Die Gesetze des Lokomotiv-Baues

Redtenbacher, Ferdinand

Mannheim, 1855

VII. Festigkeits-Verhältnisse

urn:nbn:de:bsz:31-266507

VII.

Festigkeits - Verhältnisse.

Theorie der Federn.

Gleichgewicht eines elastischen Stabes.

Ein im natürlichen Zustand nach irgend einem Gesetz gekrümmter stabförmiger Körper mit ungleichen jedoch nicht viel von einander abweichenden Querschnitten sei unter der Einwirkung von äussern nur auf Biegung wirkenden Kräften im Gleichgewicht; es sollen die Gesetze dieses Gleichgewichtszustandes bestimmt werden.

Es sei für den natürlichen Zustand: $A_0 B_0$, Tab. XVI, Fig. 65, die krummlinige Axe des Stabes, d. h. die Verbindungslinie der Schwerpunkte sämmtlicher Querschnitte des Stabes, $m_0 n_0 = ds$ ein unendlich kleines Element der Axe, $c_0 n_0 = \varrho_0$ der dem Punkt n_0 entsprechende Krümmungshalbmesser der Axe. Für den unter der Einwirkung der äusseren Kräfte gebogenen Stab sei $m n$, Fig. 66, das Axenelement und $c n = \varrho$ der Krümmungshalbmesser, der dem Punkt n entspricht.

Fig. 67 sei der Querschnitt des Stabes bei n $\overline{n q} = \xi$ $\overline{q q} = v$ $\overline{n d} = z$ $\overline{n b} = z_1$.

Da wir annehmen, dass der Stab durch die äussern Kräfte weder gedehnt noch verkürzt und auch nicht verwunden, sondern nur gebogen werde, und dass diese Biegung nur eine schwache sei, so ist es erlaubt anzunehmen: 1) dass durch die Biegung jedes Axenelement seine Länge nicht ändert, dass also $m n = m_0 n_0 = ds$ gesetzt werden dürfe, 2) dass alle Moleküle, welche ursprünglich in einem Querschnitt $b_0 n_0 d_0$ lagen, während des Vorganges der Biegung stets in einer auf der gebogenen Axe normalen Ebene $b n d$ bleiben. Ist $\varrho < \varrho_0$, so sind alle oberhalb $m n$ liegenden Faserstückchen gedehnt, alle unterhalb $m n$ liegenden Faserstückchen verkürzt. Setzt man $\widehat{m_0 c_0 n_0} = \varphi_0$ $\widehat{m c n} = \varphi$, so ist wie aus den Figuren erhellt:

$$\overline{p_0 q_0} = (\varrho_0 + \xi)\, \varphi_0 \qquad \overline{p q} = (\varrho + \xi)\, \varphi$$

oder weil $\qquad \widehat{m_0 n_0} = \widehat{m n} = ds = \varrho_0 \varphi_0 = \varrho \varphi$ ist.

$$\overline{p_0 q_0} = (\varrho_0 + \xi) \frac{ds}{\varrho_0} \qquad \overline{p q} = (\varrho + \xi) \frac{ds}{\varrho} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

Hieraus folgt

$$\overline{p q} - \overline{p_0 q_0} = \xi \left(\frac{1}{\varrho} - \frac{1}{\varrho_0}\right) ds \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (2)$$

Hiernach ist die Längenausdehnung des Faserstückchens $\overline{p_0\, q_0}$ berechnet.

Bezeichnet man durch ε den Modulus der Elastizität des Materials, aus welchem der Stab besteht und durch i die Intensität der Spannung in dem Faserstückchen $p\,q$, d. h. die auf die Flächeneinheit bezogene Spannung, so hat man nach einem bekannten innerhalb der Elastizitätsgrenze geltenden Ausdehnungsgesetz:

$$\overline{p\,q} - \overline{p_0\, q_0} = \overline{p_0\, q_0}\, \frac{i}{\varepsilon}$$

Wegen (1) und (2) folgt aus dieser Gleichung

$$i = \frac{\varepsilon\,\xi\left(\frac{1}{\varrho} - \frac{1}{\varrho_0}\right)}{1 + \frac{\xi}{\varrho_0}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (3)$$

Wir wollen annehmen, dass die Querschnittsdimensionen des Stabes im Verhältniss zum Krümmungshalbmesser ϱ_0 ungemein kleine Grössen seien; dann ist es erlaubt $\frac{\xi}{\varrho_0}$ gegen die Einheit zu vernachlässigen, und unter dieser Voraussetzung folgt aus (3)

$$i = \varepsilon\,\xi\left(\frac{1}{\varrho} - \frac{1}{\varrho_0}\right) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (4)$$

Die das Flächenelement $v\,d\xi$ spannende Kraft ist $\varepsilon\left(\frac{1}{\varrho} - \frac{1}{\varrho_0}\right) v\,\xi\,d\xi$, das statische Moment dieser Kraft in Bezug auf eine durch n gehende Drehungsaxe ist demnach $\varepsilon\left(\frac{1}{\varrho} - \frac{1}{\varrho_0}\right) v\,\xi^2 d\,\xi$. Wir erhalten daher für die Summe der statischen Momente aller in dem Querschnitt b n d vorkommenden Spannungen und Pressungen folgenden Werth:

$$\varepsilon\left(\frac{1}{\varrho} - \frac{1}{\varrho_0}\right)\int_{-z_1}^{+z} v\,\xi^2\,d\,\xi$$

Das Integrale $\int_{-z_1}^{+z} v\,\xi^2\,d\,\xi$ ist das Trägheitsmoment des Querschnitts in Bezug auf eine durch n gehende auf die Ebene der Axe des Stabes senkrechte Drehungsaxe. Setzen wir der Kürze wegen:

$$\int_{-z_1}^{+z} v\,\xi^2\,d\,\xi = \mu$$

so wird das Moment der Elastizitätskräfte:

$$\varepsilon\left(\frac{1}{\varrho} - \frac{1}{\varrho_0}\right)\mu$$

Bezeichnen wir durch M die algebraische Summe der statischen Momente aller äussern auf den Stab einwirkenden Kräfte in Bezug auf die durch n gehende Drehungsaxe, so hat man für den Gleichgewichtszustand:

$$M = \varepsilon \left(\frac{1}{\varrho} - \frac{1}{\varrho_0}\right) \mu \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (5)$$

Wir haben angenommen, dass die Krümmung des Stabes durch die biegenden Kräfte zunehme. Wenn das Gegentheil stattfindet muss $\frac{1}{\varrho_0} - \frac{1}{\varrho}$ statt $\frac{1}{\varrho} - \frac{1}{\varrho_0}$ gesetzt werden.

Nennt man J die Spannung in dem Faserstückchen $c\,d$, so erhält man zur Bestimmung derselben vermöge (4)

$$J = \varepsilon z \left(\frac{1}{\varrho} - \frac{1}{\varrho_0}\right) \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (6)$$

Aus (5) und (6) folgt:

$$M = J \frac{\mu}{z} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (7)$$

Die Werthe von $\frac{\mu}{z}$ findet man in meinen Resultaten für den Maschinenbau auf der V. Figurentafel für verschiedene Querschnittsformen zusammengestellt. Es sind dies die Werthe von E, d. h. man hat

$$\frac{\mu}{z} = E \qquad M = J\,E \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (8)$$

Stimmen alle Querschnitte des Stabes überein, so ist E eine constante Grösse. Sind die Querschnitte des Stabes ungleich, so ist E veränderlich. Nennt man x und y die Coordinaten des Punktes n in Bezug auf ein rechtwinkliges, in der Ebene der Axenlinie liegendes Axensystem, so hat man für den Krümmungshalbmesser ϱ folgenden Ausdruck:

$$\varrho = \pm \frac{ds^3}{dx\, d^2 y} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (9)$$

welcher Ausdruck jedoch voraussetzt, dass man $d^2 x = 0$ genommen habe. Das obere Zeichen gilt, wenn die Axenlinie des Stabes gegen die Abscissenaxe convex, das untere wenn sie gegen die Abcissenaxe concav gekrümmt ist.

Wenn die Krümmung des Stabes sowohl in seinem natürlichen, wie auch im gebogenen Zustand nur schwach ist, kann man der Abscissenaxe immer eine solche Lage geben, dass $\frac{dy}{dx}$ gegen die Einheit eine sehr kleine Grösse ist, so dass also wegen $ds = dx \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}$ annähernd $ds = dx$ gesetzt werden darf. Unter dieser Voraussetzung wird:

$$\varrho = \pm \frac{dx^2}{d^2 y} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (10)$$

und wenn man diesen Werth in (5) einführt, so findet man:

$$\pm\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{1}{\varrho_0}+\frac{M}{\varepsilon\mu} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (11)$$

Ist ϱ_0 und M als Funktion von x gegeben, so erhält man durch Integration dieser Gleichung die Axengestalt des Stabes in seinem gebogenen Zustand.

Berechnung der Wirkungsgröße, welche der Biegung eines Stabes entspricht.

Um diese Wirkungsgrösse zu berechnen, suchen wir zunächst diejenige, welche erforderlich ist, um ein Stabelement von der Länge ds aus dem natürlichen Zustand, dem ein Krümmungshalbmesser ϱ_0 entspricht, in einen Krümmungszustand zu bringen, für welchen der Krümmungshalbmesser ϱ ist.

In einem beliebigen Moment des Aktes der Biegung sei r der Krümmungshalbmesser des Elementes ds, dann ist vermöge Gleichung (2) $\xi\left(\frac{1}{r}-\frac{1}{\varrho}\right)ds$ die Verlängerung des Faserstückchens $p_0 q_0$ und $\xi\, ds\, d\frac{\left(\frac{1}{r}-\frac{1}{\varrho_0}\right)}{dr}dr$ die Aenderung dieser Ausdehnung, wenn die Biegung um unendlich wenig fortschreitet. Die Intensität der Spannung in dem Querschnitt $v\,d\xi$ ist für den Krümmungshalbmesser r, vermöge (4), $\varepsilon\xi\left(\frac{1}{r}-\frac{1}{\varrho_0}\right)$. Das der Aenderung der Ausdehnung entsprechende Element der Wirkung ist daher:

$$v\,d\xi\times\varepsilon\xi\left(\frac{1}{r}-\frac{1}{\varrho_0}\right)\times\xi\,ds\,d\left(\frac{1}{r}-\frac{1}{\varrho_0}\right)$$

Integrirt man diesen Ausdruck zunächst in Bezug auf ξ von $\xi=-z_1$ bis $\xi=+z$, sodann in Bezug auf r von $r=\varrho_0$ bis $r=\varrho$, endlich in Bezug auf s und dehnt dieses letztere Integrale auf die ganze Länge l des Stabes aus, so erhält man für die Wirkungsgrösse W, die erforderlich ist um den Stab aus dem natürlichen Zustand in den Krümmungszustand zu versetzen, dem ein Krümmungshalbmesser ϱ entspricht, folgenden Ausdruck:

$$W=\frac{\varepsilon}{2}\int_0^l\left[\left(\frac{1}{\varrho}-\frac{1}{\varrho_0}\right)^2\int_{-z_1}^{+z}\xi^2\,v\,d\xi\right]ds$$

Oder wenn man wie früher das Trägheitsmoment des Querschnittes mit μ bezeichnet

$$W=\frac{\varepsilon}{2}\int_0^l\left(\frac{1}{\varrho}-\frac{1}{\varrho_0}\right)^2\mu\,ds \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (12)$$

Für einen Stab von durchaus gleichen Querschnitten ist μ constant, und dann wird:

$$W=\frac{\varepsilon\mu}{2}\int_0^l\left(\frac{1}{\varrho}-\frac{1}{\varrho_0}\right)^2 ds \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (13)$$

Die Gleichung (12) ist richtig, es mag der Zustand, dem der Krümmungshalbmesser ϱ entspricht, ein Gleichgewichtszustand sein oder nicht.

Ist der Zustand, dem der Krümmungshalbmesser ϱ entspricht, ein Gleichgewichtszustand, so kann man vermöge (6) und (7) $\frac{1}{\varrho} - \frac{1}{\varrho_0}$ entweder durch J oder durch M ausdrücken, und dann erhält man:

$$W = \frac{1}{2\varepsilon} \int_0^l \frac{J^2 \mu}{z^2} \, ds \quad \ldots \ldots \ldots \quad (14)$$

$$W = \frac{1}{2\varepsilon} \int_0^l \frac{M^2}{\mu} \, ds \quad \ldots \ldots \ldots \quad (15)$$

Vermittelst der Gleichung (12) findet man für die Wirkungsgrösse, die erforderlich ist, um einen Stab, dem im natürlichen Zustand ein Krümmungshalbmesser ϱ_0 entspricht, aus einem gebogenen Zustand, dem ein Krümmungshalbmesser ϱ entspricht, in einen anderen gebogenen Zustand zu versetzen, dem ein Krümmungshalbmesser ϱ_1 zukommt, folgenden Ausdruck:

$$W = \frac{\varepsilon}{2} \int_0^l \left[\left(\frac{1}{\varrho_1} - \frac{1}{\varrho_0} \right)^2 - \left(\frac{1}{\varrho} - \frac{1}{\varrho_0} \right)^2 \right] \mu \, ds \quad \ldots \ldots \quad (16)$$

Wir wollen die bis jetzt gewonnenen Resultate auf einige spezielle Fälle anwenden.

Wirkung, um einen im natürlichen Zustande kreisbogenförmigen Stab mit gleichen Querschnitten in einen anderen kreisbogenförmigen Zustand zu versetzen.

Nennt man ϱ_0 den constanten Halbmesser, der dem natürlichen Zustand entspricht, ϱ den constanten Halbmesser des gebogenen Zustandes, so hat man vermöge (13)

$$W = \frac{\varepsilon}{2} \left(\frac{1}{\varrho} - \frac{1}{\varrho_0} \right)^2 \mu \, l \quad \ldots \ldots \ldots \quad (17)$$

Wenn ϱ und ϱ_0 unveränderliche Werthe haben, ist auch vermöge (6) J constant. Durch Integration der Gleichung (14) findet man daher auch:

$$W = \frac{J^2 \mu \, l}{2 \varepsilon z^2} \quad \ldots \ldots \ldots \quad (18)$$

Für rechtwinklige, kreisförmige, ellyptische Querschnitte ist $\frac{\mu}{z^2}$ dem Querdurchschnitt, demnach $\frac{\mu}{z^2} l$ dem Volumen des Stabs proportional. Nennt man $\mathfrak{V}$ das Volumen des Stabes, so findet man vermittelst den auf Tafel V. meiner Resultate zusammengestellten Werthen von $E = \frac{\mu}{z}$.

1) Wenn der Querschnitt des Stabes ein Rechteck ist.

$$\frac{\mu l}{z^2} = \frac{1}{3} \mathfrak{B} \quad \text{und} \quad W = \frac{1}{6} \frac{J^2}{\varepsilon} \mathfrak{B} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (19)$$

2) Wenn der Querschnitt des Stabes ein Kreis vom Durchmesser d ist.

$$\frac{\mu l}{z^2} = \frac{1}{4} \mathfrak{B} \qquad W = \frac{1}{8} \frac{J^2}{\varepsilon} \mathfrak{B} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (20)$$

3) Wenn der Querschnitt des Stabes ellyptisch ist.

$$\frac{\mu l}{z^2} = \frac{1}{4} \mathfrak{B} \qquad W = \frac{1}{8} \frac{J^2}{\varepsilon} \mathfrak{B} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (21)$$

Wenn ein aus gleich dicken, jedoch aus ungleich langen Schienen bestehendes Federwerk, das im natürlichen Zustand in allen Theilen nach einem und demselben Halbmesser gekrümmt ist, durch äussere Kräfte so gebogen wird, dass alle Schienen übereinstimmende kreisbogenförmige Krümmungen annehmen, so findet auf jede Schiene die Gleichung (19) ihre Anwendung und es ist für alle Schienen der Werth von J gleich gross, man hat daher, wenn $\mathfrak{B}$ das totale Volumen des Federwerks bezeichnet.

$$W = \frac{1}{6} \frac{J^2}{\varepsilon} \mathfrak{B} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (22)$$

Bezeichnet man für eine im natürlichen und im gebogenen Zustand kreisbogenförmig gebogene Schiene f die durch die Biegung verursachte Senkung des Mittelpunktes der Schiene, $2l$ die ganze Länge der Schiene, so hat man annähernd

$$f = \frac{l^2}{2} \left(\frac{1}{\varrho_0} - \frac{1}{\varrho} \right) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (23)$$

Vermittelst dieses Werthes kann die Wirkungsgrösse W Gleichung (12), welche der Krümmungsänderung entspricht, auf folgende Weise ausgedrückt werden:

$$W = 2 \varepsilon \mu \frac{f^2}{l^3} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (24)$$

Biegung eines am einen Ende eingespannten Stabes.

Ein Stab AB (Fig. 68) sei im natürlichen Zustand gerade, habe überall gleiche Querschnitte, sei bei B eingespannt, bei A belastet.

Setzen wir $An = x$ $mn = y$ und erlauben uns ds mit dx zu verwechseln, so hat man $M = Px$ und es wird vermöge Gleichung (15).

$$W = \frac{1}{2\varepsilon} \int_0^l \frac{P^2 x^2 dx}{\mu} = \frac{1}{6} \frac{P^2 l^3}{\varepsilon \mu} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (25)$$

Nennen wir die in dem Querschnitt bei B eintretende grösste Spannungsintensität $\mathfrak{J}$ so ist wegen Gleichung (7).

$$\mathfrak{J} = \frac{z}{\mu} P l \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (26)$$

Elimnirt man aus (25) und (26) den Werth von P so findet man

$$W = \frac{1}{6} \frac{J^2}{\varepsilon} \frac{\mu l}{z^2} \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (37)$$

Biegung eines auf zwei Stützen liegenden Stabes.

Ein bei A und B (Fig. 69) auf zwei Stützen liegender, im natürlichen Zustand gerader Stab von gleichen Querschnitten werde bei C durch ein Gewicht P belastet.

Nennen wir für einen zwischen A und C gelegenen Punkt m An x mn $= y$, für einen zwischen B und C gelegenen Punkt m_1 $Bn_1 = x$ $m_1 n_1 = y_1$.

Die Pressungen, welche die Stützpunkte A und B erleiden, sind $\frac{P c_1}{c + c_1}$, $\frac{P c}{c + c_1}$ die Momente, welche auf die Querschnitte bei m und m_1 einwirken, sind demnach

$$\frac{P c_1}{c + c_1} x \qquad \frac{P c}{c + c_1} x_1$$

Vermöge der Gleichung (15) ist daher die Wirkung um den Stab bis in den Gleichgewichtszustand zu bringen:

$$W = \frac{1}{2 \varepsilon \mu} \int_0^c \left(\frac{P c_1}{c + c_1} x \right)^2 dx + \frac{1}{2 \varepsilon \mu} \int_0^{c_1} \left(\frac{P c}{c + c_1} x_1 \right)^2 dx_1$$

oder:

$$W = \frac{1}{6 \varepsilon \mu} \frac{P^2 c^2 c_1^2}{c + c_1} \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (28)$$

Nennt man $\mathfrak{J}$ das Maximum der Spannungsintensität im Querschnitt bei C, so hat man wegen Gleichung (7)

$$J^2 = \frac{P c c_1}{c + c} \frac{z}{\mu} \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (29)$$

Durch Elimination von P aus diesen zwei Gleichungen folgt: wenn man $c + c_1 = l$ setzt:

$$W = \frac{1}{6} \frac{J^2}{\varepsilon} \frac{\mu l}{z^2} \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (30)$$

Dieser Ausdruck stimmt mit dem in der vorhergehenden Aufgabe für W gefundenen Werth überein.

Gleichgewichts-Verhältnisse eines Federwerkes mit nicht zugespitzten Endstücken.

Wir legen uns die Aufgabe vor, die Gleichgewichtsgesetze eines Federwerkes zu suchen, das im natürlichen Zustande folgende Eigenschaften hat: 1) die Schienenbreiten seien von einerlei Grösse; 2) im natürlichen Zustand seien alle Schienen nach einem und demselben jedoch ziemlich grossen Halbmesser kreisbogenförmig gekrümmt; 3) die Dicke einer einzelnen Schiene sei von der Mitte an bis an die äussersten Endpunkte hin von einerlei Grösse; 4) die Dicken der einzelnen Schienen seien ungleich; 5) jede Schiene sei in der Mitte und an den beiden Enden mit dünnen Metallblättchen von geringer Länge versehen, so dass sich die Schienen, wenn sie aufeinandergelegt und in der Mitte durch eine Umfassung zusammengehalten werden, nicht unmittelbar berühren, sondern zwischen je zweien eine Spalte von gleicher Weite vorhanden ist.

Diese Zwischenlagen dienen nur allein zum Behufe der Theorie, damit sich diese auch auf solche Federwerke ausdehnen kann, in welchen die Schienen im belasteten Zustand des Federwerkes ungleiche Krümmungen annehmen.

Es seien: Tab. XVI, Fig. 71:

n die Anzahl der Schienen des Federwerkes;

$\delta_1\ \delta_2\ \delta_3 \ldots\ldots\ \delta_{n-1}$ die Dicken der Schienen;

$l_1\ l_2\ l_3 \ldots\ldots\ l_{n-1}$ die Längen der Schienen;

b die gemeinschaftliche Breite der Schienen;

P_1 die Belastung auf eines der Enden der obersten Schiene;

$P_2\ P_3\ P_4 \ldots\ldots\ P_n$ die durch die Belastung P verursachten Pressungen auf die Enden der übrigen Schienen;

$x_1\ y_1$ die Coordinaten eines beliebigen, jedoch zwischen $C_1\ B_1$ gelegenen Punktes m_1 der neutralen Axe des Mittelstückes $C_1\ B_1$ der obersten Schiene;

r_1 der diesem Punkt entsprechende Krümmungshalbmesser, wenn das Federwerk belastet ist;

$\xi_1\ \upsilon_1$ die Coordinaten eines beliebigen Punktes der neutralen Axe von dem Endstück $B_1\ A_1$ der obersten Schiene;

ϱ_1 der im belasteten Zustand des Federwerkes diesem Punkt entsprechende Krümmungshalbmesser;

R der constante Krümmungshalbmesser der neutralen Axen sämmtlicher Schienen im unbelasteten natürlichen Zustand des Federwerkes;

Die mit $x_1\ y_1\ r_1\ \xi_1\ \upsilon_1\ \varrho_1$ analogen Grössen der folgenden Schienen sollen durch $x_2\ y_2\ r_2\ \xi_2\ \upsilon_2\ \varrho_2\quad x_3\ y_3\ r_3\ \xi_3\ \upsilon_3\ \varrho_3 \ldots$ bezeichnet werden;

ε der Modulus der Elasticität des Materials, aus welchem die Schienen bestehen.

Die Werthe von μ für die einzelnen Schienen sind:

$$\frac{1}{12}\, b\, \delta_1^3 \qquad \frac{1}{12}\, b\, \delta_2^3 \qquad \frac{1}{12}\, b\, \delta_3^3$$

Die statischen Momente, welche den Punkten

$$\left.\begin{array}{l} x_1\ y_1 \\ x_2\ y_2 \\ x_3\ y_3 \end{array}\right\} \text{ entsprechen, sind } \left\{\begin{array}{l} P_1(l_1 - x_1) - P_2(l_2 - x_1) = P_1 l_1 - P_2 l_2 - (P_1 - P_2)\, x_1 \\ P_2(l_2 - x_2) - P_3(l_3 - x_2) = P_2 l_2 - P_3 l_3 - (P_2 - P_3)\, x_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{array}\right.$$

Die statischen Momente der Kräfte für die Punkte

$$\left.\begin{array}{l} \xi_1\, v_1 \\ \xi_2\, v_2 \\ \ldots \end{array}\right\} \text{ sind } \left\{\begin{array}{l} P_1\,(l_1-\xi_1) \\ P_2\,(l_2-\xi_2) \\ \ldots\ldots \end{array}\right.$$

Setzt man zur Abkürzung:

$$\left.\begin{array}{ll} \frac{1}{R}-\frac{12}{b\,\varepsilon\,\delta_1^3}\,(P_1\,l_1-P_2\,l_2)=a & (P_1-P_2)\,\frac{12}{b\,\varepsilon\,\delta_1^3}=c_1 \\[2ex] \frac{1}{R}-\frac{12}{b\,\varepsilon\,\delta_2^3}\,(P_2\,l_2-P_3\,l_3)=a_2 & (P_2-P_3)\,\frac{12}{b\,\varepsilon\,\delta_2^3}=c_2 \\[2ex] \ldots\ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots \end{array}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

$$\left.\begin{array}{ll} \frac{1}{R}-\frac{12\,P_1\,l_1}{b\,\varepsilon\,\delta_1^3}=\alpha_1 & \frac{12\,P_1}{b\,\varepsilon\,\delta_1^3}=\gamma_1 \\[2ex] \frac{1}{R}-\frac{12\,P_2\,l_2}{b\,\varepsilon\,\delta_2^3}=\alpha_2 & \frac{12\,P_2}{b\,\varepsilon\,\delta_2^3}=\gamma_2 \\[2ex] \ldots\ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots \end{array}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (2)$$

und berücksichtiget 1) dass die Krümmung durch die Biegung abnimmt; 2) dass die Schienen gegen die unterhalb des Schienenwerkes angenommene Abscissenaxe convex ist, so erhält man vermöge Gleichung (11) (Seite 204) zur Bestimmung der neutralen Axen des Schienenwerks im belasteten Zustand desselben folgende Differenzialgleichungen.

$$\left.\begin{array}{l} \frac{d^2\,y_1}{dx_1^2}=a_1+c_1\,x_1 \\[2ex] \frac{d^2\,y_2}{dx_2^2}=a_2+c_1\,x_2 \\[2ex] \ldots\ldots\ldots \end{array}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (3)$$

$$\left.\begin{array}{l} \frac{d^2\,v_1}{d\,\xi_1^2}=\alpha_1+\beta_1\,\xi_1 \\[2ex] \frac{d^2\,v_2}{d\,\xi_2^2}=\alpha_2+\beta_2\,\xi_2 \\[2ex] \ldots\ldots\ldots \end{array}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (4)$$

Das System (3) enthält $(n-1)$ das System (4) besteht aus n Gleichungen, weil die unterste Schiene, da auf dieselbe nur Eine Kraft einwirkt, als ein Endstück zu betrachten ist.

Durch einmalige Integration dieser Gleichungen findet man:

$$\left.\begin{array}{l} \frac{d\,y_1}{dx_1} = a_1\,x_1 + \frac{1}{2}\,c_1\,x_1^2 \\[2ex] \frac{d\,y_2}{dx_2} = a_2\,x_2 + \frac{1}{2}\,c_2\,x_2^2 \\[2ex] \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot \end{array}\right\} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots \quad (5)$$

$$\left.\begin{array}{l} \frac{d\,v_1}{d\,\xi_1} = \alpha_1\,\xi_1 + \frac{1}{2}\,\beta_1\,\xi_1^2 + D_1 \\[2ex] \frac{d\,v_2}{d\,\xi_2} = \alpha_2\,\xi_2 + \frac{1}{2}\,\beta_2\,\xi_2^2 + D_2 \\[2ex] \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot \end{array}\right\} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots \quad (6)$$

In dem System der Gleichungen (5) kommen keine Integrationsconstante vor, weil an den Anfängen der Mittelstücke die Tangenten mit der Abscissenlinie parallel sind.

Integrirt man auch die Gleichungen (5) und (6) so findet man:

$$\left.\begin{array}{l} y_1 = \frac{1}{2}\,a_1\,x_1^2 + \frac{1}{6}\,c_1\,x_1^3 + C_1 \\[2ex] y_2 = \frac{1}{2}\,a_2\,x_2^2 + \frac{1}{6}\,c_2\,x_2^3 + C_2 \\[2ex] \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot \end{array}\right\} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots \quad (7)$$

$$\left.\begin{array}{l} v_1 = \frac{1}{2}\,\alpha_1\,\xi_1^2 + \frac{1}{6}\,\beta_1\,\xi_1^3 + D_1\,\xi_1 + E_1 \\[2ex] v_2 = \frac{1}{2}\,\alpha_2\,\xi_2^2 + \frac{1}{6}\,\beta_2\,\xi_2^3 + D_2\,\xi_2 + E_2 \\[2ex] \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot \end{array}\right\} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots \quad (8)$$

Hiemit sind nun die endlichen Gleichungen aller Krümmungen des ganzen Federwerkes bestimmt. Die Constanten $C_1\ C_2\ C_3 \ldots D_1\ D_2\ D_3 \ldots E_1\ E_2\ E_3 \ldots$ ergeben sich durch folgende Bedingungen der Aufgabe.

