurück: Durch $\mathfrak{E}_{\mathrm{I}}$ geht die Grundkugel Φ in $\Phi_{\mathrm{I}}' \equiv X$ über und durch $\mathfrak{E}_{\mathrm{II}}$ wieder X in X_1' und X_2'; die zwischen den Tangentialebenen von Φ und denen von X_1' und X_2' vermöge $(\mathfrak{E}_{\mathrm{I}} \cdot \mathfrak{E}_{\mathrm{II}})$ bestehende Zuordnung kann nach dem obigen Satze durch zwei Kollineationen, $\mathfrak{C}_1$ und $\mathfrak{C}_2$, erzeugt werden, und es sind einem Tangentialkegel K von Φ in $(\mathfrak{E}_{\mathrm{I}} \cdot \mathfrak{E}_{\mathrm{II}})$ dieselben beiden Tangentialkegel K_1' von X_1' und K_2' von X_2' zugeordnet, wie durch $\mathfrak{C}_1$ und $\mathfrak{C}_2$; der Ebene ε ferner des Berührungskreises von K entsprechen in $(\mathfrak{E}_{\mathrm{I}} \cdot \mathfrak{E}_{\mathrm{II}})$ die Ebenen ε_{11}' und ε_{12}' der Kreise, die K_1', und die Ebenen ε_{21}' und ε_{22}' der Kreise, die K_2' in Φ einschneidet. Durch $\mathfrak{C}_1$ und $\mathfrak{C}_2$ aber sind zwei $\mathfrak{E}$-Transformationen $\mathfrak{E}_1$ und $\mathfrak{E}_2$ bestimmt, in denen der ε gerade dieselben Ebenen ε_{11}' und ε_{12}', bzw. ε_{21}' und ε_{22}' zugehören; folglich zerfällt $(\mathfrak{E}_{\mathrm{I}} \cdot \mathfrak{E}_{\mathrm{II}})$ in diese beiden Transformationen $\mathfrak{E}_1$ und $\mathfrak{E}_2$. Wir haben sonach:

Die Transformation, die durch die Aufeinanderfolge zweier, mit derselben Grundkugel behafteten $\mathfrak{E}$-Transformationen entsteht, zerfällt wieder in zwei $\mathfrak{E}$-Transformationen, die ebendieselbe Grundkugel besitzen.

Dieser Satz bedeutet:

Die Transformationen $\mathfrak{E}$ bilden eine Gruppe.

§ 4. Die fundamentalen Transformationen $\mathfrak{E}_0$.

1. Die Kollineation $\mathfrak{C}$, von der eine Transformation $\mathfrak{E}$ abhängt, erzeugt zwischen den Punktreihen der Kreise, die sich auf der Grundkugel Φ in den Hauptebenen ψ und φ' befinden, eine Projektivität, und durch diese sind zwei Kollineationen bestimmt, die Φ in sich selbst überführen,

eine der ersten und eine der zweiten Art; eine von ihnen nennen wir $\mathfrak{D}$. Ferner gibt es immer zwei Homologien, die φ' zur Hauptebene haben und Φ in Φ' verwandeln; ihr Zentrum ist der Pol von φ'. Eine dieser Homologien, $\mathfrak{C}_0$, erhalten wir, wenn wir zuerst $\mathfrak{D}^{-1}$ und dann $\mathfrak{C}$ anwenden; es ist also

$$\mathfrak{D} \cdot \mathfrak{C}_0 = \mathfrak{C}.$$

Daraus folgt aber sofort der Satz:

Jede Transformation $\mathfrak{E}$ läßt sich auf zwei Weisen zusammensetzen aus einer Kollineation $\mathfrak{D}$ der Grundkugel in sich und aus einer ausgezeichneten Transformation $\mathfrak{E}_0$, die in derselben Weise, wie $\mathfrak{E}$ von der Kollineation $\mathfrak{C}$, von einer Homologie $\mathfrak{C}_0$ abhängt, deren Zentrum und Hauptebene i. Bez. auf Φ polar sind. Es ist

$$\mathfrak{C} = \mathfrak{D} \cdot \mathfrak{C}_0, \quad \mathfrak{E} = \mathfrak{D} \cdot \mathfrak{E}_0,$$

und wir nennen $\mathfrak{E}_0$ eine „fundamentale" $\mathfrak{E}$-Transformation.

2. Seien C^* und γ^* Zentrum und Hauptebene von $\mathfrak{C}_0$, so sind in γ^* die beiden Hauptebenen ψ und φ' des allgemeinen Falles so zusammengefallen, daß die zwischen ihren Feldern durch $\mathfrak{C}_0$ und $\mathfrak{E}_0$ erzeugte Kollineation zur Identität geworden ist; mithin erzeugen auch $\mathfrak{E}_0^{-1}$ und die sie bestimmende Kollineation $\mathfrak{C}_0^{*-1}$ in γ^* eine Identität, das heißt, $\mathfrak{C}_0^*$ ist auch eine Homologie mit γ^* als Hauptebene. Das Zentrum von $\mathfrak{C}_0^*$ ist ebenfalls C^*, da jede der Ebenen des aus C^* kommenden Tangentialkegels von Φ in $\mathfrak{E}_0$ umkehrbar eindeutig sich selbst entspricht. Da nun, wie am Ende von § 2 bewiesen wurde,

$$\mathfrak{C}_0^* = \mathfrak{R}\mathfrak{C}_0\mathfrak{R}$$

ist, erhalten wir ein Paar sich in $\mathfrak{C}_0^*$ entsprechender Ebenen η, η^0, wenn wir ein Paar in $\mathfrak{C}_0$ zusammengehöriger Ebenen ξ, ξ'' durch die Ebenen ersetzen, die durch ihre gemeinsame Schnittlinie mit γ^* gehen und ihnen im Polarsystem $\mathfrak{R}$ von Φ konjugiert sind. Inzidieren C^* und γ^* nicht, so haben $\mathfrak{C}_0$ und $\mathfrak{C}_0^*$ je eine charakteristische Konstante $\varkappa$, bzw. $\varkappa^*$, so daß

