

Badische Landesbibliothek Karlsruhe

Digitale Sammlung der Badischen Landesbibliothek Karlsruhe

Die Gesetze des Lokomotiv-Baues

Redtenbacher, Ferdinand

Mannheim, 1855

VI. Die störenden Bewegungen einer Lokomotive

[urn:nbn:de:bsz:31-266507](https://nbn-resolving.org/urn:nbn:de:bsz:31-266507)

VI.

Die störenden Bewegungen einer Lokomotive.

Einleitung.

Stellt man sich in die Nähe des Geleises einer Eisenbahn, und beobachtet mit Aufmerksamkeit die Bewegung einer im vollen Laufe vorüber fahrenden Lokomotive, so hat es das Ansehen, als erfolgte diese Bewegung genau nach der Richtung des Geleises und mit vollkommen gleichförmiger Geschwindigkeit. Stellt man sich hingegen auf die Plattform der Lokomotive, so fühlt und sieht man sogleich, dass sie nicht so sanft als es von dem ersten Standpunkt aus zu sein schien dem Geleise folgt, sondern dass sie sehr mannigfaltigen heftigen Erschütterungen, Zuckungen und Schwankungen ausgesetzt ist. Man fühlt, dass die Stelle, auf der man steht, auf und nieder, vorwärts und rückwärts, so wie auch hin und her oscillirt, sieht ferner, dass der Kessel und alle mit demselben in Verbindung stehenden Theile sehr mannigfaltige geradlinige und drehende Schwingungen machen, und insbesondere, dass die Lokomotive dem Geleise nicht genau folgt, sondern zwischen demselben hin und her schlängelt.

Die wirkliche Bewegung der Lokomotive erfolgt also nicht in so einfacher Weise, als sie einem neben der Bahn stehenden Beobachter vor sich zu gehen scheint, sondern die ganze Bewegung ist im Gegentheil aus sehr vielen einzelnen Bewegungen zusammengesetzt.

Allein die Lokomotive sollte sich, um ihrem Zweck vollkommen zu entsprechen, mit absolut gleichförmiger Geschwindigkeit und in der Weise fortbewegen, dass jeder ihrer Punkte eine mit der Axe des Geleises vollkommen congruente Kurve beschreibe, so zwar, dass die in den Wägen befindlichen Gegenstände und Personen von der Fortbewegung des Zuges gar nicht affizirt würden. Diese Abweichungen des wirklichen Bewegungszustandes von dem gleichförmig mittleren sind demnach schädliche Störungen, die so viel als möglich geschwächt oder beseitigt werden sollten, denn diese Störungen zerrütteln den Bau der Lokomotive und können, wenn sie in einer gewissen Stärke auftreten, ein Ausgleisen der Lokomotive veranlassen.

Die praktische Beseitigung oder Schwächung dieser Störungen erfordert eine genaue Kenntniss der Ursachen und Umstände, durch welche sie hervorgerufen werden, und diese Kenntniss erlangt man, wenn man die wahre Bewegung der Lokomotive mit Hilfe der allgemeinen Grundsätze der Mechanik untersucht und berechnet, was in der folgenden Untersuchung geschehen soll.

Zuvörderst wollen wir die einzelnen Elementarbewegungen, aus welchen die totale Bewegung zusammengesetzt ist, namhaft machen; diese Elementarbewegungen sind:

1) *Der mittlere Fortlauf.* Das ist diejenige gleichförmige Bewegung, welche eintreten müsste, wenn die verschiedenen Störungen gar nicht vorhanden wären, und wenn in

jedem Augenblick die auf die Lokomotive einwirkenden treibenden Kräfte mit den Widerständen im Gleichgewicht wären.

2) *Die periodische Bewegung des Schwerpunktes.* Im Beharrungszustand der Bewegung ist wohl die Kraft, mit welcher die Lokomotive durch den Dampfdruck getrieben wird, mit den Widerständen, im Mittel genommen, im Gleichgewicht, aber nicht in jedem einzelnen Zeitaugenblick der Bewegung, denn die beiden Kolben wirken auf zwei unter einem rechten Winkel gegen einander gestellte Kurbeln ein, was zur Folge hat, dass das statische Moment der Kraft, mit welcher die Kurbelaxe umgetrieben wird, einen periodischen veränderlichen Werth hat. Dieses Moment ist am kleinsten, wenn einer der beiden Kolben am Ende, der andere gleichzeitig auf halbem Schub steht, es ist am grössten, wenn beide Kurbeln mit der Bewegungsrichtung der Kolben Winkel von 45° bilden. Die Maschine wird also im Beharrungszustand ihrer Bewegung mit einer Kraft vorwärts getrieben, die bald stärker, bald schwächer ist als die Widerstände, ihre Geschwindigkeit muss also bald zu-, bald abnehmen. Die hieraus entstehende Zuckung ist jedoch, wie wir früher (Seite 94) gezeigt haben, wegen der grossen Masse der Lokomotive, so wie auch wegen der Raschheit, mit der sie sich in der Regel bewegt, so schwach, dass ihre Existenz zwar durch Rechnung nachgewiesen, aber durch das Gefühl, sowie auch durch Messungen gar nicht erkannt werden kann.

3) *Das Zucken.* Die Massen der Kolben, der Kolbenstangen und Schubstangen, sowie auch die Massen einiger Steuerungstheile haben gegen das Wagengestell eine hin- und hergehende Bewegung. Der Schwerpunkt des vollständigen Lokomotivbaues hat daher gegen den Rahmenbau eine periodisch veränderliche Lage, allein diese Massenbewegungen können (nach dem Grundsatz der Erhaltung der Bewegung des Schwerpunktes eines Massensystems) auf die Bewegungen des Schwerpunktes keinen Einfluss ausüben, es muss also die Verschiebung des Schwerpunktes, welche durch den Hin- und Hergang der Massen angeregt wird, durch eine gewisse Bewegung der Massen des Rahmen- und Kesselbaues aufgehoben werden. Gehen beide Kolben vorwärts, so muss gleichzeitig der Rahmen mit dem Kessel zurückweichen, gehen beide Kolben rückwärts, so muss der Rahmen mit dem Kessel vorwärts rücken. Bewegen sich die Kolben mit gleicher Geschwindigkeit nach entgegengesetzter Richtung, so kann in diesem Augenblick der Rahmenbau mit dem Kessel weder vorwärts noch rückwärts. Man sieht also, dass durch die hin- und hergehenden Bewegungen der Massen des Kolbens, der Kolbenstange, der Schubstange etc., ein Vorwärts- und Rückwärtsbewegen des Rahmenbaues, mithin ein Zucken desselben veranlasst wird.

Man kann sich diese Wirkung der hin- und hergehenden Massen auch auf folgende Art erklären. Diese hin- und hergehenden Massen einer Maschine werden durch die erste Hälfte eines Schubes beschleuniget, in der zweiten Hälfte verzögert; dies ist aber nur möglich, wenn die auf diese Massen nach entgegengesetzter Richtung wirkenden Kräfte, nämlich der Druck des Dampfes, gegen eine Kolbenfläche, und der Rückdruck des Kurbelzapfens gegen die Schubstange nicht gleich gross sind, sondern wenn der Rückdruck des Kurbelzapfens gegen die Schubstange in der ersten Hälfte des Schubes kleiner, in der zweiten Hälfte des Schubes grösser ist als der Dampfdruck gegen den Kolben. Nun wirkt aber der in einem Cylinder befindliche Dampf nicht nur gegen eine der Grundflächen des Kolbens, sondern auch gleichzeitig gegen die dieser Grundfläche zugewendete Deckelfläche des Cylinders, und diese Pressungen sind von gleicher Stärke. Durch die Wirkung des Dampfes auf jede der beiden Maschinen wird daher der Rahmenbau durch ungleiche Kräfte nach entgegengesetzter Richtung gepresst und die Resultirende dieser Kräfte wirkt in den auf einander folgenden Schubhälften abwechselnd vorwärts und rückwärts; es wird demnach der Wagenbau durch die Wirkung des Dampfes auf jede der beiden Maschinen abwechselnd vorwärts und rückwärts getrieben und da die Kurbeln der beiden Maschinen nicht um 180° , sondern um 90° gegeneinander gestellt sind, so können sich diese Wir-

kungen der beiden Maschinen auf das Wagengestelle, mit Ausnahme einzelner Zeitmomente, nicht aufheben, Wagenbau und Kessel müssen daher wegen der abwechselnden Beschleunigung und Verzögerung der hin- und hergehenden Massen in eine zuckende Bewegung gerathen. Diese störende Bewegung kann jedoch, wie zuerst *Le Chatelier* gezeigt hat, vollständig aufgehoben werden, wenn die Triebräder der Lokomotive mit Massen versehen werden, die durch ihre Centrifugalkraft die ungleiche Wirkung der Schubstangen gegen die Kurbelzapfen aufheben.

4) *Das Schlingern.* Nebst diesen zuckenden Bewegungen, veranlassen die hin- und hergehenden Massen auch noch eine oscillirende drehende Bewegung der Lokomotive um eine durch ihren Schwerpunkt gehende Vertikalaxe; denn die Pressungen des Dampfes gegen die Deckelflächen der Cylinder und die Pressungen der Schubstangen gegen die Kurbelzapfen, halten sich auch in Bezug auf Drehung um eine vertikale Schwerpunktsaxe nicht das Gleichgewicht. Diese Kräfte bestreben sich also, die Lokomotive abwechselnd hin und her zu drehen, und da die Räder zwischen den Schienen einen gewissen, wenn auch kleinen Spielraum haben, so setzt sich jene Drehung mit der fortschreitenden Bewegung zu einer schlängelnden Bewegung zusammen, die, insbesondere wenn der Druck der Vorderräder gegen die Bahn schwach ist, ein Ausgleisen der Lokomotive veranlassen kann.

Auch diese Schlingelung kann ganz aufgehoben werden, wenn man die Triebräder mit Massen versieht, die durch ihre Centrifugalkraft die Drehung aufheben, welche durch die hin- und hergehenden Massen angeregt wird.

Nebst den bisher angeführten Elementarbewegungen kommen noch drei andere, einzig und allein von dem Bau der Lokomotive herrührende schwingende Bewegungen vor. Der zu einem Ganzen vereinigte Bau des Rahmens, des Kessels und der Cylinder wird stets durch Federn getragen, die auf den Axenbüchsen der Trieb- und Tragräder direct oder indirect aufsitzen, dieser Bau liegt also auf einer elastischen Unterlage, die möglicher Weise dreierlei Bewegungen zulässt und diese Möglichkeiten werden durch den Druck, den die Gleitstücke, wegen der im Allgemeinen schiefen Lage der Schubstangen, gegen die Führungen beim Vorwärtsfahren nach vertikaler Richtung aufwärts, beim Zurückfahren nach vertikaler Richtung abwärts ausüben, zur Wirklichkeit. Diese Bewegungen befolgen sehr komplizirte Gesetze, weil die Gleitstücke ihren Ort verändern und die Intensitäten ihrer Pressungen mit der wechselnden Neigung der Schubstangen periodisch veränderlich sind. Diese drei Bewegungen sind nun:

5) *Das Wogen.* Vertikalschwingung des Schwerpunktes. Der an den Federn hängende Bau wird durch sein Gewicht nach abwärts, durch die Elastizitätskraft der Federn und durch die Pressungen der Gleitstücke gegen die Führungsliniale nach aufwärts zur Bewegung angeregt. Allein die Elastizitätskräfte der Federn sind mit ihrem Biegunszustand, und die Pressungen der Gleitstücke gegen die Führungsliniale sind mit der Stellung der Schubstangen periodisch veränderlich, und dadurch entsteht nach vertikaler Richtung eine schwingende Bewegung des Schwerpunktes, die wir das Wogen der Lokomotive nennen wollen.

6) *Das Wanken.* (Drehung um eine durch den Schwerpunkt des Baues gehende Längenaxe). Die auf den Wagenbau nach vertikaler Richtung wirkenden Kräfte sind im Allgemeinen in Bezug auf eine durch den Schwerpunkt des Baues gehende Längenaxe nicht im Gleichgewicht, müssen daher, da sie periodisch veränderlich sind, ein Hin- und Herdrehen, also ein Wanken des ganzen Baues hervorbringen. Dadurch werden die Räder der Lokomotive bald stark, bald schwach gegen die Bahn gedrückt, und wenn in einem Moment, in welchem der Druck eines Vorderrades gegen die Bahn schwach ist, durch eine an der Bahn befindliche Unebenheit ein Stoss gegen dieses schwach niederdrückende Rad ausgeübt wird, so kann ein Ausgleisen der Lokomotive die Folge sein. Dieses Wanken, so wie auch das früher besprochene Auf- und Niederwogen der Lokomotive kann nicht

vollständig aufgehoben werden, denn die Federn müssen vorhanden sein, weil sonst die von den Unebenheiten der Bahn entstehenden Stöße zu hart wären, und die Pressungen der Gleitstücke gegen die Leitlineale können auch nicht aufgehoben werden; diese störenden Bewegungen können jedoch durch eine zweckmässige Bauart der Lokomotive so weit gemässigt werden, dass sie nicht mehr gefährlich werden. Durch welche Constructionsweise dieses möglich wird, wird sich in der Folge zeigen.

7) *Das Nicken.* (Drehung um eine durch den Schwerpunkt des Baues gehende Queraxe). Jene vertikal aufwärts wirkenden Pressungen der Federn und der Gleitstücke sind aber auch in Bezug auf eine durch den Schwerpunkt des Baues gehende horizontale Queraxe nicht im Gleichgewicht, müssen also periodische Drehungen um diese Axe, demnach ein abwechselndes Heben und Senken der Enden des auf den Federn liegenden Baues hervorbringen. Jedesmal, wenn das vordere Ende des Wagenbaues aufwärts schwingt, ist der Druck der Vorderräder gegen die Bahn schwach, und wenn in einem solchen Moment durch eine Unebenheit der Bahn die Vorderräder in die Höhe gestossen werden, kann es geschehen, dass ihre Berührung mit der Bahn aufhört und dass sie aus dem Geleise gelenkt werden. Es ist also auch diese Störung hinsichtlich des Ausgleisens sehr bedenklich, und soll daher so weit als möglich geschwächt werden, was wiederum nur durch eine geeignete Bauart der Lokomotive geschehen kann.

Die aus dem Wogen, Wanken und Nicken sich zusammensetzende Bewegung kann man das Gaukeln nennen.

Den mittleren Fortlauf der Lokomotive und die periodische Bewegung des Schwerpunktes haben wir bereits in dem vorhergehenden Abschnitte behandelt; die übrigen der genannten Bewegungen werden wir in diesem Abschnitt erschöpfend untersuchen.

Das Zucken und Schlingern.

Bewegungen einer frei hängenden Lokomotive.

Wenn man eine nicht balanzirte Lokomotive mit vier langen Ketten, welche den Rahmen an seinen vier Ecken fassen, aufhängt, so dass sie frei in der Luft schwebt, und sich wie ein Pendel, in horizontalem Sinne, nach jeder Richtung bewegen kann, hierauf den Kessel heizt, und den Dampf auf die Maschine wirken lässt, so gerathen nicht nur die Kolben, die Schubstangen, die Kurbelaxen und sämtliche Triebräder in Bewegung, sondern es entsteht auch in dem Rahmenbau und den damit verbundenen Theilen (Kessel, Dampfcylinder etc.) eine aus zwei Schwingungen zusammengesetzte Bewegung, aus einer Schwingung in der Richtung der Längsaxe der Lokomotive und aus einer drehenden Schwingung um eine Vertikalaxe. Die Ursachen, welche diese beiden Schwingungen in einer frei hängenden Lokomotive veranlassen, sind auch vorhanden, wenn die Lokomotive nicht aufgehängt, sondern auf die Bahn gestellt ist und auf derselben fortläuft, und sie sind es, welche dann die Erscheinungen verursachen, die wir Zucken und Schlingern genannt haben.