Die Krümmungen $C_1\,B_1$ und $B_1\,A_1$, $C_2\,B_2$ und $B_2\,A_2 \ldots$ haben in den Punkten $B_1\ B_2\ B_3 \ldots$ zusammenfallende Tangenten; es müssen daher die Werthe der Differenzialquotienten (5), wenn man in dieselben der Reihe nach $x_1 = l_2$ $x_2 = l_3$ $x_3 = l_4$ setzt, gleich sein den Werthen, die aus (6) folgen, wenn man $\xi_1 = l_2$ $\xi_2 = l_3$ $\xi_3 = l_4$ setzt. Man erhält demnach:

$$\left.\begin{array}{l} a_1\,l_2 + \frac{1}{2}\,c_1\,l_2^2 = \alpha_1\,l_2 + \frac{1}{2}\,\beta_1\,l_2^2 + D_1 \\[2ex] a_2\,l_3 + \frac{1}{2}\,c_2\,l_3^2 = \alpha_2\,l_3 + \frac{1}{2}\,\beta_2\,l_3^2 + D_2 \\[2ex] \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot \end{array}\right\} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots \quad (9)$$

Die Punkte $B_1\ B_2\ B_3\ \ldots$ gehören sowohl den Mittelstücken, als auch den Endstücken an. Man hat daher wegen (7) und (8)

$$\left.\begin{aligned} \frac{1}{2} a_1 l_2^2 + \frac{1}{6} c_1 l_2^3 + C_1 &= \frac{1}{2} \alpha_2 l_2^2 + \frac{1}{6} \beta_2 l_2^3 + D_2 l_2 + E_2 \\ \frac{1}{2} a_2 l_3^2 + \frac{1}{6} c_2 l_3^3 + C_2 &= \frac{1}{2} \alpha_3 l_3^2 + \frac{1}{6} \beta_3 l_3^3 + D_3 l_3 + E_3 \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (10)$$

Nennt man $\Delta_2\ \Delta_3\ \Delta_4\ \Delta_5\ \ldots$ die Normalabstände der neutralen Linien in der Mitte und an den Enden; setzt also Fig. (71) $\overline{c_1 c_2} = \overline{A_2 B_1} = \Delta_2\quad \overline{c_2 c_3} = \overline{A_3 B_2} = \Delta_3 \ldots$ und $O c_1 = e$ so ist:

$$\left.\begin{array}{llll} \text{für } x_1 = 0 & y_1 = e & \text{demnach wegen (7)} & C = e \\ \text{„} \quad x_2 = 0 & y_2 = e - \Delta_2 & \text{„} \quad \text{„} \quad \text{„} & C_1 = e - \Delta_2 \\ \text{„} \quad x_3 = 0 & y_3 = e - (\Delta_2 + \Delta_3) & \text{„} \quad \text{„} \quad \text{„} & C_2 = e - (\Delta_2 + \Delta_3) \\ \text{„} \quad x_4 = 0 & y_4 = e - (\Delta_2 + \Delta_3 + \Delta_4) & \text{„} \quad \text{„} \quad \text{„} & C_3 = e - (\Delta_2 + \Delta_3 + \Delta_4) \end{array}\right\} \quad (11)$$

Die Bedingungen, welche ausdrücken, dass jede Feder mit ihrem Ende die unmittelbar darüber liegende berührt, sind:

$$\left.\begin{aligned} \frac{1}{2} \alpha_1 l_2^2 + \frac{1}{6} \beta_1 l_2^3 + D_1 l_2 + E_1 &= \frac{1}{2} \alpha_2 l_2^2 + \frac{1}{6} \beta_2 l_2^3 + D_2 l_2 + E_2 + \Delta_2 \cos. \psi_2 \\ \frac{1}{2} \alpha_2 l_3^2 + \frac{1}{6} \beta_2 l_3^3 + D_2 l_3 + E_2 &= \frac{1}{2} \alpha_3 l_3^2 + \frac{1}{6} \beta_3 l_3^3 + D_3 l_3 + E_3 + \Delta_3 \cos. \psi_3 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}\right\} \quad . \quad (12)$$

In diesen Gleichungen sind $\psi_2\ \psi_3\ \psi_4\ \ldots$ die kleinen Winkel, welche die Richtungen $A_2 B_1\quad A_3 B_2\ \ldots$ mit der vertikalen Richtung bilden.

Aus den Gleichungen (9), (10), (11), (12) ergeben sich für die Integrationsconstanten folgende Werthe. Die Werthe von $C_1\ C_2\ C_3\ \ldots$ sind bereits durch die Gleichungen (11) gegeben.

Aus den Gleichungen (9) findet man mit Beachtung der Gleichungen (1) und (2)

$$\left.\begin{aligned} D_1 &= \frac{6 P_2 l_2^2}{b \varepsilon \delta_1^3} \\ D_2 &= \frac{6 P_3 l_3^2}{b \varepsilon \delta_2^3} \\ &\ldots\ldots \\ D_{n-2} &= \frac{6 P_{n-1} l_{n-1}^2}{b \varepsilon \delta_{n-2}^3} \\ D_{n-1} &= 0 \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (13)$$

Aus den Gleichungen (10) findet man mit Berücksichtigung von (1), (2), (11), (13):

$$\left.\begin{aligned} E_1 &= e - \Delta_2 - \frac{2 P_2 l_2^3}{b \varepsilon \delta_1^3} \\ E_2 &= e - (\Delta_2 + \Delta_3) - \frac{2 P_3 l_3^3}{b \varepsilon \delta_2^3} \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \\ E_{n-1} &= e - (\Delta_2 + \Delta_3 + \ldots \Delta_n) \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (14)$$

Hiermit sind nun sämmtliche Constanten der Integration bestimmt.

Substituirt man die Werthe dieser Constanten in die Gleichungen (12), berücksichtiget die Gleichungen (1) und (2) und erlaubt sich für die kleinen Winkel $\psi_2\, \psi_3\, \psi_4 \ldots \cos. \psi_2 = 1$ $\cos. \psi_3 = 1$ $\cos. \psi_4 = 1$ zu setzen, so ergeben sich noch folgende $(n-1)$ Bedingungsgleichungen.

$$\left.\begin{aligned} &\frac{l_2^2 P_1}{\delta_2^3} (l_2 - 3 l_1) + 2 l_2^3 P_2 \left(\frac{1}{\delta_1^3} + \frac{1}{\delta_2^3}\right) + \frac{l_3^2 P_3}{\delta_3^3} (l_3 - 3 l_2) = 0 \\ &\frac{l_3^2 P_2}{\delta_2^3} (l_3 - 3 l_2) + 2 l_3^3 P_3 \left(\frac{1}{\delta_2^3} + \frac{1}{\delta_3^3}\right) + \frac{l_4^2 P_4}{\delta_3^3} (l_4 - 3 l_3) = 0 \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &\frac{P_{n-1} l_n^2}{\delta_{n-1}^3} (l_n - 3 l_{n-1}) + 2 P_n l_n^3 \left(\frac{1}{\delta_n^3} - \frac{1}{\delta_{n-1}^3}\right) = 0 \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (15)$$

Wir müssen nun noch die durch die Belastung verursachte Senkung des Punktes A und die in den Schienen vorkommenden grössten Spannungen berechnen.

Nennt man die Ordinate des Punktes A im unbelasteten Zustand der Schienen Y_0, im belasteten Zustand Y, so ist die durch die Belastung verursachte Senkung $f = Y_0 - Y$.

Der Werth von Y wird gefunden, wenn man in die erste der Gleichungen (8) $\xi = 1$ setzt, es ist daher:

$$Y = \frac{1}{2} \alpha_1 l_1^2 + \frac{1}{6} \beta_1 l_1^3 + D_1 l_1 + E_1 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (16)$$

Der Werth von Y_0 ergibt sich, wenn man in dieser Gleichung für $\alpha_1\ \beta_1\ D_1\ E_1$ diejenigen Werthe setzt, die diesen Grössen zukommen, wenn $P_1\, P_2\, P_3$ gleich Null sind. Diese individuellen Werthe von $\alpha_1\ \beta_1\ D_1\ E_1$ sind aber beziehungsweise $\frac{1}{R}$ 0 0 und e; es ist demnach:

$$Y_0 = -\frac{1}{2} \frac{l_1^2}{R} + e \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (17)$$

Man hat daher:

$$f = \frac{1}{2}\frac{l_1^2}{R} + e - \frac{1}{2}\alpha_1 l_1^3 - \frac{1}{6}\beta_1 l_1^2 - D_1 l_1 - E_1 \quad \ldots\ldots\ldots \quad (18)$$

Setzt man für $\alpha\ \beta\ D\ E$ die Werthe, welche die Gleichungen (2) (13) (14) darbieten, so erhält man nach einigen Reductionen;

$$f = \frac{2}{b\,\varepsilon\,\delta_1^3}\left[2\ P_1 l_1^3 - P_2 l_2^2 (3\ l_1 - l_2)\right] \quad \ldots\ldots\ldots \quad (19)$$

Durch diese Gleichung wird die Biegsamkeit des Federwerkes bemessen.

Nun muss noch die Festigkeit bestimmt werden.

Aus den Seite 208 zusammengestellten Werthen der statischen Momente der Kräfte, welche die Schienen abzubrechen streben, erhellt, dass diese Momente alle unter der Form $\mathfrak{A} - \mathfrak{B}x$ erscheinen; daher für $x = 0$, d. h. für die an der Umfassung der Schienen befindlichen Querschnitte am grössten sind. Nach den daselbst eintretenden Spannungsintensitäten, die wir mit $\mathfrak{J}_1\ \mathfrak{J}_2\ \mathfrak{J}_3 \ldots$ bezeichnen wollen, ist demnach das Festigkeitsvermögen der Schienen zu beurtheilen.

Die Momente der Kräfte, welche die Schienen bei $c_1\, c_2\, c_3 \ldots$ abzubrechen streben, sind:

$$P_1 l_1 - P_2 l_2$$
$$P_2 l_2 - P_3 l_3$$
$$P_3 l_3 - P_4 l_4$$
$$\ldots\ldots$$

Die Werthe von $\frac{\mu}{z}$ sind für die aufeinander folgenden Schienen

$$\frac{1}{6} b\,\delta_1^2 \qquad \frac{1}{6} b\,\delta_2^2 \qquad \frac{1}{6} b\,\delta_3^2$$

Wir erhalten daher vermöge Gleichung (7) (Seite 203) folgende Beziehungen:

$$\left.\begin{array}{l}
P_1 l_1 - P_2 l_2 = \frac{1}{6}\mathfrak{J}_1\, b\,\delta_1^2 \\
P_2 l_2 - P_3 l_3 = \frac{1}{6}\mathfrak{J}_2\, b\,\delta_2^2 \\
P_3 l_3 - P_4 l_4 = \frac{1}{6}\mathfrak{J}_3\, b\,\delta_3^2 \\
\ldots\ldots\ldots\ldots \\
P_{n-1} l_{n-1} - P_n l_n = \frac{1}{6}\mathfrak{J}_{n-1}\, b\,\delta_{n-1}^2 \\
P_n l_n \qquad\qquad = \frac{1}{6}\mathfrak{J}_n\, b\,\delta_n^2
\end{array}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (20)$$

In Betreff der Federwerke kann man vorzugsweise zwei Hauptfragen stellen, die von praktischer Wichtigkeit sind. Die erste betrifft die scharfe Prüfung von bereits bestehenden Federwerken, die zweite hingegen betrifft die Auffindung zweckmässiger Formen und Dimensionen für neu zu construirende Federwerke. Die bis hieher gewonnenen Resultate dienen zunächst zur scharfen Prüfung und zwar auf folgende Weise.

Für ein bereits bestehendes und zu prüfendes Federwerk sind die Längen und Dicken sämmtlicher Schienen und ist auch ihre gemeinschaftliche Breite gegeben. Auch kann man den Modulus der Elastizität des Materials als bekannt ansehen; oder muss denselben durch Biegungsversuche mit einzelnen Schienen bestimmen. Um nun zu erfahren, welcher Zustand in dem Federwerk eintritt, wenn dasselbe belastet wird, d. h. wenn auf jedes der Enden der obersten Schiene eine Kraft P_1 einwirkt, muss man zuerst aus den $(n-1)$ Gleichungen (15), die in Bezug auf die Kräfte vom ersten Grade sind, die $(n-1)$ Pressungen $P_2\ P_3 \ldots\ P_n$ berechnen. Kennt man einmal diese Werthe, so erhält man aus den Gleichungen (19) die Insensitäten der grössten Spannungen, und kann nach denselben beurtheilen, wie stark jede einzelne Schiene in Anspruch genommen ist. Die Gleichungen (1), (2), (13), (14) geben ferner die numerischen Werthe sämmtlicher Constanten, die in den Gleichungen (7) und (8) der neutralen Axen sämmtlicher Schienen vorkommen, und dann sind also diese Axenlinien selbst bestimmt.

Es ist hervorzuheben, dass in den Gleichungen (15), (18) und (19), welche die Biegungen, die wechselseitigen Pressungen und die Intensitäten der grössten Spannungen bestimmen, von dem Krümmungshalbmesser R, nach welchem die Schienen im natürlichen Zustande gekrümmt sind, gar nicht abhängen. Diese Krümmung der Schienen im natürlichen Zustand ist also hinsichtlich der Biegsamkeit (der nach dem Werth von f beurtheilt werden muss) und auch hinsichtlich der Festigkeitsverhältnisse von gar keiner Bedeutung. Man könnte also die Schienen ganz gerade machen, allein da sie dann im belasteten Zustand abwärts gebogen wären, also das Ansehen erhielten, wie wenn sie ihrer Aufgabe nicht gewachsen wären, so ist es doch angemessen, die Schienen wenigstens so stark zu krümmen, dass sie im belasteten Zustand noch etwas aufwärts gekrümmt erscheinen.

Die Rechnungen, zu welchen eine so ganz scharfe Prüfung eines Federwerkes führt, sind, wie man sieht, zwar nicht mit Schwierigkeiten verbunden, allein ihre Durchführung ist doch äusserst mühsam. Glücklicherweise lassen sich die zweckmässigen Abmessungen für neu zu construirende Federwerke viel leichter bestimmen.

Bestimmung der absoluten Constanten für neu zu construirende Federwerke.

Bisher waren wir nicht veranlasst, uns über die zur Messung der Grössen dienenden Einheiten auszusprechen. Alle Resultate, die wir gewonnen haben, gelten natürlich für jedes Maasssystem, vorausgesetzt, dass die Grösse $\varepsilon\ \mathfrak{J}\ P$ auf die gewählten Einheiten bezogen werden. Für die folgenden numerischen Rechnungen wollen wir den Centimeter als Längeneinheit, also den Quadratcentimeter als Flächeneinheit und den Kubikcentimeter, als Volumeneinheit annehmen; wollen ferner die Kräfte in Kilogrammen ausdrücken. Unter dieser Voraussetzung muss der Modulus der Elastizität ε und müssen die Spannungsintensitäten $\mathfrak{J}_1\ \mathfrak{J}_2 \ldots$ auf den Quadratcentimeter bezogen werden. Berechnet man mit Zugrundlegung dieser Einheiten eine Wirkungsgrösse, so wird diese nicht in Kilogrammmetern, sondern in Kilogrammcentimetern ausgedrückt.

Zur Bestimmung der Dimensionen eines zu construirenden Federwerkes muss man kennen: 1) den Modulus der Elastizität ε des Stahles, aus welchem die Schienen angefertigt werden, 2) die grösste Spannung $\mathfrak{J}_1$ auf 1 Quadratcentimeter, welche in der belasteten Schiene eintreten darf, damit die Elastizitätsgrenze des Materials nicht überschritten und eine hinreichende Festigkeit erzielt wird, 3) die Senkung f der Endpunkte der längsten Schiene durch die Belastung.

Nach zahlreichen Versuchen von *G. Wertheim* und *Philipps* ist der Modulus der Elastizität für alle Arten von gutem Federstahl nicht beträchtlich veränderlich und beträgt im Mittel genommen auf 1 Quadratcentimeter bezogen:

$$\varepsilon = 2000000.$$

Nach zahlreichen Rechnungen über die Lokomotivfedern beträgt die auf 1 Quadratcentimeter bezogene stärkste Spannung $\mathfrak{Z}_1$, im Mittel genommen, 4400 Kilogramm. Nach den Versuchen von *Philipps* beträgt die Spannung an der Elastizitätsgrenze ungefähr 8000 Kilogramm, und ist der Bruchcoefficient für Federstahl in der Regel grösser als 14000. Die Lokomotivfedern sind also bis zur Hälfte der Elastizitätsgrenze und auf den dritten Theil der Bruchfestigkeit in Anspruch genommen. Es ist kein Grund vorhanden, die Federn stärker oder schwächer in Anspruch zu nehmen, als sie gegenwärtig in den Lokomotiven wirklich in Anspruch genommen sind, wir setzen daher:

$$\mathfrak{Z}_1 = 4400.$$

Die Senkung f der Endpunkte der Federenden variirt bei den Lokomotivfedern von 2 bis 7 Centimetern, in den meisten Fällen beträgt dieselbe 5 Centimeter. Wir setzen für Personenlokomotive $f = 5$ Centimeter; für Güterlokomotive $f = 4$ Centimeter.

Construktion eines Federwerkes, dessen Schienen im belasteten Zustand übereinstimmende Krümmungen annehmen.

Wir wollen uns die Aufgabe vorlegen, ein Federwerk zu bestimmen, das folgende Eigenschaften besitzt:

1) Im natürlichen Zustand sollen die oberen Flächen sämmtlicher Schienen nach einem Halbmesser R kreisbogenförmig gekrümmt sein.
2) Im belasteten Zustand sollen die oberen Flächen der Schienen vollkommen übereinstimmende Krümmungen haben, so zwar, dass wenn die Schienen, ohne Zwischenplatten anzuwenden, unmittelbar aufeinander gelegt würden, an keiner Stelle des Federwerkes ein Klaffen wahrzunehmen wäre.
3) Im belasteten Zustand sollen alle Federn in der Mitte des Federwerkes gleich stark in Ausspruch genommen sein.

Da die beiden ersteren dieser Bedingungen sowohl den Mittelstücken, als auch den Endstücken genügen sollen, so müssen wir, da die Gleichgewichtsgleichungen der Mittelstücke von denen der Endstücke abweichen, die einen und die anderen dieser Stücke besonders betrachten.

Wir beginnen mit den Mittelstücken. Damit diese im belasteten Zustand übereinstimmende Krümmungen annehmen, müssen die Gleichungen (3) (Seite 209), wenn man in denselben $x_1 = x_2 = x_3 \ldots$ setzt für $\frac{d y_1^2}{d x_1^2}$ $\frac{d^2 y_2}{d x_2^2}$ ... übereinstimmende Werthe geben;

diess ist aber nur dann der Fall, wenn $a_1 = a_2 = a_3 \ldots$ und $c_1 = c_2 = c_3 = \ldots$ ist. Es muss also vermöge der Ausdrücke (1) Seite (209) sein:

$$\left.\begin{array}{l} \frac{1}{\delta_1^3}(P_1 l_1 - P_2 l_2) = \frac{1}{\delta_2^3}(P_2 l_2 - P_3 l_3) = \frac{1}{\delta_3^3}(P_3 l_3 - P_4 l_4) = \ldots \\ \text{und} \\ \frac{1}{\delta_1^3}(P_1 - P_2) \quad = \frac{1}{\delta_2^3}(P_2 - P_3) \quad = \frac{1}{\delta_3^3}(P_3 - P_4) \quad = \ldots \end{array}\right\} \quad \ldots (1)$$

Wenn ferner sämmtliche Schienen, mit Einschluss der untersten Endstückschiene, in der Mitte gleich stark in Anspruch genommen sein sollen, so muss

$$\mathfrak{Z}_1 = \mathfrak{Z}_2 = \mathfrak{Z}_3 \ldots\ldots = \mathfrak{Z}_n$$

oder wegen der Ausdrücke (20) (Seite 213)

$$\frac{1}{\delta_1^3}(P_1 l_1 - P_2 l_2) = \frac{1}{\delta_2^3}(P_2 l_2 - P_3 l_3) = \frac{1}{\delta_3^3}(P_3 l_3 - P_4 l_4) \ldots = \frac{1}{6} b \mathfrak{Z}_1^2 \quad \ldots (2)$$

sein.

Diesen Bedingungen (1) und (2) kann nur durch die Annahmen:

$$\left.\begin{array}{c} \delta_1 = \delta_2 = \delta_3 \ldots\ldots = \delta_1 \\ P_1 - P_2 = P_2 - P_3 = P_3 - P_4 = \ldots\ldots = p \end{array}\right\} \quad \ldots\ldots (3)$$

entsprochen werden. Es müssen also 1) alle Schienen einerlei Dicke haben, und 2) die Differenzen der Pressungen zwischen je zwei unmittelbar aufeinander folgenden Schienen gleich gross sein, damit die Krümmungen der Schienen und die Intensitäten der Spannungen übereinstimmen können.

Setzt man in die Gleichungen (20) (Seite 213) $\mathfrak{Z}_1 = \mathfrak{Z}_2 = \mathfrak{Z}_3 \ldots$ und $\delta_1 = \delta_2 = \delta_3 \ldots$ und addirt sie hierauf alle zusammen, so findet man die einfache Beziehung:

$$P_1 l_1 = \frac{n}{6} \mathfrak{Z}_1 b \delta_1^2 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (4)$$

Addiren wir aber nicht alle, sondern nur $k-1$ von diesen Gleichungen zusammen, wobei k eine beliebige ganze positive Zahl bezeichnet, die kleiner als n ist, so findet man:

$$P_1 l_1 - P_k l_k = \frac{(k-1)}{6} \mathfrak{Z}_1 b \delta_1^2 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (5)$$

Allein es ist, weil die Differenzen der Pressungen zwischen je zwei auf einander folgenden Schienen gleich gross sein sollen, und diese Differenz mit p bezeichnet wurde:

$$P_k = P_1 - (k-1) p$$

Vermittelst dieses Werthes von p_k folgt aus (5)

$$l_k = \frac{P_1 l_1 - \frac{1}{6}(k-1)\mathfrak{J}_1 b \delta_1^2}{P_1 - (k-1)p} \Bigg\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (6)$$

Mit Berücksichtigung von (4) erhält man auch:

$$l_k = l_1 \frac{1 - \frac{(k-1)}{n}}{1-(k-1)\frac{p}{P_1}} \Bigg\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (7)$$

Diese Gleichung wird uns in der Folge zur Berechnung der einzelnen Schienenlängen dienen.

Wir müssen nun weiter, um die Senkung f des Endpunktes der obersten Schiene bestimmen zu können, die Gleichung der neutralen Axe dieser Schiene aufstellen.

Da $P_1 l_1 - P_2 l_2 = \frac{\mathfrak{J}_1 b \delta_1^2}{6}$ und $P_1 - P_2 = p$ ist, so erhalten die Coeffizienten a_1 und c_1 folgende Werthe:

$$a_1 = \frac{1}{R} - \frac{2\mathfrak{J}_1}{\varepsilon \delta_1} \qquad c = \frac{12\,p}{b\,\varepsilon\,\delta_1^3}$$

Die Differenzialgleichung der Axe der obersten Schiene, d. h. die erste der Gleichungen (3) (Seite 209) wird demnach:

$$\frac{d^2 y_1}{dx_1^2} = \frac{1}{R} - \frac{2\mathfrak{J}_1}{\varepsilon \delta_1} + \frac{12\,p}{b\,\varepsilon\,\delta_1^3}\,x_1 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (8)$$

Berücksichtiget man, dass für $x_1 = 0$ $\frac{dy_1}{dx_1} = 0$ und dass ferner für $x_1 = 0$ $y_1 = e$ werden muss, so findet man aus (8) für y_1 folgenden Werth:

$$y_1 = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{R} - \frac{2\mathfrak{J}_1}{\varepsilon \delta_1}\right) x_1^2 + \frac{2\,p}{b\,\varepsilon\,\delta_1^3}\,x_1^3 + e \quad \ldots\ldots\ldots \quad (9)$$

Streng genommen gilt diese Gleichung nur für die neutrale Axe des Mittelstückes der obersten Schiene. Um aber vermittelst derselben die Senkung f des Endpunktes berechnen zu können, werden wir uns erlauben, sie für die ganze Ausdehnung der obersten Schiene, also bis zu $x_1 = l_1$, gelten zu lassen. Der Fehler, den wir dadurch begehen, ist jedenfalls verschwindend klein, weil, wie wir sehen werden, die Endstücke immer nur sehr kurz ausfallen. Setzen wir in (9) $x_1 = l_1$, so erhalten wir unter dieser Voraussetzung für die Ordinate des Endpunktes A_1 (Fig 71) folgenden Werth:

$$\frac{1}{2}\left(\frac{1}{R} - \frac{2\mathfrak{J}_1}{\varepsilon \delta_1}\right) l_1^2 + \frac{2\,p}{b\,\varepsilon\,\delta_1^3}\,l_1^3 + e$$

Für den unbelasteten Zustand des Federwerkes ist aber die Ordinate des Punktes A_1 sehr nahe gleich:

$$\frac{1}{2}\frac{l_1^2}{R}+e$$

Die Senkung f des Punktes A_1 ist demnach:

$$f=\frac{\mathfrak{Z}_1 l_1^2}{\varepsilon\,\delta_1}-\frac{2p}{b\,\varepsilon\,\delta_1^3}\,l_1^3 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (10)$$

Berücksichtiget man die Gleichung (4), so erhält dieser Werth von f folgende Form:

$$f=\frac{\mathfrak{Z}_1 l_1^2}{\varepsilon\,\delta_1}\left(1-\frac{1}{3}\frac{p\,n}{P_1}\right) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (11)$$

Der Werth von p ist innerhalb gewisser Grenzen ganz willkürlich. Diese Grenzen erkennt man aus dem Ausdruck (7) für irgend eine Schienenlänge.

Da p nie negativ werden kann, so ist $p=0$ der kleinste Werth von p. Da ferner die oberste Schiene die grösste Länge haben soll, so darf $\frac{p}{P_1}$ nie grösser als $\frac{1}{n}$ oder p nie grösser als $\frac{P_1}{n}$ werden. p gleich Null und p gleich $\frac{P_1}{n}$ sind also die Grenzen, innerhalb welchen der Werth von p willkürlich angenommen werden kann. Wir werden in der Folge sehen, dass die Federwerke, die man für verschiedene Annahmen des Werthes von p erhält, in ihren Eigenschaften nur insofern übereinstimmen, als sie alle den Anforderungen entsprechen, die wir Anfangs dieser Nummer ausgesprochen haben Einstweilen genügt es uns, die Grenzen kennen gelernt zu haben, innerhalb welchen p willkürlich angenommen werden kann.

Setzen wir nun:

$$p=\frac{1}{\gamma}\frac{P_1}{n} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (12)$$

wobei γ jede beliebige ganze oder unganze Zahl bezeichnet, die jedoch nie kleiner als die Einheit genommen werden darf, so haben wir einen Ausdruck, der den Werth von p in seine Grenzen einschränkt; wenn wir diesen Werth von p in die Gleichungen (7) und (11) einführen, so werden dieselben:

$$\left.\begin{aligned} l_k &= l_1\,\frac{1-\dfrac{k-1}{n}}{1-\dfrac{k-1}{n}\,\dfrac{1}{\gamma}} \\ f &= \frac{\mathfrak{Z}_1 l_1^2}{\varepsilon\,\delta_1}\left(1-\frac{1}{3\gamma}\right) \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (13)$$

Diese beiden Gleichungen in Verbindung mit (4), nämlich mit

$$P_1 l_1=\frac{n}{6}\,\mathfrak{Z}_1\,b\,\delta_1^2 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (14)$$

bestimmen, wenn man P_1 l_1 b ε f und γ annimmt alle Construktionselemente des Federwerkes, mit Ausnahme der Querschnittsdimensionen der Endstücke.

Die zweite der Gleichungen (13) gibt zunächst die Dicke δ_1 der Schienen, die Gleichung (14) gibt hierauf die Anzahl n der Schienen, die erste der Gleichungen (13) gibt zuletzt, wenn man in dieselbe der Reihe nach $k = 1\ 2\ 3 \ldots$ bis n setzt, die Längen der einzelnen Schienen.