$$(\gamma^* C^* \mathfrak{x}\mathfrak{x}'') = \varkappa, \; (\gamma^* C^* \eta\eta^0) = \varkappa^*$$

ist; da aber vermöge des Polarsystems $\mathfrak{R}$

$$(\gamma^* C^* \eta\eta^0) = (C^* \gamma^* \mathfrak{x}\mathfrak{x}'')$$

ist, haben wir

$$\varkappa^* = \frac{1}{\varkappa}$$

und

$$\mathfrak{C}_0{}^{*-1} = \mathfrak{C}_0.$$

Wenn aber C^* und γ^* inzidieren, so besteht infolge von $\mathfrak{C}_0$ in jedem Ebenenbüschel, dessen Axe x in γ^* liegt, eine Projektivität, in der γ^* das einzige Koinzidenzelement ist, und eine solche hat die folgende Eigenschaft: Sind $\mathfrak{x}$ eine Ebene aus (x) und $\mathfrak{x}^0$ und $\mathfrak{x}''$ die ihr in beiderlei Sinn entsprechenden Ebenen, so ist $(\gamma^* \mathfrak{x}\mathfrak{x}^0 \mathfrak{x}'') = -1$. Also sind $\mathfrak{x}^0$ und $\mathfrak{x}''$ im Polarsystem $\mathfrak{R}$ konjugierte Ebenen, wenn $\mathfrak{x}$ die Φ berührt, und vertauschen sich bei Anwendung von $\mathfrak{R}$ unter einander, während γ^* und $\mathfrak{x}$ festbleiben; mithin geht die Projektivität in (x) bei Anwendung von $\mathfrak{R}$ in ihre inverse über, und wir haben auch hier, daß

$$\mathfrak{C}_0{}^{*-1} = \mathfrak{C}_0.$$

Daraus folgt aber, daß wir beide Male genau dieselben Operationen vornehmen müssen, sowohl, wenn wir zu einer Ebene ε die ihr durch $\mathfrak{C}_0$, als auch, wenn wir die ihr durch $\mathfrak{C}_0^{-1}$ zugeordneten Ebenen aufsuchen; das heißt:

Jede der fundamentalen $\mathfrak{C}$-Transformationen $\mathfrak{C}_0$ ist durchweg involutorisch.

Im übrigen kann man die Eigenschaften der allgemeinen $\mathfrak{C}$-Transformationen auf die fundamentalen unmittelbar übertragen; man muß eben nur in Betracht ziehen, daß die beiden Hauptebenen ψ und φ' so zusammengefallen sind, daß aus der zwischen ihren Feldern bestehenden Kollineation eine Identität geworden ist. Die beiden Flächen Ψ und Φ' sind natürlich auch identisch.

3. Je nachdem die Hauptebene γ^* die Grundkugel Φ reell schneidet oder nicht schneidet oder berührt, modifizieren sich die Eigenschaften der fundamentalen Transformationen

$\mathfrak{E}_0$; wir können daher bei ihnen drei Typen unterscheiden, die wir, des kurzen Ausdrucks wegen, als den *„schneidenden"*, den *„nicht schneidenden"* und den *„berührenden"* Typus bezeichnen wollen. Durch eine reelle Kollineation der Grundkugel in sich kann man jede Transformation $\mathfrak{E}_0$ in jede desselben Typus, nicht aber in eine eines anderen Typus überführen. Dagegen läßt sich das letztere in folgender Weise auf reellem Wege erreichen: Seien z. B. eine fundamentale Transformation $\mathfrak{E}_0$ vom schneidenden und eine fundamentale Transformation $\mathfrak{E}_0^{\mathrm{I}}$ vom nicht schneidenden Typus gegeben, so fügen wir, um die erste aus der zweiten zu erhalten, zu dieser eine fundamentale Transformation $\mathfrak{E}_0^{\mathrm{II}}$, die etwa auch vom nicht schneidenden Typus, aber so gewählt ist, daß die Flächen Φ'_{I} und Φ'_{II}, in die Φ durch $\mathfrak{E}_0^{\mathrm{I}}$ und $\mathfrak{E}_0^{\mathrm{II}}$ übergeht, mindestens einen *reellen* Tangentialkegel gemeinsam haben; dann zerfällt nach den Ergebnissen des § 3, Abs. 3 die Transformation $(\mathfrak{E}_0^{\mathrm{I}} \cdot \mathfrak{E}_0^{\mathrm{II}})$ in zwei, i. A. nicht fundamentale Transformationen, von denen mindestens eine, $\mathfrak{E}_1$, die Grundkugel Φ in eine sie reell berührende Fläche Φ_1' verwandelt; zu $\mathfrak{E}_1$ gehören aber zwei fundamentale Transformationen vom schneidenden Typus, die aus ihr nach § 4, Abs. 1 durch Hinzufügung von zwei gewissen Kollineationen der Grundkugel in sich folgen, und jede dieser fundamentalen Transformationen kann durch Anwendung einer ebensolchen Kollineation in die gegebene $\mathfrak{E}_0$ übergeführt werden.

§ 5. Die ebenen Berührungstransformationen der Kreise. Die Dilatation.