Eine genaue Kenntniss der schwingenden Bewegungen einer frei hängenden Lokomotive ist in zweifacher Hinsicht von praktischem Werth, denn zunächst lernen wir dadurch die Bewegungen kennen, welche eine auf der Bahn fortlaufende Lokomotive, vermöge ihres inneren Baues, zu machen strebt und theilweise auch wirklich macht; denn eine Lokomotive, die frei hängend Längen-Oscillationen und drehende Schwingungen zeigt,

wird, wenn man sie auf die Bahn stellt und durch Dampf fortreibt, vermöge der Ursache, welche die Längenschwingungen veranlasst, mit periodischer Geschwindigkeit fortrollen, und vermöge der Ursache, welche die drehenden Schwingungen erzeugt, ihre Bewegungsrichtung zwischen dem Geleise bald nach der einen, bald nach der andern Seite zu ändern suchen und die Energie, mit welcher sie dies zu thun strebt, wird aus der Kraft beurtheilt werden können, mit welcher die drehenden Schwingungen im frei hängenden Zustand erfolgen. Den Hauptvortheil, den wir aus dem Studium der Bewegungen einer frei hängenden Lokomotive ziehen können, besteht aber darin, dass wir dadurch die Mittel kennen lernen, durch welche diese Schwingungen ganz aufgehoben werden können, und diese Mittel sind zugleich diejenigen, welche das Zucken und Schlingern einer auf der Bahn laufenden Lokomotive ganz aufheben, denn eine Lokomotive, die im aufgehängten Zustand keinerlei Schwingungen zeigt, kann, wenn sie auf die Bahn gestellt und fortgetrieben wird, kein Bestreben zu einer Geschwindigkeits- oder Richtungsänderung der Bewegung äussern. Die Mittel, welche die Schwingungen der frei hängenden Lokomotive beseitigen, sind also zugleich die Mittel, durch welche das Zucken und Schlingern aufgehoben werden kann.

Das Zucken.

Längenschwingungen einer frei hängenden Lokomotive.

Diese Schwingungen kann man durch verschiedene Methoden berechnen. Eine Methode bietet der Grundsatz der Erhaltung des Schwerpunktes dar, und nach dieser wollen wir die Berechnung durchführen.

Eine frei hängende, durch die innere Kraft des Dampfes in Bewegung gebrachte Lokomotive kann als ein Massensystem angesehen werden, auf welches keine nach horizontaler Richtung zielende äussere Kräfte einwirken, da nun die inneren Kräfte eines solchen Systems den Ort seines Schwerpunktes nicht zu verrücken vermögen, so müssen die Bewegungen sämtlicher Massen so vor sich gehen, dass der dem Massensystem in jedem Augenblick entsprechende ideale Schwerpunkt stets an dem gleichen Ort bleibt. Hieraus folgt, dass der Rahmenbau zurückweichen muss, wenn beide Kolben vorwärts gehen, und vorwärts schwingen wird, wenn beide Kolben zurückgehen etc., dass mithin Längenschwingungen des Rahmenbaues eintreten müssen. Es sei nun Tab. XI, Fig. 43 der Grundriss, Tab. XII, Fig. 44 der Aufriss der Lokomotive in einem Augenblick der Bewegung, in welchem die Mittellinie Ax_1 des Rahmens mit einer durch den idealen Schwerpunkt B des Ganzen Systems gezogenen fixen geraden Linie Ox einen Winkel φ bildet, der vermöge der drehenden Schwingungen einen veränderlichen Werth hat, in welchem Augenblick ferner die Kurbeln der rechtseitigen und linkseitigen Maschine mit einer Horizontalebene, beziehungsweise die Winkel α und $\frac{\pi}{2} - \alpha$ bilden. o sei ein in der Linie Bx willkürlich angenommener fixer Punkt, A der Mittelpunkt der Kurbelaxe, C der Schwerpunkt aller Theile der Lokomotive, mit Ausnahme der Kolben, Kolbenstangen, Schubstangen und der Kurbelkörper.

Nennen wir:

$\overline{OB} = a$ die Entfernung des idealen Schwerpunktes des totalen Massensystems von dem fixen Punkt o ;

$\overline{AC} = b$ die Entfernung des Schwerpunktes aller in c vereinigt gedachten Massen vom Mittelpunkt der Kurbelaxe;

- $\overline{AB} = \xi$ die Entfernung des Mittelpunktes der Kurbelaxe von dem idealen Schwerpunkt B des totalen Massensystems in dem Augenblick, in welchem die Winkel α und φ gelten;
 $AP_i = x_i$ die Coordinaten eines beliebigen Punktes M der Lokomotive in Bezug auf $MP_i = y_i$ die Linie Ax_i ;
 $OP = x$ die Coordinaten des Punktes M in Bezug auf die Linie OBx ;
 $MP = y$
 G das Gewicht der vollständigen Lokomotive sammt Wassergehalt des Kessels;
 q das Gewicht eines Kurbelkörpers sammt Kurbelwarze;
 p die Entfernung des Schwerpunktes von q von der Kurbelaxe;
 s die Summe der Gewichte eines Kolbens einer Kolbenstange sammt Kreuzkopf und einer Schubstange;
 L die Länge einer Kolbenstange;
 r den Halbmesser einer Kurbel;
 s die Entfernung des Schwerpunktes einer Masse s vom Mittelpunkt des Kurbelzapfens, wenn Kurbel, Schubstange und Kolbenstange in eine geraden Linie fallen,
 so ist zunächst:

$$\left. \begin{aligned} x &= a + (x_i - \xi) \cos. \varphi - y_i \sin. \varphi \\ y &= (x_i - \xi) \sin. \varphi + y_i \cos. \varphi \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (1)$$

Nennt man m das Gewicht des im Punkt M befindlichen Massentheilchens der Lokomotive, so hat man zur Bestimmung des Ortes des idealen Schwerpunktes B die Beziehung;

$$\Sigma m x = a \Sigma m \dots \dots \dots (2)$$

wobei Σ das Summenzeichen ist, welches auf sämtliche Massenpunkte der totalen Lokomotive auszudehnen ist.

Setzt man für x den Werth, welchen die erste der Gleichungen (1) darbietet, so wird:

$$\Sigma m [a + (x_i - \xi) \cos. \varphi - y_i \sin. \varphi] = a \Sigma m \dots \dots \dots (3)$$

oder weil $\Sigma m a = a \Sigma m$ ist:

$$\Sigma m [(x_i - \xi) \cos. \varphi - y_i \sin. \varphi] = 0 \dots \dots \dots (4)$$

In diesem Ausdruck darf man $\sin. \varphi$ und $\cos. \varphi$ vor das Summenzeichen setzen, weil der Winkel φ für alle Massenpunkte der Lokomotive den gleichen Werth hat, man erhält daher statt dieser Gleichung (4) die folgende:

$$\cos. \varphi (\Sigma m x_i - \Sigma m \xi) - \sin. \varphi \Sigma m y_i = 0 \dots \dots \dots (5)$$

Nun ist aber $\Sigma m y_i = 0$, indem jedem Punkt, welcher sich linker Hand von der Mittellinie Ax , befindet, ein zweiter Punkt rechter Hand entspricht, für welchen y_i eben so gross, aber negativ ist. Dann ist ferner $\Sigma m \xi = \xi \Sigma m = \xi G$. Die Gleichung (5) wird daher, weil $\cos. \varphi$ nicht Null ist:

$$\Sigma m x_i = \xi G \dots \dots \dots (6)$$

wobei Σ wie früher auf sämtliche Massenpunkte der ganzen Lokomotive auszudehnen ist.

Redtenbacher, Gesetze des Lokomotivbaus.

Bezeichnet man für einen Augenblick durch $\Sigma, \Sigma_1, \Sigma_2$ diejenigen Theile der ganzen Summe $\Sigma m x_1$, welche sich auf die Gewichte $G - 2q - 2s$ und $2s$ beziehen, so ist, wenn man die Hin- und Herbewegung der Steuerungstheile unberücksichtigt lässt:

$$\Sigma m x_1 = \Sigma_1 + \Sigma_2 + \Sigma_3 \dots \dots \dots (7)$$

Est ist aber $\Sigma_1 = (G - 2q - 2s) b$:

$$\Sigma_2 = q \rho \cos. \alpha + q \rho \sin. \alpha = q \rho (\cos. \alpha + \sin. \alpha)$$

Ferner, wenn man die Winkel vernachlässigt, welche die Schubstangen mit den Kolbenstangen bilden:

$$\Sigma_3 = S (r \cos. \alpha + s) + S (r \sin. \alpha + s)$$

$$\Sigma_3 = S [r (\cos. \alpha + \sin. \alpha) + 2s]$$

Man hat demnach:

$$\Sigma m x_1 = b (G - 2q - 2s) + q \rho (\cos. \alpha + \sin. \alpha) + S [r (\cos. \alpha + \sin. \alpha) + 2s]$$

oder:

$$\Sigma m x_1 = (G - 2q - 2s) b + 2Ss + (q \rho + Sr) (\cos. \alpha + \sin. \alpha)$$

Führt man diesen Werth von $\Sigma m x_1$ in die Gleichung (6) ein und sucht dann den Werth von ξ , so findet man:

$$\xi = \frac{(G - 2q - 2s) b + 2Ss}{G} + \frac{q \rho + Sr}{G} (\cos. \alpha + \sin. \alpha) \dots \dots \dots (8)$$

Der Werth von ξ ist, wie man sieht, mit dem Winkel α periodisch veränderlich, d. h. die Kurbelaxe der Lokomotive, der Rahmenbau und alle mit demselben starr verbundenen Körper bewegen sich daher bei jeder Umdrehung der Triebräder vorwärts und rückwärts, oder die Lokomotive macht periodische Längenschwingungen. Von $\alpha = 0$ bis $\alpha = 45^\circ$ nimmt die Summe $\cos. \alpha + \sin. \alpha$ und nimmt folglich auch der Werth von ξ fortwährend zu, der Rahmen bewegt sich also in dieser Zeit rückwärts. Von $\alpha = 45^\circ$ bis $\alpha = 180 + 45^\circ$ nimmt der Werth von $\sin. \alpha + \cos. \alpha$ und nimmt folglich auch ξ fortwährend ab, und in dieser Zeit bewegt sich der Rahmen vorwärts.

Der grösste Werth von ξ , nämlich der dem Winkel 45° entsprechende ist:

$$\frac{(G - 2q - 2s) b + 2Ss}{G} + \frac{q \rho + Sr}{G} (\sin. 45^\circ + \cos. 45^\circ) =$$

$$\frac{(G - 2q - 2s) b + 2Ss}{G} + \frac{q \rho + Sr}{G} \sqrt{2}$$

Der kleinste Werth von ξ , nämlich der dem Winkel $180 - 45$ entsprechende ist:

$$\frac{(G - 2q - 2s) b + 2Ss}{G} + \frac{q \rho + Sr}{G} [\sin. (180 + 45^\circ) + \cos. (180 + 45^\circ)] =$$

$$\frac{(G - 2q - 2s) b + 2Ss}{G} - \frac{q \rho + Sr}{G} \sqrt{2}$$

Die ganze Verschiebung des Rahmens während jeder Umdrehung der Triebräder ist demnach (die Differenz aus dem grössten und kleinsten Werth von ξ):

$$\frac{qe + sr}{G} 2\sqrt{2}$$

Sie ist, wie man sieht, ganz unabhängig, sowohl von der Geschwindigkeit, so wie auch von dem Gesetze, nach welchem die drehende Bewegung der Triebaxe erfolgt, und richtet sich vorzugsweise nur nach dem Verhältniss $\frac{s}{G}$ zwischen den hin- und hergehenden Massen und der ganzen Masse der Lokomotive. Da dieses Verhältniss jederzeit einen sehr kleinen Werth hat, so beträgt diese Verschiebung allerdings nicht viel, allein wenn eine Lokomotive auf der Bahn im schnellen Lauf ist, wobei die Triebräder in einer Sekunde circa 3 Umdrehungen machen, kommen in jeder Sekunde 3 solche Schüttlungen vor, sie treten also dann mit sehr grosser Heftigkeit auf.

Für eine Personenlokomotive kann man nehmen:

$$G = 24000 \text{ Kilg.} \quad q = 60 \text{ Kilg.} \quad s = 224 \text{ Kilg.}$$

$$r = 0.23 \text{ Meter} \quad e = 0.18 \text{ Meter.}$$

und dann wird:

$$\frac{qe + sr}{G} 2\sqrt{2} = 0.007 \text{ Meter.}$$

Das Zucken beträgt also hier nur 7 Millimeter, allein wenn man sich vorstellt, dass diese grosse Masse in jeder Sekunde 3 mal und jedesmal um 7 Millimeter geschüttelt wird, so wird man wohl erkennen, dass dies eine sehr heftige Bewegung sein müsse, die zunächst auf die Verbindung aller Theile der Maschine merklich nachtheilig wirken kann, dann aber noch ein abzuckendes Anziehen der Lokomotive zur Folge haben muss.

Beträchtlicher als in obigem Falle wird die Zuckung oder Schüttlung bei Maschinen mit gekuppelten Rädern, wegen der Masse der Kupplungsstangen, die ebenfalls in s eingerechnet werden müssen, vorausgesetzt, dass die Bewegungsrichtung der Kupplungsstangen mit jener der Schubstangen übereinstimmt, wie dies bei gekuppelten Maschinen mit aussen liegenden Cylindern der Fall ist. Bei Maschinen mit innen liegenden Cylindern ist es dagegen möglich, dass die äusseren Kupplungsstangen die Schüttlung vermindern, dies ist nämlich der Fall, wenn die äusseren Kurbeln der Kupplungsstangen gegen die inneren Maschinenkurbeln um 180° verstellt sind.

Bei Güterlokomotiven mit äusseren Cylindern und äusseren Schub- und Kupplungsstangen ist es, um die Schüttlung zu schwächen, gut, diese Stangen alle gerade nur so stark zu halten, als es für die Sicherheit durchaus nothwendig ist.

Bei nicht gekuppelten Maschinen ist es aber hinsichtlich der Schüttlung ganz gleichgültig, ob die Cylinder innen oder aussen liegen, weil diese Lage der Cylinder in diesem Falle auf das Gewicht der Schubstange und überhaupt auf das Gewicht der hin- und hergehenden Massen beinahe keinen Einfluss hat.

Es ist schon oben erwähnt worden, dass das Zucken wesentlich nur von dem Verhältniss $\frac{s}{G}$ abhängt; so lange dieses Verhältniss seinen Werth nicht ändert, ist es also in Betreff des Zuckens ganz gleichgültig, wie die Maschine sonst gebaut ist, ob sie äussere oder innere Cylinder hat, ob die Triebräder vor oder hinter der Feuerbüchse angebracht sind und wie überhaupt die Radstellung beschaffen ist. Auch ist es gleichgültig, ob die Spurweite gross oder klein ist, ob äussere oder innere Rahmen genommen

werden, ob der Schwerpunkt des Baues weiter vorn oder weiter zurück liegt, ob er hoch oder tief liegt u. s. w., mit einem Wort: das Zucken schreibt über den Bau der Locomotive nichts vor, ausgenommen ein möglichst geringes Gewicht der hin- und hergehenden Masse; und selbst auch von dieser Anforderung kann man sich vollständig befreien, wenn man balanzirende Massen anbringt, welche, wie wir sogleich sehen werden, das Zucken vollständig beseitigen.