Es erübrigt nun noch, die Bedingungen für die Schienenenden ausfindig zu machen.

Wir haben die Forderung gestellt, dass die obere Fläche irgend einer Schiene mit der unteren Fläche der unmittelbar darüber befindlichen Schiene der ganzen Ausdehnung nach übereinstimmt. Dieser Anforderung können die Schienenenden nur dann genügen, wenn ihre Dicke nach aussen zu, nach einem gewissen Gesetze, das wir das Zuspitzungsgesetz nennen wollen, abnehmen; und dieses Gesetz muss nun bestimmt werden.

Nennt man für den natürlichen Zustand des Federwerkes σ_0, für den Zustand der Belastung σ den Krümmungshalbmesser, welcher einem Punkt b Fig. 70 der neutralen Linie des Endstückes der k^{ten} Schiene entspricht. Ferner für den natürlichen Zustand R, für den Zustand der Belastung ϱ_1 den Krümmungshalbmesser, welchem die Punkte c und d entsprechen, und $\overline{ac} = u$ die Schienendicke bei b, sowie x und y die Coordinaten dieses Punktes.

Zwischen diesen Krümmungshalbmessern besteht, wie man ohne Schwierigkeit findet, folgende Beziehung:

$$\frac{1}{\sigma_0} - \frac{1}{\sigma} = \frac{1}{R} - \frac{1}{r_1} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (15)$$

Allein vermöge Gleichung (5) (Seite 203) hat man:

$$\frac{1}{\sigma_0} - \frac{1}{\sigma} = \frac{12}{b\,\varepsilon\,u^3} P_k (l_k - x)$$

$$\frac{1}{R} - \frac{1}{r_1} = \frac{12}{b\,\varepsilon\,\delta_1^3} \left[P_{k-1}(l_{k-1} - x) - P_k (l_k - x)\right]$$

Aus diesen drei Gleichungen folgt:

$$\frac{\delta_1^3}{u^3} = \frac{P_{k-1}(l_{k-1} - x) - P_k (l_k - x)}{P_k (l_k - x)}$$

Für das Federwerk, das wir untersuchen, ist aber:

$$P_{k-1}\, l_{k-1} - P_k\, l_k = \frac{\mathfrak{J}_1\, b\, \delta_1^2}{6}$$

$$P_k = P_1 - (k-1)\,p$$

Daher wird:

$$\frac{\delta_1^3}{u^3} = \frac{\dfrac{\mathfrak{J}_1\, b\, \delta_1^2}{6} - p\,x}{\left[P_1 - (k-1)\,p\right](l_k - x)}$$

oder wenn man für $\frac{\mathfrak{Z}_1 b \delta_1^2}{6}$ den aus (4) folgenden Werth $\frac{P_1 l_1}{n}$ und für p seinen Werth $\frac{1}{\gamma} \frac{P_1}{n}$ setzt:

$$\frac{\delta_1^3}{n^3} = \frac{l_1 - \frac{x}{\gamma}}{\left(n - \frac{k-1}{\gamma}\right)(l_k - x)} \quad \ldots \ldots \ldots \quad (16)$$

Dieses Gleichung drückt das gesuchte Gesetz der Zuspitzung aus.

Es ist, wie man sieht, von k abhängig, wenn γ einen endlichen Werth hat. Streng genommen muss also, wenn γ endlich, also p grösser als Null angenommen wird, das Endstück jeder Schiene eine besondere Zuspitzung erhalten. Allein es wird sich in der Folge zeigen, dass die Endstücke der Schienen immer sehr klein ausfallen, so dass es für praktische Zwecke genügt, wenn die Zuspitzungen nach quadratischen oder nach kubischen Parabeln geformt werden. In dem speziellen Fall $\gamma = \infty$ wird die Gleichung (16)

$$\frac{\delta_1^3}{n^3} = \frac{l_1}{n\,(l_k - x)} \quad \ldots \ldots \ldots \quad (17)$$

Dieser Ausdruck entspricht aber einer kubischen Parabel, und da derselbe von k nicht abhängt, so stimmen die Zuspitzungen sämmtlicher Schienen überein.

Denkt man sich, dass ein nach diesen Regeln berechnetes Federwerk sehr vollkommen ausgeführt werde, dass jedoch auf die Mitte und auf die Enden einer jeden Schiene dünne kurze Metallblättchen gelegt werden, so dass im natürlichen Zustand des Federwerkes zwischen je zwei Schienen eine Spalte von durchaus gleicher Weite vorhanden sein wird. Wird nun dieses Federwerk belastet, so krümmen sich sämmtliche Schienen nach übereinstimmenden elastischen Linien, so dass die Spaltenweite überall genau so gross bleibt, wie sie im natürlichen Zustand des Federwerkes war. Denkt man sich ferner, dass die Dicke der Zwischenblätter kleiner und kleiner werde, so rücken die Schienen nach und nach aneinander und die Spaltenweite nimmt mehr und mehr ab. Denkt man sich endlich, dass die Dicke der Zwischenblättchen verschwindend klein werde, so wird es auch die Spaltenweite. Dann aber treten je zwei aufeinander folgende Schienen in einen Berührungszustand, der jedoch nur in der Mitte und an den Enden ein physischer, in allen übrigen Punkten aber nur ein geometrischer ist. Diese Art der Aufeinanderlagerung wird aber natürlich auch dann eintreten, wenn man gleich anfangs bei der Zusammensetzung des Federwerkes die Zwischenblättchen ganz weglässt und die Schienen unmittelbar aufeinander legt.

Hieraus sieht man, dass in allen diesen Federwerken, in welchen die Schienen in belastetem Zustand übereinstimmende Krümmungen annehmen, nur in der Mitte und an den Enden wechselseitige Pressungen zwischen den Schienen eintreten, und dass die nach den aufgestellten Regeln construirten Federwerke unter der Einwirkung der Belastung nicht klaffen, sondern stets in allen Theilen eine zusammenhängende Masse bilden.

Wir wollen noch die äussere Begrenzung des ganzen Schienenwerkes, d. h. die Gleichung derjenigen krummen Linien bestimmen, welche die Endpunkte der oberen Flächen der Schienen stetig verbindet. Die Auffindung der Gleichung dieser Linie unterliegt zwar keiner Schwierigkeit, allein ihre Form ist so komplizirt, dass man aus der Gleichung von ihrer Gestalt keine klare Anschauung erhält, es ist daher angemessen, die Linie zu suchen, welche die Endpunkte der Oberflächen der Schienen stetig verbindet, wenn die Schienen in ungebogenem Zustand aufeinander geschichtet werden.

Es sei der Mittelpunkt O Fig. 72 der obersten Schiene der Anfangspunkt der Coordinaten. Die Abscissenaxe $O\,x$ falle mit der oberen Fläche der ersten Schiene zusammen. Die Ordinaten sollen vertikal abwärts gerichtet werden. Nennen wir $\overline{O\,F} = x$ die Abscisse, $\overline{F\,E} = y$ die Ordinate von dem Endpunkte der k^{ten} Schiene, so ist:

$$x = l_k \qquad y = (k-1)\,\delta$$

Setzt man in die erste der Gleichungen (13) $l_k = x \quad (k-1) = \frac{y}{\delta}$, so findet man:

$$x = l_1 \frac{1 - \frac{y}{n\,\delta}}{1 - \frac{y}{n\,\delta\,\gamma}}$$

Es ist aber $n\,\delta$ die ganze Dicke des Schienenwerkes in der Mitte, setzt man $n\,\delta = h$, so wird:

$$x = l_1 \frac{\gamma\,(h-y)}{h\,\gamma - y} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (18)$$

oder:

$$x\,y - l_1\,\gamma\,y - h\,\gamma\,x + l_1\,\gamma\,h = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (19)$$

Diese Gleichung entspricht einer gleichseitigen Hyperbel. Die Coordinaten des Mittelpunktes sind:

$$\overline{O\,H} = l_1\,\gamma \qquad \overline{G\,H} = h\,\gamma$$

Die Richtungen $G\,x_{,,}$ und $G\,y_{,,}$ der Symetrieaxen dieser Hyperbel bilden mit der Axe $O\,x$ Winkel von 45°.

Nennt man $x_{,,} = E\,F_2 \quad y_{,,} = G\,F_2$ die Coordinaten eines Punktes E in Bezug auf diese Axen der Symetrie, so ist die Gleichung der Hyperbel:

$$y_{,,}^2 - x_{,,}^2 = 2\,l_1\,h\,\gamma\,(\gamma - 1) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (20)$$

Diese Hyperbel entsteht, wenn man einen Kegel, dessen Seiten an der Spitze einen Winkel von 90° bilden, durch eine Ebene schneidet, die zur Axe des Kegels in einem Abstand $\sqrt{2\,l_1\,h\,\gamma\,(\gamma - 1)}$ parallel ist.

Die Form des geradeaus gestreckten Federwerkes kann also auch durch die Verzeichnung dieser Hyperbel bestimmt werden.

Diese so eben ausgesprochene geometrische Bedeutung der Gleichung (19) folgt aus der Theorie der algebraischen Linien des zweiten Grades.

(Siebente Vorlesung über analytische Geometrie von A. v. Ettingshausen.)

Wir wollen nun die Eigenschaften von einigen speziellen Federanordnungen untersuchen, die sich ergeben, wenn man für γ bestimmte Werthe annimmt.

Federwerk aus Schienen von gleicher Länge und gleicher Dicke.

Setzen wir $\gamma = 1$, so werden die Gleichungen (13) und (14) (Seite 218)

$$\left.\begin{array}{l} l_k = l_1 \\ f = \frac{2}{3}\frac{\mathfrak{J}_1 l_1^2}{\varepsilon \delta_1} \\ P_1 l_1 = \frac{n}{6}\mathfrak{J}_1 b \delta_1^2 \end{array}\right\} \quad (1)$$

Die Annahme $\gamma = 1$ liefert uns also ein Federwerk mit durchaus gleich langen Schienen, die im Belastungszustand vollkommen übereinstimmende Krümmungen annehmen. Betrachtet man $\mathfrak{J}_1\ l_1\ P_1\ \varepsilon\, b$ als gegebene Grössen, so erhält man zur Bestimmung der Schienendicke und der Schienenanzahl folgende Ausdrücke:

$$\left.\begin{array}{l} \delta_1 = \frac{2}{3}\frac{\mathfrak{J}_1 l_1^2}{\varepsilon f} \\ n = \frac{6 P_1 l_1}{\mathfrak{J}_1 b \delta_1^2} \end{array}\right\} \quad (2)$$

In einem solchen Federwerk nimmt die Intensität der Spannung von der Mitte an nach den Enden zu fort und fort ab, und verschwindet sogar an den Enden. Ein solches Federwerk ist also in den äusseren Theilen übermässig fest, daher für praktische Zwecke nicht sehr geeignet.

Da in dem Fall wenn $j = 1$ ist die zwischen je zwei Schienen eintretende wechselseitige Pressung einen und denselben constanten Werth $p = \frac{P_1}{n}$ erhält, so findet man, mit Berücksichtigung der Gleichung (15) (Seite 205), für die Wirkungsgrösse W, die erforderlich ist, um ein solches Federwerk aus seinem natürlichen Zustand in denjenigen Krümmungszustand zu versetzen, den es unter der Belastung annimmt, wenn der Gleichgewichtszustand eingetreten ist, folgenden Ausdruck:

$$W = \frac{1}{18}\frac{\mathfrak{J}_1^2}{\varepsilon} n\, b\, \delta_1\, l_1 \quad (3)$$

Bezeichnet man das totale Volumen des Federwerkes mit $\mathfrak{V}$, setzt also $n\ b\ \delta_1\ l_1 = \mathfrak{V}$, so wird:

$$W = \frac{1}{18}\frac{\mathfrak{J}_1^2}{\varepsilon}\mathfrak{V} \quad (4)$$

Federwerk mit gleich langen Schienenenden, das bei jeder innerhalb der Elasticitätsgrenze liegenden Belastung kreisbogenförmig bleibt, daher in allen Theilen gleich stark in Anspruch genommen ist.

Setzen wir $p = 0$ oder $\gamma = \infty$, so erhalten wir ein Federwerk, in welchem die wechselseitigen Pressungen zwischen den Schienen gleich gross sind.

Für diese Annahme geben die Gleichungen (13) und (14) (Seite 218)

$$\left.\begin{aligned} l_k &= l_1\left(1 - \frac{k-1}{n}\right) \\ f &= \frac{\mathfrak{J}_1 l_1^2}{\varepsilon \delta_1} \\ P_1 l_1 &= \frac{n}{6} \mathfrak{J}_1 b \delta_1^2 \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots (1)$$

Aus den ersten dieser Gleichungen findet man:

$$l_k - l_{k+1} = \frac{l_1}{n} \quad \ldots\ldots (2)$$

d. h. die Endstücke der Schienen haben alle einerlei Länge, und sie ist gleich dem n^{ten} Theil von der Länge der obersten Schiene. Aus den zwei letzteren der Gleichungen (1) erhält man:

$$\left.\begin{aligned} \delta_1 &= \frac{\mathfrak{J}_1 l_1^2}{\varepsilon f} \\ n &= \frac{6 P_1 l_1}{\mathfrak{J}_1 b \delta_1^2} \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots (3)$$

Ist aber $p = 0$, so wird die Gleichung (8) (Seite 217) des Mittelstücks der obersten Schiene:

$$\frac{d^2 y_1}{dx_1^2} = \frac{1}{R} - \frac{2 \mathfrak{J}_1}{\varepsilon \delta_1}$$

d. h. im belasteten Zustand des Federwerkes ist die oberste Schiene nach einem Kreisbogen gekrümmt, welcher im Halbmesser r_1 entspricht, dessen Werth durch

$$\frac{1}{r_1} = \frac{1}{R} - \frac{2 \mathfrak{J}_1}{\varepsilon \delta_1} \quad \ldots\ldots (4)$$

bestimmt wird. Allein alle aus den Gleichungen (13) und (14) hervorgehenden Federwerke haben die Eigenschaft, dass die Krümmungen der Schienen im belasteten Zustand übereinstimmen; in dem Federwerk, das wir untersuchen, werden also alle Schienen eine mit der obersten Schiene übereinstimmende kreisbogenförmige Krümmung annehmen.

Hieraus folgt aber, dass die Intensität der Spannung in jedem beliebigen Querschnitt des Mittelstückes jeder beliebigen Schiene einen constanten Werth, oder dass das ganze

Federwerk in seinem Mittelstücksystem durchaus gleiche Festigkeit darbietet. Dieses Federsystem gehört also in die Classe der Körperformen, die mit einem Minimum von Materialaufwand ein bestimmtes Tragungsvermögen besitzen.

Damit im belasteten Zustand auch die Oberflächen der Endstücke nach dem Halbmesser r_1 kreisbogenförmig gekrümmt werden, müssen dieselben nach dem Gesetz (16) (Seite 220) zugespitzt werden. Weil aber $\gamma = \infty$ ist, so wird diese Gleichung:

$$\frac{\delta_1^3}{u^3} = \frac{l_1}{n} \frac{1}{l_k - x} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (5)$$

Dies ist aber die Gleichnng einer kubischen Parabel, deren Scheitel mit dem Endpunkt des Endstückes zusammenfällt. Da alle Endstücke eine gleiche Länge $\frac{l_1}{n}$ haben, so erhalten sie alle ganz congruente Formen.

In den nach kubischen Parabeln zugespitzten Endstücken ist aber die Intensität der Spannung nicht in jedem Querschnitt gleich gross. Nennt man für den Querschnitt, welchem die Abscisse $l_k - x$ und die Dicke u entsprechen, i die Intensität der Spannung an der oberen Fläche, so ist

$$P_1 (l_k - x) = \frac{i}{6} b u^2$$

Durch Elimination von u vermittelst der Gleichung (5) folgt:

$$i = \frac{6 P_1}{b \delta_1^2} \left(\frac{l_1}{n}\right)^{\frac{2}{3}} (l_k - x)^{\frac{1}{3}} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (6)$$

Hieraus sieht man, dass die Intensität der Spannung nach dem Endpunkt eines Endstückes hin abnimmt und daselbst ganz verschwindet. An seiner Wurzel, d. h. für $l_k - x = \frac{l_1}{n}$ hat jedes Endstück eine Spannung

$$\frac{6 P_1}{b \delta_1^2} \frac{l_1}{n}$$

die mit der des Mittelstückes übereinstimmt.

Man würde auch den Endstücken überall gleiche Festigkeit geben können, wenn man sie nicht nach kubischen, sondern nach quadratischen Parabeln zuspitzte, allein dann würden die oberen Flächen der Endstücke mit den darüber hinziehenden unteren Flächen der Mittelstücke nicht mehr ganz scharf übereinstimmen, die Zuspitzung nach kubischen Parabeln verdient daher den Vorzug, und zwar um so viel mehr, als durchaus kein praktischer Nachtheil entsteht, wenn diese ohnedies nun ganz kurzen Endstücke gegen ihren Endpunkt hin etwas fester sind als an den Wurzeln.

Wir können auch für die Halbmesser R der Krümmung im natürlichen Zustand eine Regel aufstellen, wenn wir annehmen, dass die Senkung f einen gewissen aliquoten Theil von der Pfeilhöhe betragen soll, die der obersten Schiene im natürlichen Zustand entspricht.

Diese Pfeilhöhe ist annähernd $\frac{l_1^2}{2R}$, die Senkung dagegen vermöge Gleichungen (1) $\frac{\mathfrak{Z}_1 l_1^2}{\varepsilon \delta_1}$

Bezeichnen wir durch λ das Verhältniss:

$$\frac{\text{Senkung}}{\text{Pfeilhöhe}}$$

so erhalten wir zur Bestimmung von R folgenden Ausdruck:

$$R = \lambda \frac{l_1^2}{2 f} = \lambda \frac{\varepsilon \delta_1}{2 \mathfrak{Z}_1} \quad \ldots \ldots \quad (7)$$

Wir wollen nun noch die Wirkungsgrösse berechnen, die erforderlich ist, um das Federwerk so stark zu biegen, dass am Endpunkt der obersten Schiene eine Senkung f eintritt.

Wenn wir die Sache haarscharf nehmen wollten, müssten wir bei dieser Berechnung die Endstücke von den Mittelstücken unterscheiden. Allein da die Endstücke im Vergleich zu den Mittelstücken, im Mittel genommen, sehr kurz sind, und da ferner die Zuspitzungen nach kubischen Parabeln geschehen, was zur Folge hat, dass die Schienendicken der Endstücke, von den Wurzeln an gerechnet, sehr langsam und erst in der Nähe der Endpunkte rasch abnehmen, so werden wir keinen spürbaren Fehler begehen, wenn wir die der Biegung des Federwerkes entsprechende Wirkungsgrösse für den Fall berechnen, dass die Schienen in allen Theilen und bis an ihre Endpunkte hin eine unveränderliche Dicke δ_1 haben.

Nennen wir W die zu berechnende Wirkungsgrösse in Kilogramm-Centimeter ausgedrückt, $\mathfrak{B}$ das totale Volumen des ganzen Federwerkes, so ist vermöge Gleichung (22) (Seite 206)

$$W = \frac{1}{6} \frac{J_1^2}{\varepsilon} \mathfrak{B} \quad \ldots \ldots \quad (8)$$

Zur Berechnung des Volumens $\mathfrak{B}$ des ganzen Federwerkes hat man die Formel:

$$\mathfrak{B} = b \delta_1 2 \left(\frac{l_1}{n} + 2 \frac{l_1}{n} + 3 \frac{l_1}{n} x \ldots + n \frac{l_1}{n} \right)$$

oder

$$\mathfrak{B} = (n + 1) b \delta_1 l_1 \quad \ldots \ldots \quad (9)$$

wobei wie bisher l_1 die halbe Länge der obersten Schiene bedeutet, während $\mathfrak{B}$ und W auf das ganze Schienenwerk bezogen sind.

Dieses Federwerk mit gleich dicken Schienen und gleich langen Endstücken besitzt, wie wir gesehen haben, im belasteten Zustand die Eigenschaften:

1. In allen seinen Theilen nach übereinstimmenden Kreisbögen gekrümmt zu sein.
2. Eine vollkommen compakte nirgends klaffende Masse zu bilden.
3. In allen Theilen der Mittelstücke absolut gleich stark, in den Endstücken annähernd gleich stark in Anspruch genommen zu sein.
4. Mit dem geringsten Volumen und Materialaufwand eine bestimmte Tragkraft und Biegsamkeit darzubieten.

Rechnet man zu diesen Eigenschaften noch dazu, dass die Dimensionen dieses Federwerkes ganz leicht vollkommen scharf bestimmt werden können, und dass seine Anfertigung, weil die Schienen von gleicher Dicke und nach dem gleichen Halbmesser R zu richten sind, keinen Schwierigkeiten unterliegt, so muss man sagen, dass dieses Federwerk wenigstens in statischer Hinsicht das vollkommenste ist, das es überhaupt geben kann. Allein für vollkommene Gleichgewichtszustände braucht man keine Federwerke, es ist also die Frage, ob das vorliegende Federwerk auch für dynamische Verhältnisse eine untadelhafte Anordnung genannt zu werden verdient? Diese Frage muss verneinend beantwortet werden. Dieses Federwerk ist gegen stossweise Einwirkungen auf seine Endpunkte in den äusseren Theilen, wo verhältnissmässig nur wenig Material vorhanden ist, beträchtlich schwächer als in der Mitte und gegen die Mitte zu, wo viel Material angehäuft ist. Für dynamische Zustände verdienen also die Federwerke mit hyperbolischer Begrenzung den Vorzug, weil bei denselben gegen die Enden hin mehr Material vorkommt. Dies ist insbesondere der Fall, wenn man für γ einen der Einheit sich nähernden Werth z. B. $\frac{3}{2}$ nimmt.

In dem nächsten Abschnitt, welcher die practisch wichtigsten Resultate sämmtlicher Untersuchungen enthält, sind verschiedene Federwerke und insbesondere auch hyperbolische berechnet.

Druck, welchen ein Zapfen eines Laufwerkes auszuhalten hat, mit Berücksichtigung des Einflusses der Feder- und der Einwirkungen der Bahn.

Im ruhenden Zustand eines Wagens ist der Druck gegen einen Zapfen eines Laufwerkes gleich dem Gewicht Q eines gewissen Theiles des auf den Federn liegenden Baues. Im bewegten Zustand ist dieser Druck theils durch die schwingende Bewegung des auf den Federn liegenden Baues, theils durch die hüpfende Bewegung der Räder veränderlich. Diesen veränderlichen Druck wollen wir bestimmen.

Es sei:

Q in Kilogrammen das Gewicht, welches im ruhenden Zustand gegen einen Zapfen drückt;

x die Höhe der Federenden über den Schienen der Bahn in irgend einem Zeitaugenblick t der Bewegung;

y die Höhe der Axe des Laufwerkes über den Schienen in dem gleichen Zeitaugenblick t. Wegen der hüpfenden Bewegung ist y im Allgemeinen etwas grösser, als der Halbmesser des Rades;

R der Halbmesser des Rades;

a die Höhe der Schienenenden über der Axe, wenn der Wagen ruhig auf der Bahn steht;

f der Starrheits-Coeffizient für das Federwerk, d. h. die Zahl, mit welcher man die Zusammendrückung der Federn multipliziren muss, um den der Zusammendrückung entsprechenden Druck zu erhalten;

s die Zusammendrückung der Feder, wenn auf derselben das Gewicht Q ruhig liegt. Es ist also $s f = Q$ oder $f = \frac{Q}{s}$.

$g = 980 \cdot 8$ Centimeter. Die Beschleunigung durch die Schwere. Alle Dimensionen sind in Centimetern, alle Pressungen in Kilogrammen ausgedrückt.

Dies vorausgesetzt, ist die Differenzialgleichung der absoluten Bewegung von Q.

$$\frac{d^2x}{dt^2} = g\,\frac{f(a+s-x+y)-Q}{Q} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

Es ist aber, wie schon erwähnt wurde, $fs = Q$, daher wird diese Gleichung:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = g\,\frac{f(a-x+y)}{Q} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (2)$$

Da die hüpfende Bewegung des Rades eine periodische ist, so dürfen wir für y folgenden Ausdruck setzen:

$$y = R + \mathfrak{A}\sin.kt + \mathfrak{B}\cos.kt \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (3)$$

wobei $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ gewisse Constante sind, durch welche die Vertikalbewegung der Axe des Laufwerkes ausgedrückt wird, und k eine andere Constante bedeutet, durch welche die Dauer eines Radsprunges bestimmt wird. Aus (2) und (3) folgt:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{gf}{Q}(a+R) - \frac{gf}{Q}x + \frac{gf}{Q}(\mathfrak{A}\sin.kt + \mathfrak{B}\cos.kt) \quad \ldots\ldots\ldots \quad (4)$$

Das Integrale dieser Gleichung ist, wenn k nicht gleich $\sqrt{\frac{gf}{Q}}$ ist

$$x = a + R + \mathfrak{M}\sin.\sqrt{\frac{gf}{Q}}t + \mathfrak{N}\cos.\sqrt{\frac{gf}{Q}}t + \frac{\frac{gf}{Q}}{\frac{gf}{Q}-k^2}(\mathfrak{A}\sin.kt + \mathfrak{B}\cos.kt) \quad . \quad (5)$$

Nennen wir P den Druck gegen den Zapfen zur Zeit t, so ist:

$$P = f(a+s-x+y) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (6)$$

Setzt man für x und y die Werthe (5) und (3) und berücksichtiget, dass $fs = Q$ ist, so findet man:

$$P = Q - f\left(\mathfrak{M}\sin.\sqrt{\frac{gf}{Q}}t + \mathfrak{N}\cos.\sqrt{\frac{gf}{Q}}t\right) - \frac{k^2 f}{\frac{gf}{Q}-k^2}(\mathfrak{A}\sin.kt + \mathfrak{B}\cos.kt) \quad \ldots \quad (7)$$

oder auch, da $\frac{f}{Q} = \frac{1}{s}$ ist.

$$P = Q - \frac{Q}{s}\left(\mathfrak{M}\sin.\sqrt{\frac{g}{s}}t + \mathfrak{N}\cos.\sqrt{\frac{g}{s}}t\right) - \frac{Q}{s}\,\frac{k^2}{\frac{g}{s}-k^2}(\mathfrak{A}\sin.kt + \mathfrak{B}\cos.kt) \quad . \quad (8)$$

Da die Räder vorzugsweise an den Schienenverbindungen in die Höhe gestossen werden, so darf man die Dauer der Periode $\frac{2\pi}{k}$, welche dem Bewegungsgesetz (3) entspricht, gleich setzen der Zeit, in welcher ein Rad über eine Schiene läuft. Nennen wir V die Fahrgeschwindigkeit, S die Länge einer Schiene, so ist also zu setzen:

$$\frac{2\pi}{k} = \frac{S}{V} \quad \text{oder} \quad k = 2\pi \frac{V}{S}$$

und dann findet man:

$$P = Q - \frac{Q}{s}\left(\mathfrak{M} \sin. \sqrt{\frac{g}{s}}\, t + \mathfrak{N} \cos. \sqrt{\frac{g}{s}}\, t\right) - \frac{Q}{s} \cdot \frac{\left(2\pi \frac{V}{S}\right)^2}{\frac{g}{s} - \left(2\pi \frac{V}{S}\right)^2} \left(\mathfrak{A} \sin. 2\pi \frac{V}{S} t + \mathfrak{B} \cos 2\pi \frac{V}{S} t\right) \tag{9}$$

Bezeichnen wir durch h_1 und h_2 die grössten positiven Werthe von

$$-\left(\mathfrak{M} \sin. \sqrt{\frac{g}{s}}\, t + \mathfrak{N} \cos. \sqrt{\frac{g}{s}}\, t\right)$$

und von

$$-\left(\mathfrak{A} \sin. 2\pi \frac{V}{S} t + \mathfrak{B} \cos. 2\pi \frac{V}{S} t\right)$$

so bedeutet h_1 diejenige Schwingungshöhe, die durch die Elastizität der Federn eintritt, und h_2 die Sprunghöhe eines Rades, und dann ist das Maximum des Druckes gegen den Zapfen:

$$\underset{\text{max.}}{P} = Q\left\{1 + \frac{h_1}{s} + \frac{h_2}{s} \frac{\left(2\pi \frac{V}{S}\right)^2}{\frac{g}{s} - \left(2\pi \frac{V}{S}\right)^2}\right\} \quad \ldots\ldots \tag{10}$$

oder auch

$$\underset{\text{max}}{P} - Q = \frac{Q}{s}\left\{h_1 + h_2 \frac{\left(2\pi \frac{V}{S}\right)^2}{\frac{g}{s} - \left(2\pi \frac{V}{S}\right)^2}\right\} \quad \ldots\ldots \tag{11}$$

Der Unterschied zwischen der grössten Pressung, die im bewegten Zustand eintritt und der Pressung in ruhendem Zustand ist also: 1) der Belastung des Zapfens proportional, 2) um so grösser, je kleiner s, oder je starrer die Federn sind, 3) um so grösser, je grösser die Schwingungshöhe h_1 und die Sprunghöhe h_2 ist. Dieser Unterschied wird aber insbesondere sehr gross, wenn 4) $\frac{g}{s} - \left(2\pi \frac{V}{S}\right)^2$ verschwindend klein, oder wenn:

$$S = 2\pi V \sqrt{\frac{s}{g}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \tag{12}$$

ist. Es kann also der Druck gegen den Zapfen jeden beliebigen noch so grossen Werth erreichen, wenn die Schienenlänge so gross ist, dass die Zeit, welche der Wagen braucht, um über dieselbe hinzurollen, genau so gross ist, als die Zeit einer Schwingung, die der Wagen vermöge der Federn macht. Damit dieser gefährliche Zustand, bei welchem jeder Zapfen brechen müsste, bei keiner von den Geschwindigkeiten, mit der ein Zug zu fahren hat, eintreten kann, muss die Schienenlänge grösser sein, als derjenige Werth, den der Ausdruck (12) gibt, wenn man für v die grösste Fahrgeschwindigkeit setzt. Die richtige Schienenlänge ist also der grössten Fahrgeschwindigkeit v proportional und richtet sich überdies noch nach dem Starrheitsgrad der Federn. Weiche Federn, für welche s gross ist, erfordern lange Schienen.