1. Wir haben die Transformationen $\mathfrak{E}$ aufgestellt, um zunächst die einfachsten Berührungstransformationen der Kreise auf der Kugel Φ zu finden; projizieren wir dann wieder die Kugel Φ aus einem Punkte S auf eine Ebene σ und nehmen den Umriß zum absoluten Kegelschnitt der Maßgeometrie in σ, so erhalten wir die einfachsten Berührungstransformationen der Kreise der in σ herrschenden Geometrie. Diese können wir nach den Ergebnissen des vorigen Paragraphen sämtlich mit Hilfe der im ersten Abschnitt be-

handelten Punkttransformationen aus den *„fundamentalen Berührungstransformationen“* ableiten, die aus den fundamentalen $\mathfrak{E}$-Transformationen folgen; deshalb werden wir uns nur mit den fundamentalen Berührungstransformationen beschäftigen. Wir können von ihnen sofort das folgende aussagen:

Die fundamentalen Berührungstransformationen der Kreise sind sämtlich involutorisch.

Um reelle Transformationen zu erhalten, nehmen wir nur *solche Transformationen $\mathfrak{E}_0$, bei denen die reelle Fläche Φ' im Innern von Φ liegt;* denn nur dann entspricht einem reellen Punkt von Φ immer ein reeller Kreis, und nur dann geht jeder reelle Kreis in zwei ebenfalls reelle Kreise über; die charakteristische Konstante $\varkappa$ der mit $\mathfrak{E}_0$ verbundenen Homologie $\mathfrak{C}_0$ muß deshalb, wenn $\mathfrak{E}_0$ zum schneidenden Typus gehört, die Bedingung

$$|\varkappa| > 1$$

und, wenn $\mathfrak{E}_0$ zum nichtschneidenden Typus gehört, die Bedingung

$$|\varkappa| < 1$$

erfüllen.

2. Auch die fundamentalen Berührungstransformationen der Kreise zerfallen, gemäß dem Verhalten der fundamentalen $\mathfrak{E}$-Transformationen, in drei Typen: Bezeichnen wir als den *„Hauptkreis“* einer fundamentalen Berührungstransformation das Bild des Kreises von Φ, der in der Hauptebene der zugehörigen $\mathfrak{E}_0$ liegt, so unterscheiden sich die drei Typen dadurch, daß der erste einen reellen, der zweite einen imaginären und der dritte einen in ein imaginäres Punktepaar ausartenden Hauptkreis besitzt. Ferner gibt es unter ihnen zwei besonders einfache Arten von Transformationen, die entstehen, wenn das Projektionszentrum S entweder im Zentrum C^* oder auf der Hauptebene γ^* der projizierten $\mathfrak{E}_0$ gewählt wird; die erste Art ist die der *Dilatationen* und soll zuerst behandelt werden:

Im Falle der parabolischen Geometrie muß $\mathfrak{C}_0$ vom berührenden, im hyperbolischen Falle vom schneidenden, im elliptischen Falle vom nichtschneidenden Typus sein, wenn man eine Dilatation erzeugen will; hieraus folgt:

Mit Hilfe der im ersten Abschnitt untersuchten Punktverwandtschaften lassen sich in der parabolischen Geometrie alle fundamentalen Berührungstransformationen der Kreise, die einen zerfallenden Hauptkreis haben, in der hyperbolischen Geometrie die mit reellem Hauptkreis, in der elliptischen Geometrie die mit imaginärem Hauptkreis aus den Dilatationen ableiten.

In der parabolischen Geometrie entsprechen vermöge einer Dilatation jedem Kreis zwei Kreise, die zusammenfallen, wenn der erste Kreis ein Punkt ist; denn die stereographische Projektion der Kugel auf die Ebene ist umkehrbar eindeutig. In den beiden anderen Geometrien gilt dasselbe, und zwar aus folgendem Grunde: Je zwei Punkte oder Kreise von Φ geben in σ dasselbe Bild, wenn sie in der involutorischen Homologie gepaart sind, die C^* zum Zentrum und γ^* zur Hauptebene hat; diese involutorische Homologie aber läßt, auf die mit $\mathfrak{C}_0$ verbundene Homologie $\mathfrak{C}_0$ angewendet, diese und somit auch $\mathfrak{C}_0$ selbst ungeändert; also haben die vier Kreise der Kugel, die zwei in σ dasselbe Bild gebenden Kreisen in $\mathfrak{C}_0$ entsprechen, in σ nur zwei Bildkreise. — Nehmen wir nun irgend einen Kreis von Φ, dessen Ebene ε sei, so wird der Mittelpunkt seines Bildkreises in σ eingeschnitten durch denjenigen Strahl aus $S \equiv C^*$, der zu der Schnittgeraden $\overline{\varepsilon\gamma^*}$ i. Bez. auf Φ polar ist; es gehen aber die Ebenen, die der ε in $\mathfrak{C}_0$ entsprechen, ebenfalls durch $\overline{\varepsilon\gamma^*}$; also sind jedem Kreis von σ zwei mit ihm konzentrische Kreise zugeordnet. Insbesondere gehört zu einem Punkt P von σ ein Kreis π', dessen Mittelpunkt er ist; läßt man P einen Kreis ε durchlaufen, so bilden die zugehörigen Kreise π' ein System, dessen Enveloppe in die beiden dem ε entsprechenden und mit ihm konzentrischen Kreise zerfällt; daraus folgt sofort:

In allen drei Geometrien ist durch eine Dilatation jedem Punkt der Kreis zugeordnet, der um ihn mit einem Radius von einer für die ganze Dilatation konstanten Länge r geschlagen ist; einem Kreise entsprechen zwei mit ihm konzentrische Kreise, deren Radien um r kleiner und größer sind, als der seine, bzw. wenn es sich um einen Kreis der hyperbolischen Geometrie mit uneigentlichem Mittelpunkt handelt, zwei Kreise mit derselben Mittellinie wie er und einem um r größeren und kleineren Abstand von dieser.

Ein Unterschied besteht jedoch:

In der parabolischen Geometrie entsprechen einer Geraden die zwei im Abstand r zu ihr gezogenen Parallelen; in den beiden anderen Geometrien ist dagegen einer Geraden der Kreis zugeordnet, der sie zur Mittellinie hat und die von ihr um r entfernten Punkte trägt.