Aufhebung der Längenschwingungen oder des Zuckens durch Massen.

Es gibt zwei Mittel, durch welche das Zucken ganz aufgehoben werden kann, nämlich durch Anbringung entweder von hin- und hergehenden oder von rotirenden Massen. Das Mittel der rotirenden Massen kann bei allen Arten von Lokomotiven leicht angewendet werden, jenes der hin- und hergehenden Massen jedoch nur bei Locomotiven mit innen liegenden Cylindern und mit gekuppelten Rädern. Macht man nämlich bei einer solchen Maschine das Gewicht der auf einer Seite der Lokomotive befindlichen Kuppelungsstangen gleich $\frac{e q + r s}{r}$, die äusseren Kurbeln der Kuppelungsstangen so lang als die inneren Kurbeln und stellt sie den innern Kurbeln diametral gegenüber, so ist klar, dass dann die Schüttlung ganz aufgehoben wird, denn bei einer solchen Einrichtung ändert der den sämtlichen hin- und hergehenden Massen entsprechende Schwerpunkt seine Lage gegen die Rahmen nicht, es ist also kein Grund vorhanden, wesshalb der Schwerpunkt des Rahmenbaues seinen Ort verändern sollte. Eine solche Lokomotive wird also im aufgehängten Zustand keine Längenschwingungen machen, und wenn sie auf der Bahn läuft, kein Zucken zeigen.

Wir wollen nun sehen, ob und auf welche Weise die Längenschwingungen an frei hängenden Lokomotiven durch Anbringung von rotirenden Massen aufgehoben werden können.

Wir versehen jedes dieser Räder mit Gewichten von gleicher Grösse (Fig. 44). Es sei Q eines dieser Gewichte, e_1 die Entfernung des Schwerpunktes dieser Gewichte von der geometrischen Axe der Kurbelwelle, $180^\circ - \gamma$ und $180^\circ + \gamma$ die Winkel, welche die nach den Schwerpunkten gehenden Radien mit den Richtungen der Kurbeln bilden.

Wir berechnen zunächst die Längenschwingungen der Lokomotive, wenn sie mit diesen Gewichten versehen ist.

Es gilt auch hier wiederum wie bei der nicht balanzirten Lokomotive die Gleichung (6) Seite 113, nämlich

$$\Sigma mx_1 = \Sigma G \dots \dots \dots (9)$$

allein das Summenzeichen muss hier auch auf die Balanzirgewichte Q ausgedehnt werden.

Derjenige Theil der Summe Σmx_1 , welcher sich auf die Balanzirgewichte bezieht, ist offenbar

$$- e_1 Q \cos. (\alpha - \gamma) - e_2 Q \cos. (90 - \alpha - \gamma) = - e_1 Q [\cos. (\alpha - \gamma) + \sin. (\alpha + \gamma)]$$

Die Theile der Summe Σmx_1 , welche sich auf die übrigen Massen der Lokomotive beziehen, sind hier wie bei der nicht balanzirten Lokomotive

$$(G - 2 q - 2 s) b + 2 s s + (q e + r s) (\sin. \alpha + \cos. \alpha)$$

und somit erhalten wir:

$$G \xi = (G - 2q - 2S) b + 2Ss + (q\rho + rS) (\sin \alpha + \cos \alpha) - \rho_2 Q [\cos (\alpha - \gamma) + \sin (\alpha + \gamma)]$$

oder auch weil

$$\cos (\alpha - \gamma) + \sin (\alpha + \gamma) = (\sin \alpha + \cos \alpha) (\sin \gamma + \cos \gamma).$$

$$G \xi = (G - 2q - 2S) b + 2Ss + [q\rho + rS - \rho_2 Q (\sin \gamma + \cos \gamma)] (\sin \alpha + \cos \alpha)$$

Hieraus folgt;

$$\xi = \frac{(G - 2q - 2S) b + 2Ss}{G} + \frac{q\rho + rS - \rho_2 Q (\sin \gamma + \cos \gamma)}{G} (\sin \alpha + \cos \alpha) \dots (10)$$

Wenn keine Längenschwingungen stattfinden sollen, so muss ξ denselben Werth haben für jeden Werth von α ; dies ist aber nur möglich, wenn

$$q\rho + rS - Q\rho_2 (\sin \gamma + \cos \gamma) = 0$$

oder wenn

$$\sin \gamma + \cos \gamma = \frac{q\rho + rS}{Q\rho_2} \dots (11)$$

Da diese Gleichung drei unbestimmte Grössen, nämlich γ , Q und ρ_2 enthält, so können die Längenschwingungen durch sehr verschiedene Balanzirungsgewichte aufgehoben werden. Wenn ρ_2 und γ angenommen wird, findet man Q , wenn Q und ρ_2 so angenommen wird, dass $\frac{q\rho + rS}{Q\rho_2} = < 1,414$ ausfällt, findet man ein entsprechendes γ .

Wenn es sich nur um die Aufhebung der Längenschwingungen handelte, könnte man $\gamma = 0$ oder $\gamma = 180^\circ$ nehmen und dann fände man $Q\rho_2 = q\rho + rS$, allein es handelt sich auch um die Beseitigung der drehenden Schwingungen, und dies erfordert, wie wir sehen werden, abermals eine gewisse Beziehung zwischen $Q\rho_2$ und γ , es ist daher vorläufig angemessener, für γ keinen speziellen Werth anzunehmen, sondern abzuwarten, welche Bedingung die Aufhebung der drehenden Schwingungen vorschreibt.

Longitudinalschwingung einer aufgehängten Lokomotive der allgemeinsten Art.

Wir wollen nun die Längenschwingungen einer Lokomotive bestimmen, die folgende allgemeine Einrichtungen hat. 1) Die Entfernung eines Dampfeylindermittels vom Mittel Ax_1 der Maschine sei e ; 2) die Maschine sei aussen mit Kupplungsstangen versehen; 3) die Räder seien mit Balanzirungsmassen versehen. Es sei (Tab. XII. Fig. 44 und Fig. 45.):

- e die Entfernung des Mittels eines Cylinders vom Mittel Ax_1 der Lokomotive;
- r der Halbmesser einer Maschinenkurbel;
- s das Gewicht eines Kolbens, einer Kolbenstange und einer Schubstange;
- q das Gewicht der Körper, die eine Maschinenkurbel bilden;

- ρ die Entfernung des Schwerpunktes eines Gewichts q von der geometrischen Axe der Kurbelwelle;
 e_1 die Entfernung des Mittels einer Kupplungsstange vom Mittel Ax der Lokomotive.
 S_1 das Gewicht einer Kupplungsstange;
 r_1 der Halbmesser einer Kupplungsstangenkurbel;
 s_1 { Die Entfernungen der Schwerpunkte der Massen s und s_1 von den Kurbelzapfen;
 s_2 }
 90° Winkel, den die Richtungen der Kupplungskurbeln gegeneinander bilden;
 β Winkel, unter welchem die rechtseitige Kupplungskurbel gegen die rechtseitige Maschinenkurbel geneigt ist;
 q_1 Gewicht einer Kurbel der Kupplungsstange;
 ρ_1 Entfernung des Schwerpunktes eines Gewichts q_1 von der geometrischen Axe der Kurbelwelle;
 Q Gewicht einer Balanzirungsmasse;
 e_2 Entfernung des Schwerpunktes eines Gewichts Q von der geometrischen Drehungsaxe der Kurbelwelle;
 e_3 Entfernung des Schwerpunktes eines Gewichts Q von der durch Ax_1 gelegten Verticalebene;
 γ Winkel, den die Richtungen von ρ mit den Verlängerungen von r bilden; (Fig. 44.)

Es besteht auch hier wiederum die Gleichung (6), nämlich:

$$\Sigma mx_1 = \xi G.$$

Die Glieder von Σmx_1 , welche die einzelnen Körper der ganzen Lokomotive liefern, sind hier folgende:

| Die Glieder, welche entsprechen den Massen | sind |
|--|--|
| $G - 2q - 2S - 2q_1 - 2S_1 - 2Q$ | $b[G - 2q - 2S - 2q_1 - 2S_1 - 2Q]$ |
| $2q$ | $q\rho(\cos.\alpha + \sin.\alpha)$ |
| $2S$ | $S[r(\cos.\alpha + \sin.\alpha) + 2s]$ |
| $2q_1$ | $q_1\rho_1[\cos.(\alpha + \beta) + \sin.(\alpha + \beta)]$ |
| $2S_1$ | $S_1\{r_1[\cos.(\alpha + \beta) + \sin.(\alpha + \beta)] + 2s_1\}$ |
| $2Q$ | $-Qe_2\{\sin.(\alpha + \gamma) + \cos.(\alpha - \gamma)\}$ |

wir erhalten daher für ξ folgenden Werth

$$\begin{aligned}
 \xi = & \frac{b(G - 2q - 2S - 2q_1 - 2S_1 - 2Q) + 2Ss + 2S_1s_1}{G} + \\
 & \frac{q\rho + Sr - e_2Q(\sin.\gamma + \cos.\gamma)}{G} (\sin.\alpha + \cos.\alpha) + \\
 & \frac{(q_1\rho_1 + S_1r_1)}{G} \cos.\beta (\sin.\alpha + \cos.\alpha) + \frac{(q_1\rho_1 + S_1r_1)}{G} \sin.\beta (\cos.\alpha - \sin.\alpha)
 \end{aligned}$$

Wenn die Längenschwingung nicht eintreten soll, muss ξ für jeden Werth von α den gleichen Werth haben, und dies ist nur dann der Fall, wenn β entweder 0 oder 180° ist und wenn dann ferner:

$$q \rho + S r - \rho_2 Q (\sin. \gamma + \cos. \gamma) + (q_1 \rho_1 + S_1 r_1) \cos. \beta = 0$$

oder weil $\cos. 0^\circ = +1$, $\cos. 180^\circ = -1$ ist, so wird diese Bedingungsgleichung

$$q \rho + S r - \rho_2 Q (\sin. \gamma + \cos. \gamma) \pm (q_1 \rho_1 + S_1 r_1) = 0 \dots \dots \dots (12)$$

wobei das obere Zeichen gilt, wenn die auf einer Seite der Linie Λx_1 befindlichen Kurbeln parallel gestellt sind und das untere Zeichen, wenn diese Kurbeln diametral gegenüber stehen.

Das Schlingern.

Drehende Schwingungen einer frei hängenden Maschine.

Eine aufgehängte Lokomotive ist als ein System von Massen zu betrachten, welches in horizontalem Sinne nach jeder Richtung frei beweglich ist, und das von keinen äusseren Horizontalkräften affizirt wird. In einem solchen System halten sich alle inneren Horizontalkräfte das Gleichgewicht, und wenn sich die Massen des Systems gegen einander bewegen, so muss diess in einer solchen Weise geschehen, dass die sämtlichen den Beschleunigungen der Massentheilchen entsprechenden Kräfte die Bedingungen des Gleichgewichts erfüllen, es muss daher die Summe der statischen Momente dieser Kräfte in Bezug auf eine durch den idealen Schwerpunkt des Systems gehende Vertikalaxe gleich Null sein.

Um das hier mit Worten Gesagte analytisch auszudrücken, wählen wir die gleichen Bezeichnungen, die zur Untersuchung der Längenschwingungen gedient haben, und werden im Verlauf der Rechnung nur noch einige Bezeichnungen hinzufügen.

Die beschleunigenden Kräfte eines im Punkt M befindlichen Massentheilchens, dessen Gewicht m ist, sind:

$$\frac{m}{g} \frac{d^2 x}{dt^2} \quad \frac{m}{g} \frac{d^2 y}{dt^2}$$

Diese Kräfte äussern ein Bestreben, die ganze Lokomotive um eine durch den idealen Schwerpunkt B gehende Vertikalaxe zu drehen, und diesem Bestreben entspricht ein Moment von der Grösse:

$$\frac{m}{g} \frac{d^2 y}{dt^2} x - \frac{m}{g} \frac{d^2 x}{dt^2} y$$

Die Summe der Momente aller beschleunigenden Kräfte sämtlicher Massentheilchen ist demnach:

$$\Sigma \frac{m}{g} \left(\frac{d^2 y}{dt^2} x - \frac{d^2 x}{dt^2} y \right)$$

wobei das Summenzeichen Σ auf sämtliche Massentheilchen, aus welchem die Lokomotive besteht, auszudehnen ist.

Diese Summe muss aber für die, im frei hängenden Zustand durch den inneren Dampfdruck bewegte Lokomotive gleich Null sein. Man hat daher zur Berechnung der drehenden Schwingung der Lokomotive die Gleichung:

$$\Sigma m \left(\frac{d^2 y}{dt^2} x - \frac{d^2 x}{dt^2} y \right) = 0$$

Aus dieser Gleichung folgt durch Integration:

$$\Sigma m \left(x \frac{dy}{dt} - y \frac{dx}{dt} \right) = \text{Const.}$$

Wenn die Lokomotive in dem Augenblick, wenn die Einwirkung des Dampfes auf die Kolben beginnt, keine Geschwindigkeit hat, so ist in demselben für jeden Punkt der Lokomotive $\frac{dx}{dt}$ und $\frac{dy}{dt}$ gleich Null. Unter dieser Voraussetzung verschwindet die Constante, und die Gleichung der Bewegung wird:

$$\Sigma m \left(x \frac{dy}{dt} - y \frac{dx}{dt} \right) = 0 \dots \dots \dots (1)$$

Nun ist schon Seite (113) gefunden worden:

$$\left. \begin{aligned} x &= a + (x_1 - \xi) \cos. \varphi - y_1 \sin. \varphi \\ y &= (x_1 - \xi) \sin. \varphi + y_1 \cos. \varphi \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (2)$$

Durch Differenziation findet man hieraus:

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= -(x_1 - \xi) \sin. \varphi \frac{d\varphi}{dt} + \cos. \varphi \left(\frac{dx_1}{dt} - \frac{d\xi}{dt} \right) - y_1 \cos. \varphi \frac{d\varphi}{dt} - \sin. \varphi \frac{dy_1}{dt} \\ \frac{dy}{dt} &= (x_1 - \xi) \cos. \varphi \frac{d\varphi}{dt} + \sin. \varphi \left(\frac{dx_1}{dt} - \frac{d\xi}{dt} \right) - y_1 \sin. \varphi \frac{d\varphi}{dt} + \cos. \varphi \frac{dy_1}{dt} \end{aligned}$$

Allein weil die Entfernung jedes Punktes von der Mittellinie Bx_1 der Lokomotive während ihrer Bewegung unverändert bleibt, so ist für jeden Punkt der Lokomotive $\frac{dy_1}{dt} = 0$, demnach:

$$\left. \begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= -[(x_1 - \xi) \sin. \varphi + y_1 \cos. \varphi] \frac{d\varphi}{dt} + \cos. \varphi \left(\frac{dx_1}{dt} - \frac{d\xi}{dt} \right) \\ \frac{dy}{dt} &= [(x_1 - \xi) \cos. \varphi - y_1 \sin. \varphi] \frac{d\varphi}{dt} + \sin. \varphi \left(\frac{dx_1}{dt} - \frac{d\xi}{dt} \right) \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (3)$$

Durch Combination der Gleichungen (2) und (3) findet man nach einigen Reduktionen:

$$x \frac{dy}{dt} - y \frac{dx}{dt} = \left\{ (x_1 - \xi)^2 + y_1^2 + a [(x_1 - \xi) \cos. \varphi - y_1 \sin. \varphi] \right\} \frac{d\varphi}{dt} + (a \sin. \varphi - y_1) \left(\frac{dx_1}{dt} - \frac{d\xi}{dt} \right)$$

Substituiert man diesen Werth in (1) so wird derselbe:

$$0 = \frac{d\varphi}{dt} \Sigma m [(x_i - \xi)^2 + y_i^2] + a \cdot \frac{d[\sin. \varphi \Sigma m (x_i - \xi)]}{dt} - \Sigma m y_i \frac{dx_i}{dt} - a \sin. \varphi \frac{d\varphi}{dt} \Sigma m y_i + \frac{d\xi}{dt} \Sigma m y_i \quad \dots (4)$$

die zwei letzten Glieder dieses Ausdrucks sind aber wegzulassen, denn beinahe jedem Massenpunkt, welcher sich auf einer Seite der Axe Bx_i der Lokomotive in einer grossen Entfernung y_i befindet, entspricht auf der anderen Seite ein eben so grosser Massenpunkt, für welchen y_i eben so gross aber negativ ist, es heben sich also in der Summe $\Sigma m y_i$ die Glieder paarweise auf. Eine Ausnahme hievon machen nur die dem Gewichte nach unbedeutenden Bestandtheile, welche nur auf einer Seite der Lokomotive vorkommen.