Wir haben früher gesehen, dass die der normalen Belastung entsprechende Senkung s der Federn in der Regel 5 Centimeter beträgt. Setzt man in (12) $s = 5$ $g = 980{\cdot}8$, so wird:

$$S = 0{\cdot}448\, V \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (13)$$

Dieser Ausdruck gilt für jedes Längenmaass, denn es wird durch denselben nur ein Verhältniss bestimmt.

Für eine Fahrgeschwindigkeit von 14 Meter in einer Sekunde wird $S = 0.448 \times 14 = 6.27$ Meter. Die Schienen sollen also, um den gegenwärtig in Deutschland üblichen grösseren Fahrgeschwindigkeiten zu entsprechen, wenigstens über 6 Meter lang sein; was auch in der That der Fall ist.

Bestimmung der Zapfendurchmesser mit Rücksicht auf Festigkeit und Abnützung.

Vorausgesetzt, dass das Federwerk eines Wagens richtig angeordnet, und dass die Schienen eine der Fahrgeschwindigkeit und der Starrheit der Federn angemessene Länge haben, ist der in der Klammer der Gleichung (10) (Seite 228) enthaltene Ausdruck als eine constante Grösse anzusehen, und dann ist das Maximum des Druckes, den ein Zapfen einer Wagenaxe auszuhalten hat, der Last Q proportional, die im ruhenden Zustand auf dem Zapfen liegt.

Nennen wir:

Q die Belastung eines Zapfens einer Wagenaxe im ruhigen Znstand des Wagens;
αQ das Maximum des Druckes gegen den Zapfen im bewegten Zustand des Wagens;
$\mathfrak{S}$ die grösste Spannung auf einen Quadratcentimeter bezogen, welche im Zapfen eintreten darf, wenn auf denselben der Druck αQ einwirkt;
d den Durchmesser des Zapfens in Centimetern;
l die Länge des Zapfens;
n Anzahl der Umdrehungen des Zapfens in einer Sekunde;

so hat man nach bekannten statischen Gesetzen:

$$\alpha Q \frac{l}{2} = \frac{\mathfrak{S}\pi}{32} d^3 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

Hieraus folgt:

$$d = \sqrt{\frac{16\,\alpha Q}{\mathfrak{S}\pi} \frac{l}{d}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (2)$$

Dieser Ausdruck bestimmt den Durchmesser des Zapfens, wenn α, $\mathfrak{S}$ die Belastung Q und das Verhältniss $\frac{l}{d}$ zwischen der Länge und dem Durchmesser des Zapfens gegeben sind.

Die Unbestimmtheit des Verhältnisses $\frac{1}{d}$ kann man benutzen, um derjenigen Bedingung zu entsprechen, die erfüllt sein muss, damit ein Zapfen im Gebrauch nicht merklich abgenutzt wird, und sich auch nicht warm läuft. Diese Bedingung ist: dass die Intensität des Druckes zwischen dem Zapfen und der Pfanne unter allen Umständen, insbesondere aber, wenn die Umfangsgeschwindigkeit des Zapfens gross ist, eine mässige seie. Es ist aber die Intensität des Druckes dem Werth von $\frac{Q}{d\,l}$ und die Umfangsgeschwindigkeit dem Werth von $n\,d$ proportional; es ist daher der Natur der Sache angemessen, wenn wir setzen:

$$\frac{Q}{d\,l} = \frac{1}{a + b\,n\,d} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (3)$$

wobei a und b zwei durch Erfahrungen zu bestimmende Constante sind. Aus dieser Gleichung (2) und (3) folgt:

$$\left.\begin{aligned} l &= \frac{Q\,(a + b\,n\,d)}{d} \\ Q &= d^2 \sqrt{\frac{\pi}{16}\,\frac{\mathfrak{Z}}{\alpha}\,\frac{1}{a + b\,n\,d}} \end{aligned}\right\} \quad \ldots \ldots \ldots \quad (4)$$

Die drei constanten Grössen $\frac{\mathfrak{Z}}{\alpha}$ a b bestimmen wir auf folgende Weise:

Wir dürfen zunächst annehmen, dass der grösste Druck gegen einen Zapfen im bewegten Zustand des Wagens doppelt so gross ist, als im ruhigen Zustand und setzen daher $\alpha = 2$.

Nach den Dimensionen, welche den Zapfen der Wagenaxen in der Wirklichkeit gegeben wird, ist die grösste Spannung im ruhigen Zustand des Wagens 300 Kilogramm auf 1 Quadratcentimeter; im bewegten Zustand ist also $\mathfrak{Z} = 600$ Kilogramm. Wir haben also zu setzen: $\frac{\mathfrak{Z}}{\alpha} = \frac{600}{2} = 300$.

Die Länge eines Zapfens, der keine Bewegung hat, darf gleich seinem Durchmesser genommen werden. Wir setzen also für $n = 0$ $l = d$. Mit diesen Daten folgt aus (2) und (3):

$$d = \sqrt{\frac{16\,Q}{\pi\,300}}$$

$$\frac{Q}{d^2} = \frac{1}{a}$$

Durch Elimination von Q folgt aus diesen Gleichungen:

$$a = 0{\cdot}017.$$

Der Erfahrung zufolge dürfen wir ferner einen Zapfen, welcher in einer Sekunde sechs Umdrehungen macht, und mit 2000 Kilogramm belastet ist, zweimal so lang als den Durchmesser machen. Setzen wir in den Gleichungen (2) und (3):

$$\frac{\mathfrak{Z}}{\alpha} = 300 \qquad n = 6 \qquad Q = 2000 \qquad \frac{l}{d} = 2 \qquad a = 0{\cdot}017$$

so finden wir:

$$d = \sqrt{\frac{16 \times 2000}{3{\cdot}14 \times 300}} \cdot 2$$

$$\frac{2000}{2\,d^2} = \frac{1}{0{\cdot}017 + 6\,b\,d}$$

und hieraus folgt: $d = 8{\cdot}2 \quad b = 0{\cdot}001$.

Hiermit sind nun die drei Coeffizienten $\frac{3}{\alpha}$ a und b bestimmt, und vermittelst derselben geben die Gleichungen (4):

$$\left.\begin{aligned} l &= \frac{0{\cdot}001\,Q\,(17 + n\,d)}{d} \\ Q &= \frac{243}{\sqrt{17 + n\,d}} \cdot d^2 \end{aligned}\right\} \quad \dots\dots\dots\dots \quad (5)$$

Vermittelst dieser Formeln ist die in dem VIII. Abschnitt enthaltene Tabelle berechnet.

Zuweilen ist in einer Construction nicht hinreichend Raum vorhanden, um einem Zapfen die wünschenswerthe Länge geben zu können. In einem solchen Falle wird man sich in der Regel begnügen müssen, die Zapfenlänge gleich dem Durchmesser zu nehmen, diesen letzteren also so zu bestimmen, wie wenn $n = 0$ wäre.

Stahl-Zapfen.

Die Raumverhältnisse sind zuweilen so beengend, dass es wünschenswerth wird, die Zapfendimensionen so klein als möglich nehmen zu können. In solchem Falle ist es angemessen, die Zapfen aus gutem Gussstahl zu machen und die Länge derselben gleich dem Durchmesser zu nehmen. Bei Lokomotiven mit aussen liegenden Cylindern ist es insbesondere angemessen, die Kurbelzapfen, welche in die Radnaben der Triebräder eingesetzt werden von Gusstahl zu nehmen. Ist Q der Druck gegen einen solchen Zapfen in Kilogrammen, d der Durchmesser, l die Länge desselben in Centimetern, so ist zu nehmen:

$$d = l = 0{\cdot}09\,\sqrt{Q} \dots \quad \dots\dots\dots\dots \quad (6)$$

Stärke der Axen der Treib- und Laufräder.

Um die Querschnittsdimensionen, welche die Axen an verschiedenen Stellen erhalten sollen, zu bestimmen, ist es am angemessensten, die in dem Lokomotivbau vorkommenden Axenconstruktionen besonders zu behandeln.

A. Axe eines Laufwerkes für einen Wagen oder für eine Lokomotive mit äusseren Zapfen. (Tab. XV, Fig. 62.)

Es sei Q die Belastung eines Zapfens des Laufwerkes; d der Durchmesser; l die Länge eines Zapfens; l_1 der Abstand des Zapfenmittels vom Mittel des neben dem Zapfen befindlichen Rades; d_1 der Durchmesser der Axe in ihrer Mitte; $\mathfrak{z}$ die Spannung per

1 Quadratcentimeter, welche an der Wurzel eines Zapfens und in der Mitte der Axe eintreten darf. Das Moment, welches den Zapfen an der Wurzel abzubrechen strebt, ist $Q \frac{l}{2}$. Das Moment, welches die Welle in der Mitte abzubrechen strebt, ist $Q l_1$, man hat daher, wenn die Welle und der Zapfen gleich fest gemacht werden sollen.

$$Q \frac{l}{2} = \frac{3 \pi}{32} d^3$$

$$Q l_1 = \frac{3 \pi}{32} d_1^3$$

Durch Elimination von Q folgt aus diesen Gleichungen:

$$d_1 = d \sqrt[3]{\frac{2 l_1}{l}} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (1)$$

gewöhnlich ist $l_1 = \frac{3}{2} l$ und dann wird: $d_1 = d \sqrt[3]{3} = 1{\cdot}44\, d$. Für ruhige Pressungen würde die Axe in allen Querschnitten zwischen den Rädern gleiche Festigkeit darbieten, wenn ihr Durchmesser überall gleich $d_1 = 1{\cdot}44\, d$ gemacht würde, allein die Erfahrung hat gelehrt, dass die Axen durch die gewaltsamen Einwirkungen der Bahn gegen die Radumfänge am leichtesten in der Nähe der Naben brechen, sie werden desshalb von der Mitte an gegen die Naben etwas verdickt, so dass der Durchmesser an den Naben $1{\cdot}6\, d$ wird.

B. Laufaxe oder Triebaxe einer Lokomotive mit äusseren Cylindern und innerem Rahmen. (Fig. 63)

Es sei Q die Belastung eines Axenhalses, d der Durchmesser des Halses, l die Länge desselben, l_1 die Entfernung vom Mittel des Halses bis zum Mittel des nebenan befindlichen Rades, d_1 der Durchmesser der Axen in der Mitte. In diesem Falle ist das Moment, welches die Zapfen, so wie auch jenes, das die Welle in der Mitte abzubrechen strebt, gleich $Q l_1$, man hat daher zur Bestimmung von d und d_1:

$$d = d_1 = \sqrt[3]{\frac{32\, Q\, l_1}{\mathfrak{Z}\, \pi}} \text{ Centimeter} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (2)$$

Für $\mathfrak{Z}$ darf man auch hier 300 setzen, und dann wird:

$$d = d_1 = 0{\cdot}32 \sqrt[3]{Q\, l_1} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (3)$$

Die Länge l des Halses kann man gewöhnlich nicht grösser als den Durchmesser machen, weil sonst l zu gross ausfiele, und die Rahmen zu nahe aneinander zu liegen kämen. Nimmt man aber $l_1 = d$, so folgt aus (3):

$$l = d = d_1 = 0{\cdot}18 \sqrt{Q}$$

C. Triebaxe mit inneren Kurbeln für Lokomotive mit innen liegenden Cylindern und inneren Rahmen. (Fig. 64.)

Es sei Q die Belastung eines Axenhalses, P der Druck gegen einen Kurbelzapfen, l_1 der Abstand vom Mittel eines Rades bis zum Mittel des nebenan befindlichen Halses, l_2 der Abstand vom Mittel eines Halses bis zum Mittel der nebenan befindlichen Kurbel, l_3 der Abstand vom Mittel einer Kurbel bis zum Mitttel der ganzen Axe, r der Halbmesser der Kurbel, d_1 der Durchmesser des Axenhalses, d der Durchmesser eines Kurbelzapfens, d_2 der Durchmesser der Axe in der Mitte.

Durch die Belastungen der Axenhälse wird die Axe nach abwärts gebogen. Die aus diesen Belastungen entspringenden Momente, welche die Axe in ihrer Mitte C, in der Mitte des Kurbelzapfens B und in der Mitte eines Axenhalses A abzubrechen streben, sind von gleicher Grösse und ihr gemeinschaftlicher Werth ist $Q l_1$. Die zwischen den Mittelpunkten der Axenhälse befindlichen Theile der Axe sind aber auch durch die nach horizontaler Richtung gegen die Kurbelzapfen wirkenden Drücke auf respektive Festigkeit in Anspruch genommen. Die in horizontalem Sinne biegend wirkenden Momente sind für die mittleren Querschnitte der Welle $P l_2$, für den mittleren Querschnitt eines Kurbelzapfens ebenfalls $P l_2$, für den mittleren Querschnitt eines Halses gleich Null. Die Biegungsmomente, welche durch die gleichzeitige Wirkung der Belastungen der Axenhälse und der Drücke gegen die Kurbelzapfen entstehen, sind demnach für die Querschnitte bei C und B $\sqrt{Q^2 l_1^2 + P^2 l_2^2}$ und für den Querschnitt bei A $Q l_1$. Nennt man nun $\mathfrak{S}$ die auf einen Quadratcentimeter bezogenen Spannungen, welche an den Oberflächen der Querschnitte bei C, B und A eintreten dürfen, so hat man zur Bestimmung der Durchmesser, welche die Welle bei C B und A erhalten muss, um der biegenden Wirkung der Kräfte Q und P zu widerstehen, folgende Ausdrücke:

$$\left.\begin{aligned} \sqrt{Q^2 l_1^2 + P^2 l_2^2} &= \frac{\mathfrak{S}\pi}{32} d^3 = \frac{\mathfrak{S}\pi}{32} d_2^3 \\ Q l_1 &= \frac{\mathfrak{S}\pi}{32} d_1^3 \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

und hieraus folgt:

$$d = d_2 = \sqrt[3]{\frac{32}{\mathfrak{S}\pi}\sqrt{Q^2 l_1^2 + P^2 l_2^2}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (2)$$

$$d_1 = \sqrt[3]{\frac{32}{\mathfrak{S}\pi} Q l_1} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (3)$$

Allein die auf die Kurbelzapfen wirkenden Kräfte werden durch Torsion auf die Räder übertragen; die Axenhälse sind daher auch auf Torsion in Anspruch genommen. Nennt man δ_1 die Durchmesser, welche die Axenhälse erhalten müssen, um nur allein der Torsion, der sie ausgesetzt sind, zu widerstehen, so hat man zur Bestimmung von δ_1 die Gleichung:

$$\delta_1 = \sqrt[3]{\frac{16 P r}{\pi \mathfrak{T}}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (4)$$

wobei $\mathfrak{T}$ die durch die Torsion an der Oberfläche des Halses entstehende Spannung per ein Quadratcentimeter bezeichnet. Allein ein verwundener Stab widersteht dem Abbrechen ebenso stark, als ein nicht verwundener, und ein gebogener Stab widersteht dem Abwinden ebenso stark, als ein nicht gebogener; der Wellenhals bei A erhält also seine richtige Dimension, wenn wir den Durchmesser gleich machen d_1 wenn $d_1 > \delta_1$ ausfällt, dagegen gleich machen δ_1 wenn $\delta_1 > d_1$ ausfällt.

Um mit den Thatsachen der Wirklichkeit harmonirende Dimensionen zu erhalten, ist zu setzen: $\mathfrak{Z} = 300$ $\mathfrak{T} = 135$ und dann wird:

$$\left.\begin{aligned} d = d_2 &= 0{\cdot}32 \sqrt[6]{Q^2 l_1^3 + P^2 l_2^3} \\ d_1 &= 0{\cdot}32 \sqrt[3]{Q l_1} \\ \delta_1 &= 0{\cdot}335 \sqrt[3]{P r} \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (5)$$

Es sei z. B.:

$$Q = 3410, \quad l_1 = 16, \quad P = 5000, \quad r = 26, \quad l_2 = 25$$

so wird:

$$d = d_2 = 16{\cdot}5 \quad d_1 = 12.16, \quad \delta_1 = 16{\cdot}9.$$

Da also δ_1 grösser als d_1 ist, so muss der Durchmesser des Axenhalses 16·9 und nicht 12·16 Centimeter gemacht werden.

Die Ausdrücke (5) können auch geschrieben werden wie folgt:

$$\left.\begin{aligned} d_1 &= 0{\cdot}32 \sqrt[3]{Q l_1} \\ \delta_1 &= 0{\cdot}335 \sqrt[3]{P r} \\ d = d_2 &= d_1 \sqrt[6]{1 + \left(\frac{P l_2}{Q l_1}\right)^2} \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (6)$$

Die Durchmesser d der Kurbelzapfen fallen insbesondere sehr stark aus für Maschinen mit innen liegenden Cylindern und mit gekuppelten Rädern, denn bei diesen Anordnungen ist der Druck P gegen die Kurbelzapfen, im Verhältniss zur Belastung Q der Kurbelaxe, sehr gross.

Festigkeit eines cylindrischen Gefäßes.

Wir wollen die Festigkeit eines cylindrischen Gefässes untersuchen, das im Innern eine Flüssigkeit enthält, die auf jeden Quadratcentimeter einen Druck p_0 und von aussen von einer andern Flüssigkeit umgeben ist, die auf jeden Quadratcentimeter der äusseren Fläche einen Druck p_1 ausübt. Es sei $p_0 > p_1$. Es sei für den natürlichen von keinen äusseren Kräften affizirten Zustand des Gefässes r_0 der innere, r_1 der äussere Halbmesser des Cylinders; x der Halbmesser eines Kreises, der zwischen dem innern und äussern Begrenzungskreis des Cylinders liegt.

Unter den Einwirkungen der Pressungen p_0 und p_1 wird der Gylinder ausgeweitet bis ein Gleichgewicht zwischen diesen Pressungen und den inneren Elastizitätskräften des Materials eintritt. Dadurch gehen die Halbmesser r_0 r_1 und x in ϱ_0 ϱ_1 und ξ über jedoch in der Art, dass die Wanddicke $\rho_0 - \rho_1$ des ausgeweiteten Cylinders kleiner ist, als die Wanddicke $r_1 - r_0$ des Cylinders im natürlichen Zustand. Zieht man durch einen Punkt m (Fig. 87) des Kreises vom Halbmesser ξ einen Radius m C und eine Tangente A B, so ist klar, dass das Material bei m nach der Richtung A B ausgedehnt, nach der Richtung C m zusammengepresst sein wird. Nennen wir y die auf einen Quadratcentimeter bezogene Spannung bei m nach der Richtung A B und z die auf einen Quadratcentimeter bezogene Pressung bei m nach der Richtung m C, ε den Modulus des Materials, aus welchem der Cylinder besteht. Das Material, welches im natürlichen Zustand zwischen den Kreisen, deren Halbmesser x und x + dx sind, eingeschlossen war, befindet sich im ausgedehnten Zustand des Cylinders zwischen zwei Kreisen, deren Halbmesser ξ und $\xi + d\xi$ sind; es ist demnach $2\pi\xi - 2\pi x = 2\pi(\xi - x)$ die Ausdehnung und $dx - d\xi$ die Zusammendrückung dieses Materials und man hat nach dem bekannten, für die Ausdehnung und Zusammendrückung von Stäben geltenden empirischen Gesetze:

$$\left.\begin{array}{l} 2\pi(\xi - x) = 2\pi x \cdot \frac{y}{\varepsilon} \\ dx - d\xi \quad = dx \cdot \frac{z}{\varepsilon} \end{array}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

Nennt man Θ die Aenderung, welche in der Fläche $(x + dx)^2\pi - x^2\pi$ durch die Ausdehnung eintritt, so ist

$$\Theta = \left[(\xi + d\xi)^2\pi - \xi^2\pi\right] - \left[(x + dx)^2\pi - x^2\pi\right]$$

oder weil dx und $d\xi$ Differenzialien sind:

$$\Theta = 2\pi(\xi\, d\xi - x\, dx) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (2)$$

Aus den Gleichungen (1) folgt aber:

$$\left.\begin{array}{l} \xi = x\left(1 + \frac{y}{\varepsilon}\right) \\ d\xi = dx\left(1 - \frac{z}{\varepsilon}\right) \end{array}\right| \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (3)$$

Führt man diese Werthe in (2) ein und vernachlässigt das jederzeit verschwindend kleine Glied $\frac{y}{\varepsilon}\,\frac{z}{\varepsilon}$ so findet man:

$$\Theta = 2\pi x\, dx\left(\frac{y}{\varepsilon} - \frac{z}{\varepsilon}\right)$$

oder

$$\frac{\Theta}{2\pi x\, dx} = \frac{1}{\varepsilon}(y - z) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (4)$$

Es ist aber $2\pi x\, dx$ die Fläche, welche in Folge der Einwirkungen der Pressungen p_0 und p_1 eine Ausdehnung erlitten hat $\frac{\Theta}{2\pi x\, dx}$ ist demnach die auf einen Quadratcentimeter bezogene Flächenausdehnung im Punkt m.

Um den analystischen Schwierigkeiten und Weitläufigkeiten, welcher einer ganz scharfen Lösung unseres Problems im Wege stehen, zu entgehen, sind wir nun genöthigt, eine Hypothese zu machen. Wir nehmen nämlich an, dass die auf einen Quadratcentimeter bezogene Flächenausdehnung in allen Punkten des Cylinderquerschnittes gleich gross sei, oder dass $\frac{1}{\varepsilon}(y-z)$ für jeden Querschnittspunkt den gleichen Werth hat. Diesen constanten Werth können wir leicht finden. Nennen wir nämlich $\mathfrak{A}$ die Spannung des Materials per einen Quadratcentimeter am inneren Umfang des Cylinders, so ist $\mathfrak{A}$ der Werth von y für $x=r_0$. Es ist aber ferner für $x=r_0$ $z=p_0$, daher ist die Flächenausdehnung per einen Quadratcentimeter am innern Umfang des Cylinders und vermöge unserer Hypothese in jedem Punkt des Cylinderquerschnitts gleich $\frac{1}{\varepsilon}(\mathfrak{A}-p_0)$.

Die Flächenausdehnung irgend eines Theils des Cylinderquerschnittes wird nun gefunden, wenn man die Fläche, deren Ausdehnung man berechnen will, mit dem Ausdehnungscoeffizienten $\frac{1}{\varepsilon}(\mathfrak{A}-p_0)$ multiplizirt. Die Fläche $(x^2-r_0^2)\pi$ wird durch die Ausdehnung $(\xi^2-\varrho_0^2)\pi$. Die Ausdehnung ist demnach $(\xi^2-\varrho_0^2)\pi-(x^2-r_0^2)\pi$, daher hat man:

$$(\xi^2-\varrho_0^2)\pi-(x^2-r_0^2)\pi=(x^2-r_0^2)\pi\frac{1}{\varepsilon}(\mathfrak{A}-p_0) \quad \ldots \ldots \quad (5)$$

Allein es ist vermöge der ersten der Gleichungen (3):

$$\xi=x\left(1+\frac{y}{\varepsilon}\right)$$

$$\varrho_0=r_0\left(1+\frac{\mathfrak{A}}{\varepsilon}\right)$$

Führt man diese Werthe von ξ und ϱ_0 in (5) ein, und vernachlässigt die Quadrate von $\frac{y}{\varepsilon}$ und von $\frac{\mathfrak{A}}{\varepsilon}$ gegen die ersten Potenzen, so findet man:

$$y\,x^2-\mathfrak{A}\,r_0^2=(x^2-r_0^2)\frac{\mathfrak{A}-p_0}{2} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (6)$$

und hieraus folgt:

$$y=\frac{\mathfrak{A}-p_0}{2}+\frac{\mathfrak{A}+p_0}{2}\,\frac{r_0^2}{x^2} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (7)$$

Somit ist nun die auf einen Quadratcentimeter bezogene tangentiale Spannung eines in einer Entfernung x von der Axe des Cylinders befindlichen Punktes berechnet. Diese nimmt, wie man sieht, von der inneren Fläche gegen die äussere hin ab, ist also am innern Umfang am grössten und beträgt daselbst $\mathfrak{A}$.

Nennen wir υ die Spannung per 1 Quadratcentimeter in der Entfernung ξ, so findet man υ, wenn man in (7) x mit ξ und y mit υ und r_0 mit ϱ_0 vertauscht. Man hat daher:

$$\upsilon=\frac{\mathfrak{A}-p_0}{2}+\frac{\mathfrak{A}+p_0}{2}\,\frac{\varrho_0^2}{\xi^2} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (8)$$

Nun ist $\int_{\varrho_0}^{\varrho_1} v\, d\xi$ die Summe aller Spannungen in einer, $2\int_{\varrho_0}^{\varrho_1} v\, d\xi$ die Summe aller Spannungen in zwei diametral gegenüber liegenden Wanddicken sind ferner $2\,\varrho_0\,p_0$ und $2\,\varrho_1\,p_1$ die Pressungen der Flüssigkeiten, welche die Spannungen in zwei diametral gegenüber stehenden Wanddicken hervorrufen.

Man hat daher:

$$2\int_{\varrho_0}^{\varrho_1} v\, d\xi = 2\,(\varrho_0\,p_0 - \varrho_1\,p_1) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (9)$$

oder wegen (8)

$$2\int_{\varrho_0}^{\varrho_1} \left[\frac{\mathfrak{A} - p_0}{2} + \frac{\mathfrak{A} + p_0}{2}\,\frac{\varrho_0^2}{\xi^2}\right] d\xi = 2\,(\varrho_0\,p_0 - \varrho_1\,p_1)$$

Durch Integration findet man:

$$\frac{\mathfrak{A} - p_0}{2}(\varrho_1 - \varrho_0) + \frac{\mathfrak{A} + p_0}{2}\,\varrho_0^2\,\frac{\varrho_1 - \varrho_0}{\varrho_1\,\varrho_0} = \varrho_0\,p_0 - \varrho_1\,p_1$$

Aus dieser Gleichung folgt:

$$\frac{\varrho_1}{\varrho_0} = \sqrt{\frac{\mathfrak{A} + p_0}{\mathfrak{A} + 2\,p_1 - p_0}}$$

Es ist aber vermöge der ersten der Gleichungen (3):

$$\varrho_1 = r_1\left(1 + \frac{p_1}{\varepsilon}\right)$$

$$\varrho_0 = r_0\left(1 + \frac{p_0}{\varepsilon}\right)$$

Daher findet man:

$$\frac{r_1}{r_0} = \frac{1 + \frac{p_0}{\varepsilon}}{1 + \frac{p_1}{\varepsilon}}\sqrt{\frac{\mathfrak{A} + p_0}{\mathfrak{A} + 2\,p_1 - p_0}}$$

oder endlich weil $\frac{p_0}{\varepsilon}$ und $\frac{p_1}{\varepsilon}$ jederzeit gegen die Einheit beinahe verschwindend kleine Grössen sind:

$$\frac{r_1}{r_0} = \sqrt{\frac{\mathfrak{A} + p_0}{\mathfrak{A} + 2\,p_1 - p_0}} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (10)$$

Diese Formel, welche wir unter der Voraussetzung gefunden haben, dass die verhältnissmässige Volumenänderung des Materials in allen Punkten einen und denselben Werth habe, stimmt mit derjenigen überein, welche *Lamé* in seinem Werke: Theorie mathematique de l'elasticité des corps solides pag. 191 zuerst gefunden hat, ohne von irgend einer Hypothese über die verhältnissmässige Volumenänderung des Materials auszugehen.