Fassen wir in der parabolischen Geometrie die unendlich ferne Gerade von σ als die Punktkurve des ausgearteten absoluten Kegelschnittes auf, so können wir sagen:

In der Dilatation ist der absolute Kegelschnitt der Hauptkreis, und seine Punkte entsprechen in allen drei Geometrien je sich selbst.

§ 6. Die fundamentalen Berührungstransformationen „$\mathfrak{Z}$“ der Kreise.

1. Wir wenden uns jetzt zu der zweiten einfachen Art der fundamentalen Berührungstransformationen der Kreise, die entsteht, wenn man das Projektionszentrum S auf der Hauptebene γ^* der Transformation $\mathfrak{E}_0$ annimmt; sie ist von Herrn Scheffers für die euklidische Geometrie aufgestellt und mit dem Buchstaben $\mathfrak{Z}$ bezeichnet worden; deshalb wählen auch wir diesen Buchstaben zu ihrer Benennung. Die Transformation $\mathfrak{E}_0$ muß im parabolischen und elliptischen Fall dem schneidenden Typus angehören, während sie im hyperbolischen Fall keiner Beschränkung unterliegt; das heißt:

In der hyperbolischen Geometrie lassen sich alle fundamentalen Berührungstransformationen der Kreise, in der para-

bolischen und elliptischen aber nur die mit reellem Hauptkreis aus den $\mathfrak{Z}$-Transformationen mit Hilfe der im ersten Abschnitt behandelten Punktverwandtschaften herleiten.

Das Bild C des Zentrums C^* der $\mathfrak{C}_0$ nennen wir das *Zentrum* und die Schnittlinie $c \equiv \overline{\sigma\gamma^*}$ *die Hauptgerade der Transformation* $\mathfrak{Z}$, die aus $\mathfrak{C}_0$ in σ folgt; c ist das stets reelle Bild des Schnittkreises von γ^* mit der Kugel Φ und tritt an die Stelle des Hauptkreises der allgemeinen Fundamentaltransformation. Die durch C laufenden und zu c senkrechten Geraden nennen wir *die Durchmesser* der Transformation $\mathfrak{Z}$. Da nun durch $\mathfrak{C}_0$ die Ebenen, die durch S gehen, unter einander vertauscht werden, und da die in ihnen befindlichen Kreise der Kugel Φ in σ die geraden Linien zu Bildern haben, entsprechen jeder Geraden von σ vermöge $\mathfrak{Z}$ involutorisch wieder zwei Gerade:

Mit jeder Transformation $\mathfrak{Z}$ ist eine involutorische zweideutige Verwandtschaft der Geraden der Ebene verbunden.

Durch $\mathfrak{C}_0$ werden die aus S an Φ gehenden Tangenten unter sich vertauscht; da sie in σ die absoluten (unendlich fernen) Punkte einschneiden, so haben wir:

Durchläuft in der parabolischen oder hyperbolischen Geometrie eine Gerade einen Parallelenbüschel, so beschreiben die beiden ihr durch $\mathfrak{Z}$ zugeordneten Geraden zwei dazu projektive Büschel von parallelen Linien.

Diese Verwandtschaft zwischen den Geraden der Ebene ist ja nur der Schnitt von σ mit der im Ebenenbündel (S) vermöge $\mathfrak{C}_0$ bestehenden Ebenentransformation; die letztere aber ist der $\mathfrak{C}_0$ genau analog, wenn man nur an die Stelle der Flächen Φ und Φ' die an sie aus S kommenden Tangentialkegel und an die Stelle der mit $\mathfrak{C}$, verbundenen Homologie $\mathfrak{C}_0$ die durch sie im Ebenenbündel (S) erzeugte Homologie setzt, deren Hauptstrahl $\overline{SC^*}$ und deren Hauptebene γ^* ist. Nennen wir den Umriß von Φ' den *Fluchtkreis* der in σ bestehenden Transformation $\mathfrak{Z}$, so folgt hieraus für diese:

Mit jeder Transformation $\mathfrak{Z}$ ist eine Homologie $\mathfrak{H}$ verbunden, die mit $\mathfrak{Z}$ das Zentrum C und die Hauptgerade c gemeinsam hat und den Tangenten des absoluten Kegelschnittes in derselben Weise wie $\mathfrak{Z}$ die Tangenten des Fluchtkreises zuordnet, dessen Mittelpunkt C und dessen Mittellinie c ist.

Wir können jetzt die in § 2 angegebenen Konstruktionen für die $\mathfrak{C}$-Transformationen genau auf die Geradenverwandtschaft der $\mathfrak{Z}$ übertragen. So erhalten wir:[1])

Die einer Geraden g durch $\mathfrak{Z}$ zugeordneten Geraden g_1', g_2' findet man folgendermaßen: 1. Man sucht die der g durch $\mathfrak{H}$ zugeordnete Gerade g'', schneidet sie mit dem Fluchtkreis, legt an ihn in den Schnittpunkten die Tangenten und verbindet die Punkte, in denen diese den absoluten Kegelschnitt treffen, durch die beiden Geraden, die durch den Schnittpunkt von g mit c laufen; das sind die esuchten Geraden g_1', g_2'.

Oder: 2. Man sucht die der g im absoluten Polarsystem konjugierte Gerade l des Strahlenbüschels (cg), nimmt die diesen beiden Geraden durch $\mathfrak{H}$ zugeordneten Geraden g'' und m und konstruiert endlich die der m im absoluten Polarsystem konjugierte Gerade n desselben Strahlenbüschels (cg); dann sind g_1', g_2' die Doppelstrahlen der durch die Paare c, g'' und m, n bestimmten Involution.