Durch Weglassung der zwei letzten Glieder wird die Gleichung der Bewegung

$$0 = \frac{d\varphi}{dt} \Sigma m [(x_i - \xi)^2 + y_i^2] + a \frac{d[\sin. \varphi \Sigma m (x_i - \xi)]}{dt} - \Sigma m y_i \frac{dx_i}{dt} \quad \dots (5)$$

Allein es ist $\Sigma m x_i = \xi \Sigma m = \Sigma m \xi$, demnach $\Sigma m (x_i - \xi) = 0$, daher erhalten wir statt (5) folgende Gleichung

$$0 = \frac{d\varphi}{dt} \Sigma m [(x_i - \xi)^2 + y_i^2] - \Sigma m y_i \frac{dx_i}{dt} \quad \dots (6)$$

Es ist aber

$$\Sigma m [(x_i - \xi)^2 + y_i^2] = \Sigma m (x_i^2 + y_i^2) + \xi^2 \Sigma m - 2\xi \Sigma m x_i$$

oder weil $\Sigma m x_i = \xi \Sigma m$ und $\Sigma m = G$ ist:

$$\Sigma m [(x_i - \xi)^2 + y_i^2] = \Sigma m (x_i^2 + y_i^2) - \xi^2 G$$

daher wird die Gleichung (6) der Bewegung

$$0 = [\Sigma m (x_i^2 + y_i^2) - \xi^2 G] \frac{d\varphi}{dt} - \Sigma m y_i \frac{dx_i}{dt} \quad \dots (7)$$

Die hier angedeuteten Summen müssen nun für alle Theile der Lokomotive berechnet werden. Bezeichnen wir zur Abkürzung der Sprache durch \mathfrak{R} , \mathfrak{K} und \mathfrak{S} diejenigen Theile der totalen Summe $\frac{d\varphi}{dt} \Sigma m (x_i^2 + y_i^2) - \Sigma m y_i \frac{dx_i}{dt}$, welche die Massen $G - 2q - 2s$, $2q$, $2s$ liefern, so können wir die Gleichung (7) der Bewegung auch schreiben

$$0 = \mathfrak{R} + \mathfrak{K} + \mathfrak{S} - \xi^2 G \frac{d\varphi}{dt} \quad \dots (8)$$

\mathfrak{R} bezieht sich auf alle Theile der Lokomotive mit Ausnahme der Kolben, der Schubstangen und Gleitstücke, der Kolbenstangen und der Kurbelkörper (derjenigen Massen, die über die Rundung der Axe hinausragen). Die Hin- und Herbewegung der Steuerungstheile und einiger Pumpentheile können wir vernachlässigen. Da $m(x_1^2 + y_1^2)$ das Trägheitsmoment eines Massentheilchens in Bezug auf eine durch den Mittelpunkt Λ der Kurbel gehende Verticalaxe ausdrückt und $\frac{dx_1}{dt}$ für jeden Punkt, auf welchen \mathfrak{R} bezogen werden muss, verschwindet, so reducirt sich der Werth von \mathfrak{R} auf das Produkt aus $\frac{d\varphi}{dt}$ in das Trägheitsmoment aller zu \mathfrak{R} gehörigen Massen in Bezug auf die durch Λ gehende Verticalaxe. Dieses Trägheitsmoment, als Gewicht ausgedrückt, wollen wir durch $(G - 2q - 2s)k^2$ ausdrücken, dann haben wir

$$\mathfrak{R} = (G - 2q - 2s)k^2 \frac{d\varphi}{dt} \dots \dots \dots (9)$$

\mathfrak{K} bezieht sich auf die beiden Kurbelkörper.

Der mathematisch genaue Werth von \mathfrak{K} ist äusserst zusammengesetzt, jedoch von keinem erheblichen Einfluss, denn die Kurbelmassen sind im Vergleich zu den übrigen Massen sehr klein; wir dürfen uns daher mit einem Annäherungswerthe begnügen und einen solchen erhalten wir, wenn wir \mathfrak{K} so berechnen, als wäre die Masse jeder Kurbel in ihrem Schwerpunkt vereinigt. Unter dieser Voraussetzung ist

für die Masse

| der Vorderkurbel | der Hinterkurbel |
|---|--|
| $x_1 = \rho \cos. \alpha$ | $x_1 = \rho \sin. \alpha$ |
| $y_1 = -e$ | $y_1 = +e$ |
| $\frac{dx_1}{dt} = -\rho \sin. \alpha \frac{d\alpha}{dt}$ | $\frac{dx_1}{dt} = \rho \cos. \alpha \frac{d\alpha}{dt}$ |

demnach wird

$$\mathfrak{K} = [q(\rho^2 \cos.^2 \alpha + e^2) + q(\rho^2 \sin.^2 \alpha + e^2)] \frac{d\varphi}{dt} - q e \rho \sin. \alpha \frac{d\alpha}{dt} - q e \rho \cos. \alpha \frac{d\alpha}{dt}$$

oder

$$\mathfrak{K} = q(\rho^2 + 2e^2) \frac{d\varphi}{dt} - q e \rho (\sin. \alpha + \cos. \alpha) \frac{d\alpha}{dt} \dots \dots \dots (10)$$

wobei $2e$ die Entfernung der Axen der beiden Dampfcylinder bezeichnet.

© fällt ebenfalls äusserst zusammengesetzt aus, wenn man seinen Werth mathematisch genau bestimmen will, wir wollen uns also auch hier mit einer Annäherung begnügen, die wir dadurch erhalten, dass wir uns denken, es sei die Masse einer Schubstange, einer Kolbenstange und eines Kolbens längs einer geraden Linie L gleichmässig vertheilt, deren Länge so gross ist, als der Abstand des Kolbens von der Kurbelwarze bei ausgestreckter Stellung der Schubstange. Auch wollen wir die Neigungen der Schubstangen gegen die Kolbenstangen unberücksichtigt lassen.

Nehmen wir in den Linien I, zwei Punkte an, die von ihren Kurbeln um u entfernt sind, so ist

für den Punkt der Vorderkurbel für den Punkt der Hinterkurbel.

$$x_1 = r \cos. \alpha + u$$

$$x_1 = r \sin. \alpha + u$$

$$y_1 = -e$$

$$y_1 = +e$$

$$\frac{dx_1}{dt} = -r \sin. \alpha \frac{d\alpha}{dt}$$

$$\frac{dx_1}{dt} = r \cos. \alpha \frac{d\alpha}{dt}$$

Nennen wir λ die ganze Länge einer Linie I, so ist auf jede Längeneinheit ein Gewicht $\frac{S}{\lambda}$ zu vertheilen, und auf ein unendlich kleines Stückchen du der Länge ein Gewicht $\frac{S}{\lambda} du$. Diese beiden Gewichtstheilchen liefern zusammen in der Summe \otimes folgenden Betrag:

$$\left\{ [(r \cos. \alpha + u)^2 + e^2] \frac{S}{\lambda} du + [(r \sin. \alpha + u)^2 + e^2] \frac{S}{\lambda} du \right\} \frac{d\varphi}{dt} - e r \sin. \alpha \frac{d\alpha}{dt} \frac{S}{\lambda} du - e r \cos. \alpha \frac{d\alpha}{dt} \frac{S}{\lambda} du$$

oder

$$[r^2 + 2e^2 + 2u^2 + 2ru(\cos. \alpha + \sin. \alpha)] \frac{S}{\lambda} du \frac{d\varphi}{dt} - e r (\sin. \alpha + \cos. \alpha) \frac{d\alpha}{dt} \frac{S}{\lambda} du$$

Die Summe \otimes wird nun gefunden, wenn man diesen letzten Ausdruck von $u=0$ bis $u=\lambda$ integrirt, und man findet

$$\otimes = [(r^2 + 2e^2) S + \frac{2}{3} S \lambda^2 + \lambda r S (\cos. \alpha + \sin. \alpha)] \frac{d\varphi}{dt} - e r S (\sin. \alpha + \cos. \alpha) \frac{d\alpha}{dt} \quad \dots (11)$$

Wenn wir nun die für ϑ , \mathfrak{R} und \otimes erhaltenen Werthe in der Gleichung (8) einführen, so ergibt sich:

$$0 = (G - 2q - 2S) k^2 \frac{d\varphi}{dt} + q(e^2 + 2e^2) \frac{d\varphi}{dt} - q e \rho (\sin. \alpha + \cos. \alpha) \frac{d\alpha}{dt}$$

$$+ [(r^2 + 2e^2) S + \frac{2}{3} S \lambda^2 + \lambda r S (\cos. \alpha + \sin. \alpha)] \frac{d\varphi}{dt} - e r S (\sin. \alpha + \cos. \alpha) \frac{d\alpha}{dt} - \xi^2 G \frac{d\varphi}{dt}$$

oder wenn man die Glieder, welche $\frac{d\varphi}{dt}$ und jene, welche $\frac{d\alpha}{dt}$ als Faktoren enthalten zusammenfasst.

$$0 = \left\{ -\xi^2 G + (G - 2q - 2S) k^2 + q(e^2 + 2e^2) + S [(r^2 + 2e^2) + \frac{2}{3} \lambda^2 + \lambda r (\sin. \alpha + \cos. \alpha)] \right\} \frac{d\varphi}{dt} \\ - (q \rho + r S) e (\sin. \alpha + \cos. \alpha) \frac{d\alpha}{dt}$$

oder endlich wenn man für ξ seinen Werth setzt, den wir früher in der Untersuchung über die Längenschwingung gefunden haben, und welchen die Gleichung (8) Seite 114 darbietet

$$0 = \left\{ \begin{aligned} & - \left[\frac{(G - 2q - 2S)b + 2Ss}{G} + \frac{qe + Sr}{G} (\sin. \alpha + \cos. \alpha) \right]^2 G \\ & + (G - 2q - 2S)k^2 + q(r^2 + 2c^2) \\ & + S \left[(r^2 + 2c^2) + \frac{2}{3} \lambda^2 + \lambda r (\sin. \alpha + \cos. \alpha) \right] \end{aligned} \right\} \frac{d\varphi}{dt} \dots \dots \dots (12)$$

$$- (qe + rS)e (\sin. \alpha + \cos. \alpha) \frac{d\alpha}{dt}$$

Setzt man zur Abkürzung

$$\left. \begin{aligned} (G - 2q - 2S)k^2 + q(r^2 + 2c^2) + S(r^2 + 2c^2 + \frac{2}{3} \lambda^2) - \frac{[(G - 2q - 2S)b + 2Ss]^2}{G} &= \mathfrak{A} \\ - 2 \frac{[(G - 2q - 2S)b + 2Ss][qe + Sr]}{G} + S\lambda r &= \mathfrak{B} \\ - \frac{(qe + rS)^2}{G} &= \mathfrak{C} \\ - (qe + rS)e &= \mathfrak{D} \end{aligned} \right\} \dots \dots (13)$$

und lässt in der Gleichung (12) dt weg, so folgt aus derselben

$$d\varphi = - \frac{\mathfrak{D} (\sin. \alpha + \cos. \alpha) d\alpha}{\mathfrak{A} + \mathfrak{B} (\sin. \alpha + \cos. \alpha) + \mathfrak{C} (\sin. \alpha + \cos. \alpha)^2}$$

Das Integrale dieser Gleichung würde das Gesetz der drehenden Schwingung bestimmen. Es lässt sich in der That durchführen, allein das Ergebniss ist ein so ausserordentlich complizirtes, dass es wohl angemessen ist, sich mit einer Annäherung zu begnügen. Berücksichtigt man die Kleinheit der Massen q und s gegen die ungeheure Masse G , so ist klar, dass man keinen merklichen Fehler begehen wird, wenn man in den Ausdrücken für \mathfrak{A} , \mathfrak{B} , \mathfrak{C} nur diejenigen Glieder beibehält, welche G als Faktor enthalten, dann wird aber

$$\begin{aligned} \mathfrak{A} &= G(k^2 - b^2) & \mathfrak{B} &= -2b(qe + rS) + S\lambda r & \mathfrak{C} &= 0 \\ \mathfrak{D} &= -(qe + rS)e \end{aligned}$$

und dann wird die Gleichung für $d\varphi$

$$d\varphi = - \frac{(qe + rS)e (\sin. \alpha + \cos. \alpha) d\alpha}{G(k^2 - b^2) + [-2b(qe + rS) + S\lambda r] (\sin. \alpha + \cos. \alpha)} \dots \dots \dots (14)$$

allein hier ist das zweite Glied des Nenners gegen das erste eine verschwindend kleine Grösse, indem jederzeit k gegen b sehr gross ist: dieses zweite Glied darf also auch vernachlässigt werden und dann wird

$$d\varphi = - \frac{(qe + rS)e (\sin. \alpha + \cos. \alpha) d\alpha}{G(k^2 - b^2)} \dots \dots \dots (15)$$

Hieraus folgt nun durch Integration:

$$\varphi = + \frac{(q \rho + Sr) e}{G (k^2 - b^2)} (\cos. \alpha - \sin. \alpha) + \text{Const.} \dots \dots \dots (16)$$

Für die grössten und kleinsten Werthe von φ muss $\frac{d\varphi}{d\alpha} = 0$ sein, also vermöge (15).

$$\sin. \alpha + \cos. \alpha = 0$$

Dies ist der Fall, wenn $\alpha = 180 - 45$ und $\alpha = 360 - 45^\circ$. Diese grössten und kleinsten Werthe des Winkels φ sind demnach:

$$\begin{aligned} & - \frac{(q \rho + Sr) e}{G (k^2 - b^2)} 2 \sqrt{\frac{1}{2}} + \text{Const.} \\ & + \frac{(q \rho + Sr) e}{G (k^2 - b^2)} 2 \sqrt{\frac{1}{2}} + \text{Const.} \end{aligned}$$

Der totale Schwingungswinkel ist demnach (in Theilen des Halbmessers ausgedrückt):

$$\frac{(q \rho + Sr) e}{G (k^2 - b^2)} 4 \sqrt{\frac{1}{2}} = 2.828 \frac{(q \rho + Sr) e}{G (k^2 - b^2)} \dots \dots \dots (17)$$

In dem Moment, wenn durch die Einwirkung des Dampfes die Bewegung der Lokomotive beginnt, haben die Kurbeln eine gewisse Stellung, hat also α einen gewissen Werth, den wir mit α_0 bezeichnen wollen. Für den Beginn der Bewegung ist demnach wegen (16)

$$0 = \frac{(q \rho + Sr) e}{G (k^2 - b^2)} (\cos. \alpha_0 - \sin. \alpha_0) + \text{Const.}$$

Zieht man diesen Ausdruck von (16) ab, so erhält man:

$$\varphi = \frac{q \rho + Sr}{G (k^2 - b^2)} e \left\{ [\cos. \alpha - \cos. \alpha_0] - [\sin. \alpha - \sin. \alpha_0] \right\}$$

oder:

$$\varphi = - \frac{q \rho + Sr}{G (k^2 - b^2)} e 2 \sin. \frac{\alpha - \alpha_0}{2} \left[\sin. \frac{\alpha + \alpha_0}{2} + \cos. \frac{\alpha + \alpha_0}{2} \right]$$

Hieraus sieht man zunächst, dass die Lokomotive jedesmal in ihre initiale Stellung (für welche $\varphi = 0$ ist) zurückkehrt, wenn die Kurbeln in ihre initiale Stellung (für welche $\alpha = \alpha_0$ ist) zurückkehren.