Nennen wir:

D den inneren Durchmesser des Cylinders
δ die Wanddicke desselben } in Centimetern;
n die Anzahl der Atmosphären, welche dem innern,
n_1 die Anzahl der Atmosphären, welche dem äusseren Druck entspricht, und nehmen den Druck der Atmosphäre auf 1 Quadratcentimeter (der eigentlich 1·0335 Kilogr. beträgt) zu 1 Kilogramm an, so ist:

$$r_0 = \frac{D}{2} \qquad r_1 = \frac{D}{2} + \delta \qquad p_0 = n \qquad p_1 = n_1$$

und $\mathfrak{A}$ bedeutet dann die Spannung auf 1 Quadratcentimeter bezogen an der innern Fläche der Wand.

Mit diesen neuen Bezeichnungen folgt aus (10):

$$\delta = \frac{D}{2}\left(\sqrt{\frac{\mathfrak{A}+n}{\mathfrak{A}+2n_1-n}} - 1\right) \quad \ldots \ldots \quad (11)$$

Setzt man in dieser Formel für $\mathfrak{A}$ den Coeffizienten der absoluten Festigkeit des Materials, aus welchem der Cylinder besteht, so gibt diese Formel diejenige Wanddicke, bei welcher ein Bersten des Cylinders eintritt. Diese Wanddicke wird unendlich, oder es tritt ein Bersten ein, wie dick man auch die Wand machen mag, wenn $n = \mathfrak{A} + 2n_1$ ist, d. h. wenn die auf einen Quadratcentimeter bezogene Spannung der Flüssigkeit um das Doppelte der äusseren Pressung auf einen Quadratcentimeter grösser ist, als der Coeffizient der absoluten Festigkeit des Materials.

Bei hydraulischen Pressen ist die Wanddicke des grossen Presscylinders gewöhnlich halb so gross, als der innere Durchmesser, oder es ist $\delta = \frac{D}{2}$. Für dieses Verhältniss gibt die Formel (11):

$$n = \frac{3}{5}\mathfrak{A} + \frac{8}{5}n_1 \quad \ldots \ldots \quad (12)$$

Die absolute Festigkeit des Gusseisens ist durchschnittlich 1000 Kilogramm per einen Quadratcentimeter. Die Presscylinder dürfen nicht stärker, als bis zu $\frac{1}{3}$ ihrer absoluten Festigkeit in Anspruch genommen werden, man kann also $\mathfrak{A}$ nicht grösser als 300 annehmen, und für diesen Werth gibt die Formel (12) mit Berücksichtigung, dass in diesem Fall $n_1 = n$ ist:

$$n = 181{\cdot}6$$

Damit also der Cylinder der hydraulischen Presse, bei welchem die Wanddicke halb so gross ist, als der innere Durchmesser, das Material nicht mehr als auf $\frac{1}{3}$ seiner Festigkeit in Anspruch nimmt, darf der innere Druck der Flüssigkeit nicht mehr als 181·6 Atmosphären betragen.

Bei Dampfkesseln ist der innere Druck n gegen die auf einen Quadratcentimeter bezogene Spannung $\mathfrak{A}$, welche in dem Material an der innern Fläche der Wand eintreten darf, eine kleine Grösse, und dann ist es erlaubt, für δ einen Annäherungswerth aufzustellen. Es ist ganz genau:

$$\sqrt{\frac{\mathfrak{A}+n}{\mathfrak{A}+2n_1-n}}-1=\left(1+2\frac{n-n_1}{\mathfrak{A}+2n_1-n}\right)^{\frac{1}{2}}-1$$

und annähernd

$$\sqrt{\frac{\mathfrak{A}+n}{\mathfrak{A}+2n_1-n}}-1=\frac{n-n_1}{\mathfrak{A}+2n_1-n}$$

demnach ist auch annähernd

$$\delta=\frac{D}{2}\frac{n-n_1}{\mathfrak{A}+2n_1-n} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (13)$$

Diese Formel wollen wir benutzen, um eine Regel zur Bestimmung der Metalldicke cylindrischer Kessel aufzustellen. Dieselbe gibt natürlich für $n=n_1$, $\delta=0$. Allein jeder Kessel muss auch dann, wenn der innere Druck dem äusseren gleich wäre, eine gewisse Metalldicke erhalten, um insbesondere gegen verschiedene Zufälligkeiten hinreichende Festigkeit darbieten zu können. Die Formel (13) ist also unmittelbar nach ihrer Form zur Aufstellung einer praktisch brauchbaren Regel für die Bestimmung der Metallstärke nicht geeignet. Wir schreiben desshalb:

$$\delta=\frac{D}{2}\left(\frac{n-n_1}{\mathfrak{A}+2n_1-n}+\mathfrak{B}\right) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (14)$$

und bestimmen $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ auf folgende Weise durch Erfahrungen. Wir dürfen annehmen, dass ein Kessel von 100 Centimeter Weite doch eine Metalldicke von 0.5 Centimeter erhalten soll, wenn der innere Druck dem äusseren gleich ist. Setzt man in die Formel $n=n_1$ $D=100$ $\delta=0{\cdot}5$, so folgt aus ihr $\mathfrak{B}=0{\cdot}01$.

Die cylindrischen Theile der Lokomotivkessel haben durchschnittlich einen Durchmesser $D=100$ Centimeter, eine Metalldicke $\delta=1{\cdot}2$ Centimeter, haben einer normalen Spannung n von 6 Atmosphären zu widerstehen, und gewähren bei diesen Abmessungen eine angemessene Sicherheit. Setzen wir in (14) $n=6$ $n_1=1$ $\delta=1.2$ $D=100$ $\mathfrak{B}=0{\cdot}01$, so findet man $\mathfrak{A}=361$. Vermittelst dieser Werthe von $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ und wenn man noch $n_1=1$ setzt folgt aus (14)

$$\delta=D\,\frac{1{\cdot}315+0{\cdot}495\,n}{363-n} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (15)$$

Diese Formel wollen wir als Regel für die Bestimmung der Wanddicke cylindrischer Dampfkessel gelten lassen.

Diese Formel gibt:

für $n =$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
„ $\frac{\delta}{D} =$	0·0050	0·0064	0·0077	0·0092	0·0106	0·0120	0·0134	0·0149	0·0163	0·0177

Nach dieser Regel fallen die Metalldicken für schwache Pressungen etwas stärker aus, als nach den Regeln, die bisher für die Dicke der Kesselwände aufgestellt wurden. Nach der in Frankreich üblichen Regel wird z. B. die Metalldicke eines Kessels von 100 Centimeter Durchmesser und für eine Spannung von 2 Atmosphären 0·48 Centimeter, unsere Formel gibt dagegen in diesem Fall 0·64 Centimeter.

Wenn wir bestimmen wollen, wie stark das Kesselblech in Anspruch genommen ist, wenn seine Dicke nach obiger Regel bestimmt wird, müssen wir vermittelst der Gleichungen (11) oder (13) die Werthe von $\mathfrak{A}$ bestimmen. Aus (13) folgt, wenn man $n_1 = 1$ setzt:

$$\mathfrak{A} = n - 2 + \frac{D}{2\,\delta}(n - 1)$$

Für $D = 100$ $n = 6$ wird nach obiger Tabelle $\delta = 1{\cdot}2$ und nun folgt $\mathfrak{A} = 212$. Die absolute Festigkeit von Eisenblech ist 3300. Das Blech des Kessels ist demnach in diesem Falle auf $\frac{212}{3300} = \frac{1}{15}$ seiner absoluten Festigkeit in Anspruch genommen.

Festigkeit eines sphärischen Gefäßes.

Die Fig. 87 kann uns auch zur Untersuchung der Festigkeit eines sphärischen Gefässes dienen. Es sei für den natürlichen Zustand r_0 der innere, r_1 der äussere, x irgend ein zwischen r_0 und r_1 liegender Kugelhalbmesser. Im ausgedehnten Zustand des Gefässes seien diese Halbmesser ϱ_0 ϱ_1 ξ. In irgend einem Punkt m der Kugelfläche vom Halbmesser ξ herrscht nach radialer Richtung $m\,C$ Zusammenpressung, nach der auf $m\,C$ senkrechten Richtung $A\,m\,B$ Ausdehnung. Die auf einen Quadratcentimeter bezogene Spannung sei y, die auf einen Quadratcentimeter bezogene Pressung z. Das Material, welches ursprünglich innerhalb zweier Kugelflächen, deren Halbmesser x und $x + dx$ sind, enthalten war, befindet sich nach erfolgter Ausdehnung innerhalb der Kugelflächen, deren Halbmesser ξ und $\xi + d\,\xi$ sind. Die lineare Zusammenpressung nach der Richtung des Radius ist demnach $dx - d\xi$, die lineare Ausdehnung einer Kreisperipherielänge $2\,\pi\,x$ ist $2\,\pi\,(\xi - x)$. Man hat daher auch hier:

$$2\,\pi\,(\xi - x) = 2\,\pi\,x\,\frac{y}{\varepsilon}$$

$$dx - d\,\xi = dx\,\frac{z}{\varepsilon}$$

oder

$$\left.\begin{aligned} \xi &= x\left(1 + \frac{y}{\varepsilon}\right) \\ d\,\xi &= dx\left(1 - \frac{z}{\varepsilon}\right) \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

wobei ε den Modulus der Elastizität des Materials bedeutet.

Nennen wir Θ die Volumensänderung, welche in dem zwischen den Kugelflächen x und $x + dx$ enthaltenen Material eintritt, so ist:

$$\Theta = \frac{4}{3} \pi \left[(\xi + d\xi)^3 - \xi^3\right] - \frac{4}{3} \pi \left[(x + dx)^3 - x^3\right]$$

oder auch, weil $d\xi$ und dx Differenzialien sind:

$$\Theta = 4 \pi (\xi^2 d\xi - x^2 dx)$$

Setzt man für ξ und $d\xi$ die Werthe, welche die Gleichungen (1) darbieten, so wird:

$$\Theta = 4 \pi x^2 dx \left[\left(1 + \frac{y}{\varepsilon}\right)^2 \left(1 - \frac{z}{\varepsilon}\right) - 1\right]$$

Da in allen Anwendungen insbesondere auf Metallgefässe $\frac{y}{\varepsilon}$ und $\frac{z}{\varepsilon}$ sehr kleine Grössen sind, so darf man die Quadrate und die Produkte dieser Grössen gegen ihre ersten Potenzen vernachlässigen und dann wird:

$$\Theta = 4 \pi x^2 dx \left(\frac{2y}{\varepsilon} - \frac{z}{\varepsilon}\right) = 4 \pi x^2 dx \frac{2y - z}{\varepsilon}$$

Es ist aber $4 \pi x^2 dx$ das Volumen, das eine Aenderung Θ erlitten hat, $\frac{\Theta}{4 \pi x^2 dx}$ oder $\frac{2y - z}{\varepsilon}$ ist demnach die auf einen Kubikcentimeter bezogene Volumensänderung, welche in dem zwischen den Kugelflächen x und $x + dx$ eingeschlossenen Material eintritt, oder kurz gesprochen: $\frac{2y - z}{\varepsilon}$ ist die verhältnissmässige Volumensausdehnung, welche in der Entfernung ξ eintritt. Wir wollen aber auch hier die hypothetische Annahme machen, dass die verhältnissmässige Volumensausdehnung in allen Punkten der sphärischen Gefässwand einen und denselben Werth habe, dass mithin $\frac{2y - z}{\varepsilon}$ eine constante Grösse sei, deren Werth sich ergeben wird, wenn man für y und z, die irgend einem ganz bestimmten Punkt der Gefässwand entsprechenden Werthe setzt. Nennen wir p_0 die Pressung der Flüssigkeit im Innern auf einen Quadratcentimeter, p_1 die äussere Pressung auf einen Quadratcentimeter, $\mathfrak{A}$ die auf einen Quadratcentimeter bezogene Spannung an der innern Kugelfläche vom Halbmesser ϱ_0, so ist für irgend einen Punkt dieser Kugelfläche $y = \mathfrak{A}$ und $z = p_0$. Der constante Werth von $\frac{1}{\varepsilon}(2y - z)$ ist demnach $\frac{1}{\varepsilon}(2\mathfrak{A} - p_0)$.

Da nach unserer Hypothese die verhältnissmässige Volumensänderung für jeden Punkt der Gefässwand den gleichen Werth hat, so findet man die Volumensänderung: $\frac{4}{3} \pi \left(\xi^3 - \varrho_0^3\right) - \frac{4}{3} \pi \left(x^3 - r_0^3\right)$ des Volumens $\frac{4\pi}{3} \left(x^3 - r_0^3\right)$ wenn man dieses Volumen mit $\frac{1}{\varepsilon}$ $(2\mathfrak{A} - p_0)$ multiplizirt. Man hat daher:

$$\frac{4}{3} (\xi^3 - \varrho_0^3) - \frac{4}{3} \pi (x^3 - r_0^3) = \frac{4}{3} \pi (x^3 - r_0^3) \frac{2\mathfrak{A} - p_0}{\varepsilon} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

Allein vermöge der ersten der Gleichungen (1) ist:

$$\xi = x\left(1 + \frac{y}{\varepsilon}\right)$$

$$\varrho_0 = r_0\left(1 + \frac{\mathfrak{A}}{\varepsilon}\right)$$

Führt man die aus diesen Gleichungen sich ergebenden Werthe von x und r_0 in (2) ein, und vernachlässiget die Produkte und höheren Potenzen der durch ε dividirten Glieder, so findet man:

$$\xi^2 y - \varrho_0^2 \mathfrak{A} = (\xi^2 - \varrho_0^2)\frac{2\mathfrak{A} - p_0}{3}$$

und hieraus folgt:

$$y = \frac{2\mathfrak{A} - p_0}{3} + \frac{\varrho_0^3}{\xi^3}\,\frac{\mathfrak{A} + p}{3} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (3)$$

Hiermit ist also die in der Kugelfläche vom Halbmesser ξ herrschende Spannung berechnet. Sie nimmt nach aussen hin ab, ist am innern Umfang, wo ihr Werth gleich $\mathfrak{A}$ ist, am grössten.

Die Bedingungs-Gleichung des Gleichgewichtes zwischen den Flüssigkeitspressungen und den Material-Spannungen ergibt sich nun auf folgende Art: Legen wir durch den Mittelpunkt der Kugelflächen eine Ebene, welche das Gefäss in zwei Hälften theilt, so werden dieselben durch den innern Druck mit einer Kraft $\varrho_0^2 \pi p_0$ auseinander getrieben, durch den Druck der äusseren Flüssigkeit mit einer Kraft $\varrho_1^2 \pi p_1$ gegen einander gedrückt, die Differenz $(\varrho_0^2 p_0 - \varrho_1^2 p_1)\pi$. Diese Kraft muss daher gleich sein der Summe aller Spannungen, die in dem Schnitt der sphärischen Gefässwand mit jener Ebene vorkommen; man hat daher:

$$\int_{\varrho_0}^{\varrho_1} 2\pi\xi\, d\xi\, y = \pi(\varrho_0^2 p_0 - \varrho_1^2 p_1)$$

oder wenn man für y seinen Werth setzt:

$$2\int_{\varrho_0}^{\varrho_1} \xi\left(\frac{2\mathfrak{A} - p_0}{3} + \frac{\mathfrak{A} + p_0}{3}\,\frac{\varrho_0^3}{\xi^3}\right) d\xi = \varrho_0^2 p_0 - \varrho_1^2 p_1$$

Hieraus findet man durch Integration:

$$2\left(\frac{2\mathfrak{A} - p_0}{3}\,\frac{\varrho_1^2 - \varrho_0^2}{2} + \frac{\mathfrak{A} + p_0}{3}\,\varrho_0^3\,\frac{\varrho_1 - \varrho_0}{\varrho_1\,\varrho_0}\right) = \varrho_0^2 p_0 - \varrho_1^2 p_1$$

und aus diesem Ausdruck folgt durch gewöhnliche Reduktionen:

$$\frac{\varrho_1}{\varrho_0} = \sqrt[3]{\frac{2(\mathfrak{A}+p_0)}{2\mathfrak{A}+3p_1-p_0}}$$

Es ist aber $\frac{\varrho_1}{\varrho_0} = \frac{r_1\left(1+\frac{p_1}{e}\right)}{r_0\left(1+\frac{p_0}{e}\right)}$ und da $\frac{p_1}{e}$ und $\frac{p_0}{e}$ jederzeit ungemein kleine Grössen sind, so begeht man keinen merklichen Fehler, wenn man $\frac{\varrho_1}{\varrho_0} = \frac{r_1}{r_0}$ setzt; wir erhalten also schliesslich:

$$\frac{r_1}{r_0} = \sqrt[3]{\frac{2(\mathfrak{A}+p_0)}{2\mathfrak{A}+3p_1-p_0}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (4)$$

Auch diese Formel hat zuerst *Lamé* in seinem früher genannten Werk, Seite 213, aufgestellt.

Nennen wir:

δ die Metalldicke des kugelförmigen Gefässes } in Centimetern;
D den innern Durchmesser }

$\mathfrak{A}$ die auf einen Quadratcentimeter bezogene Spannung, welche im Material an der innern Fläche der Wand eintreten darf;

n die Anzahl der Atmosphären, welche der innern,

n_1 die Anzahl der Atmosphären, welche der äussern Pressung entspricht, und nehmen den Druck einer Atmosphäre auf 1 Quadratcentimeter zu 1 Kilogramm, so ist:

$\mathfrak{A} = \mathfrak{A}$ $p_0 = n$ $p_1 = n_1$ $r_0 = \frac{D}{2}$ $r_1 = \frac{D}{2} + \delta$ und aus der Formel (4) folgt dann:

$$\delta = \frac{D}{2}\left[\sqrt[3]{\frac{2(\mathfrak{A}+n)}{2\mathfrak{A}+3n_1-n_1}} - 1\right] \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (5)$$

Setzt man für $\mathfrak{A}$ den Coeffizienten der absoluten Festigkeit des Materials, so gibt diese Formel diejenige Metallstärke, bei welcher ein Bersten des Gefässes eintritt. Diese Metalldicke wird unendlich gross, d. h. der Kessel berstet, wie dick man auch die Wand machen mag, wenn $n = 2\mathfrak{A} + 3n_1$ wird.

Für Dampfkessel ist n im Vergleich zu $\mathfrak{A}$ eine kleine Grösse, und dann kann man wiederum einen Annäherungsausdruck aufstellen. Es ist nämlich ganz genau:

$$\sqrt[3]{\frac{2(\mathfrak{A}+n)}{2\mathfrak{A}+3n_1-n_1}} - 1 = \left(1+3\frac{n-n_1}{2\mathfrak{A}+3n_1-n}\right)^{-\frac{1}{3}} - 1$$

Da nun $3(n-n_1)$ gegen $2\mathfrak{A}+3n_1-n$ sehr klein ist, so findet man annähernd:

$$\delta = \frac{D}{2}\,\frac{n-n_1}{2\mathfrak{A}+3n_1-n} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (6)$$

Wenn die Differenz $n-n_1$ zwischen der innern und äussern Spannung klein ist, gibt diese Formel für δ zu kleine Werthe, wir bringen daher eine Correktion an und setzen:

$$\delta = \frac{D}{2}\left(\frac{n-1}{2\mathfrak{A}+3-n} + \mathfrak{B}\right) \quad \ldots \ldots \quad (7)$$

Für $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ dürfen wir die gleichen Werthe nehmen, die wir für cylindrische Gefässe (Seite 239) aus Erfahrungen gefunden haben. Wir setzen daher $\mathfrak{B} = 0{\cdot}01$ $\mathfrak{A} = 361$ und dann wird:

$$\delta = D \frac{3{\cdot}125 + 0{\cdot}495\,n}{725 - n} \quad \ldots \ldots \quad (8)$$

Diese Formel gibt:

für $n =$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$\frac{\delta}{D} =$	0·0050	0·00569	0·00638	0·00708	0·0077	0·0085	0·0092	0·0098	0·0105	0·0113

Festigkeit des Feuer- und Wasserkastens einer Lokomotive.

Die Wände des Feuerkastens und des denselben umgebenden Wasserkastens sind der im Kessel herrschenden Pressung ausgesetzt. Diese Wände werden zwar aus sehr starken Blechen von 1 bis 1·5 Centimeter Dicke hergestellt, müssen aber dessen ungeachtet durch verschiedene Verbindungen gegen die deformirende Wirkung des im Kessel herrschenden Druckes geschützt werden. Zu diesem Behufe werden die Wände des Feuerkastens und des Wasserkastens durch Bolzen zusammengehängt, wird ferner die Decke des Feuerkastens vermittelst Bolzen an ein System von schmiedeisernen Barren gehängt, die mit ihren Enden auf der Rückwand und Röhrenwand des Feuerkastens aufsitzen, wird endlich der obere Theil des Wasserkastens durch Winkeleisen und Zugstangen verstärkt. In diesem System von Verbindungen sind die einzelnen Theile auf folgende Weise in Anspruch genommen.

Die Bolzen der Wände und Decke, sowie die Zugstangen sind auf absolute, die Barren der Decke des Feuerkastens und die Winkeleisen am oberen Theil des Wasserkastens sind auf respektive Festigkeit in Anspruch genommen. Die Umfangswände des Feuer- und des Wasserkastens sind als Platten anzusehen, die an vielen über ihren Flächen regelmässig vertheilten Punkten festgehalten werden und auf welche entweder nur normale Pressungen, oder, nebst normalen Pressungen, auch dehnende oder zusammendrückende Kräfte einwirken. Die Decken des Feuerkastens und des Wasserkastens sind nicht zusammengehängt, was zur Folge hat, dass der ganze Feuerkasten durch den Druck des Dampfes gegen seine Decke zusammengestaucht, und dass der Wasserkasten durch den gegen seine Decke wirkenden Dampfdruck nach vertikaler Richtung ausgestreckt wird. Die Umfangswände des Feuerkastens und Wasserkastens sind zusammengehängt, nach horizontaler Richtung werden daher die Wände des Feuerkastens weder gedehnt noch zusammengedrückt, allein da die Wände des Wasserkastens eine grössere Ausdehnung haben, als jene des Feuerkastens, so ist der Gesammtdruck gegen die Flächen des ersteren grösser, als gegen die Flächen des letzteren und die Differenz dieser Pressungen bringt in den Wänden des Wasserkastens eine schwache Ausdehnung nach horizontaler Richtung hervor. Die Zustände in den einzelnen Theilen des in Rede stehenden Baues sind also folgende:

Die Decke des Feuerkastens ist weder gedehnt noch zusammengepresst, wird jedoch in den zwischen den Bolzen befindlichen Theilen durch den Dampfdruck einwärts gebogen. Die Umfangswände des Feuerkastens sind: a) nach horizontaler Richtung weder gedehnt noch zusammengepresst; b) nach vertikaler Richtung zusammengestaucht; c) in den rechteckigen oder puadratischen Flächen zwischen den Bolzen nach einwärts gebogen. Die Umfangswände des Wasserkastens sind: a) nach horizontaler Richtung schwach gedehnt; b) nach vertikaler Richtung stark gedehnt; c) in den rechteckigen oder quadratischen Feldern zwischen den Bolzen nach auswärts gebogen.

Eine ganz genaue Bestimmung der Zustände, in welchen sich alle Theile des Feuer- und Wasserkastens befinden, erfordert die Anwendung von äusserst sublimen analytischen Methoden, die sich in diesem Werke nicht sehen lassen dürfen, wir müssen uns daher mit einer Annäherung begnügen, indem wir, um den Zustand zu bestimmen, der in einem Wand- oder Deckenstück nach einer gewissen Richtung A vorhanden ist, die Bolzenreihen durch Längenrippen ersetzen, deren Richtungen mit der Richtung A einen rechten Winkel bilden. Dann wird eine solche Platte durch die auf sie einwirkenden Kräfte zwischen je zwei Rippen rinnenförmig eingedrückt und die in einer solchen Rinne herrschenden Spannungszustände, welche sich, wie wir sehen werden, durch gewöhnlichere analytische Mittel bestimmen lassen, sind wenigstens annähernd übereinstimmend mit jenen, die nach der Richtung A in einer durch Bolzen gehaltenen Platte vorkommen.

Um also die statischen Zustände eines Wand- oder Deckenstückes annähernd kennen zu lernen, müssen wir nun das Gleichgewicht eines Stabes untersuchen, dessen Querschnitt ein Rechteck ist, der auf einer Reihe von Unterstützungen aufliegt, in allen Punkten nach normaler Richtung gepresst, und nach seiner Länge entweder gedehnt oder zusammengedrückt wird.

Gleichgewicht eines Stabes, der auf einer Reihe von gleich weit von einander entfernten Unterstützungen aufliegt, nach normaler Richtung gepreßt und nach seiner Länge gedehnt wird.

Es sei (Fig. 81) ABC ein solcher Stab in deformirtem Zustand.

In dem Querschnitt bei D, in der Mitte zwischen zwei Unterstützungen, werden gewisse Spannungen vorkommen. Wir werden den Gleichgewichtszustand in einem Stück AD nicht ändern, wenn wir den Stab bei D entzweischneiden, und in allen Punkten des Durchschnittes Kräfte anbringen, welche den Spannungen gleich sind, die vor dem Entzweischneiden in diesem Querschnitt vorhanden waren. Diesen Kräften zusammen entspricht erstlich eine gewisse Summe S und zweitens ein gewisses Drehungsmoment M in Bezug auf eine durch den Schwerpunkt des Querschnittes gehende Axe. Der Gleichgewichtszustand des Stückes AD wird also nicht gestört, wenn wir den Stab bei D entzweischneiden, dann nach horizontaler Richtung eine spannende Kraft S und überdiess noch ein gewisses Kraftmoment M drehend wirken lassen. Der Gleichgewichtszustand des Stückes AD wird aber auch nicht gestört, wenn wir den Stab bei A einspannen. Unsere Aufgabe reduzirt sich also auf die Bestimmung des Gleichgewichtes eines elastischen Stabes, der sich unter folgenden Verhältnissen befindet. Das eine Ende A (Fig. 79) ist festgehalten und nach der Richtung Ax eingespannt. Auf den Stab wirken der ganzen Länge nach normale Pressungen von gleicher Intensität. An dem freien Ende wirkt parallel mit Ax eine spannende Kraft S und überdies noch ein gewisses Kraftmoment M, welches bewirkt, dass die Richtung des Stabes bei D mit Ax parallel ist.

Wir nennen:

b die Breite, δ die Dicke des Stabes;

ε den Modulus der Elastizität des Materials, aus welchem der Stab besteht;

p den Druck auf jede Flächeneinheit des Stabes;

$c = \overline{AD}$ die Länge des Stabes;

$\overline{Ap} = x$, $\overline{mp} = y$ die Coordinaten eines beliebigen Punktes der Linie, in welcher die Schwerpunkte aller Querschnitte des Stabes liegen;

$\overline{AE} = c$, $\overline{AD} = f$ die Coordinaten des Punktes D;

ϱ den Krümmunghalbmesser bei m;

S den Zug, M das Moment bei m.