2. In der hyperbolischen Geometrie ist die erste Konstruktion anwendbar, denn der absolute Kegelschnitt und der Fluchtkreis sind reell und der letztere ist ein eigentlicher Kreis; man kann sie auch, wie leicht zu zeigen ist, mit nur eigentlichen Elementen durchführen. Hier zeigt die Transformation $\mathfrak{Z}$ drei Typen, je nachdem ihr Zentrum C ein eigentlicher oder ein uneigentlicher Punkt ist oder auf dem absoluten Kegelschnitt liegt; die ersten beiden Typen können wir als den *„zentralen“* und den *„axialen“* bezeichnen; den letzten Typus, der hinsichtlich seiner Durchmesser von den andern abweicht, aber sehr einfach ist, wollen wir im folgenden stillschweigend ausschließen.

---

[1]) Siehe Fig. 4.

In der elliptischen Geometrie verliert die erste Konstruktion ihre Brauchbarkeit, da der absolute Kegelschnitt und der Fluchtkreis imaginär sind, und in der parabolischen Geometrie sogar ihre Geltung, da die beiden Kegelschnitte in Punktepaare ausarten. Hier ist die zweite Konstruktion allein anzuwenden; zu bemerken ist, daß *in der parabolischen Geometrie das Zentrum der Transformation* $\mathfrak{Z}$ *ein unendlich ferner Punkt und die Homologie* $\mathfrak{H}$ *eine Affinität ist, deren Affinitätsstrahlen senkrecht zur Hauptgeraden stehen.* Aber die Konstruktion versagt für die Durchmesser der Transformation $\mathfrak{Z}$, wie das analoge ja auch bei der Transformation $\mathfrak{E}$ in § 2, Abs. 2 eintrat. Erinnern wir uns des dort gesagten, so haben wir: Die Ebenen, die in der $\mathfrak{E}_0$ den durch ihr Zentrum C^* gehenden Ebenen entsprechen, umhüllen eine Fläche II. Grades, die Φ ebenfalls längs des in der Hauptebene γ^* befindlichen Kreises berührt; diese Fläche trägt, wenn $\mathfrak{E}_0$ zum schneidenden Typus gehört, reelle Geraden, nämlich die Tangenten von Φ, die den durch C^* laufenden zugeordnet sind, und ist deshalb ein Hyperboloid, das außerhalb von Φ liegt; sie ist, wenn $\mathfrak{E}_0$ zum nicht schneidenden Typus gehört, ein Ellipsoid, und zwar, da ihre Berührungsebenen nach unserer Voraussetzung über $\mathfrak{E}_0$ die Φ schneiden müssen, ein im Innern von Φ gelegenes; also hat sie, aus einem Punkt S von γ^* auf σ projiziert, immer einen reellen, zum Fluchtkreis konzentrischen Umrißkreis, und diesen, den wir den *„Hilfskreis“* nennen, berühren die Geraden von σ, die den Durchmessern der Transformation $\mathfrak{Z}$ zugeordnet sind. In der parabolischen Geometrie entartet der Hilfskreis in ein reelles, zu c symmetrisches Punktepaar der unendlich fernen Geraden; daraus folgt:

Die einem Durchmesser d einer Transformation $\mathfrak{Z}$ *entsprechenden Geraden laufen in der parabolischen Geometrie durch den Schnittpunkt von d mit der Hauptgeraden c und bilden mit d einen der Transformation charakteristischen Winkel* (dessen Größe wir später bestimmen werden).

Für die anderen beiden Geometrien dagegen gilt:

Die einem Durchmesser d einer Transformation $\mathfrak{Z}$ entsprechenden Geraden sind in der elliptischen und hyperbolischen Geometrie die Tangenten des Hilfskreises, die ihn in seinen Schnittpunkten mit dem zu d senkrechten Durchmesser berühren und durch den Schnittpunkt von d mit der Hauptgeraden c laufen.

Hier ergibt sich nun ein Zusammenhang mit unseren Untersuchungen über die Inversion der hyperbolischen Geometrie in § 3 des ersten Abschnittes: Unser jetziger Hilfskreis steht zum absoluten Kegelschnitt und zum Fluchtkreis genau in demselben Verhältnis, wie dort der erste Hilfskreis zum absoluten Kegelschnitt und zum Hauptkreis der Inversion; also kann er genau so konstruiert werden wie dort, auch wenn, wie in der elliptischen Geometrie, nur die Polarsysteme der in Frage kommenden Kegelschnitte gegeben sind; und die durch $\mathfrak{Z}$ einem Durchmesser d zugeordneten Geraden sind genau so zu konstruieren wie dort die zu einem Durchmesser der Inversion gehörigen Geraden i. — Entsprechend den Eigenschaften der nichteuklidischen Kreise können wir auch hier sagen, daß die einem Durchmesser d durch $\mathfrak{Z}$ zugeordneten beiden Geraden mit ihm einen gewissen Winkel bilden, bzw. mit ihm ein gemeinsames Lot von gewisser Länge haben; beide Größen werden durch dasselbe Doppelverhältnis ϱ gemessen, das den Radius des Hilfskreises definiert, und dieses können wir durch das der Homologie $\mathfrak{H}$ charakteristische Doppelverhältnis $\varkappa$ ausdrücken: Sind nämlich U_1, U_2 die Schnittpunkte des Durchmessers d mit dem absoluten Kegelschnitt, F einer seiner Schnittpunkte mit dem Fluchtkreis und D sein Schnittpunkt mit der Hauptgeraden c, so wird etwa $\varkappa = (DCU_1F)$ sein, und es folgt mit Hilfe derselben Umrechnung, wie wir sie im § 3, Abs. 2 des ersten Abschnittes mit dem Doppelverhältnis $(V_1 V_2 U_1 H_1^*)$ vorgenommen haben, daß