Da, wie wir gesehen haben, die extremsten Werthe von φ um gleich viel von dem Werth der Integrationsconstanten abweichen, so bedeutet dieselbe den mittleren Werth des Winkels φ . Es ist aber:

$$\text{Const.} = - \frac{(q \rho + Sr) e}{G (k^2 - b^2)} (\cos. \alpha_0 - \sin. \alpha_0)$$

Diese mittlere Schwingungsposition der Lokomotive richtet sich demnach nach dem Winkel α_0 , d. h. nach der anfänglichen Stellung der Kurbeln.

Setzt man in die Gleichung (16) $\alpha = 45^\circ$, oder $\alpha = 180 + 45^\circ$, so wird für den einen, wie für den andern dieser Werthe φ gleich Constant. Die von der anfänglichen Stellung der Kurbeln abhängige mittlere Position der Lokomotive tritt also jedesmal ein, wenn während der Bewegung $\alpha = 45^\circ$, oder $\alpha = 180 + 45^\circ$ geworden ist. Wäre anfänglich $\alpha_0 = 45^\circ$ oder $\alpha_0 = 180 + 45^\circ$, so würde $\text{const.} = 0$. In diesem Falle wird also die mittlere Schwingungsposition der Lokomotive mit ihrer initialen Position zusammentreffen.

Bezeichnen wir den mittleren Werth von φ mit φ_m , setzen also $\varphi_m = \text{const.}$, so wird:

$$\varphi = \frac{q\rho + Sr}{G(k^2 - b^2)} e (\cos. \alpha - \sin. \alpha) + \varphi_m$$

oder:

$$\varphi - \varphi_m = \frac{q\rho + Sr}{G(k^2 - b^2)} e (\cos. \alpha - \sin. \alpha)$$

Der Ausdruck rechter Hand des Gleichheitszeichens bestimmt also die Schwingung der Lokomotive gegen ihre mittlere Position.

Wenn wir nun die Bewegung der Lokomotive von einem Augenblick an, in welchem $\alpha = 45^\circ$ ist, durch eine ganze Umdrehung verfolgen, so ist der Vorgang folgender:

In dem Augenblick, von welchem an wir die Bewegung der Lokomotive verfolgen, befindet sich dieselbe in ihrer mittleren Position, d. h. in derjenigen Position, in welche sie jedesmal zurückkehrt, wenn $\alpha = 45^\circ$, oder $180 + 45^\circ$ wird. Während α über 45° hinaus bis zu $180 - 45^\circ$ wächst, nimmt der Winkel φ fortwährend ab, schwingt also die Lokomotive für einen auf derselben stehenden und vorwärts schauenden Beobachter nach rechts hin, und wenn $\varphi = 180 - 45^\circ$ geworden ist, ist sie nach rechts hin am weitesten von ihrer mittleren Position abgewichen. Von $\alpha = 180 - 45^\circ$ bis $\alpha = 360 - 45^\circ$ schwingt die Lokomotive nach links und gelangt dabei, wenn $\alpha = 180 + 45^\circ$ ist, in ihre mittlere Schwingungsposition. Von $\alpha = 360 - 45^\circ$ bis $\alpha = 360 + 45^\circ$ schwingt sie wiederum nach links zurück und erreicht zuletzt ihre mittlere Position. Der Betrag des ganzen Schwingungswinkels ist:

$$\frac{(q\rho + Sr)e}{G(k^2 - b^2)} 2\sqrt{2}$$

ist also gross: 1) wenn die Gewichte der Kurbeln und die hin- und hergehende Masse gross sind; 2) wenn die Abstände ρ , r und e , d. h. wenn der Kurbelhalbmesser und der Abstand der Maschine gross ist; 3) wenn das Trägheitsmoment des Kesselbaues etc. klein ist.

Dieser Schwingungswinkel ist aber unabhängig: 1) von der Kraft, mit welcher der Dampf auf den Kolben wirkt; 2) von der Geschwindigkeit der rotirenden Bewegung der Kurbelaxe und von dem Gesetz, nach welchem diese Drehung erfolgt; 3) von der Radstellung, denn $G(k^2 - b^2)$ ist das Trägheitsmoment des Rahmenbaues in Bezug auf eine durch seinen Schwerpunkt gehende Vertikalaxe, ist also von der Radstellung unabhängig; 4) von der Spurweite.

Drehende Schwingungen einer aufgehängten nicht balanzirten Lokomotive mit inneren Cylindern und mit äusseren Kupplungsstangen.

Wenn wir uns mit dem Annäherungsgrad begnügen, durch welchen wir bei der Untersuchung über die Schwingungen einer nicht gekuppelten Maschine die Gleichung (16) gefunden haben, so fällt es nicht schwer, die analoge Gleichung für eine Maschine mit gekuppelten Rädern aufzustellen.

Wir behalten die bis jetzt gewählten Bezeichnungen bei und nennen ferner noch r_1 den Halbmesser einer Kurbel der Kupplungsstange, s_1 das Gewicht der Kupplungsstange, q_1 das Gewicht einer Kupplungskurbel, d. h. desjenigen Körpers, der über die runde Nabe des Rades hinausragt, e_1 die Entfernung des Schwerpunktes einer Kupplungskurbel von der geometrischen Drehungsaxe der Kurbelwelle, e_2 die Entfernung der zu beiden Seiten der Lokomotive befindlichen Kupplungsstange von der Axe Λx_1 . Wir nehmen an, dass die Richtungen der äussern Kurbeln den Richtungen der innern Kurbeln diametral entgegengesetzt angebracht sind.

Es ist klar, dass wir in dem vorhergehenden Fall statt der Gleichung (16) folgende erhalten werden:

$$\varphi = \frac{(q_1 e_1 + S_1 r_1) e_1}{G(k^2 - b^2)} (\cos. \alpha - \sin. \alpha) + \frac{(q_2 e_2 + S_2 r_2) e_2}{G(k^2 - b^2)} [\cos. (\alpha + \pi) - \sin. (\alpha + \pi)] + \text{Const.}$$

oder:

$$\varphi = \frac{(q_1 e_1 + S_1 r_1) e_1 - (q_2 e_2 + S_2 r_2) e_2}{G(k^2 - b^2)} (\cos. \alpha - \sin. \alpha) + \text{Const.}$$

Man sieht hieraus, dass die Massen der Kupplungsstangen die drehenden Schwingungen zu schwächen, oder sogar ganz aufzuheben im Stande sind, wenn die Kupplungskurbeln den Maschinenkurbeln diametral entgegengesetzt gestellt werden. Diese Drehung verschwindet vollkommen, wenn:

$$(q_1 e_1 + S_1 r_1) e_1 = (q_2 e_2 + S_2 r_2) e_2$$

Drehende Bewegung einer frei hängenden nicht balanzirten Maschine mit aussen liegenden Cylindern und Kupplungsstangen.

Eine solche Lokomotive hat keine innern Kurbeln, und die Maschinenkurbeln fallen mit den Kupplungskurbeln zusammen, man erhält demnach:

$$\varphi = \frac{S_1 r_1 e_1 + (q_1 e_1 + S_1 r_1) e_1}{G(k^2 - b^2)} (\cos. \alpha - \sin. \alpha) + \text{Const.}$$

Hier sind also die Schwingungen wie bei einer ungekuppelten Maschine mit inneren Cylindern.

Gleichung der Kurve, welche der Mittelpunkt A der Kurbelaxe beschreibt, wenn Längenschwingungen und drehende Schwingungen gleichzeitig stattfinden.

Die Gleichungen für φ und ξ , welche die Drehung und die Längenschwingung bestimmen, haben für Lokomotive jeder Art die Form:

$$\xi = m + n (\sin. \alpha + \cos. \alpha)$$

$$\varphi = m_1 + n_1 (\sin. \alpha - \cos. \alpha)$$

wobei m, m_1, n, n_1 constante, von den Dimensionen und Gewichten abhängige Grössen sind.

Aus diesen Gleichungen folgt:

$$\frac{\xi - m}{n} = \sin. \alpha + \cos. \alpha$$

$$\frac{\varphi - m_1}{n_1} = \sin. \alpha - \cos. \alpha$$

Durch Addition und Subtraktion dieser Gleichungen folgt:

$$\sin. \alpha = \frac{1}{2} \left[\frac{\xi - m}{n} + \frac{\varphi - m_1}{n_1} \right]$$

$$\cos. \alpha = \frac{1}{2} \left[\frac{\xi - m}{n} - \frac{\varphi - m_1}{n_1} \right]$$

Nimmt man die Summe der Quadraten dieser Gleichungen, so erhält man:

$$1 = \frac{1}{4} \left[\frac{\xi - m}{n} + \frac{\varphi - m_1}{n_1} \right]^2 + \frac{1}{4} \left[\frac{\xi - m}{n} - \frac{\varphi - m_1}{n_1} \right]^2$$

oder:

$$2 = \left(\frac{\xi - m}{n} \right)^2 + \left(\frac{\varphi - m_1}{n_1} \right)^2$$

Drehende Schwingungen einer aufgehängten mit Centrifugalmassen versehenen Lokomotive der allgemeinsten Art.

Wir haben bereits Seite 117 die Einrichtung einer solchen Lokomotive von allgemeiner Konstruktion angegeben, und ihre Längenschwingungen untersucht. Nun wollen wir auch ihre drehenden Schwingungen bestimmen. Wir lassen alle Bezeichnungen bestehen, die in jenem Artikel angenommen wurden.

Auch für eine solche Lokomotive von allgemeiner Einrichtung besteht die Seite 121 aufgefundene Gleichung der Drehung (7) nämlich:

$$0 = [\Sigma (x_i^2 + y_i^2) - \xi^2 G] \frac{d\varphi}{dt} - \Sigma m y_i \frac{dx_i}{dt} \dots \dots \dots (18)$$

wobei die Summe auf alle Gewichtstheile der Lokomotive auszudehnen sind:

$\Sigma m (x_i^2 + y_i^2)$ ist das totale Trägheitsmoment der ganzen Lokomotive in Bezug auf eine durch den Mittelpunkt A der Kurbelaxe gehende Vertikalaxe. Dieses Trägheitsmoment ist wegen jener Bestandtheile, die während der Bewegung der Treibaxe ihre Lage gegen den Rahmenbau verändern, eine periodisch veränderliche Grösse. Allein alle diese gegen den Rahmenbau beweglichen Theile haben im Vergleich zu den übrigen Theilen, die ihre relative Lage gegen einander und gegen die durch A gehende Vertikalaxe nicht ändern, nur einen sehr kleinen Werth. Wir werden daher keinen merklichen Fehler begehen, wenn wir in der Berechnung des Trägheitsmoments $\Sigma m (x_i^2 + y_i^2)$ die Trägheitsmomente dieser beweglichen Theile ganz vernachlässigen. Nennen wir daher $G k^2$ das Trägheitsmoment aller gegen einander nicht beweglichen Theile der Lokomotive in Bezug auf eine durch A gehende Vertikalaxe, so ist annähernd

$$\Sigma m (x_i^2 + y_i^2) = G k^2$$

Den genauen Werth von ξ , welcher der Längenschwingung entspricht, haben wir früher Seite (118) gefunden. Da jedoch die Massen q, s, q_1, s_1, Q gegen G ungemein klein sind, so ist ξ nur um äusserst wenig von b verschieden, wir dürfen uns daher erlauben, $\xi^2 G = b^2 G$ zu setzen. Dann haben wir:

$$\Sigma m (x_i^2 + y_i^2) - \xi^2 G = G (k^2 - b^2) \dots \dots \dots (19)$$

Nun handelt es sich noch um die Berechnung der letzten Summe des Ausdrucks (18). Die Glieder, welche die Massen $2q, 2s, 2q_1, 2s_1, 2Q$ in diese Summe liefern, sind nun folgende:

- 1) für die Massen $2p \dots \dots \dots q, e, \rho (\sin. \alpha + \cos. \alpha) \frac{d\alpha}{dt}$
- 2) " " " $2q_1 \dots \dots \dots q_1, e_1, \rho_1 [\sin. (\alpha + \beta) + \cos. (\alpha + \beta)] \frac{d\alpha}{dt}$
- 3) " " " $2s \dots \dots \dots s, e, r (\sin. \alpha + \cos. \alpha) \frac{d\alpha}{dt}$
- 4) " " " $2s_1 \dots \dots \dots s_1, e_1, r_1 [\sin. (\alpha + \beta) + \cos. (\alpha + \beta)] \frac{d\alpha}{dt}$
- 5) " " " $2Q \dots \dots \dots - e_2, \rho_2 Q [\sin. (\alpha - \gamma) + \cos. (\alpha + \gamma)] \frac{d\alpha}{dt}$

Die Gleichung der drehenden Bewegung wird demnach:

$$G (k^2 - b^2) \frac{d\varphi}{dt} = (q, e, \rho + s, e, r) (\sin. \alpha + \cos. \alpha) \frac{d\alpha}{dt} + (q_1, e_1, \rho_1 + s_1, e_1, r_1) [\sin. (\alpha + \beta) + \cos. (\alpha + \beta)] \frac{d\alpha}{dt} - e_2, \rho_2 Q [\sin. (\alpha - \gamma) + \cos. (\alpha + \gamma)] \frac{d\alpha}{dt}$$

Es ist aber

$$\begin{aligned} \sin. (\alpha + \beta) + \cos. (\alpha + \beta) &= \cos. \beta (\sin. \alpha + \cos. \alpha) - \sin. \beta (\sin. \alpha - \cos. \alpha) \\ \sin. (\alpha - \gamma) + \cos. (\alpha + \gamma) &= (\sin. \alpha + \cos. \alpha) (\cos. \gamma - \sin. \gamma) \end{aligned}$$

daher wird obige Gleichung:

$$G (k^2 - b^2) \frac{d\varphi}{dt} = [(q, e, \rho + s, e, r) e + (q_1, e_1, \rho_1 + s_1, e_1, r_1) e_1 \cos. \beta - e_2, \rho_2 Q (\cos. \gamma - \sin. \gamma)] (\sin. \alpha + \cos. \alpha) \frac{d\alpha}{dt} - (q_1, e_1, \rho_1 + s_1, e_1, r_1) e_1 \sin. \beta (\sin. \alpha - \cos. \alpha) \frac{d\alpha}{dt}$$

Lässt man in dieser Gleichung dt weg und integrirt dieselbe in Bezug auf α , so findet man:

$$G (k^2 - b^2) \varphi = [(q, e, \rho + s, e, r) e + (q_1, e_1, \rho_1 + s_1, e_1, r_1) e_1 \cos. \beta - e_2, \rho_2 Q (\cos. \gamma - \sin. \gamma)] (\sin. \alpha - \cos. \alpha) + (q_1, e_1, \rho_1 + s_1, e_1, r_1) e_1 \sin. \beta (\sin. \alpha + \cos. \alpha) + \text{Const.}$$



Wenn keine drehende Schwingung stattfinden soll, muss φ für jeden Werth von α gleich Null sein.