Wir nehmen an, die Biegung des Stabes sei nur eine schwache, dann ist $\frac{1}{2}\,b\,p\,(c-x)^2$ die Summe der Momente aller von m bis D wirkenden Pressungen, bezogen auf den Punkt m und $-S\,(f-y)$ das Moment der Spannung S. Die Summe der Momente der Spannungen, die im Querschnitt bei D vorkommen, ist in Bezug auf irgend einen Punkt des Stabes gleich $-M$. Die Summe der Momente aller im Querschnitt bei m vorkommenden Spannungen beträgt $-\frac{b\,\varepsilon\,\delta^3}{12}\,\frac{1}{\varrho}$. Die Bedingungsgleichung des Gleichgewichts ist demnach:

$$-\frac{b\,\varepsilon\,\delta^3}{12}\,\frac{1}{\varrho}+\frac{1}{2}\,b\,p\,(c-x)^2-S\,(f-y)-M=0$$

Allein da wir eine sehr schwache Biegung voraussetzen und den Punkt m in dem gegen die Axe Ax convexen Theil der Kurve angenommen haben, so ist $\frac{1}{\varrho}=\frac{d^2y}{dx^2}$ wir erhalten daher die Differenzialgleichung:

$$-\frac{b\,\varepsilon\,\delta^3}{12}\,\frac{d^2y}{dx^2}+\frac{1}{2}\,b\,p\,(c-x)^2-S\,(f-y)-M=0$$

oder

$$\frac{b\,\varepsilon\,\delta^3}{12}\,\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{1}{2}\,b\,p\,(c-x)^2-S\,(f-y)-M \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

Setzen wir zur Abkürzung:

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{12}{b\,\varepsilon\,\delta^3}\left(\frac{1}{2}\,b\,p\,c^2-S\,f-M\right)=\alpha\\
&\frac{12}{b\,\varepsilon\,\delta^3}\,b\,p\,c \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad =\beta\\
&\frac{12}{b\,\varepsilon\,\delta^3}\,\frac{1}{2}\,p\,b \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad =\gamma\\
&\frac{12}{b\,\varepsilon\,\delta^3}\,S \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad =\lambda^2
\end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

so bezeichnen α β γ λ^2 in Bezug auf die Integration constante Grössen, und die Gleichung (1) wird:

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = \alpha - \beta x + \gamma x^2 + \lambda^2 y \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$

Das Integrale dieser Gleichung ist:

$$y = -\frac{2\gamma + \alpha\lambda^2}{\lambda^4} + \frac{\beta}{\lambda^2}x - \frac{\gamma}{\lambda^2}x^2 + De^{\lambda x} + Ee^{-\lambda x} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4)$$

wobei D und E die Constanten der Integration bezeichnen. Durch Differenziation dieser Gleichung wird:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\beta}{\lambda^2} - 2\frac{\gamma}{\lambda^2}x + \lambda\left(De^{\lambda x} - Ee^{-\lambda x}\right) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (5)$$

Nun ist für den Punkt A $\quad x = 0 \quad y = 0 \quad \frac{dy}{dx} = 0$

und für den Punkt D $\quad x = c \quad y = f \quad \frac{dy}{dx} = 0$

Man hat daher:

$$\left.\begin{aligned}
0 &= -\frac{2\gamma + \alpha\lambda^2}{\lambda^4} + D + E \\
0 &= \frac{\beta}{\lambda^2} + \lambda(D - E) \\
f &= -\frac{2\gamma + \alpha\lambda^2}{\lambda^4} + \frac{\beta}{\lambda^2}c - \frac{\gamma}{\lambda^2}c^2 + De^{\lambda c} + Ee^{-\lambda c} \\
0 &= \frac{\beta}{\lambda^2} - 2\frac{\gamma}{\lambda^2}c + \lambda\left(De^{\lambda c} - Ee^{-\lambda c}\right)
\end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (6)$$

Diese vier Gleichungen bestimmen die Integrationsconstanten D und E und die Werthe von M und f. Aus der zweiten und vierten dieser Gleichungen folgt zunächst:

$$\left.\begin{aligned}
D &= \frac{\frac{\beta}{\lambda^3}\left(e^{-\lambda c} - 1\right) + \frac{2\gamma c}{\lambda^2}}{e^{\lambda c} - e^{-\lambda c}} \\
E &= \frac{\frac{\beta}{\lambda^3}\left(e^{+\lambda c} - 1\right) + \frac{2\gamma c}{\lambda^2}}{e^{\lambda c} - e^{-\lambda c}}
\end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (7)$$

Aus der ersten und dritten der Gleichungen (6) folgt durch Elimination von $\frac{2\gamma + \alpha\lambda^2}{\lambda^4}$ (worin das unbekannte Moment M enthalten ist):

$$f = \frac{\beta}{\lambda^2} c - \frac{\gamma}{\lambda^2} c^2 + D\left(e^{\lambda c} - 1\right) + E\left(e^{-\lambda c} - 1\right) \quad \dots\dots\dots \quad (8)$$

Daher, wenn man für D und E die Werthe aus (7) einführt:

$$\left.\begin{aligned} f = \frac{\beta}{\lambda^2} c - \frac{\gamma}{\lambda^2} c^2 &+ \left[\frac{\beta}{\lambda^2}\left(e^{-\lambda c} - 1\right) + \frac{2\gamma c}{\lambda^2}\right] \frac{e^{\lambda c} - 1}{e^{\lambda c} - e^{-\lambda c}} \\ &+ \left[\frac{\beta}{\lambda^2}\left(e^{\lambda c} - 1\right) + \frac{2\gamma c}{\lambda^2}\right] \frac{e^{-\lambda c} - 1}{e^{\lambda c} - e^{-\lambda c}} \end{aligned}\right\} \quad \dots\dots\dots \quad (9)$$

oder nach einigen Zusammenziehungen:

$$f = \frac{\beta - \gamma c}{\lambda^2} \left[c + \frac{2}{\lambda} \frac{2 - e^{\lambda c} - e^{-\lambda c}}{e^{\lambda c} - e^{-\lambda c}}\right] \quad \dots\dots\dots \quad (10)$$

Nun ist aber in allen Anwendungen λc eine sehr kleine Grösse, man kann daher setzen:

$$\left.\begin{aligned} e^{\lambda c} &= 1 + \lambda c + \frac{\lambda^2 c^2}{1 \cdot 2} + \frac{\lambda^3 c^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{\lambda^4 c^4}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} \\ e^{-\lambda c} &= 1 - \lambda c + \frac{\lambda^2 c^2}{1 \cdot 2} - \frac{\lambda^3 c^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{\lambda^4 c^4}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} \end{aligned}\right\} \quad \dots\dots\dots \quad (11)$$

Führt man diese Werthe in den obigen Ausdruck für f ein, so findet man:

$$f = \frac{p\, b\, c^4 \lambda^2}{24\, S} \left(\frac{1}{1 + \frac{\lambda^2 c^2}{6}}\right)$$

oder weil $\left(1 + \frac{\lambda^2 c^2}{6}\right)^{-1}$ annähernd gleich $1 - \frac{\lambda^2 c^2}{6}$ ist

$$f = \frac{p\, b\, c^4 \lambda^2}{24\, S} \left(1 - \frac{\lambda^2 c^2}{6}\right)$$

oder endlich, wenn man für λ^2 seinen Werth setzt:

$$f = \frac{p\, c^4}{2\, \varepsilon\, \delta^3} \left(1 - \frac{2\, S\, c^2}{b\, \varepsilon\, \delta^3}\right) \quad \dots\dots\dots \quad (12)$$

Hiermit ist nun die Einbiegung des Stabes in seiner Mitte bestimmt.

Es liegt in der Natur der Sache, dass der Krümmungshalbmesser entweder bei A oder bei D den kleinsten Werth hat. Nennen wir ϱ_0 ϱ_c die Krümmungshalbmesser, die den Punkten A und D entsprechen. Durch Differenziation der Gleichung (5) findet man:

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{1}{\varrho} = -\frac{2\gamma}{\lambda^2} + \lambda^2 \left(D e^{\lambda x} + E e^{-\lambda x}\right)$$

es ist daher:

$$\frac{1}{\varrho_0} = -\frac{2x}{\lambda^2} + \lambda^2 (D + E)$$

$$\frac{1}{\varrho_c} = -\frac{2\gamma}{\lambda^2} + \lambda^2 \left(D e^{\lambda c} + E e^{-\lambda c}\right)$$

Setzt man für D und E die Werthe (7) und berücksichtiget, dass $2\gamma c = \beta$ ist, so findet man

$$\left.\begin{aligned} \frac{1}{\varrho_0} &= -\frac{2\gamma}{\lambda^2} + \frac{\beta}{\lambda} \frac{e^{\lambda c} + e^{-\lambda c}}{e^{\lambda c} - e^{-\lambda c}} \\ \frac{1}{\varrho_c} &= -\frac{2\gamma}{\lambda^2} + \frac{\beta}{\lambda} \frac{2}{e^{\lambda c} - e^{-\lambda c}} \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (13)$$

Allein es ist $e^{\lambda c} + e^{-\lambda c} > 2$ daher wird: $\frac{1}{\varrho_0} > \frac{1}{\varrho_c}$ oder $\varrho_0 > \varrho_c$. Die stärkste Krümmung findet also bei A statt.

Setzt man in den Ausdruck von $\frac{1}{\varrho_0}$ für $e^{\lambda c}$ $e^{-\lambda c}$ die ersten 5 Glieder der Reihen und berücksichtiget, dass $\beta = 2\gamma c$ ist, so findet man:

$$\frac{1}{\varrho_0} = \frac{2}{3} \gamma c^2 \frac{1 + \frac{1}{8} \lambda^2 c^2}{1 + \frac{1}{6} \lambda^2 c^2}$$

oder auch weil $\left(1 + \frac{1}{6} \lambda^2 c^2\right)^{-1}$ annähernd gleich $1 - \frac{1}{6} \lambda^2 c^2$ ist:

$$\frac{1}{\varrho_0} = \frac{2}{3} \gamma c^2 \left(1 - \frac{1}{24} \lambda^2 c^2\right)$$

und wenn man für γ und λ^2 ihre Werthe setzt:

$$\frac{1}{\varrho_0} = \frac{4 p c^2}{\varepsilon \delta^3} \left(1 - \frac{S c^2}{2 b \varepsilon \delta^3}\right) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (14)$$

Nennt man $\mathfrak{Z}_1$ die auf einen Quadratcentimeter bezogene Spannung, welche in der obersten Faser des Querschnittes bei A eintreten würde, wenn der Stab nur gebogen und nicht gedehnt würde, $\mathfrak{Z}$ die auf einen Quadratcentimeter bezogene Spannung, die an der gleichen Stelle in dem gebogenen und gedehnten Stab eintritt, so ist:

$$\mathfrak{Z} = \mathfrak{Z}_1 + \frac{S}{b\delta} \; , \quad \frac{b\varepsilon\delta^3}{12}\frac{1}{\varrho_0} = \frac{\mathfrak{Z}_1}{6} b\delta^2$$

man findet daher:

$$\mathfrak{Z} = \frac{S}{b\delta} + 2p\frac{c^2}{\delta^2}\left(1 - \frac{S c^2}{2 b \varepsilon \delta^3}\right) \quad \ldots\ldots \quad (15)$$

Hiermit ist also auch die grösste in dem Stab vorkommende Spannungsintensität berechnet.

Die Hauptresultate dieser Untersuchung sind also:

$$\left.\begin{aligned} f &= \frac{p c^4}{2\varepsilon\delta^3}\left(1 - \frac{2 S c^2}{b\varepsilon\delta^3}\right) \\ \mathfrak{Z} &= \frac{2 p c^2}{\delta^2}\left(1 - \frac{S c^2}{2 b\varepsilon\delta^3}\right) + \frac{S}{b\delta} \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (16)$$

Gleichgewicht eines Stabes, der auf mehreren gleich weit von einander entfernten Stützen aufliegt, nach normaler Richtung gepreßt wird und auch einer Zusammendrückung ausgesetzt ist.

Bezeichnen wir die zusammendrückende Kraft mit S und behalten alle in der vorhergehenden Untersuchung gewählten Bezeichnungen, so erhalten wir die Differenzialgleichung, welche im vorliegenden Fall den Gleichgewichtszustand des Stabes charakterisirt, wenn wir in der Gleichung (1) (Seite 246) S negativ setzen. Wir haben daher:

$$\frac{b\varepsilon\delta^3}{12}\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{1}{2} b p (c - x)^2 + S (f - y) - M \quad \ldots\ldots \quad (1)$$

Setzen wir zur Abkürzung:

$$\left.\begin{aligned} \frac{12}{b\varepsilon\delta^3}\left(\frac{1}{2} b p c^2 + S f - M\right) &= \alpha \\ \frac{12}{b\varepsilon\delta^3} b p c \quad \ldots\ldots &= \beta \\ \frac{12}{b\varepsilon\delta^3}\frac{1}{2} p b \quad \ldots\ldots &= \gamma \\ \frac{12}{b\varepsilon\delta^3} S \quad \ldots\ldots &= \lambda^2 \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (2)$$

so erhält man:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \alpha - \beta x + \gamma x^2 - \lambda^2 y \quad \ldots\ldots \quad (3)$$

Das Integrale dieser Gleichung ist:

$$y = -\frac{2\gamma - \alpha\lambda^2}{\lambda^4} - \frac{\beta}{\lambda^2}x + \frac{\gamma}{\lambda^2}x^2 + D\sin.\lambda x + E\cos.\lambda x \quad \ldots\ldots \quad (4)$$

Das Differenziale dieser Gleichung ist:

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\beta}{\lambda^2} + \frac{2\gamma}{\lambda^2}x + \lambda(D\cos.\lambda x - E\sin.\lambda x) \quad \ldots\ldots\ldots \quad (5)$$

Für $x = 0$ ist $y = 0$ und $\frac{dy}{dx} = 0$. Für $x = c$ ist $y = f$ und $\frac{dy}{dx} = 0$. Daher hat man folgende vier Beziehungen:

$$\left.\begin{aligned}
0 &= -\frac{2\gamma - \alpha\lambda^2}{\lambda^4} + E \\
0 &= -\frac{\beta}{\lambda^2} + \lambda D \\
f &= -\frac{2\gamma - \alpha\lambda^2}{\lambda^4} - \frac{\beta c}{\lambda^2} + \frac{\gamma c^2}{\lambda^2} + D\sin.\lambda c + E\cos.\lambda c \\
0 &= -\frac{\beta}{\lambda^2} + \frac{2\gamma c}{\lambda^2} + \lambda(D\cos\lambda c - E\sin.\lambda c)
\end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (6)$$

Aus der zweiten und vierten dieser Gleichungen findet man mit Berücksichtigung, dass $2\gamma c = \beta$ ist.

$$\left.\begin{aligned}
D &= \frac{\beta}{\lambda^3} \\
E &= \frac{\beta\cos.\lambda c}{\lambda^3\sin.\lambda c}
\end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (7)$$

Vermittelst dieser Werthe von D und E und mit Berücksichtigung der ersten der Gleichungen (6) wird die dritte dieser Gleichungen:

$$f = \frac{\beta}{\lambda^3}\frac{1 - \cos.\lambda c}{\sin.\lambda c} - \frac{c\beta}{2\lambda^2} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (8)$$

Da auch hier λc eine kleine Grösse ist, so können wir setzen:

$$\left.\begin{aligned}
\sin.\lambda c &= \lambda c - \frac{\lambda^3 c^3}{6} \\
\cos.\lambda c &= 1 - \frac{\lambda^2 c^2}{2} + \frac{\lambda^4 c^4}{24}
\end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (9)$$

und dann findet man nach einigen Reduktionen:

$$f = \frac{\beta c^3}{24}\frac{1}{1 - \frac{1}{6}\lambda^2 c^2}$$

oder weil annähernd $\left(1 - \frac{1}{6}\lambda^2 c^2\right)^{-1}$ gleich $\left(1 + \frac{1}{6}\lambda^2 c^2\right)$ $\beta = \frac{12\,b\,p\,c}{b\,\varepsilon\,\delta^3}$ $\lambda^2 = \frac{12\,S}{q\,\varepsilon\,\delta^3}$ ist.

$$f = \frac{p\,c^4}{2\,\varepsilon\,\delta^3}\left(1 + \frac{2\,S\,c^2}{\varepsilon\,b\,\delta^3}\right) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (10)$$

Die Annäherungswerthe von f unterscheiden sich, wie man sieht, im vorliegenden und im vorhergehenden Falle nur durch das Zeichen des zweiten Gliedes in dem in der Klammer enthaltenen Ausdruck.

Differenzirt man die Gleichung (5), so findet man:

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{1}{\varrho} = \frac{2\,\gamma}{\lambda^2} - \lambda^2\,(D \sin.\lambda x + E \cos.\lambda x) \quad \ldots\ldots\ldots \quad (11)$$

Nennt man ϱ_0 und ϱ_c die Krümmungshalbmesser, die den Punkten A und D der krummen Linie entsprechen, so hat man vermöge (11):

$$\frac{1}{\varrho_0} = \frac{2\,\gamma}{\lambda^2} - \lambda^2 E$$

$$\frac{1}{\varrho_c} = \frac{2\,\gamma}{\lambda^2} - \lambda^2\,(D \sin.\lambda c + E \cos.\lambda c)$$

oder mit Berücksichtigung der Werthe von D und E, welche die Gleichungen (7) darbieten:

$$\left.\begin{aligned} \frac{1}{\varrho_0} &= \frac{2\,\gamma}{\lambda^2} - \frac{\beta \cos.\lambda c}{\lambda \sin.\lambda c} \\ \frac{1}{\varrho_c} &= \frac{2\,\gamma}{\lambda^2} - \frac{\beta}{\lambda}\cdot\frac{1}{\sin \lambda c} \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (12)$$

Es ist demnach, wie man aus diesen Ausdrücken ersieht, $\frac{1}{\varrho_0} > \frac{1}{\varrho_c}$ oder $\varrho_0 < \varrho_c$. Die Krümmung ist also auch in diesem Falle im Punkte A am stärksten. Setzt man in den ersten der Ausdrücke (12) für $\sin.\lambda c$ und $\cos.\lambda c$ die Annäherungswerthe (9), so findet man, mit Berücksichtigung, dass $2\,\gamma\,c = \beta$ ist.

$$\frac{1}{\varrho_0} = \frac{2}{3}\,\gamma\,c^2\,\frac{1 - \frac{1}{8}\,\lambda^2 c^2}{1 - \frac{1}{6}\,\lambda^2 c^2}$$

oder weil annähernd $\left(1 - \frac{1}{6}\,\lambda^2 c^2\right)^{-1}$ gleich $1 + \frac{1}{6}\lambda^2 c^2$, ferner $\gamma = \frac{6\,p}{\varepsilon\,\delta^3}$ $\lambda^2 = \frac{12\,S}{b\,\varepsilon\,\delta^3}$ ist:

$$\frac{1}{\varrho_0} = \frac{4\,p\,c^2}{\varepsilon\,\delta^3}\left(1 + \frac{c^2\,S}{2\,b\,\varepsilon\,\delta^3}\right) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (13)$$

Nennt man $\mathfrak{Z}$ die Intensität der Spannung an der obersten Stelle des Querschnittes bei A, so ist in diesem Falle $\mathfrak{Z}_1$ die Spannung, welche daselbst stattfände, wenn der Stab nur gebogen und nicht auch zusammengedrückt wäre, es ist also:

$$\mathfrak{Z} = \mathfrak{Z}_1 - \frac{S}{b\,\delta}, \qquad \frac{b\,\varepsilon\,\delta^3}{12}\,\frac{1}{\varrho_0} = \frac{\mathfrak{Z}_1}{6}\,b\,\delta^2$$

Daher wird:

$$\mathfrak{Z} = \frac{\varepsilon\delta}{2}\frac{1}{\varrho_0} - \frac{S}{b\,\delta}$$

oder wenn man für $\frac{1}{\varrho_0}$ seinen Werth aus (13) setzt:

$$\mathfrak{Z} = \frac{2\,p\,c^2}{\delta^2}\left(1 + \frac{c^2 S}{2\,b\,\varepsilon\,\delta^3}\right) - \frac{S}{b\,\delta} \quad \dots\dots\dots \quad (14)$$

Die Hauptresultate dieser Untersuchung sind demnach:

$$\left.\begin{aligned} f &= \frac{p\,c^4}{2\,\varepsilon\,\delta^3}\left(1 + \frac{2\,S\,c^2}{b\,\varepsilon\,\delta^3}\right) \\ \mathfrak{Z} &= \frac{2\,p\,c^2}{\delta^2}\left(1 + \frac{S\,c^2}{2\,b\,\varepsilon\,\delta^3}\right) - \frac{S}{b\,\delta} \end{aligned}\right\} \quad \dots\dots\dots \quad (15)$$

Stärke der Wand- und Deckbolzen.

Man kann annehmen, dass ein Bolzen der Wand und Decke einen Zug auszuhalten hat, der gleich ist der Differenz der Pressungen, welche gegen die beiden Flächen eines Bolzenfeldes ausgeübt werden. Durch diese Annahme werden jedoch die Bolzen der Decke etwas zu stark bestimmt, weil diese Bolzen nicht dem ganzen Druck gegen die Decke, sondern nur demjenigen Theil dieses Druckes, der an den Barren zieht, ausgesetzt sind.

Nennt man Ω die Fläche in Quadratcentimetern eines Bolzenfeldes der Wand oder der Decke, n die Anzahl der Atmosphären, welche der Spannung des Dampfes im Kessel entspricht, 1·03 den Druck der Atmosphäre in Kilogrammen auf 1 Quadratcentimeter, Δ den äusseren Durchmesser eines Bolzens, $\mathfrak{A}$ die Spannung in einem Bolzen auf einen Quadratcentimeter bezogen, so ist:

$$\Delta^2 \frac{\pi}{4}\,\mathfrak{A} = \Omega\,1{\cdot}03\,(n-1)$$

demnach

$$\Delta = \sqrt{\frac{4{\cdot}12}{3{\cdot}14}\frac{(n-1)\,\Omega}{\mathfrak{A}}}$$

Setzen wir $\mathfrak{A} = 300$, so liefert diese Formel mit den Thatsachen übereinstimmende Dimensionen. Diese Bolzen werden bekanntlich aus Kupfer gemacht, die absolute Festigkeit desselben ist 2500 Kilogramm per 1 Quadratcentimeter. Die Bolzen sind also, wenn man $\mathfrak{A} = 300$ nimmt, ungefähr auf $\frac{1}{8}$ ihrer absoluten Festigkeit in Anspruch genommen. Für $\mathfrak{A} = 300$ erhält man:

$$\Delta = 0{\cdot}07\,\sqrt{(n-1)\,\Omega} \quad \dots\dots\dots \quad (1)$$

Die halbkugelförmigen Köpfe dieser Bolzen sollen in der Feuerbüchse verhältnissmässig gross gemacht werden, weil sie durch die Wirkung des Feuers sehr schnell verbrennen. Es ist angemessen, den Durchmesser eines solchen Bolzenkopfes gleich 2Δ zu nehmen.

Decke der Feuerbüchse.

Die Decke der Feuerbüchse ist weder einer Ausdehnung, noch einer Zusammendrückung, sondern nur allein einer Einbiegung in den Bolzenfeldern ausgesetzt. Wir nehmen an, dass diese Felder quadratisch seien, und setzen:

δ die Dicke des Deckbleches } in Centimetern;
e die Entfernung zweier Bolzen in eine Bolzenreihe }
n die Anzahl der Atmosphären, welche der Spannung des Dampfes im Kessel entspricht;
$1{\cdot}03$ der Druck einer Atmosphäre auf 1 Quadratcentimeter;
$\mathfrak{Z}$ die grösste Spannungsintensität, welche in der Decke eintreten darf.

Da im vorliegenden Fall s gleich Null ist, so gibt sowohl die zweite der Gleichungen (16) (Seite 250), als auch die zweite der Gleichungen (15) (Seite 253), wenn man in dieselbe $c = \frac{e}{2}$ $p = 1{\cdot}03\,(n-1)$ $S = 0$ setzt:

$$\mathfrak{Z} = \frac{1{\cdot}03\,(n-1)}{2}\left(\frac{e}{\delta}\right)^2$$

und hieraus folgt:

$$e = \delta\sqrt{\frac{2\,\mathfrak{Z}}{1{\cdot}03\,(n-1)}}$$

Auch hier muss man, um mit der Wirklichkeit übereinstimmende Dimensionen zu erhalten, $\mathfrak{Z} = 300$ setzen, dann wird:

$$e = 24\,\frac{\delta}{\sqrt{n-1}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (2)$$

Gewöhnlich beträgt die Blechdicke der Decke 1·2 Centimeter, die Spannung des Dampfes 6 Atmosphären. Für $\delta = 1{\cdot}2$. $n = 6$ gibt diese Formel $e = 12{\cdot}8$ Centimeter.

Wände des Feuerkastens.

Die Wände des Feuerkastens sind nach horizontaler Richtung weder gedehnt noch zusammengedrückt, nach vertikaler Richtung sind sie dagegen zusammengestaucht.

Nennt man:

e die Entfernung zweier Bolzen in einer Horiziontalreihe, }
e_1 " " " " " " Vertikalreihe, }
δ die Blechdicke der Umfangswände der Feuerbüchse, } Centimeter;
B die Breite, L die Länge des Feuerkastens, }
n die Anzahl der Atmosphären, welche der Spannung des Dampfes im Kessel entspricht,

so hat man zunächst, weil der Zustand der Wände nach horizontaler Richtung mit dem Zustand der Decke übereinstimmt

$$e = 24\,\frac{\delta}{\sqrt{n-1}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (3)$$

Der Druck des Dampfes gegen die Deckfläche ist $1{\cdot}03\ (n-1)\,B\,L$. Der Druck auf einen Quadratcentimeter der vertikalen Wände ist daher $\frac{1{\cdot}03\ (n-1)\,B\,L}{2\,(B+L)\,\delta}$. Da in den frühern Rechnungen s auf den Querschnitt $b\,\delta$ bezogen wurde, so müssen wir setzen:

$$s = \frac{1{\cdot}03\,(n-1)\,B\,L}{2\,(B+L)\,\delta}\,b\,\delta = \frac{1{\cdot}03\,(n-1)\,B\,L\,b}{2\,(B+L)}$$

Nebst diesem Werth von s haben wir, um e_1 zu bestimmen, in die zweite der Formeln (15) (Seite 253) zu setzen $p = 1{\cdot}03\,(n-1) \qquad c = \frac{e_1}{2}$ und dann wird:

$$\mathfrak{Z} = \frac{1{\cdot}03}{2}\,(n-1)\,\frac{e_1^2}{\delta^2}\left(1 + \frac{1{\cdot}03}{16}\,\frac{(n-1)\,e_1^2\,B\,L}{\varepsilon\,\delta^3\,(B+L)}\right) - \frac{1{\cdot}03}{2}\,\frac{(n-1)\,B\,L}{(B+L)\,\delta}$$

Allein das zweite Glied des Ausdruckes in der Klammer ist wegen des grossen Werthes von ε eine gegen die Einheit sehr kleine Grösse, kann also vernachlässigt werden, und dann wird:

$$\mathfrak{Z} = \frac{1{\cdot}03\,(n-1)}{2}\,\frac{e_1^2}{\delta^2} - \frac{1{\cdot}03}{2}\,\frac{(n-1)\,B\,L}{(B+L)\,\delta}$$

Hieraus folgt:

$$e_1 = \sqrt{\frac{2\,\mathfrak{Z}\,\delta^2}{1{\cdot}03\,(n-1)} + \frac{B\,L\,\delta}{B+L}}$$

Für $\mathfrak{Z}$ ist auch hier 300 in Rechnung zu bringen, und dann wird:

$$e_1 = \sqrt{582\,\frac{\delta^2}{n-1} + \frac{B\,L\,\delta}{B+L}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (4)$$

Wände des Wasserkastens.

Diese sind nach horizentaler Richtung schwach gedehnt, nach vertikaler Richtung stark gedehnt.

Nennen wir:

e die Entfernung zweier Bolzen in eine Horizontalreihe;
e_1 „ „ „ „ „ „ Vertikalreihe;
δ die Blechdicke der Umfangswand des Wasserkastens;
B_1 die Breite, L_1 die Länge des Wasserkastens;
n die Anzahl der Atmosphären, welche der Spannung des Dampfes entspricht.
$\mathfrak{Z}$ die Intensität der Spannung, die in der Wand eintreten darf.