$$(U_1 U_2 CF) = \frac{1+\varkappa}{1-\varkappa}$$

ist; aus der Beziehung zwischen dem Hilfskreis und dem

Fluchtkreis ergibt sich ferner, daß für die ihre Radien messenden Doppelverhältnisse ϱ und $(U_1 U_2 CF)$ die Gleichung

$$\varrho = \left(\frac{\sqrt{(U_1\, U_2\, CF)} + 1}{\sqrt{(U_1\, U_2\, CF)} - 1}\right)^2$$

gilt; hiernach ist

$$\varrho = \frac{(1 + \sqrt{1 - \varkappa^2})^2}{\varkappa^2}.$$

3. Wir haben die Durchmesser der Transformation $\mathfrak{Z}$ so eingehend behandelt, weil sie uns für die Konstruktion der Kreise, die einem Punkt oder Kreis entsprechen, ein bequemes Hilfsmittel bieten werden, und wenden uns jetzt zu den Punkten und Kreisen selbst. Was zunächst die Vieldeutigkeit der Transformationen $\mathfrak{Z}$ betrifft, so gelten genau dieselben Überlegungen wie bei der Dilatation; denn eine fundamentale Transformation $\mathfrak{E}_0$ der Ebenen des Raumes wird auch durch die Anwendung einer involutorischen Homologie nicht geändert, deren Zentrum in der Hauptebene γ^* von $\mathfrak{E}_0$ liegt und deren Hauptebene die i. Bez. auf die Grundkugel Φ genommene Polarebene ihres Zentrums ist. Das heißt:

Eine Transformation $\mathfrak{Z}$ ordnet in allen drei Geometrien involutorisch jedem Punkt einen Kreis und jedem Kreis zwei Kreise zu.

Wir fügen hinzu:

Die Punkte der Hauptgeraden von $\mathfrak{Z}$ entsprechen je sich selbst. Dem absoluten Kegelschnitt ist nur ein Kreis, der Fluchtkreis, zugeordnet. Die mit dem Fluchtkreis konzentrischen Kreise werden untereinander vertauscht.

Da sich je zwei in $\mathfrak{E}_0$ zusammengehörige Ebenen auf der Hauptebene γ^* schneiden, liegen ihre i. Bez. auf Φ genommenen Pole auf derselben Geraden, die durch das Zentrum C^* geht; bei der Projektion aus S nun werden in σ die Bilder der Pole die Mittelpunkte der Kreise, die die Bilder der in jenen Ebenen befindlichen Kugelkreise sind, und ihre Verbindungslinie wird ein Durchmesser von $\mathfrak{Z}$; also haben wir:

Je zwei in einer Transformation $\mathfrak{Z}$ korrespondierenden Kreise haben ihre Mittelpunkte auf demselben Durchmesser der Transformation.

Wir sehen ferner:

Die Kreise der Kreisbüschel, denen die Hauptgerade angehört, werden durch $\mathfrak{Z}$ unter einander vertauscht.

Daraus folgt für die parabolische Geometrie:

Die Hauptgerade einer Transformation $\mathfrak{Z}$ ist in der parabolischen Ebene die Potenzlinie je zweier zusammengeordneter Kreise.

Für die beiden nicht-parabolischen Geometrien aber müssen wir über die Kreisbüschel noch folgendes bemerken: Zwei reelle oder imaginäre Punkte M, N der Ebene sind die Grundpunkte zweier Kreisbüschel; die Kreise jedes Büschels haben ihre Mittelpunkte auf einer bestimmten zu $\overline{MN}$ im absoluten Polarsystem konjugierten Geraden, und diese beiden Geraden schneiden in $\overline{MN}$ die beiden im absoluten Polarsystem konjugierten und durch M und N harmonisch getrennten Punkte ein. Dies ergibt sich daraus, daß M und N die Bilder von vier Punkten M_1, M_2, N_1, N_2 der Kugel Φ sind, daß die Kreise, die in der Ebene durch M und N gehen, die Bilder der Kugelkreise sind, die durch M_1 und N_1, oder durch M_1 und N_2, oder durch M_2 und N_1, oder durch M_2 und N_2 laufen, und endlich, daß die Pole der durch $\overline{M_1 N_1}$ und der durch $\overline{M_2 N_2}$ gehenden Ebenen einerseits und die Pole der durch $\overline{M_1 N_2}$ und der durch $\overline{M_2 N_1}$ gehenden Ebenen andererseits je in der einen von zwei Ebenen liegen, die durch das Projektionszentrum S laufen, i. Bez. auf Φ zur Ebene (SMN) und untereinander konjugiert sind und durch M, N harmonisch getrennt werden. Wenn M und N imaginär sind, enthält nur der eine der durch sie bestimmten Kreisbüschel reelle Kreise; wenn sie in einen Punkt zusammenfallen, geht der eine Kreisbüschel über in den Strahlenbüschel, dessen Scheitel der Punkt ist.

Zwischen den Punkten der Ebene und den Mittelpunkten der ihnen vermöge $\mathfrak{Z}$ entsprechenden Kreise haben wir eine eindeutige Zuordnung, in der je zwei entsprechende Punkte auf demselben Durchmesser der $\mathfrak{Z}$ liegen; sie ist das Bild der Zuordnung zwischen den Punkten der Grundkugel Φ und den Polen der Ebenen, die den Punkten von Φ vermöge $\mathfrak{C}_0$ entsprechen und somit die ihnen zugeordneten Kreise aus Φ ausschneiden; diese Zuordnung wieder entsteht aus der mit $\mathfrak{C}_0$ verbundenen Homologie $\mathfrak{C}_0$ durch Anwendung des Polarsystems von Φ und ist, wie in § 4 gezeigt wurde, die inverse Homologie $\mathfrak{C}_0^{-1}$. Daraus folgt:

Die Zuordnung zwischen den Punkten der parabolischen, elliptischen oder hyperbolischen Ebene und den Mittelpunkten der Kreise, die ihnen in einer Transformation $\mathfrak{Z}$ entsprechen, ist eine Homologie, nämlich die inverse der mit $\mathfrak{Z}$ verbundenen Homologie $\mathfrak{H}$.