Diess erfordert aber die Erfüllung folgender Bedingungen:

$$\text{Const.} = 0$$

$$\beta = 0 \text{ oder } = \pi$$

$$(q e + S r) e + (q_1 e_1 + S_1 r_1) e_1 \cos. \beta - e_2 e_2 Q (\cos. \gamma - \sin. \gamma) = 0$$

Wenn aber $\beta = 0$ oder $= \pi$ ist, kann die letzte Gleichung auch geschrieben werden wie folgt:

$$(q e + S r) e \pm (q_1 e_1 + S_1 r_1) e_1 - e_2 e_2 Q (\cos. \gamma - \sin. \gamma) = 0 \dots \dots \dots (20)$$

wobei das obere Zeichen gilt, wenn die äussern und innern Kurbel parallel gestellt sind, das untere Zeichen hingegen, wenn die Kurbeln diametral gegenüber stehen.

Vollständige Aufhebung des Zuckens und Schlingerns durch rotirende Balanzirungs-Massen.

Wir haben Seite (119) gefunden, dass die Längenschwingungen einer Lokomotive verschwinden, wenn

$$(q e + S r) \pm (q_1 e_1 + S_1 r_1) = e_2 Q (\cos. \gamma + \sin. \gamma) \dots \dots \dots (1)$$

ist; haben ferner oben Gleichung (20) gefunden, dass die drehenden Schwingungen nicht eintreten, wenn

$$(q e + S r e) \pm (q_1 e_1 + S_1 r_1) e_1 = e_2 e_2 Q (\cos. \gamma - \sin. \gamma) \dots \dots \dots (2)$$

ist. Bestehen diese Bedingungen gleichzeitig, so wird demnach weder die eine, noch die andere dieser Schwingungen eintreten. Diese Gleichungen können aber gleichzeitig bestehen, weil sie zwei unbestimmte Grössen Q und γ enthalten. Diese lassen sich also so bestimmen, dass keine von den beiden störenden Bewegungen eintritt.

Dividirt man die Gleichung (2) durch e_2 , quadirt sie hierauf, so wie auch die Gleichung (1) und nimmt die Summe dieser Quadrate, so erhält man eine Gleichung, aus welcher folgt:

$$Q = \frac{q e + S r}{e_2} \sqrt{\left\{ \frac{1}{2} \left[1 + \left(\frac{e}{e_2} \right)^2 \right] \pm \left[1 + \frac{e e_1}{e_2^2} \right] \frac{q_1 e_1 + S_1 r_1}{q e + S r} + \frac{1}{2} \left[1 + \left(\frac{e_1}{e_2} \right)^2 \right] \left[\frac{q_1 e_1 + S_1 r_1}{q e + S r} \right]^2 \right\}} \dots \dots \dots (3)$$

Aus den Gleichungen (1) und (2) folgt ferner:

$$\sin. \gamma = \frac{1}{2 e_2 Q} \left[(q e + S r) \left(1 - \frac{e}{e_2} \right) \pm (q_1 e_1 + S_1 r_1) \left(1 - \frac{e_1}{e_2} \right) \right] \dots \dots \dots (4)$$

$$\cos. \gamma = \frac{1}{2 e_2 Q} \left[(q e + S r) \left(1 + \frac{e}{e_2} \right) \pm (q_1 e_1 + S_1 r_1) \left(1 + \frac{e_1}{e_2} \right) \right] \dots \dots \dots (5)$$

In diesen Formeln gelten die oberen Zeichen, wenn die Kupplungskurbeln den Treibkurbeln parallel gestellt sind, die unteren Zeichen dagegen, wenn die Kupplungskurbeln den Treibkurbeln diametral gegenüberstehen. Die Gleichung (3) bestimmt die Grösse eines Balanzierungsgewichtes, die Gleichungen (4) und (5) die Position der Gewichte, wenn man nicht nur die numerischen Werthe, sondern auch die Zeichen von $\sin. \gamma$ und $\cos. \gamma$ berücksichtigt. Um jeden Zweifel über die richtige Anbringung der Balanzierungsmassen zu beseitigen, dienen die Figuren 49, 50, Tab. XII. Der in denselben verzeichnete spitze Winkel γ , ist derjenige Winkel, dessen Sinus und Cosinus gleich ist dem *numerischen* Werthen von $\sin. \gamma$ und von $\cos. \gamma$. Der schraffierte Kreis stellt das Balanzierungsgewicht am vorderen, der nicht schraffierte Kreis das Balanzierungsgewicht des hinteren Rades vor.

Die Balanzierungsgewichte sind anzubringen, wie folgendes Schema andeutet:

| $\sin. \gamma$ | $\cos. \gamma$ | Figur. |
|----------------|----------------|--------|
| + 1 | + 1 | 49 a |
| + 1 | - 1 | 49 b |
| - 1 | - 1 | 50 a |
| - 1 | + 1 | 50 b |

Man erhält die Tangente des Winkels γ , wenn man die Werthe von $\sin. \gamma$ und $\cos. \gamma$ der Gleichungen (3) und (4) durch einander dividirt und nur allein den numerischen Werth des Quotienten nimmt; es ist also $\tan. \gamma$, gleich dem numerischen Werthe des Quotienten.

$$\frac{\left(1 - \frac{e}{e_2}\right) \pm \frac{q_1 r_1 + S_1 r_1}{q r + S r} \left(1 - \frac{e_1}{e_2}\right)}{\left(1 + \frac{e}{e_2}\right) \pm \frac{q_1 r_1 + S_1 r_1}{q r + S r} \left(1 + \frac{e_1}{e_2}\right)} \dots \dots \dots (6)$$

Für eine Lokomotive, deren Räder nicht gekuppelt sind, die also überhaupt mit nur 2 Triebrädern versehen ist, ist $s_1 = 0$, $q_1 = 0$ und dann wird:

$$Q = \frac{q e + S r}{e_2} \sqrt{\frac{1}{2} \left[1 + \left(\frac{e}{e_2}\right)^2 \right]} \dots \dots \dots (7)$$

$$\sin. \gamma = \frac{q e + S r}{2 e_2 Q} \left(1 - \frac{e}{e_2}\right) \dots \dots \dots (8)$$

$$\cos. \gamma = \frac{q e + S r}{2 e_2 Q} \left(1 + \frac{e}{e_2}\right) \dots \dots \dots (9)$$

Für innen liegende Cylinder ist $e < e_2$. Fällt also sowohl $\sin. \gamma$ als $\cos. \gamma$ positiv aus, so sind demnach die Gewichte so anzubringen, wie Fig. 49 a zeigt. Für aussen liegende Cylinder ist $e > e_2$. Fällt also $\sin. \gamma$ negativ, $\cos. \gamma$ positiv aus, so sind also die Gewichte anzubringen, wie Fig. 50 b zeigt.

Für Lokomotive mit aussen liegenden Cylindern und mit gekuppelten Rädern fallen die Kupplungskurbeln mit den Triebrädern der Richtung nach zusammen, müssen also in den Gleichungen (3) (4) (5) die oberen Zeichen genommen werden, und da in diesem

Fall $e > e_1 > e_2$ ist, so wird $\sin. \gamma$ negativ; $\cos. \gamma$ dagegen positiv, sind demnach die Gewichte so anzubringen, wie Fig. 50 b zeigt.

Stellen wir die verschiedenen Lokomotive nach der Grösse der Balanzirungsgewichte, welche sie erfordern, zusammen, so erhalten wir folgende Reihe, welche mit derjenigen Construction beginnt, die das kleinste Gewicht verlangt.

| | Cylinderlage. | Räder. | Kupplungskurbeln. |
|----|---------------|-----------------|-------------------|
| A. | innen | nicht gekuppelt | keine |
| B. | aussen | nicht gekuppelt | keine |
| C. | innen | gekuppelt | diametral |
| D. | innen | gekuppelt | parallel |
| E. | aussen | gekuppelt | zusammenfallend |

Wenn bei einer Lokomotive mit innen liegenden Cylindern und mit gekuppelten Rädern die äusseren Kupplungskurbeln den inneren Triebkurbeln diametral gegenüber gestellt sind, muss man in den Ausdrücken für Q , $\sin. \gamma$, $\cos. \gamma$, die unteren Zeichen nehmen; und in diesem Falle hat es das Ansehen, dass der Werth von Q unter gewissen Umständen verschwinden könnte, dass also gar keine Balanzirungsgewichte nothwendig, würden. Wir wollen diese Vermuthung prüfen.

Setzen wir zur Abkürzung $\frac{q_1 e_1 + s_1 r_1}{q e + s r} = k$, so verschwindet Q , wenn ist:

$$\frac{1}{2} \left[1 + \left(\frac{e}{e_2} \right)^2 \right] - \left[1 + \frac{e e_1}{e_1^2} \right] k + \frac{1}{2} \left[1 + \left(\frac{e_1}{e_2} \right)^2 \right] k^2 = 0$$

hieraus folgt:

$$k = \frac{q_1 e_1 + s_1 r_1}{q r + s r} = \frac{1 + \frac{e e_1}{e_1^2} \pm \left(\frac{e_1}{e_2} - \frac{e}{e_2} \right) \sqrt{-1}}{1 + \left(\frac{e_1}{e_2} \right)^2}$$

Die Werthe von k , welche den Ausdruck von Q zum Verschwinden bringen, sind demnach, wie man sieht, imaginär, so lange e von e_1 verschieden ist. Allein die Gleichung, aus welcher wir k gesucht haben, gilt nur für Maschinen mit innen liegenden Cylindern, weil es nur bei diesen möglich ist, dass die Kupplungskurbeln den Triebkurbeln diametral gegenüber stehen; es kann also e nicht gleich e_1 genommen werden und folglich ist es nicht möglich, die schwingenden Bewegungen ohne Balanzirungsgewichte aufzuheben.

Direktes Verfahren zur Bestimmung der Balanzirungs - Massen.

Die das Zucken und Schlingern aufhebenden Balanzirungsmassen können auch durch folgendes Verfahren direkt bestimmt werden.

Die Wirkungen, welche die hin- und hergehenden Massen der Kolben, Kolbenstangen, Schubstangen und Kupplungsstangen in horizontalem Sinne hervorbringen, sind beinahe so, wie wenn diese Massen mit den Kurbelzapfen direkt verbunden wären und mit denselben herum rotirten, denn die Horizontalbewegungen dieser Massen stimmen mit den

Horizontalbewegungen der Kurbelzapfen beinahe überein. Wir wollen uns also vorstellen, dass die hin- und hergehenden Massen in den Kurbelzapfen, mit welchen sie in Verbindung stehen, concentrirt würden, so dass sie mit den Kurbelzapfen um die Treibaxe herum rotiren müssten, und nun kommt es darauf an, die Treibräder mit solchen Massen zu versehen, dass ihre Centrifugalkräfte den Centrifugalkräften der mit den Kurbeln verbundenen Massen das Gleichgewicht halten.

Wir legen der Rechnung eine Maschine mit innen liegenden Cylindern und mit gekuppelten Rädern zu Grunde und nehmen an, dass die Kupplungskurbeln mit den Maschinenkurbeln parallel gestellt seien (Fig. 46) und lassen die früher gewählten Bezeichnungen gelten, bezeichnen aber noch durch ω die Winkelgeschwindigkeit der Triebräder.

Nun ist: $\frac{S}{g} \omega^2 r$ die Centrifugalkraft eines Kolbens, einer Kolbenstange und einer Schubstange; $\frac{q}{g} \omega^2 \rho$ die Centrifugalkraft eines inneren Kurbelkörpers; $\frac{S_1}{g} \omega^2 r_1$ die Centrifugalkraft einer Kupplungsstange; $\frac{q_1}{g} \omega^2 \rho_1$ die Centrifugalkraft eines äusseren Kurbelkörpers. Es ist klar, dass die Wirkung dieser vier Centrifugalkräfte durch zwei Massen B und b aufgehoben werden kann, wenn man dieselben in einer Entfernung e_2 den Kurbeln gegenüber mit den Triebrädern verbindet. Die Centrifugalkräfte der Massen B und b sind: $\frac{B}{g} \omega^2 e_2$, $\frac{b}{g} \omega^2 e_2$. Nach dem Gesetz des Hebels halten sich diese sechs Kräfte das Gleichgewicht, wenn folgenden Bedingungen entsprochen wird:

$$\frac{B}{g} \omega^2 e_2 \times 2 e_2 = \left(\frac{S}{g} \omega^2 r + \frac{q}{g} \omega^2 \rho \right) (e_2 + e) + \left(\frac{S_1}{g} \omega^2 r_1 + \frac{q_1}{g} \omega^2 \rho_1 \right) (e_1 + e_2)$$

$$\frac{b}{g} \omega^2 e_2 \times 2 e_2 = \left(\frac{S}{g} \omega^2 r + \frac{q}{g} \omega^2 \rho \right) (e_2 - e) - \left(\frac{S_1}{g} \omega^2 r_1 + \frac{q_1}{g} \omega^2 \rho_1 \right) (e_1 - e_2)$$

Hieraus folgt:

$$\left. \begin{aligned} B &= \frac{S r + q \rho}{e_2} \frac{e_2 + e}{2 e_2} + \frac{S_1 r_1 + q_1 \rho_1}{e_2} \frac{e_1 + e_2}{2 e_2} \\ b &= \frac{S r + q \rho}{e_2} \frac{e_2 - e}{2 e_2} - \frac{S_1 r_1 + q_1 \rho_1}{e_2} \frac{e_1 - e_2}{2 e_2} \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (1)$$

Diese zwei Massen heben aber nur allein die Massenwirkung einer Maschine und einer Kupplungsstange auf. Um aber auch die Massenwirkungen der zweiten (hintern) Maschine und der zweiten Kupplungsstange aufzuheben, müssen die Räder noch mit zwei Massen B und b versehen werden, und diese zwei Massen müssen, die erstere am Hinterrad, die letztere am Vorderrad, den Richtungen der hintern Kurbeln gegenüber angebracht werden. Die Wirkung aller mit den 4 Kurbeln rotirenden Massen kann also aufgehoben werden, wenn man jedes der beiden Triebräder mit zwei Massen B und b versieht. Am Vorderrad (Fig. 47 a) muss die Masse B der vordern Kurbel gegenüber angebracht werden. Am Hinterrad (Fig. 48 a) dagegen muss die Masse B der hintern Kurbel gegenüber, die Masse b der vordern Kurbel gegenüber angebracht werden. Allein den Centrifugalkräften der beiden mit einem Rad zu verbindenden Massen B und b entspricht eine resultirende Kraft, die auch durch eine einzige Masse Q hervorgebracht werden kann. Vorausgesetzt, dass Q ebenfalls in der Entfernung e_2 angebracht wird, hat man nach der Zerlegung der Kräfte (Fig. 47 b):

$$B = Q \cos. \gamma \quad b = Q \sin. \gamma$$

demnach:

$$\left. \begin{aligned} \text{tang. } \gamma &= \frac{b}{B} \\ Q &= \sqrt{b^2 + B^2} \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (2)$$

Substituirt man für b und B die Werthe, welche die Gleichungen (1) darbieten, so findet man nach einigen Reduktionen:

$$\text{tang. } \gamma = \frac{\left(1 - \frac{e}{e_2}\right) + \frac{S_1 r_1 + q_1 \rho_1}{S r + q \rho} \left(1 - \frac{e_1}{e_2}\right)}{\left(1 + \frac{e}{e_2}\right) + \frac{S_1 r_1 + q_1 \rho_1}{S r + q \rho} \left(1 + \frac{e_1}{e_2}\right)} \dots \dots \dots (3)$$

$$Q = \frac{S r + q \rho}{e_2} \sqrt{\left\{ \frac{1}{2} \left[1 + \left(\frac{e}{e_2}\right)^2 \right] + \left[1 + \frac{e e_1}{e_2^2} \right] \frac{S_1 r_1 + q_1 \rho_1}{S r + q \rho} + \frac{1}{2} \left[1 + \left(\frac{e_1}{e_2}\right)^2 \right] \left[\frac{S_1 r_1 + q_1 \rho_1}{S r + q \rho} \right]^2 \right\}}$$

und dieser Ausdruck stimmt mit den früher Seite 130 gefundenen überein, denn wir haben bei dieser Rechnung parallele Kurbeln vorausgesetzt, für welche in den früheren Gleichungen die oberen Zeichen gelten.