Zur Bestimmung von e ist in die zweite der Gleichungen (16) (Seite 250) zu setzen

$$s = \frac{1}{2}\,(L_1 - L)\,b\,1{\cdot}03\ (n-1) \qquad c = \frac{e}{2} \qquad p = 1{\cdot}03\,(n-1)$$

man darf aber auch hier das zweite Glied des Ausdruckes in der Klammer, wegen seiner Kleinheit gegen Eins, vernachlässigen, und dann findet man:

$$e = \sqrt{\frac{2\,\mathfrak{Z}\,\delta^2}{1{\cdot}03\,(n-1)} - (L_1 - L)\,\delta} \quad \ldots \ldots \ldots \quad (5)$$

Um e_1 zu bestimmen, ist in die zweite der Gleichungen (16) (Seite 250) zu setzen: $S = \frac{1{\cdot}03\,(n-1)\,B_1\,L_1\,b}{2\,(B_1 + L_1)}$ $p = 1{\cdot}03\,(n-1)$ $e = \frac{e_1}{2}$ und ist das zweite Glied des Ausdruckes in der Klammer zu vernachlässigen. Man findet dann:

$$e_1 = \sqrt{\frac{2\,\mathfrak{Z}\,\delta^2}{1{\cdot}03\,(n-1)} - \frac{B_1\,L_1\,\delta}{B_1 + L_1}} \quad \ldots \ldots \ldots \quad (6)$$

Auch in diesen Formeln für e und e_1 darf man $\mathfrak{Z} = 300$ setzen.

Stärke der Deckbarren.

Eine ganz strenge Bestimmung der Deckbarren würde zu sehr weitläufigen difficilen Rechnungen führen. Die Sache wird ziemlich einfach und hinreichend genau, wenn wir die Decke so behandeln, wie wenn sie ihrer ganzen Länge nach mit den Barren stetig verbunden wäre, in welchem Falle die Krümmung der Barren mit jener der Decke sehr nahe übereinstimmt.

Nehmen wir den Mittelpunkt O (Fig. 81) der Decke als Anfangspunkt der horizontalen Abscissen und setzen:

$\left.\begin{array}{l} Op = x \\ mp = y \end{array}\right\}$ die Coordinaten eines Punktes m der Axenlinien des Bleches;

ρ die Krümmungshalbmesser des Bleches und der Barren in den durch m gehenden Querschnitt;

δ die Dicke des Bleches;
L die Länge AB einer Barre;
B die Breite der Decke;
h die Höhe
b die Breite } einer Barre; } Centimeter

i die Anzahl der Barren, durch welche die Decke verstärkt ist;

ε den Modulus der Elastizität des Materials, aus welchem Decke und Barren bestehen. Wir wollen annehmen, dass beide von Schmiedeeisen sind;

p den Druck auf einen Quadratcentimeter der Decke;

$\mathfrak{Z}$ die grösste Spannung, welche in den Barren vorkommen darf;

n die Anzahl der Atmosphären, welche der Spannung des Dampfes entspricht, also $p = 1{\cdot}03\,(n-1)$.

Wir behandeln die Sache so, wie wenn die Decke nur auf der Röhren- und der Rückwand, nicht aber auf den Seitenwänden des Feuerkastens aufläge; dann ist $\frac{pBL}{2}$ der Druck auf eine der Unterstützungen A und B. Ferner $\frac{pB}{2}\left(\frac{L}{2} - x\right)^2 - \frac{BLp}{2}\left(\frac{L}{2} - x\right)$ die Summe der Momente der Kräfte, welche das Blech und die Barre in dem Querschnitt bei m abzubrechen streben. Es ist aber ferner $\frac{B \varepsilon \delta^3}{12} \cdot \frac{1}{\varrho}$ die Summe der statischen Momente aller Spannungen und Pressungen im Querschnitt des Bleches bei m und $\frac{i \varepsilon b h^3}{12} \frac{1}{\varrho}$ die Summe der Momente in Bezug auf sämmtliche Barren, man hat daher:

$$\frac{1}{12}(B \varepsilon \delta^3 + i b \varepsilon h^3) \frac{1}{\varrho} + \frac{p B}{2}\left(\frac{L}{2} - x\right)^2 - \frac{B L p}{2}\left(\frac{L}{2} - x\right) = 0 \quad . \ . \ . \ . \ . \quad (1)$$

oder weil $\frac{1}{\varrho} = \frac{d^2 y}{dx^2}$ gesetzt werden darf

$$\frac{1}{12}(B \varepsilon \delta^3 + i b \varepsilon h^3) \frac{d^2 y}{dx^2} + \frac{p B}{2}\left(\frac{L}{2} - x\right)^2 - \frac{B L p}{2}\left(\frac{L}{2} - x\right) = 0 \quad . \ . \ . \ . \ . \quad (2)$$

Durch zweimalige Integration und mit Berücksichtigung dass für $x = 0$ $y = 0$ und $\frac{d y}{d x} = 0$ ist, findet man:

$$\frac{1}{12}(B \varepsilon \delta^3 + i b \varepsilon h^3) y + \frac{p B}{2}\left(\frac{L^2}{8} x^2 - \frac{L}{6} x^3 + \frac{x^4}{12}\right) - \frac{B L p}{2}\left(\frac{L}{4} x^2 - \frac{x^3}{6}\right) = 0 \quad . \ . \quad (3)$$

Nennt man f die Senkung, die in der Mitte der Barren eintritt, so ist für $x = \frac{L}{2}$ $y = f$ und dann findet man:

$$f = \frac{5}{32} \frac{B p L^4}{B \varepsilon \delta^3 + i b \varepsilon h^3} \quad . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \quad (4)$$

Nennt man ϱ_0 den Krümmungshalbmesser bei o, so findet man denselben aus (1), wenn man $x = 0$ und $\varrho = \varrho_0$ setzt. Es ergibt sich:

$$\frac{1}{\varrho_0} = \frac{3}{2} \frac{p B L^2}{B \varepsilon \delta^3 + i b \varepsilon h^3} \quad . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \quad (5)$$

Nun ist aber die Summe der Momente aller Spannungen und Pressungen in den Querschnitten der Barren bei o sowohl gleich $\frac{i b \varepsilon h^3}{12} \frac{1}{\varrho_0}$, als auch gleich $\frac{i \mathfrak{S} b h^2}{6}$ wobei $\mathfrak{S}$ die Intensität der Spannung im untersten Punkt des Barren bedeutet. Man hat also;

$$\frac{i b \varepsilon h^3}{12} \frac{1}{\varrho_0} = \frac{i \mathfrak{S} b h^2}{6}$$

oder

$$\frac{\varepsilon h}{2 \varrho_0} = \mathfrak{S}$$

Setzt man für ϱ_0 seinen Werth aus (5), so erhält man eine Gleichung, aus welcher folgt:

$$\frac{i b}{B} = \frac{3}{4} \frac{p}{\mathfrak{S}} \left(\frac{L}{h}\right)^2 - \left(\frac{\delta}{h}\right)^2$$

oder weil $p = 1{\cdot}03\,(n-1)$. ist:

$$\frac{i\,b}{B} = \frac{0{\cdot}77\,(n-1)}{\mathfrak{Z}} \left(\frac{L}{h}\right)^2 - \left(\frac{\delta}{h}\right)^2 \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (7)$$

Diese Formel bestimmt das Verhältniss zwischen der Summe der Dicken sämmtlicher Barren und der Breite des Feuerkastens, wenn $\mathfrak{Z}$ gegeben und $\frac{L}{h}$ $\frac{\delta}{h}$ passend angenommen wird. Die Werthe, welche sie für $\frac{i\,b}{B}$ gibt, stimmen mit den Verhältnissen, die man an den Lokomotiven findet, nur dann überein, wenn man für $\mathfrak{Z}$ den ganz ungewöhnlich grossen Werth 800 in Rechnung bringt. Die Deckbarren werden also noch immer sehr schwach, oder wenigstens beträchtlich schwächer gemacht, als alle anderen Theile des Kesselbaues. Ich stelle als Regel auf, dass man nehmen soll:

$$\frac{L}{h} = 7 \qquad \frac{h}{\delta} = 12 \qquad \mathfrak{Z} = 600$$

und dann wird, wenn man das nicht beachtenswerthe Glied $\left(\frac{\delta}{h}\right)^2$ vernachlässiget:

$$\frac{i\,b}{B} = 0{\cdot}063\,(n-1)$$

Gleichgewicht eines krummen elastischen Stabes.

Einzelne Theile der Wände eines Kessels erhalten bisweilen eine Form, die von der einfach cylindrischen abweicht. Es entsteht also die Frage, welche Formänderungen in solchen Kesselwänden durch die innern Pressungen des Dampfes eintreten, welche Spannungszustände dadurch hervorgerufen werden und durch welche Mittel derlei Formveränderungen entweder aufgehoben, oder innerhalb gewisser Grenzen erhalten werden können. Diese Fragen veranlassen uns, die Formänderungen aufzusuchen, die in elastischen Stäben eintreten, die im natürlichen Zustande gekrümmt sind, wenn auf dieselben deformirende Kräfte einwirken.

Es sei für den natürlichen Zustand A B Fig. 82 die Axenlinie eines krummen Stabes, d. h. die Linie, in welcher die Schwerpunkte aller Querschnitte des Stabes liegen. Derselbe werde bei A eingeklemmt und so festgehalten, dass die Richtung A x des ersten Linienelementes keine Aenderung erleiden kann. Nachdem gewisse, auf den Stab einwirkende äussere Kräfte mit den innern Elastizitätskräften ins Gleichgewicht gekommen sind, sei $A\,B_1$ die Axenlinie des Stabes. Wir nehmen an, dass gegen jede Flächeneinheit der concaven Fläche von $A\,B_1$ nach normaler Richtung ein Druck p, und dass am Ende B_1 zwei Kräfte X und Y nebst einen Drehungsmoment M_1 wirken. Die Richtung von X sei parallel, jene von Y senkrecht zu A x. Um von dem Moment M_1 eine Vorstellung zu erhalten, denke man sich an den Stab bei B_1 nach normaler Richtung einen zweiten unbiegsamen Stab a b befestiget, lasse an demselben in den Punkten a und b, die von B_1 um eine Längeneinheit entfernt sind, senkrecht auf a b und nach entgegengesetzten Richtungen Kräfte wirken, von denen jede gleich $\frac{1}{2} M_1$ ist, so geben diese in Bezug auf eine durch B_1 gehende auf die Ebene der Figur senkrechte Axe ein Moment M_1. Man überzeugt sich leicht, dass das Moment dieser in a und b wirkenden Kräfte auch in Bezug auf jede Axe, die auf der Ebene der Figur senkrecht steht, gleich M_1 ist.

Nennen wir nun:

$\left.\begin{array}{l} A\,p = x \\ m\,p = y \end{array}\right\}$ die Coordinaten eines im natürlichen Zustand des Stabes im Punkte m seiner Axe befindlichen Körperatoms;

$\left.\begin{array}{l} A\,p_1 = x_1 \\ m\,p_1 = y_1 \end{array}\right\}$ die Coordinaten des gleichen Atoms im gebogenen Zustand des Stabes;

$\varrho\ \varrho_1$ die Krümmungshalbmesser, welche den Punkten m und m_1 der Axenlinien $A\,B$ und $A\,B_1$ entsprechen;

$\left.\begin{array}{l} a\,b \\ a_1\,b_1 \end{array}\right\}$ die Coordinaten der Punkte B und B_1;

$m\,n = ds$ die Länge eines Axenelementes im natürlichen,

$m_1\,n_1 = ds_1$ die Länge des gleichen Elementes im gebogenen Zustand des Stabes;

$\left.\begin{array}{l} \beta \text{ die Breite} \\ \delta \text{ die Dicke} \end{array}\right\}$ des Stabes;

p die Pressung gegen jede Flächeneinheit der concaven Fläche des Stabes;

ε den Modulus der Elastizität des Materials, aus welchem der Stab besteht;

S die auf eine Flächeneinheit bezogene Spannung im Punkt m_1 der Axe des gebogenen Stabes.

Alle Längen sollen in Centimetern, die Flächen in Quadratcentimetern, die Kräfte in Kilogrammen ausgedrückt werden.

Wenn die Rechnung für eine Coordinate für eine Kraft oder für einen Kraftmoment einen negativen Werth liefert, so ist diess ein Zeichen, dass im Gleichgewichtszustand die Richtung dieser Coordinate dieser Kraft oder dieses Momentes derjenigen entgegengesetzt ist, die in der Figur angenommen, und zur Herleitung der Gleichgewichtsgleichungen vorausgesetzt wird.

Wenn wir die Momente der Kräfte, welche das Stück $m_1\,B_1$ des Stabes um m_1 zu drehen suchen, positiv oder negativ nehmen, je nachdem sie den Stab seiner natürlichen Lage zu nähern oder von derselben zu entfernen streben, so sind diese Momente

1) für die Normalpressungen gegen $m_1\,B$

$$+\frac{\beta\,p}{2}\left[(a_1-x_1)^2+(b_1-y_1)^2\right]$$

2) für die Kräfte X und Y

$$+X(b_1-y_1)-Y(a_1-x_1)$$

3) für die in a und b wirkenden Kräfte

$$-M_1$$

4) für die in dem Querschnitt bei m_1 vorkommenden Spannungen und Pressungen

$$\frac{\beta\,\varepsilon\,\delta^3}{12}\left(\frac{1}{\varrho_1}-\frac{1}{\varrho}\right)$$

Die Momentengleichung ist demnach

$$\frac{\varepsilon \beta \delta^3}{12}\left(\frac{1}{\varrho_1}-\frac{1}{\varrho}\right)=-\frac{\beta p}{2}\left[(a_1-x_1)^2+(b_1-y_1)^2\right]-X(b_1-y_1)+Y(a_1-x_1)+M_1 \quad . \quad (1)$$

Die Summe aller im Querschnitt bei m_1 vorkommenden Spannungen ist $S \beta \delta$. Zerlegt man die auf $m_1 B_1$ einwirkende Kraft nach zwei Richtungen, von denen die eine parallel, die andere senkrecht zu S ist, so muss die Summe der ersteren dieser Seitenkräfte gleich $S \beta \delta$ sein; man erhält daher

$$\beta \delta S=\left[X+\beta p(b_1-y_1)\right]\frac{dx_1}{ds_1}+\left[Y-\beta p(a_1-x_1)\right]\frac{dy_1}{ds_1} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

Die Summe der zu S senkrechten Kräfte würde die dem Querschnitt bei m_1 entsprechende Abscheerungskraft geben, die wir jedoch nicht in Betrachtung zu ziehen brauchen.

Zwischen ds_1 und ds besteht die Beziehung

$$ds_1=ds\left(1+\frac{S}{\varepsilon}\right) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$

Diese Gleichungen (1) (2) (3) würden in Verbindung mit der Gleichung der Kurve AB zur Lösung unserer Aufgabe führen. Allein die Durchführung dieser Rechnung gelingt nur in äusserst seltenen Fällen, wir müssen uns daher auch hier mit einer Annäherung begnügen, indem wir annehmen, dass die durch die Kräfte in dem Stab bewirkten Formänderungen so klein seien, dass man sie als unendlich kleine Grössen behandeln dürfe.

Unter dieser Voraussetzung dürfen wir annehmen, dass die Momente aller auf $m_1 B_1$ einwirkenden Kräfte sehr nahe so gross sind, als sie in dem Falle wären, wenn diese Kräfte auf das ungebogene Stabstück mB wirkten, dürfen wir uns also erlauben in dem Ausdruck rechter Hand des Gleichheitszeichens von (1) $a_1\ x_1\ b_1\ y_1$ mit $a\ x\ b\ y$ und in den Gleichungen (2) $\frac{dx_1}{ds_1}\ \frac{dy_1}{ds_1}\ a_1\ x_1\ b_1\ y_1$ mit $\frac{dx}{ds}\ \frac{dy}{ds}\ a\ x\ p\ y$ zu vertauschen, dann erhalten wir statt (1)

$$k\left(\frac{1}{\varrho_1}-\frac{1}{\varrho}\right)=M+M_1 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4)$$

wobei zur Abkürzung:

$$\left.\begin{aligned} k &= \frac{\beta \varepsilon \delta^3}{12} \\ M &= -\frac{\beta p}{2}\left[(a-x)^2+(b-y)^2\right]-X(b-y)+Y(a-x) \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (5)$$

gesetzt wurde; dann wird ferner die Gleichung (2):

$$\beta \delta S=\left[X+\beta p\,(b-y)\right]\frac{dx}{ds}+\left[Y-\beta p\,(a-x)\right]\frac{dy}{ds} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (6)$$

In der Voraussetzung, dass die Formänderungen des Stabes sehr klein sind, kann man ferner $\frac{1}{\varrho_1}-\frac{1}{\varrho}$ auf folgende Weise ausdrücken.

Bezeichnet man mit $d\varphi$ und $d\varphi_1$ die unendlich kleinen Winkel der Tangenten bei m und n und der Tangenten bei m_1 und n_1, so ist $\varrho\, d\varphi = ds$ $\varrho_1\, d\varphi_1 = ds_1$, demnach $\frac{1}{\varrho_1} - \frac{1}{\varrho} = \frac{d\varphi_1}{ds_1} - \frac{d\varphi}{ds}$ oder mit Berücksichtigung von (4)

$$\frac{d\varphi_1}{ds\left(1 + \frac{S}{\varepsilon}\right)} - \frac{d\varphi}{ds} = \frac{M + M_1}{k}$$

Wir dürfen uns wohl erlauben, $\frac{S}{\varepsilon}$ gegen die Einheit zu vernachlässigen, denn in allen Anwendungen der Praxis beträgt der Werth von $\frac{S}{\varepsilon}$ nie mehr als $\frac{300}{2000000}$. Wir erhalten daher $d\varphi_1 - d\varphi = \frac{M + M_1}{k}\, ds$.

Integrirt man diese Gleichung und dehnt das Integrale von A bis m aus, so erhält man

$$\varphi_1 - \varphi = \int_0^x \frac{M + M_1}{k} \frac{ds}{dx}\, dx \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (7)$$

und es bedeuten nun φ_1 und φ der Winkel, welche die zu m_1 und m gezogenen Tangenten mit der Richtung A x bilden.

In der Voraussetzung, dass die Formänderungen des Stabes als unendlich kleine Grössen behandelt werden dürfen, ist $\varphi_1 - \varphi$ ebenfalls als eine unendlich kleine Grösse anzusehen, man kann daher schreiben:

$$\sin.(\varphi_1 - \varphi) = \varphi_1 - \varphi$$

$$\cos.(\varphi_1 - \varphi) = 1$$

Aus diesen Gleichungen folgt:

$$\left.\begin{array}{l} \sin.\varphi_1 - \sin.\varphi = (\varphi_1 - \varphi)\cos.\varphi \\ \cos\varphi_1 - \cos.\varphi = -(\varphi_1 - \varphi)\sin.\varphi \end{array}\right\} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (8)$$

Es ist aber:

$$\cos.\varphi = \frac{dx}{ds} \quad \sin.\varphi = \frac{dy}{ds} \quad \cos.\varphi_1 = \frac{dx_1}{ds_1} \quad \sin.\varphi_1 = \frac{dy_1}{ds_1}$$

die Gleichungen (8) werden daher:

$$\left.\begin{array}{l} \frac{dy_1}{ds_1} - \frac{dy}{ds} = (\varphi_1 - \varphi)\frac{dx}{ds} \\ \frac{dx_1}{ds_1} - \frac{dx}{ds} = -(\varphi_1 - \varphi)\frac{dy}{ds} \end{array}\right\} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (9)$$

Substituirt man für ds_1 seinen Werth aus (3) und berücksichtiget, dass man $\left(1 + \frac{S}{\varepsilon}\right)^{-1} = \left(1 - \frac{S}{\varepsilon}\right)$ setzen darf, so folgt aus den Gleichungen (9)

$$dy_1 - dy = (\varphi_1 - \varphi)\,dx + \frac{S}{\varepsilon}\,dy_1$$

$$dx_1 - dx = -(\varphi_1 - \varphi)\,dy + \frac{S}{\varepsilon}\,dx_1$$

Da $\frac{S}{\varepsilon}$ sehr klein und dx_1 dy_1 nur sehr wenig von dx und dy verschieden sind, so darf man sich erlauben, in den letzten Gliedern dieser Gleichungen dy_1 und dx_1 mit dy und dx zu vertauschen, und dann wird, wenn man für $\varphi_1 - \varphi$ seinen Werth aus (7) substituirt:

$$dy_1 - dy = dx \int_0^x \frac{M + M_1}{k} \frac{ds}{dx}\,dx + \frac{S}{\varepsilon}\,dy$$

$$dx_1 - dx = -dy \int_0^x \frac{M + M_1}{k} \frac{ds}{dx}\,dx + \frac{S}{\varepsilon}\,dx$$

Integrirt man diese Gleichungen und dehnt die Integration von Punkt A bis zum Punkt m aus, so erhält man:

$$y_1 - y = \int_0^x \left(\int_0^x \frac{M + M_1}{k} \frac{ds}{dx}\,dx\right) dx \quad + \int_0^x \frac{S}{\varepsilon} \frac{dy}{dx}\,dx$$

$$x_1 - x = \int_0^x \left(\int_0^x \frac{M + M_1}{k} \frac{ds}{dx}\,dx\right) \frac{dy}{dx}\,dx + \int_0^x \frac{S}{\varepsilon}\,dx$$

Mit Berücksichtigung der Formel $\int u\,dv = uv - \int v\,du$ findet man:

$$\int_0^x \left(\int_0^x \frac{M + M_1}{k} \frac{ds}{dx}\,dx\right) dx \quad = x \int_0^x \frac{M + M_1}{k} \frac{ds}{dx}\,dx - \int_0^x \frac{M + M_1}{k}\,x\,\frac{ds}{dx}\,dx$$

$$\int_0^x \left(\int_0^x \frac{M + M_1}{k} \frac{ds}{dx}\,dx\right) \frac{dy}{dx}\,dx = y \int_0^x \frac{M + M_1}{k} \frac{ds}{dx}\,dx - \int_0^x \frac{M + M_1}{k}\,y\,\frac{ds}{dx}\,dx$$

Daher finden wir schliesslich:

$$\left.\begin{aligned} y_1 - y &= x \int_0^x \frac{M + M_1}{k} \frac{ds}{dx}\,dx - \int_0^x \frac{M + M_1}{k}\,x\,\frac{ds}{dx}\,dx + \int_0^x \frac{S}{\varepsilon} \frac{dy}{dx}\,dx \\ x_1 - x &= -y \int_0^x \frac{M + M_1}{k} \frac{ds}{dx}\,dx + \int_0^x \frac{M + M_1}{k}\,y\,\frac{ds}{dx}\,dx + \int_0^x \frac{S}{\varepsilon}\,dx \end{aligned}\right\} \quad \ldots \quad (10)$$

Unter den Integralzeichen bedeuten die Grössen x und y die Coordinaten irgend eines zwischen A und m liegenden Punktes, der Grenzwerth x und die x und y ausserhalb der Integralzeichen beziehen sich dagegen auf den Punkt m. Um jedes Missverständniss zu vermeiden, wollen wir die Coordinaten eines beliebigen zwischen A und m liegenden Punktes μ mit ξ und v bezeichnen und dann erhalten wir:

$$\left.\begin{aligned} y_1 - y &= x\int_0^x \frac{M+M_1}{k}\frac{d\sigma}{d\xi}d\xi - \int_0^x \frac{M+M_1}{k}\,\xi\,\frac{d\sigma}{d\xi}d\xi + \int_0^x \frac{S}{\varepsilon}\frac{dv}{d\xi}d\xi \\ x_1 - x &= -y\int_0^x \frac{M+M_1}{k}\frac{d\sigma}{d\xi}d\xi + \int_0^x \frac{M+M_1}{k}\,v\,\frac{d\sigma}{d\xi}d\xi + \int_0^x \frac{S}{\varepsilon}d\xi \end{aligned}\right\} \quad . \; . \quad (11)$$

wobei $d\sigma$ das den Elementen $d\xi$ und dv entsprechende Kurvenelement bezeichnet. Die Werthe von M und k sind nun:

$$\left.\begin{aligned} k &= \frac{\beta\varepsilon\delta^3}{12} \\ M &= -\frac{\beta p}{2}\left[(a-\xi)^2 + (b-v)^2\right] - X(b-v) + Y(a-\xi) \end{aligned}\right\} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (12)$$

Der Werth von S ist vermöge (6)

$$\beta\delta S = \left[X + \beta p(b-v)\right]\frac{d\xi}{d\sigma} + \left[Y - \beta p(a-\xi)\right]\frac{dv}{d\sigma} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (13)$$

In den meisten Fällen der Anwendung dieser Theorie sind X Y M_1 nicht unmittelbar gegeben, sondern müssen in der Weise bestimmt werden, dass am Ende B des Stabes ein gewisser Zustand eintritt, der durch die Natur der Aufgabe bedingt wird. Wenn das Ende B nach keiner Richtung festgehalten wird ist $M_1 = 0$. Wenn die Richtungen der Tangenten an B und B_1 parallel sein sollen, wird M_1 auf folgende Art bestimmt.

Nennen wir α den Winkel, den die zu B und B_1 gezogenen Tangenten mit A x bilden sollen, dann ist für $x = a$ und $x_1 = a_1$ $\frac{dy}{dx} = \frac{dy_1}{dx_1} = \text{tang.}\,\alpha$.

Differenzirt man die Ausdrücke (11) und sucht den Werth von $\frac{dy_1}{dx_1}$, so findet man:

$$\frac{dy_1}{dx_1} = \frac{\frac{dy}{dx} + \int_0^x \frac{M+M_1}{k}\frac{d\sigma}{d\xi}d\xi + \frac{S}{\varepsilon}\frac{dy}{dx}}{1 - \frac{dy}{dx}\int_0^x \frac{M+M_1}{k}\frac{d\sigma}{d\xi}d\xi + \frac{S}{\varepsilon}}$$

Setzt man in diesen Ausdruck $x = a$, so muss für $\frac{dy}{dx}$ und $\frac{dy_1}{dx_1}$ tang. α und für S S_a gesetzt werden, wobei S_a die in B_1 eintretende Spannung bedeutet; dann wird:

$$\text{tang.}\,\alpha = \frac{\text{tang.}\,\alpha + \int_0^a \frac{M+M_1}{k}\frac{d\sigma}{d\xi}d\xi + \frac{S_a}{\varepsilon}\,\text{tang.}\,\alpha}{1 - \text{tang.}\,\alpha\int_0^a \frac{M+M_1}{k}\frac{d\sigma}{d\xi}d\xi + \frac{S_a}{\varepsilon}}$$

Hieraus folgt:

$$(1+\text{tang.}^2\alpha)\int_0^a \frac{M+M_1}{k}\frac{d\sigma}{d\xi}\,d\xi=0$$

Diese Gleichung kann nur bestehen, wenn:

$$\int_0^a \frac{M+M_1}{k}\frac{d\sigma}{d\xi}\,d\xi=0 \quad \ldots \quad (14)$$

Demnach erhält man:

$$M_1=-\frac{\int_0^a M\frac{d\sigma}{d\xi}\,d\xi}{\int_0^a \frac{d\sigma}{d\xi}\,d\xi} \quad \ldots \quad (15)$$

Dieser spezielle Werth von M_1 folgt auch aus Gleichung (7).
Wir gehen nun zu Anwendungen dieser Theorie.

Formänderung eines ellyptischen Kessels.

Es sei (Fig. 85) der Durchschnitt eines ellyptischen Kessels $CB=a$ $AC=b$ die halben Axen. Wir legen die Abscissenaxe Ax tangirend an den Endpunkt A der kleinen Axe, dann ist die Gleichung der Ellypse:

$$\frac{\xi^2}{a^2}+\frac{(b-v)^2}{b^2}=1 \quad \ldots \quad (1)$$

An den Endpunkten B und B der grössern Axe sei die Spannung in der Axenfaser Y und die Summe der Momente aller Spannungen M_1. Wenn wir den Kessel bei B und B entzweischneiden und daselbst Kräfte YY und Momente $M_1 M_1$ wirken lassen, so wird der Gleichgewichtszustand nicht gestört. Es ist also in diesem Falle:

$$X=0 \qquad Y=p\beta a \quad \ldots \quad (2)$$

Um die Integrationen durchführen zu können, müssen wir annehmen, dass die Kesselform nur wenig von einer kreiscylindrischen abweicht, oder dass $\frac{a}{b}$ nur wenig von der Einheit verschieden sei. Wir setzen daher:

$$b=a(1-\lambda) \quad \ldots \quad (3)$$

und betrachten λ als eine sehr kleine Grösse.