Wir können jetzt nachholen, was wir in Aussicht gestellt haben, nämlich *die Bestimmung des charakteristischen Winkels ω der Transformation $\mathfrak{Z}$ in der parabolischen Geometrie*: $\mathfrak{H}$ ist hier eine Affinität; entspricht in ihr dem Punkte X' der Punkt X und schneidet die Gerade $d \equiv \overline{XX'}$ die Hauptgerade c in D, so ist $\varkappa$ der konstante Wert des Streckenverhältnisses $\frac{DX'}{DX}$; X' ist der Mittelpunkt des dem X zugeordneten Kreises und der Winkel ω der Winkel, den die aus D an diesen Kreis gelegten Tangenten mit d bilden; da ferner c die Potenzlinie von X und dem ihm zugeordneten Kreis ist, folgt leicht, daß

$$\cos \omega = \frac{DX}{DX'} = \frac{1}{\varkappa}$$

ist.

4. Nunmehr haben wir die Mittel an der Hand, um mannigfaltige Konstruktionen für die $\mathfrak{Z}$-Transformationen abzuleiten; am einfachsten scheinen die folgenden zu sein:

In allen drei Geometrien findet man den einem Punkt X durch eine Transformation $\mathfrak{Z}$ zugeordneten Kreis folgendermaßen: Man lege durch X den Durchmesser d der Transformation und suche auf ihm den Punkt X' auf, dem der

X in der mit $\mathfrak{Z}$ verbundenen Homologie $\mathfrak{H}$ entspricht; ferner nehme man die eine der zu d vermöge $\mathfrak{Z}$ gehörigen Geraden und schlage um X' den Kreis, der diese berührt; das ist der gesuchte Kreis.

Im Falle der hyperbolischen Geometrie ist dabei zu beachten, daß X' ein uneigentlicher Punkt ist, sobald X außerhalb des Fluchtkreises liegt; dann konstruiert man den dem X zugeordneten Kreis mit Hilfe seiner Mittellinie, die der i. Bez. auf den Fluchtkreis genommenen Polare von X in $\mathfrak{H}^{-1}$ entspricht.

Zu einer Geraden g findet man die entsprechenden g_1', g_2', indem man zu einem ihrer Punkte den zugehörigen Kreis konstruiert und an diesen entweder in seinen Schnittpunkten mit seinem zu g senkrechten Durchmesser — oder aus dem Schnittpunkt von g mit der Hauptgeraden c die Tangenten legt.

Zu einem Kreise $\mathfrak{k}$ konstruiert man die entsprechenden $\mathfrak{k}_1'$, $\mathfrak{k}_2'$ folgendermaßen: Man nimmt einen Punkt T von $\mathfrak{k}$ und die zugehörige Tangente t und sucht den dem T entsprechenden Kreis τ' und die der t entsprechenden Geraden t_1', t_2'; da t_1' und t_2' den Kreis τ' in denselben Punkten berühren, in denen es $\mathfrak{k}_1'$ und $\mathfrak{k}_2'$ tun, errichtet man in diesen Punkten die Senkrechten auf t_1' und t_2' und schneidet sie mit dem Durchmesser d der Transformation $\mathfrak{Z}$, der durch den Mittelpunkt von $\mathfrak{k}$ geht; die Schnittpunkte sind die Mittelpunkte von $\mathfrak{k}_1'$ und $\mathfrak{k}_2'$. Besonders einfach wird die Konstruktion dadurch, daß man als t einen Durchmesser der Transformation $\mathfrak{Z}$ wählt; aber es gibt nicht in allen Fällen reelle Durchmesser, die einen Kreis $\mathfrak{k}$ berühren.

In der hyperbolischen Geometrie ist wieder zu beachten, daß die Kreise $\mathfrak{k}$, $\mathfrak{k}_1'$, $\mathfrak{k}_2'$ uneigentliche Mittelpunkte haben können: Ist der Mittelpunkt von $\mathfrak{k}$ ein uneigentlicher Punkt, so ist d derjenige Durchmesser der Transformation, der auf der Mittellinie von $\mathfrak{k}$ senkrecht steht; hat z. B. $\mathfrak{k}_1'$ einen uneigentlichen Mittelpunkt, so ist seine Mittellinie das gemeinsame Lot von d und der oben auf t_1' errichteten Senkrechten.

Die von Herrn Scheffers für die euklidische Geometrie angegebene Konstruktion der Transformation $\mathfrak{Z}$ folgt aus der obigen, wenn man davon Gebrauch macht, daß die Hauptgerade c die Potenzlinie je zweier entsprechender Kreise ist.

§ 7. Schlußbemerkungen.

Wir haben in den letzten beiden Paragraphen gefunden, daß sich von den fundamentalen Berührungstransformationen der Kreise in der parabolischen Geometrie die mit imaginärem Hauptkreis und in der elliptischen Geometrie die mit ausartendem Hauptkreis nicht mit Hilfe der im ersten Abschnitt behandelten Punktverwandtschaften aus je einer Dilatation oder $\mathfrak{Z}$-Transformation ableiten lassen; dagegen kann man sie nach § 4, Abs. 3 aus je zwei von diesen zusammensetzen. Der Grund dazu liegt in dem folgenden Satze, der sich aus dem analogen in § 3, Abs. 4 ergibt:

Durch die Aufeinanderfolge zweier von unseren Berührungstransformationen der Kreise entsteht eine Transformation, die wieder in zwei ebensolche zerfällt.