Pressungen der Triebräder gegen die Bahn, wenn dieselben mit balanzirenden, rotirenden Massen versehen sind.

Die rotirenden Balanzierungsmassen bringen durch ihre Centrifugalkraft einen veränderlichen Druck der Triebräder gegen die Schienen hervor, wodurch unter gewissen Umständen bedenkliche Nachtheile entstehen können.

Nennen wir \mathcal{G} den Betrag der Centrifugalkraft einer rotirenden Masse, ψ den Winkel, den in irgend einem Augenblick der Bewegung der durch den Schwerpunkt der rotirenden Masse gehende Radius mit einer durch den Mittelpunkt des Rades vertikal abwärts gezogenen Linie bildet, so ist $\mathcal{G} \cos. \psi$ die Kraft, mit welcher das Rad durch die Wirkung der Centrifugalkraft der rotirenden Masse nach vertikaler Richtung abwärts getrieben wird. Nennen wir ferner \mathcal{G} das Gewicht der Triebaxe, der Triebräder und der mit denselben verbundenen rotirenden Massen, p den Druck, welcher in dem Zeitaugenblick, dem der Winkel ψ entspricht, gegen die Axenbüchse der Räder ausgeübt wird. Endlich \mathfrak{P} den Druck des Triebrades gegen die Bahn, so ist

$$\mathfrak{P} = \frac{1}{2} \mathcal{G} + p + \mathcal{G} \cos. \psi \dots \dots \dots (1)$$

Wenn die störenden Bewegungen des Wankens, Wogens und Nickens nur in einem schwachen Maasse stattfinden, dürfen wir die Pressung p als eine constante ansehen, und dann ist der Druck \mathfrak{P} nur allein mit ψ veränderlich.

Der grösste und kleinste Werth dieses Druckes ist $\frac{1}{2} \mathcal{G} + p + \mathcal{G}$ und $\frac{1}{2} \mathcal{G} + p - \mathcal{G}$. Der erstere tritt ein, so oft der Schwerpunkt der rotirenden Masse seinen tiefsten, der letztere, so oft der Schwerpunkt der rotirenden Masse seinen höchsten Stand erreicht. Sollte $\frac{1}{2} \mathcal{G} + p - \mathcal{G} = 0$, oder $\mathcal{G} = \frac{1}{2} \mathcal{G} + p$ werden, so würde der Druck des Rades gegen die Bahn ganz aufhören. Sollte gar $\mathcal{G} > \frac{1}{2} \mathcal{G} + p$ werden, so würden die Räder jedesmal in die Höhe springen, wenn die Schwerpunkte der rotirenden Massen ihre höchsten Orte

erreichen und die beiden Räder würden dann auf der Bahn gleichsam hämmernd fortlaufen.

Nennen wir D den Durchmesser eines Triebrades, $g = 9.808$ die Beschleunigung durch die Schwere, v die Fahrgeschwindigkeit der Lokomotive und behalten im Uebrigen die früher gewählten Bezeichnungen bei, so ist:

$$\mathcal{G} = \frac{Q}{g} v^2 \left(\frac{2e_2}{D} \right)^2 \frac{1}{e_2} \dots \dots \dots (2)$$

In der höchsten Stellung einer rotirenden Masse hört also der Druck des Rades gegen die Bahn ganz auf, wenn:

$$\frac{Q}{g} v^2 \left(\frac{2e_2}{D} \right)^2 \frac{1}{e_2} = \frac{1}{2} \mathcal{G} + p$$

ist, oder wenn:

$$v = \sqrt{\left\{ \frac{g \frac{1}{2} \mathcal{G} + p}{Q} \left(\frac{D}{2e_2} \right)^2 e_2 \right\}} \dots \dots \dots (3)$$

Für eine stärkere Personenzuglokomotive dürfen wir annehmen:

$$Q = 50 \quad \frac{1}{2} \mathcal{G} + p = 4000 \quad \frac{D}{2e_2} = \frac{4}{3} \quad e_2 = 1 \quad g = 9.808$$

und mit diesen Daten findet man $v = 37$ Meter. Die grösste Geschwindigkeit der Schnellzüge beträgt aber nur circa 16 Meter, ist also nicht halb so gross als diejenige, bei welcher ein Aufspringen der Räder eintreten könnte.

Wir wollen noch die grössten und kleinsten Pressungen der Räder berechnen, wenn eine Geschwindigkeit von 16 Meter eintritt.

Nehmen wir wiederum:

$$Q = 50 \quad \frac{D}{2e_2} = \frac{4}{3} \quad e_2 = 1 \quad g = 9.808 \quad \frac{1}{2} \mathcal{G} + p = 4000$$

und $v = 16$, so wird:

$$\frac{1}{2} \mathcal{G} + p \pm \frac{Q}{g} v^2 \left(\frac{2e_2}{D} \right)^2 \frac{1}{e_2} = 4000 \pm 734$$

Das Minimum der Pressung eines Rades gegen die Bahn ist demnach in diesem Falle $4000(1 - 0.183)$, das Maximum dagegen $4000(1 + 0.183)$.

Diese grössten und kleinsten Pressungen weichen also nur circa 18% von dem mittleren Werth ab.

Diese Veränderlichkeit des Druckes der Räder gegen die Bahn ist also bei dieser grössten gegenwärtig vorkommenden Geschwindigkeit der Schnellzüge noch nicht bedenklich, denn eine Verminderung des Druckes um 18% kann ein Aufspringen der Räder noch nicht veranlassen, und durch eine Verstärkung dieses Druckes um 18% ist auch nicht zu befürchten, dass die Radumfänge ungleichförmig abgenützt werden könnten.

Vollkommen könnte die Wirkung der hin- und hergehenden Massen der Kolben, Kolbenstangen und Schubstangen nur durch hin- und hergehende Gegenmassen aufgehoben werden; allein die Anbringung derselben ist mit constructiven Schwierigkeiten verbunden, und so lange diese nicht beseitigt werden können, muss man sich schon mit den rotirenden Massen begnügen, und muss sich den veränderlichen Druck der Triebräder gegen die Bahn gefallen lassen.

Der praktische Werth der Massenbalanzirung.

Der praktische Werth der Balanzirung der hin- und hergehenden Massen durch rotirende oder durch hin- und hergehende Massen ist bis jetzt noch nicht richtig gewürdigt worden. Die französischen Ingenieure überschätzen die Sache und sie scheinen der Ansicht zu sein, dass durch eine richtige Balanzirung der Massen die wesentlichsten Uebelstände, mit welchen ein Lokomotivbau behaftet sein kann, aufgehoben wären. Die Engländer schlagen den Werth der Balanzirung zu gering an und kümmern sich um diese Angelegenheit in der Regel schon aus dem Grunde nicht, weil sie von einem „Theoretiker“ aufgebracht wurde. Nach meiner Meinung ist eine richtige Balanzirung zu empfehlen, ich bin jedoch weit entfernt, zu glauben, dass damit den wesentlichsten Uebelständen, mit welchen eine Lokomotive behaftet sein kann, abgeholfen würde. Diese Hauptübel liegen nicht im Zucken und Schlingern, sondern sie liegen im Wanken, Wogen und Nicken. Um die beiden ersteren dieser störenden Bewegungen aufzuheben, genügt es, richtig berechnete Balanzirungsgewichte anzuwenden, im Uebrigen ist aber in dieser Hinsicht der Bau der Lokomotive ganz gleichgültig. Um dagegen die drei letzteren störenden Bewegungen möglichst zu schwächen, muss die ganze Disposition der Maschine, des Kessels und der Räder und muss das ganze System der Federung gewissen Bedingungen entsprechen. Die wichtigsten Gesetze des Lokomotivbaues ergeben sich nicht aus dem Studium der zuckenden und schlingernden Bewegung, sondern sie folgen, wie wir in der Folge sehen werden, aus dem Studium der Bewegungen des Wogens, Wankens und Nickens. Dieses Studium ist der Gegenstand der folgenden, etwas weitläufigen Untersuchungen.

Das Gaukeln

oder

das Wanken, Wogen und Nicken.

Die Kräfte, welche das Gaukeln verursachen.

Das Wanken, Wogen und Nicken oder die gaukelnde Bewegung des auf den Federn liegenden Baues wird durch die Kräfte verursacht, welche auf dieses Massensystem einwirken und sich nicht das Gleichgewicht halten. Diese Kräfte sind folgende:

- 1) das Gewicht des auf den Federn ruhenden Baues;
- 2) die Elasticitätskräfte der Federn;
- 3) die Pressungen der Gleitstücke gegen die Führungsliniale;
- 4) der Widerstand des durch die Lokomotive fortzuziehenden Trains;
- 5) die Pressungen des Dampfes gegen die Deckelflächen der Dampfzylinder;
- 6) die Pressungen der Triebaxe gegen die Axengabeln.

Wenn eine Lokomotive ruhig auf der Bahn steht, wird das Gewicht des auf den Federn liegenden Baues durch die Elasticitätskräfte der Federn getragen, und jede derselben befindet sich dabei in einem mehr oder weniger deformirten Zustande. So wie aber in dem auf den Federn liegenden Bau eine gaukelnde Bewegung veranlasst wird, werden die Federn bald mehr, bald weniger deformirt, und wirken dann mit veränderlichen Intensitäten auf den Bau ein, so dass in demselben die einmal hervorgerufene gaukelnde Bewegung fortdauernd erhalten wird.

Die Schubstangen bilden mit den Kolbenstangen Winkel, die mit den Kurbelstellungen veränderlich sind; dies hat zur Folge, dass die Gleitstücke gegen die Führungsliniale beim Vorwärtsfahren nach aufwärts, beim Rückwärtsfahren nach abwärts Pressungen ausüben, deren Angriffspunkte und Intensitäten veränderlich sind.

Am hinteren Ende des Rahmenbaues wirkt der Widerstand, den der fortzuschaffende Wagenzug verursacht. Der Angriffspunkt dieses Widerstandes liegt tiefer als der Schwerpunkt des auf den Federn liegenden Baues, und die Intensität desselben ist, streng genommen, wegen der nicht ganz gleichförmigen Bewegung der Lokomotive etwas veränderlich.

Die mit dem Rahmenbau fest verbundenen Dampfzylinder werden durch den Druck des Dampfes gegen die Deckelflächen der Cylinder bald vorwärts, bald rückwärts getrieben. Laufen beide Kolben vorwärts, so werden die Cylinder durch den Dampfdruck zurück getrieben. Laufen beide Kolben nach rückwärts, so werden die Cylinder nach vorwärts getrieben. Laufen die Kolben nach entgegengesetzter Richtung, so wird einer von den Cylindern nach vorwärts, der andere nach rückwärts getrieben.

Durch den Druck des Dampfes gegen die Kolben wird die Axe der Triebräder mit veränderlicher Kraft bald vorwärts, bald rückwärts getrieben. Die Achsenbüchsen drücken deshalb bald stärker, bald schwächer gegen die Axengabeln.

Durch das veränderliche Spiel dieser Kräfte wird das Wanken, Wogen und Nicken hervorgebracht. Das Wanken entsteht, weil diese Kräfte in Bezug auf eine durch den Schwerpunkt des Baues gehende Queraxe nicht im Gleichgewichte sind. Das Wogen

wird veranlasst, weil die Summe der vertikal aufwärts wirkenden Kräfte veränderlich ist, während das vertical abwärts wirkende Gewicht des Baues einen constanten Werth hat. Das Nicken wird hervorgerufen, weil die Kräfte in Bezug auf eine durch den Schwerpunkt des Baues gehende Längsaxe nicht im Gleichgewichte sind.

Die Bestimmung dieser störenden Bewegungen ist der Gegenstand der folgenden Untersuchung, die dabei vorkommenden Rechnungen sind zwar weitläufig, stehen aber in keinem Missverhältnisse mit den Resultaten, welche sie uns liefern.

Druck der Gleitstücke gegen die Führungsliniale.

- Es sei, Tab. XII, Fig. 44,
 r der Halbmesser einer Maschinenkurbel;
 L die Länge einer Schubstange;
 α der Winkel, den in irgend einem Augenblick der Bewegung eine Kurbel mit der Bewegungsrichtung des Kolbens bildet;
 λ der Winkel, den gleichzeitig die Schubstange mit der Kolbenstange oder mit der Bewegungsrichtung des Kolbens bildet;
 P die Kraft, mit welcher der Kolben treibend einwirkt;
 S der in der Schubstange wirkende Widerstand;
 N die Kraft, mit welcher das Gleitstück nach aufwärts getrieben wird, wenn die Bewegung nach vorwärts erfolgt.
 Dies vorausgesetzt, ist zunächst

$$r \sin. \alpha = L \sin. \lambda$$

dennach

$$\sin. \lambda = \left(\frac{r}{L}\right) \sin. \alpha \quad \text{tang } \lambda = \frac{\left(\frac{r}{L}\right) \sin. \alpha}{\sqrt{1 - \left(\frac{r}{L}\right)^2 \sin.^2 \alpha}}$$

Es ist aber ferner $S \cos. \lambda = P$, $S \sin. \lambda = N$, dennach

$$N = P \text{ tang. } \lambda = P \frac{\left(\frac{r}{L}\right) \sin. \alpha}{\sqrt{1 - \left(\frac{r}{L}\right)^2 \sin.^2 \alpha}} \dots \dots \dots (1)$$

Das Verhältniss $\left(\frac{r}{L}\right)$ ist bei Lokomotiven immer höchstens $\frac{1}{6}$, der Werth von $\left(\frac{r}{L}\right)^2 \sin.^2 \alpha$ beträgt also im Maximum $\frac{1}{36}$, kann also gegen die Einheit vernachlässigt werden, dann wird aber

$$N = P \frac{r}{L} \sin. \alpha \dots \dots \dots (2)$$

Bezeichnen wir für die zweite Maschine die Kraft, mit welcher ihr Kolben treibend

wirkt, mit P und den Druck des Gleitstückes gegen das Führungslinéal mit N_1 , so ist, da die Kurbeln der beiden Maschinen einen rechten Winkel bilden,

$$N_1 = P_1 \frac{r}{L} \sin. \left(\frac{\pi}{2} - \alpha \right) = P_1 \frac{r}{L} \cos. \alpha \dots \dots \dots (3)$$

Es folgt sowohl aus der Betrachtung der Figur, sowie auch aus den Werthen von N und N_1 , dass diese Pressungen der Gleitstücke gegen die Führungslinéale stets nach aufwärts gerichtet bleiben, so lange die Bewegung der Kurbel nach der Richtung des Pfeiles erfolgt, denn das Zeichen von P stimmt stets mit dem Zeichen von $\sin. \alpha$, und das Zeichen von P_1 stimmt stets mit dem Zeichen von $\cos. \alpha$ überein. Erfolgt dagegen die Bewegung der Kurbel nach einer Richtung, die der des Pfeiles in der Figur entgegengesetzt ist, so fallen die Zeichen von P und $\sin. \alpha$, so wie auch von P_1 und $\cos. \alpha$ entgegengesetzt aus, die Werthe von N und N_1 werden also dann beständig negativ oder die Pressungen der Gleitstücke gegen die Führungslinéale sind, beim Rückwärtsfahren einer Lokomotive, deren Cylinder vor der Triebaxe liegen, nach abwärts gerichtet.