Aus der Gleichung (1) folgt, wenn man für b den Werth $a(1-\lambda)$ setzt:

$$v=(1-\lambda)\left(a-\sqrt{a^2-\xi^2}\right) \quad \ldots \quad (4)$$

Berechnet man $d\sigma = \sqrt{d\xi^2 + dv^2}$, indem man λ als eine kleine Grösse betrachtet, deren zweite und höheren Potenzen vernachlässigt werden dürfen, so findet man:

$$\frac{d\sigma}{d\xi} = \frac{a\left(1 - \lambda \frac{\xi^2}{a^2}\right)}{\sqrt{a^2 - \xi^2}} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (5)$$

Mit Berücksichtigung von (1), (2) und (3) wird im vorliegenden Falle:

$$M = -\frac{p\beta}{2}\left[(a-\xi)^2 + (1-\lambda)^2 (a^2 - \xi^2)\right] + p\beta a (a - \xi)$$

Vernachlässigt man die zweiten und höheren Potenzen von λ, so findet man:

$$M = p\beta\lambda (a^2 - \xi^2) \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (6)$$

Wir wollen uns darauf beschränken, die Aenderungen zu berechnen, welche in den Hauptdimensionen a und b des Kessels eintreten, dann sind alle Integrale in den Grenzen o und a zu nehmen. Wenn man berücksichtigt, dass:

$$\left.\begin{array}{ll}
\displaystyle\int_0^a \frac{d\xi}{\sqrt{a^2-\xi^2}} = \frac{\pi}{2} & \displaystyle\int_0^a \frac{\xi\, d\xi}{\sqrt{a^2-\xi^2}} = a \\[2ex]
\displaystyle\int_0^a \frac{\xi^2\, d\xi}{\sqrt{a^2-\xi^2}} = a^2 \frac{\pi}{4} & \displaystyle\int_0^a \frac{\xi^3\, d\xi}{\sqrt{a^2-\xi^2}} = \frac{2}{3} a^3 \\[2ex]
\displaystyle\int_0^a \frac{\xi^4\, d\xi}{\sqrt{a^2-\xi^2}} = \frac{3}{16} a^4 \pi & \displaystyle\int_0^a \frac{\xi^5\, d\xi}{\sqrt{a^2-\xi^2}} = \frac{8}{15} a^5
\end{array}\right\} \quad \ldots \ldots \ldots \quad (7)$$

ist, gelangt man zu folgenden Resultaten:

$$\left.\begin{array}{l}
\displaystyle\int_0^a M \frac{d\sigma}{d\xi} d\xi = \frac{p\beta\lambda a^3 \pi}{4}\left(1 - \frac{\lambda}{4}\right) \\[2ex]
\displaystyle\int_0^a \xi\, M \frac{d\sigma}{d\xi} d\xi = p\beta\lambda a^4 \left(\frac{1}{3} - \frac{2}{15}\lambda\right) \\[2ex]
\displaystyle\int_0^a \frac{d\sigma}{d\xi} d\xi = a\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\lambda\right) \\[2ex]
\displaystyle\int_0^a \xi \frac{d\sigma}{d\xi} d\xi = a^2 \left(1 - \frac{2}{3}\lambda\right)
\end{array}\right\} \quad \ldots \ldots \ldots \quad (8)$$

Nun ist ferner

$$S = \frac{p}{\delta}\, \xi \frac{d\sigma}{dv}$$

daher

$$\int_0^a \frac{S}{\varepsilon}\frac{d v}{d \xi} d\xi = \frac{p}{\varepsilon\delta}\int_0^a \xi \frac{d\sigma}{d\xi} d\xi = \frac{a^2 p}{\varepsilon\delta}\left(1-\frac{2}{3}\lambda\right) \quad \ldots\ldots\ldots (9)$$

Da sich die Richtung der Tangente bei B durch die Biegung nicht ändert, so kann der Werth von M_1 vermittelst der Formel (15) (Seite 264) bestimmt werden. Man erhält:

$$M_1 = -\frac{\frac{p\beta\lambda a^3\pi}{4}\left(1-\frac{\lambda}{4}\right)}{a\frac{\pi}{2}\left(1-\frac{\lambda}{2}\right)} = -\frac{p\beta\lambda a^2}{2}\frac{1-\frac{\lambda}{4}}{1-\frac{\lambda}{2}} \quad \ldots\ldots\ldots (10)$$

Substituirt man diese Rechnungsresultate in die erste der Gleichungen (11) (Seite 263) und setzt $x = a$ $y = b$ $y_1 = b_1$, so findet man nach einigen Reduktionen:

$$b_1 - b = \frac{p\beta\lambda a^4}{6k}\frac{1-\frac{9}{5}\lambda}{1-\frac{1}{2}\lambda} + \frac{a^2 p}{\varepsilon\delta}\left(1-\frac{2}{3}\lambda\right) \ldots\ldots\ldots (12)$$

oder endlich, wenn man sich erlaubt $\frac{1-\frac{9}{5}\lambda}{1-\frac{1}{2}\lambda}$ und $\left(1-\frac{2}{3}\lambda\right)$ gleich 1 zu setzen, und für λ und k die Werthe $\frac{a-b}{a}$ und $\frac{\beta\varepsilon\delta^3}{12}$ einführt:

$$b_1 - b = \frac{2 p a^3 (a-b)}{\varepsilon\delta^3} + \frac{a^2 p}{\varepsilon\delta} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (13)$$

Es ist nicht nothwendig $a_1 - a$ vermittelst der zweiten der Gleichungen (11) (Seite 263) direkt zu berechnen, denn man erhält $a_1 - a$ aus (13), wenn man a mit b und a_1 mit b_1 vertauscht. Man findet auf diese Weise:

$$a_1 - a = -\frac{2 p b^3 (a-b)}{\varepsilon\delta^3} + \frac{b^2 p}{\varepsilon\delta}. \ldots\ldots\ldots\ldots (14)$$

Hiedurch sind also die Aenderungen bestimmt, die in den Hauptabmessungen des Kessels eintreten.

Es ist

$$S = \frac{p}{\delta}\xi\frac{d\sigma}{d v} = \frac{p}{\delta}a\frac{1-\lambda\frac{\xi^2}{a^2}}{1-\lambda}$$

Dieser Ausdruck erhält für $\xi = 0$ seinen grössten Werth. Die Intensität der Spannung ist also im Punkt A der Axenlinie am grössten. Nennt man diesen grössten Werth von S $\mathfrak{A}$, so hat man:

$$\mathfrak{A} = \frac{p a}{\delta(1-\lambda)} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (15)$$

Formänderung eines ellyptischen Kessels, dessen Wände nach der Richtung der kleinen Axe durch Stangen oder durch eine durchbrochene Platte zusammengehängt sind.

Es sei (Fig. 84) der Durchschnitt eines ellyptischen Kessels, dessen Wände nach der Richtung der kleinen Axe A A durch Stangen, oder durch eine durchbrochene Platte zusammengehängt sind. Nennt man Ω die Summe der Querschnitte aller Verbindungsstangen, Y_1 die Summe der Spannungen in allen Stangen, ε den Modulus der Elastizität des Materials, aus welchem die Stangen bestehen, a die halbe grosse, b die halbe kleine Axe der Ellypse, Y die Summe aller Spannungen in einem Querschnitt bei B, $b_1 - b$ die Ausdehnung, welche in der Hälfte einer der Verbindungsstangen eintritt, so bestehen zunächst folgende Beziehungen:

$$\left.\begin{aligned} 2Y + Y_1 &= 2ap\beta \\ b_1 - b &= b\frac{Y_1}{\Omega\varepsilon} \\ X &= 0 \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

Es unterliegt zwar keinen Schwierigkeiten, die Formänderung des Kessels vollständig zu bestimmen für die praktischen Zwecke, welche wir im Auge haben, interessirt uns aber nur, zu erfahren, wie gross Y_1 ist. Wir beschränken uns daher auf die Bestimmung dieser Grösse, unter der Voraussetzung, dass der Kessel nur wenig von der kreiscylindrischen Form abweicht.

Durch die Formänderung, welche in dem Kessel eintritt, bleibt die Richtung der zum Punkt B gehörigen Tangenten ungeändert. Es ist daher wegen der Gleichungen (14) und (15) (Seite 264)

$$\int_0^a \frac{M + M_1}{k}\frac{d\sigma}{d\xi}\,d\xi = 0 \qquad M_1 = -\frac{\int_0^a M\frac{d\sigma}{d\xi}\,d\xi}{\int_0^a \frac{d\sigma}{d\xi}\,d\xi} \quad \ldots\ldots \quad (2)$$

Die erste der Gleichungen (11) (Seite 263) wird demnach, wenn man in derselben $x = a$ und folglich $y = b$ $y_1 = b_1$ setzt:

$$b_1 - b = -\int_0^a \frac{M + M_1}{k}\,\xi\,\frac{d\sigma}{d\xi}\,d\xi + \int_0^a \frac{S}{\varepsilon}\frac{dv}{d\xi}\,d\xi \quad \ldots\ldots\ldots \quad (3)$$

Der Werth von M ist im vorliegenden Fall:

$$M = -\frac{\beta p}{2\xi}\left[(a-\xi)^2 + (b-v)^2\right] + Y(a-\xi) \quad \ldots\ldots\ldots \quad (4)$$

Die Gleichung der Ellypse ist:

$$\frac{\xi^2}{a^2} + \frac{(b-v)^2}{b^2} = 1 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (5)$$

Wir setzen auch hier $b = a(1-\lambda)$ und behandeln λ, wie wenn es unendlich klein wäre, so dass die zweiten und höheren Potenzen vernachlässigt werden dürfen.

Mit Berücksichtigung der ersten der Gleichungen (1) wird:

$$M = +\beta p \lambda (a^2 - \xi^2) - (a-\xi)\frac{1}{2} Y_1 \quad \ldots \ldots \quad (6)$$

Es ist ferner

$$\frac{d\sigma}{d\xi} = \frac{a\left(1 - \lambda \frac{\xi^2}{a^2}\right)}{\sqrt{a^2 - \xi^2)}} \quad \ldots \ldots \quad (7)$$

Man findet nun:

$$\int_0^a M \frac{d\sigma}{d\xi} d\xi = \frac{p\beta\lambda\pi a_0^3}{4}\left(1 - \frac{\lambda}{4}\right) - \frac{1}{2} a^2 Y_1 \left(\frac{\pi}{2} - 1 - \frac{\lambda\pi}{4} + \frac{2}{3}\lambda\right)$$

$$\int_0^a M \xi \frac{d\sigma}{d\xi} d\xi = \frac{p\beta\lambda a^4}{3}\left(1 - \frac{2}{5}\lambda\right) - \frac{1}{2} a^3 Y_1 \left(1 - \frac{\pi}{4} - \frac{2}{3}\lambda + \frac{3}{16}\lambda\pi\right)$$

$$\int_0^a \frac{d\sigma}{d\xi} d\xi = a\frac{\pi}{2}\left(1 - \frac{\lambda}{2}\right)$$

$$\int_0^a \xi \frac{d\sigma}{d\xi} d\xi = a^2\left(1 - \frac{2}{3}\lambda\right)$$

Für einen cylindrisch runden Kessel ist $s = \frac{Y}{\beta\delta}$. Wir werden keinen bedenklichen Fehler begehen, wenn wir diesen Werth von s in Rechnung bringen, schreiben desshalb:

$$\int_0^a \frac{S}{\varepsilon} \frac{dv}{d\xi} d\xi = \frac{S}{\varepsilon} b = \frac{Yb}{\varepsilon\beta\delta} = \frac{\left(a\beta p - \frac{1}{2} Y_1\right) b}{\varepsilon\beta\delta}$$

Vermittelst dieser Rechnungsresultate wird nun:

$$b_1 - b = \frac{b Y_1}{\Omega\varepsilon} = \frac{1}{k}\left[\frac{p\beta\pi a^3}{4}\left(1 - \frac{\lambda}{4}\right) - \frac{1}{2} a^2 Y_1 \left(\frac{\pi}{2} - 1 - \frac{\lambda\pi}{4} + \frac{2}{3}\lambda\right)\right] \frac{2a}{\pi} \frac{1 - \frac{2}{3}\lambda}{1 - \frac{\lambda}{2}}$$

$$- \frac{1}{k}\left[\frac{\beta p \lambda a^4}{3}\left(1 - \frac{2}{5}\lambda\right) - \frac{1}{2} a^3 Y_1 \left(1 - \frac{\pi}{4} - \frac{2}{3}\lambda + \frac{3}{16}\lambda\pi\right)\right]$$

$$+ \frac{\left(a\beta p - \frac{1}{2} Y_1\right) b}{\varepsilon\beta\delta}$$

oder durch weitere Reduktionen, wobei die Glieder, welche λ^2 enthalten, zu vernachlässigen sind,

$$\frac{b\,Y_1}{\Omega\,\varepsilon} = \frac{\beta\,p\,\lambda\,a^4}{6\,k}\,\frac{1-\frac{19}{20}\lambda}{1-\frac{1}{2}\lambda} + \frac{a^2\,Y_1}{k}\left(\frac{1}{\pi}-\frac{\pi}{4}+\frac{7}{32}\lambda\pi-\frac{4}{3}\frac{\lambda}{\pi}\right)+\frac{a\,b\,p}{\varepsilon\,\delta}-\frac{Y_1\,b}{2\,\varepsilon\,\beta\,\delta}$$

Nennt man $\mathfrak{A}$ die Spannung, welche in einem Quadratcentimeter des Querschnittes der Verbindungsstangen eintreten darf, so ist $Y_1 = \mathfrak{A}\,\Omega$. Substituirt man diesen Werth von Y_1 in die letzte Gleichung und sucht sodann Ω, so findet man:

$$\Omega = \frac{\frac{\beta\,p\,\lambda\,a^4}{6\,k}\,\frac{1-\frac{19}{20}\lambda}{1-\frac{1}{2}\lambda}+\frac{a\,b\,p}{\varepsilon\,\delta}-\frac{b\,\mathfrak{A}}{\varepsilon}}{\frac{a^2\,\mathfrak{A}}{k}\left(\frac{\pi}{4}-\frac{1}{\pi}-\frac{7}{32}\lambda\pi+\frac{4}{3}\frac{\lambda}{\pi}\right)+\frac{b\,\mathfrak{A}}{2\,\varepsilon\,\beta\,\delta}}$$

oder wenn man für k seinen Werth $\frac{\beta\,\varepsilon\,\delta^3}{12}$ einführt:

$$\Omega = \frac{\frac{2\,p\,\lambda\,a^4}{\delta^3}\left(\frac{1-\frac{19}{20}\lambda}{1-\frac{1}{2}\lambda}\right)+\frac{a\,b\,p}{\delta}-b\,\mathfrak{A}}{\frac{12\,a^2\,\mathfrak{A}}{\beta\,\delta^3}\left(\frac{\pi}{4}-\frac{1}{\pi}-\frac{7}{32}\lambda\pi+\frac{4}{3}\frac{\lambda}{\pi}\right)+\frac{b\,\mathfrak{A}}{2\,\beta\,\delta}}$$

Vernachlässiget man diejenigen Glieder in den Klammern, welche mit λ multiplizirt sind, und setzt für das als Faktor erscheinende λ seinen Werth $\frac{a-b}{a}$, so erhält man:

$$\Omega = \frac{\frac{2\,p\,(a-b)\,a^3}{\delta^3}+\frac{a\,b\,p}{\delta}-b\,\mathfrak{A}}{\frac{12\,a^2\,\mathfrak{A}}{\beta\,\delta^3}\left(\frac{\pi}{4}-\frac{1}{\pi}\right)+\frac{b\,\mathfrak{A}}{2\,\beta\,\delta}}$$

$$\frac{\Omega}{\beta} = \frac{\frac{2\,p\,(a-b)\,a^3}{\delta^3}+\frac{a\,b\,p}{\delta}-b\,\mathfrak{A}}{\frac{12\,a^2\,\mathfrak{A}}{\delta^3}\left(\frac{\pi}{4}-\frac{1}{\pi}\right)+\frac{b\,\mathfrak{A}}{2\,\delta}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (8)$$

oder endlich annähernd

$$\frac{\Omega}{\beta} = \frac{p\,(a-b)}{6\,\mathfrak{A}\left(\frac{\pi}{4}-\frac{1}{\pi}\right)} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (9)$$

Es sei z. B. für einen ellyptischen Kessel:

$a = 50 \qquad b = 40 \qquad \delta = 1 \qquad \mathfrak{A} = 300 \qquad p = 5$

so wird:

$$\frac{\Omega}{\beta} = \frac{2 \times 5\ (50-40)\ 125000 + 50 \times 40 \times 5 - 40 \times 300}{12 \times 125000 \times 3000 \left(\frac{3{\cdot}142}{4}-\frac{1}{3{\cdot}142}\right)+\frac{40 \times 300}{2}} = \frac{1}{21}$$

Beträgt die ganze Länge β des Kessels 400 Centimeter, so ist die Summe der Querschnitte der Verbindungsstangen $\Omega = 20$ Quadratcentimeter.

Verbindungsstangen eines Blasenkessels.

Um die Kraft zu bestimmen, welcher die Verbindungsstangen B B (Fig. 83) eines Blasenkessels zu widerstehen haben, bedarf es keiner weitläufigen Rechnung. Es sei O der Mittelpunkt ϱ_1 der Halbmesser der kreisrunden Kesselwölbung B A B. Da in einem kreiscylindrischen Kessel in allen Querschnitten einerlei Spannung herrscht, so kann dieselbe leicht bestimmt werden. Die Summe der Spannungen in den Querschnitten bei c und c muss offenbar gleich sein dem Druck des Dampfes auf die Fläche C O C; man hat daher:

$$2\,S = 2\,\varrho_1\,\beta\,p \quad \text{oder} \quad S = \varrho_1\,\beta\,p$$

So gross wie S sind aber auch die Spannungen nach den Richtungen der Tangenten bei B. Vermöge dieser Spannungen wird der Punkt B mit einer Kraft $2\,S\cos\psi = 2\,\varrho_1\,\beta\,p\cos.\psi$ nach der Richtung B x gezogen, und dieser Kraft haben die Zugstangen zu widerstehen. Bezeichnet man dieselben mit Z, so ist:

$$Z = 2\,\varrho_1\,\beta\,p\cos.\psi$$

Setzt man $\overline{AD} = b_1$, so ist, wie aus der Figur erhellet:

$$\cos.\psi = \frac{(b_1 - \varrho_1)}{\varrho_1}$$

man erhält daher:

$$Z = 2\,\beta\,p\,(b_1 - \varrho_1) \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (1)$$

Zu dem gleichen Ergebniss werden wir aber auch auf rein analytischem Wege durch unsere allgemeine Theorie geführt.

Es ist klar, dass man den Querschnitt Ω der Verbindungsstangen in der Art wählen kann, dass der Kessel durch die Einwirkung der innern Pressung nur allein ausgeweitet wird, dabei aber in eine kreiscylindrische Form von einem gewissen Halbmesser ϱ_1 übergeht.

Um für diesen Fall die genaue Momentengleichung zu erhalten, muss man in der Gleichung (1) (Seite 260) setzen:

$$Y = \beta\,p\,a_1$$

$$X = -\frac{1}{2}Z$$

Man erhält daher:

$$\frac{\varepsilon\,\beta\,\delta^3}{12}\left(\frac{1}{\varrho_1} - \frac{1}{r}\right) = -\frac{\beta\,p}{2}\left[(a_1 - \xi)^2 + (b_1 - v)^2\right] + \frac{1}{2}Z\,(b_1 - v) + \beta\,p\,a_1\,(a_1 - \xi) + M_1 \quad . \quad (2)$$

Damit diese Gleichung mit der eines Kreises vom Halbmesser ϱ_1 übereinstimmt muss sie mit

$$\xi^2 + v^2 - 2\,\varrho_1\,v = 0 \quad \ldots \ldots \quad (3)$$

identisch sein. Dies ist der Fall, wenn:

$$\frac{Z}{\beta\,p} - 2\,b_1 = -2\,\varrho_1 \quad \ldots \ldots \quad (4)$$

$$\frac{2}{\beta\,p}\,\frac{\varepsilon\,\beta\,\delta^3}{12}\left(\frac{1}{\varrho_1} - \frac{1}{r}\right) + b_1^2 - a_1^2 - \frac{Z\,b_1}{\beta\,p} - \frac{2\,M_1}{\beta\,p} = 0 \quad \ldots \ldots \quad (5)$$

ist.

Aus der ersteren dieser Gleichungen folgt zunächst übereinstimmend mit (1)

$$Z = 2\,\beta\,p\,(b_1 - \varrho_1) \quad \ldots \ldots \quad (6)$$

Vermittelst dieses Werthes von Z und weil $a_1^2 + b_1^2 - 2\,b_1\,v = 0$ ist, folgt aus (5)

$$M_1 = -\frac{\varepsilon\,\beta\,\delta^3}{12}\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{\varrho_1}\right) \quad \ldots \ldots \quad (7)$$

Dass M_1 negativ ausfällt, ist ganz in der Ordnung, denn in der Ableitung der Momentengleichung sind wir von der Voraussetzung ausgegangen, dass die Krümmung des Stabes durch die Formveränderung zunimmt, während sie in vorliegendem Falle schwächer wird.

Die Intensität S der Spannung per 1 Quadratcentimeter ist in allen Punkten der Axenlinie des Kessels so, dass man hat:

$$2\,S\,\beta\,\delta = 2\,\varrho_1\,p\,\beta$$

also:

$$S = \frac{\varrho_1\,p}{\delta} \quad \ldots \ldots \quad (8)$$

Nennt man α den Centriwinkel, der dem Bogen $B\,A\,B$ entspricht, so ist die ursprüngliche Länge dieses Bogens $r\,\alpha$ die veränderte Länge $\varrho_1\,\alpha$, daher hat man:

$$\varrho_1\,\alpha - r\,\alpha = r\,\alpha\,\frac{S}{\varepsilon} = r\,\alpha\,\frac{\varrho_1\,p}{\delta\,\varepsilon}$$

Hieraus folgt:

$$\frac{1}{r} - \frac{1}{\varrho_1} = \frac{p}{\varepsilon\,\delta}$$

oder:

$$1 - \frac{r}{\varrho_1} = \frac{r\,p}{\varepsilon\,\delta} \quad \ldots \ldots \quad (9)$$

Nennt man Ω die Summe der Querschnitte der Verbindungsstangen, so ist:

$$a_1 - a = a \frac{Z}{\Omega \varepsilon}$$

oder:

$$Z = \Omega \varepsilon \left(\frac{a_1}{a} - 1 \right) \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (10)$$

allein da die ursprüngliche und die durch die Veränderung entstandene Form geometrisch ähnlich sind, so hat man $\frac{a_1}{a} = \frac{b_1}{b} = \frac{\varrho_1}{r}$. Berücksichtiget man diese Verhältnisse, so folgt aus (6) und (10)

$$2 \beta p \left(b \frac{\varrho_1}{r} - \varrho_1 \right) = \Omega \varepsilon \left(\frac{\varrho_1}{r} - 1 \right)$$

und hieraus folgt:

$$\Omega = \frac{2 \beta p (b - r)}{\varepsilon \left(1 - \frac{r}{\varrho_1} \right)}$$

oder wegen der zweiten der Gleichungen (9)

$$\frac{\Omega}{\beta \delta} = 2 \cdot \frac{b - r}{r} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (11)$$

Diese Gleichung ist ein sehr einfacher Ausdruck für das Verhältniss zwischen den Querschnitten sämmtlicher Verbindungsstangen und dem Querschnitt einer Kesselwand.

Aus (7) und (9) folgt;

$$M_1 = -\frac{\beta \delta^2 p}{12} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (12)$$

Vernietungen.

Die wesentlichsten Dimensionen einer Vernietung sind: 1) der Durchmesser der Nietbolzen, 2) die Entfernung e der Nietbolzen, 3) die Entfernung e_1 von dem Rand eines Nietbolzens bis zum Blechrand (Fig. 88).

Diese Dimensionen müssen in der Art bestimmt werden, dass das Abscheeren eines Bolzens eben so viel Kraft erfordert, als das Abreissen des Bleches zwischen zwei Bolzen und als das Ausreissen des Bleches bis an den Rand hinaus. Nennt man δ die Blechdicke, so müssen demnach folgende Gleichheiten stattfinden:

$$\frac{d^2 \pi}{4} = (e - d) \delta = 2 e_1 \delta \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (1)$$

Hieraus findet man:

$$\left.\begin{array}{l}\frac{e}{\delta}=\frac{\pi}{4}\left(\frac{d}{\delta}\right)^2+\frac{d}{\delta}\\ \frac{e_1}{\delta}=\frac{\pi}{8}\left(\frac{\delta}{\delta}\right)^2\end{array}\right\}\;\ldots\ldots\ldots\ldots\;(2)$$

Nennt man f das Festigkeitsverhältniss der Vernietung, d. h. den Quotienten aus der Festigkeit, die eine Verbindung durch Nieten gewährt und der Festigkeit des Bleches, so ist:

$$f=\frac{e-d}{e}=1-\frac{d}{e}$$

oder wenn man aus (2) für e seinen Werth setzt:

$$f=\frac{1}{1+\frac{4}{\pi}\left(\frac{\delta}{d}\right)}\;\ldots\ldots\ldots\ldots\;(3)$$

Diese Formeln (2) und (3) geben:

für $\frac{d}{\delta}=$	1	1·5	2	2·5	3
$f=$	0·44	0·54	0·61	0·66	0·71
$\frac{e}{\delta}=$	1·78	3·26	5·14	7·41.	10.06
$\frac{e_1}{\delta}=$	0·39	0·88	1·56	2·44	3·51

Die Werthe von f zeigen, dass eine weite Vernietung mit starken Bolzen grössere Festigkeit gewährt, als eine enge Vernietung mit kleinen Bolzen. Eine enge Vernietung gibt jedoch eine dichtere Verbindung. Handelt es sich also um eine Verbindung, die nur Festigkeit geben soll, so ist eine weite Vernietung mit starken Bolzen angemessen. Handelt es sich nicht um Festigkeit, sondern nur um dichten Verschluss, so ist eine enge Vernietung mit kleinen Bolzen vorzuziehen. Wird sowohl Festigkeit, als auch dichter Verschluss gefordert, wie diess bei Dampfkesseln, Schiffen etc. der Fall ist, so ist eine Vernietung von mittlerer Weite und mittlere Bolzenstärke am zweckmässigsten.

Für Kesselvernietungen nehme man:

$$\frac{d}{\delta}=2 \qquad \frac{e}{\delta}=5{\cdot}14 \qquad \frac{e_1}{\delta}=1{\cdot}56$$

Für eine solche Vernietung ist $f=0{\cdot}61$, d. h. die Festigkeit eines auf diese Weise vernieteten Kessels ist 0·61 von der Festigkeit des Bleches.

Nach den Regeln, welche wir für die Metalldicke cylindrischer Kessel aufgestellt haben, ist das Kesselblech durchschnittlich auf $\frac{1}{15}$ seiner absoluten Festigkeit in Anspruch genommen. Ein nach obiger Regel vernieteter Kessel ist demnach auf $\frac{1}{9}$ von derjenigen Festigkeit in Anspruch genommen, die die Vernietung gewährt.

Festigkeit des Rahmenbaues.

Der mit dem Kessel verbundene Rahmenbau wird durch die Federn schwebend erhalten. Bei Lokomotiven, die keine Mittelaxe haben, ist es vollkommen genügend, wenn die Rahmen nur mit den Wänden der Feuerbüchse und mit den Wänden der Rauchkammer verbunden werden und können ferner die Querschnittsdimensionen der Rahmen verhältnissmässig sehr schwach genommen werden, denn die Punkte, an welchen die Rahmen von den Federn gefasst werden, befinden sich bei dieser Constructionsweise ganz in der Nähe der Punkte, in welcher die Rahmen mit dem Kesselbau verbunden sind.

Anders verhält es sich bei Lokomotiven, die mit mittleren Rädern versehen sind. Bei dieser Bauart ist es kaum möglich, die mittleren Theile der Rahme so stark zu machen, dass sie für sich allein und ohne Hülfsconstruktionen den Zug der Mittelfedern auszuhalten im Stande sind, man wird daher genöthigt, die mittleren Theile dieser Rahmen mit der untern Rundung des Röhrenkessels zu verbinden, muss aber dennoch die Querschnittsdimensionen der Rahmen stark machen, weil sonst die Festigkeit des Kessels zu sehr in Anspruch genommen würde.

Man sieht hieraus, dass die Bauart mit Mittelrädern nicht nur hinsichtlich der Stabilität der Bewegung und wegen der Befahrung von Bahnkrümmungen, sondern auch für den Rahmenbau nachtheilig ist.