Unsere Transformationen bilden nach diesem Satze eine Gruppe, und diese umfaßt gerade so viele Transformationen, wie die der $\mathfrak{C}$-Transformationen bei gegebener Grundkugel Φ; das aber sind ∞^{10}, da jede der ∞^6 Kollineationen der Kugel Φ in sich zusammen mit jeder der ∞^4 Homologien, deren Zentrum und Hauptebene i. Bez. auf Φ polar sind, eine Kollineation $\mathfrak{C}$ ergibt, die eine Transformation $\mathfrak{C}$ bestimmt. Also haben wir:

Die in dieser Arbeit behandelten Punkt- und Berührungstransformationen der Kreise bilden in jeder der drei ebenen Geometrien eine zehngliedrige Gruppe.

Nun hat Lie[1]) nachgewiesen, daß die Berührungstransformationen der Kreise auf einer Kugel eine zehngliedrige

[1]) Lie-Scheffers, *Geometrie der Berührungstransformationen*, S. 165, Theorem 5.

Gruppe bilden; folglich erzeugen die von uns gefundenen $\mathfrak{C}$-Transformationen alle Berührungstransformationen der Kreise auf der Grundkugel Φ, und hierdurch rechtfertigen sich die von uns in § 1, Abs. 1 dieses Abschnittes gemachten, engen Voraussetzungen. Wir haben also die sämtlichen Berührungstransformationen der Kreise in allen drei ebenen Geometrien aufgestellt und dabei den Satz gefunden:

Die Berührungstransformationen der Kreise sind in der parabolischen Geometrie höchstens zweideutige, in der hyperbolischen und elliptischen Geometrie höchstens vierdeutige algebraische Transformationen.

Inhaltsübersicht.

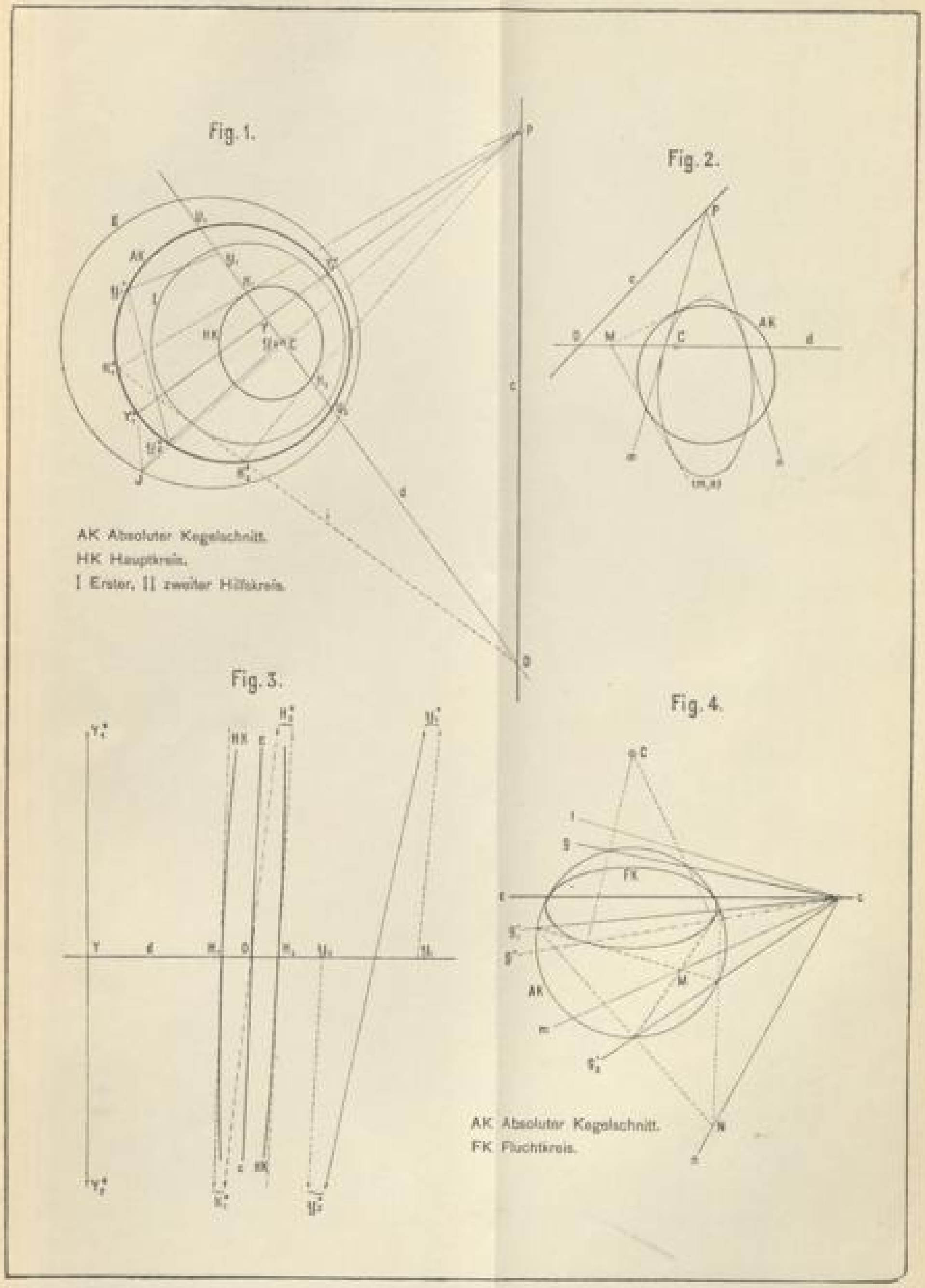
Fig. 1.
AK Absoluter Kegelschnitt.
HK Hauptkreis.
I Erster, II zweiter Hilfskreis.
Fig. 2.
Fig. 3.
Fig. 4.
AK Absoluter Kegelschnitt.
FK Fluchtkreis.