Dass diese Pressungen spürbare Wirkungen hervorbringen können, sieht man am besten durch ihre numerischen Werthe.

Es sei z. B. für eine Personenzuglokomotive der Durchmesser eines Dampfzylinders = 0.4 Meter, die Spannung des Dampfes hinter den Kolben auf 1 Quadratmeter bezogen, 50000 Kilogramm, der schädliche Widerstand vor den Kolben 12500 Kilogramm, das Verhältniss $\frac{r}{L} = 6$, so sind die grössten Werthe von N und N_1 ,

$$\frac{0.4^2 \times 3.14}{4} (50000 - 12500) \frac{1}{6} = 785 \text{ Kilogramm.}$$

Allgemeine Gleichungen zur Bestimmung der gaukelnden Bewegung.

Die Bewegungen eines starren Massensystems werden bekanntlich durch 6 Gleichungen bestimmt. Drei derselben bestimmen die Bewegung des Schwerpunktes, drei andere die Drehungen des Systems um drei der Richtung nach auf einander senkrecht stehende, durch den Schwerpunkt gehende Axen.

Um die Bewegung des Schwerpunktes des auf den Federn liegenden Baues zu bestimmen, nehmen wir ein die fortschreitende Bewegung der Lokomotive begleitendes Axensystem $o\xi o\eta o\zeta$ an. Die Axe $o\zeta$ legen wir in die Axe des Geleises $o\eta$ quer über das Geleise. $o\zeta$ steht mithin vertikal.

Nennen wir $\xi \eta \zeta$ die Coordinaten des Schwerpunktes des auf den Federn liegenden Baues in Bezug auf dieses fortschreitende Axensystem, $\Sigma X \Sigma Y \Sigma Z$ die algebraische Summe der Kräfte, welche in einem beliebigen Zeitmoment der Bewegung parallel mit $o\xi o\eta o\zeta$ auf das Massensystem einwirken, M die totale Masse des auf den Federn liegenden Baues ($Masse = \frac{\text{Gewicht}}{2 \times 9.808}$), so sind die Gleichungen der Bewegung des Schwerpunktes:

$$\left. \begin{aligned} \frac{d^2 \xi}{dt^2} &= \frac{1}{2} \frac{\Sigma X}{M} \\ \frac{d^2 \eta}{dt^2} &= \frac{1}{2} \frac{\Sigma Y}{M} \\ \frac{d^2 \zeta}{dt^2} &= \frac{1}{2} \frac{\Sigma Z}{M} \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (1)$$

Um die drehenden Bewegungen des Massensystems zu bestimmen, legen wir durch den Schwerpunkt desselben ein Axensystem Ox_1, Oy_1, Oz_1 und zwar so, dass Ox_1 mit der Axe des Lokomotivkessels parallel ist, Oy_1 senkrecht auf Ox_1 und parallel mit der Ebene des Lokomotivrahmens ist, Oz_1 auf der Ebene des Lokomotivrahmens senkrecht steht.

Es ist klar, dass diese drei Axen entweder ganz genau, oder doch sehr nahe mit den Hauptaxen der Trägheitsmomente zusammenfallen.

Nennt man nun:

- A, B, C die Trägheitsmomente (als Massen ausgedrückt) des auf den Federn liegenden Baues in Bezug auf die Axen Ox_1, Oy_1, Oz_1 ;
- x_1, y_1, z_1 die Winkelgeschwindigkeiten, mit welchen sich das System in einem bestimmten Zeitaugenblick t um die drei Axen Ox_1, Oy_1, Oz_1 dreht;
- X_1, Y_1, Z_1 die Summe der statischen Momente der zur Zeit t wirksamen Kräfte in Bezug auf die Axen Ox_1, Oy_1, Oz_1 ;
- dx_1, dy_1, dz_1 die Aenderungen dieser Winkelgeschwindigkeiten in dem auf t folgenden Zeitelement dt , so sind bekanntlich die Gleichungen der drehenden Bewegung:

$$\left. \begin{aligned} C \frac{dx_1}{dt} + (B - A) x_1 y_1 &= \frac{1}{2} Z_1 \\ B \frac{dy_1}{dt} + (A - C) x_1 z_1 &= \frac{1}{2} Y_1 \\ A \frac{dz_1}{dt} + (C - B) y_1 z_1 &= \frac{1}{2} X_1 \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (2)$$

Die Kräfte $\Sigma X, \Sigma Y, \Sigma Z$, so wie auch die Momente X_1, Y_1, Z_1 haben in unserem Falle nicht constante Werthe, sondern sind periodische Funktionen der Zeit. Die Bestimmung der gaukelnden Bewegung hängt also von der Integration eines sehr komplizirten Systems von sechs Gleichungen ab, und es ist vor auszusehen, dass insbesondere die Integration der drei Gleichungen (2) nicht gelingen wird, denn die Werthe von x_1, y_1, z_1 werden selbst in dem günstigsten Falle, wenn X_1, Y_1, Z_1 verschwinden, durch elliptische Funktionen ausgedrückt.

Glücklicherweise sind aber alle einzelnen Bewegungen, aus welchen das Gaukeln zusammengesetzt ist, sehr klein, denn die Federn sind sehr starr und müssen es sein, damit diese gaukelnde Bewegung nicht zu stark auftreten kann. Wegen dieser Kleinheit der drehenden Schwingungen können in den Gleichungen (2) der Glieder $(B - A) x_1 y_1, (A - C) x_1 z_1, (C - B) y_1 z_1$ gegen $C \frac{dx_1}{dt}, A \frac{dy_1}{dt}, A \frac{dz_1}{dt}$ vernachlässigt werden, wodurch die drei Gleichungen (2) eine wesentlich einfachere Form erhalten.

Ferner aber dürfen wir drei von den sechs Gleichungen (1) und (2) ganz weglassen. Die erste der Gleichungen (1) kann weggelassen werden, weil sie sich auf die horizontale Fortbewegung des Schwerpunktes bezieht, die wir schon früher behandelt haben. Die zweite der Gleichungen (1) kann weggelassen werden, weil parallel mit der Richtung der Axe Oy_1 keine Kräfte wirken. Die erste der Gleichungen (2) kann endlich weggelassen werden, weil die früher genannten, das Wanken, Wogen und Nicken veranlassenden Kräfte keine Drehung um eine Vertikalaxe erregen. Da wir also die erste und zweite der Gleichungen (1) und die erste der Gleichungen (2) weglassen, und in der zweiten und dritten der Gleichungen (2) die Glieder $(A - C) x_1 z_1, (C - B) y_1 z_1$ vernachlässigen dürfen, so reduziert sich unser Problem auf die Integration der folgenden drei Gleichungen:

$$\left. \begin{aligned} \frac{d^2 \zeta}{dt^2} &= \frac{1}{2} \frac{\Sigma Z}{M} \\ B \frac{dy_i}{dt} &= \frac{1}{2} Y_i \\ A \frac{dx_i}{dt} &= \frac{1}{2} X_i \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (3)$$

Ausmittlung der Werthe von ΣZ , Y_i , X_i .

Um das Verständniss der folgenden Untersuchung zu erleichtern, wollen wir derselben eine Lokomotive von ganz bestimmter und bekannter Bauart zu Grund legen. Wir wählen eine Stephenson'sche Personenzuglokomotive mit inneren Cylindern, innerem Rahmen und mit sechs nicht gekuppelten Rädern (Tab. XIII, Fig. 51, 52, 53, 54).

Der Erfahrung zufolge dürfen wir annehmen, dass die zum Zusammendrücken einer Feder erforderliche Kraft der Zusammendrückung proportional sei. Die Richtigkeit dieses Satzes werden wir in der Folge auch theoretisch nachweisen; er gilt jedoch nur für nicht zu starke Zusammendrückungen. Die Zahl, mit welcher man die Zusammendrückung einer Feder multiplizieren muss, um die zusammendrückende Kraft zu erhalten, wollen wir den Starrheits-Coeffizienten der Feder heissen. Ist also r der Starrheits-Coeffizient einer Feder, x ihre Zusammendrückung, so ist $r x$ die zusammendrückende Kraft.

Nennen wir nun, Tab. XIII, Fig. 51 bis Fig. 54,

- G das Gewicht des auf den Federn liegenden Baues, mit Einschluss des im Kessel enthaltenen Wassers;
- A_1 den Horizontalabstand des Schwerpunktes des auf den Federn liegenden Baues von der hinteren Laufaxe;
- A_2 den Horizontalabstand dieses Schwerpunktes von der mittleren Triebaxe;
- A_3 den Horizontalabstand dieses Schwerpunktes von der vorderen Laufaxe;
- $2 a$ die Entfernung der Federn an einer Seite der Lokomotive von den Federn der andern Seite;
- $r_1, r_2, r_3, r_4, r_5, r_6$ die Starrheits-Coeffizienten der in den Punkten 1 2 3 4 5 6 (Fig. 54) wirkenden Federn;
- $\zeta_1, \zeta_2, \dots, \zeta_6$ die Zusammendrückungen dieser Federn durch das Gewicht des Baues, wenn derselbe ruhig auf den Federn liegt und die Lokomotive ruhig auf der Bahn steht;

Dies vorausgesetzt, sind $r_1 \zeta_1, r_2 \zeta_2, \dots, r_6 \zeta_6$ die Kräfte, mit welchen die Federn nach vertikaler Richtung auf den Bau aufwärts wirken, wenn die Lokomotive in vollkommen ruhigem Zustand auf der Bahn steht. Für den Gleichgewichtszustand der Federn im ruhenden Zustand des Baues bestehen demnach folgende Beziehungen:

$$\left. \begin{aligned} G &= r_1 \zeta_1 + r_2 \zeta_2 + \dots + r_6 \zeta_6 \\ A_1 (r_1 \zeta_1 + r_2 \zeta_2) + A_2 (r_3 \zeta_3 + r_4 \zeta_4) &= A_3 (r_5 \zeta_5 + r_6 \zeta_6) \\ r_1 \zeta_1 + r_2 \zeta_2 + r_3 \zeta_3 &= r_4 \zeta_4 + r_5 \zeta_5 + r_6 \zeta_6 \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (4)$$

Wir wollen diese Gleichung zunächst benützen um die Bedingungen ausfindig zu machen, bei deren Erfüllung alle Federn durch den auf denselben ruhig liegenden Bau um gleich viel zusammengedrückt werden, wollen aber voraussetzen, dass die auf eine und dieselbe Axe einwirkenden Federn gleich starr sind, dass also $r_1 = r_2, r_3 = r_4, r_5 = r_6$

und $\zeta_1 = \zeta_2 = \zeta_3 \dots \zeta_6 = z$ sei, wobei z die in allen Federn entstehende Zusammendrückung bedeutet. In diesem Falle werden die zwei ersten der Gleichungen (4)

$$\left. \begin{aligned} \bar{G} &= 2z (f_1 + f_2 + f_3) \\ 0 &= \mathcal{A}_1 f_1 + \mathcal{A}_2 f_2 - \mathcal{A}_3 f_3 \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (5)$$

und die dritte dieser Gleichungen wird identisch erfüllt.

Dies sind also die Bedingungen, bei deren Erfüllung alle Federn durch die Last des Baues um gleich viel zusammengedrückt werden, vorausgesetzt, dass die auf eine Axe wirkenden Federn gleich starr sind. Wir werden in der Folge veranlasst sein, auf diese Bedingungen (5) zurückzukommen.

Wir denken uns nun, dass man den Bau aus der Gleichgewichtsposition, die durch die Gleichungen (4) charakterisirt wird, in eine andere Lage bringt, indem man den Bau parallel zu seiner Gleichgewichtslage um ζ hebt; sodann um eine durch den Schwerpunkt gehende Queraxe um einen Winkel φ (Fig. 51) so dreht, dass der vordere Theil der Lokomotive höher zu stehen kommt, und endlich um eine durch den Schwerpunkt gehende Längenaxe um einen kleinen Winkel ψ (Fig. 52, 53) so dreht, dass sich die rechte Seite der Lokomotive hebt, die linke aber senkt, so sind dann:

| Die Zusammendrückungen der Federn | Die zusammendrückenden Kräfte |
|---|---|
| $\zeta_1 - \zeta + \mathcal{A}_1 \varphi + \epsilon \psi$ | $f_1 (\zeta_1 - \zeta + \mathcal{A}_1 \varphi + \epsilon \psi)$ |
| $\zeta_2 - \zeta + \mathcal{A}_2 \varphi + \epsilon \psi$ | $f_2 (\zeta_2 - \zeta + \mathcal{A}_2 \varphi + \epsilon \psi)$ |
| $\zeta_3 - \zeta - \mathcal{A}_3 \varphi + \epsilon \psi$ | $f_3 (\zeta_3 - \zeta - \mathcal{A}_3 \varphi + \epsilon \psi)$ |
| $\zeta_4 - \zeta + \mathcal{A}_1 \varphi - \epsilon \psi$ | $f_4 (\zeta_4 - \zeta + \mathcal{A}_1 \varphi - \epsilon \psi)$ |
| $\zeta_5 - \zeta + \mathcal{A}_2 \varphi - \epsilon \psi$ | $f_5 (\zeta_5 - \zeta + \mathcal{A}_2 \varphi - \epsilon \psi)$ |
| $\zeta_6 - \zeta - \mathcal{A}_3 \varphi - \epsilon \psi$ | $f_6 (\zeta_6 - \zeta - \mathcal{A}_3 \varphi - \epsilon \psi)$ |

und es ist nun:

a) die Summe aller den Rahmenbau aufwärts drückenden Federkräfte

$$\begin{aligned} f_1 \zeta_1 + f_2 \zeta_2 + f_3 \zeta_3 + f_4 \zeta_4 + f_5 \zeta_5 + f_6 \zeta_6 - \zeta [f_1 + f_2 + f_3 + f_4 + f_5 + f_6] \\ + \varphi [\mathcal{A}_1 (f_1 + f_4) + \mathcal{A}_2 (f_2 + f_5) - \mathcal{A}_3 (f_3 + f_6)] \\ + \epsilon \psi [f_1 + f_2 + f_3 + f_4 + f_5 + f_6] \end{aligned}$$

b) die algebraische Summe der statischen Momente der Federkräfte in Bezug auf die Queraxe

$$\begin{aligned} + \mathcal{A}_1 [f_3 (\zeta_3 - \zeta - \mathcal{A}_3 \varphi + \epsilon \psi) + f_6 (\zeta_6 - \zeta - \mathcal{A}_3 \varphi - \epsilon \psi)] \\ - \mathcal{A}_2 [f_2 (\zeta_2 - \zeta + \mathcal{A}_2 \varphi + \epsilon \psi) + f_5 (\zeta_5 - \zeta + \mathcal{A}_2 \varphi - \epsilon \psi)] \\ - \mathcal{A}_3 [f_4 (\zeta_4 - \zeta + \mathcal{A}_1 \varphi + \epsilon \psi) + f_1 (\zeta_1 - \zeta + \mathcal{A}_1 \varphi - \epsilon \psi)] \end{aligned}$$

c) die algebraische Summe der Momente der Federkräfte in Bezug auf die durch den Schwerpunkt gehende Längenaxe

$$\left\{ \begin{array}{l} f_1(\zeta_1 - \zeta + \mathcal{A}_1 \varphi - \varepsilon \psi) + f_2(\zeta_2 - \zeta + \mathcal{A}_2 \varphi - \varepsilon \psi) + f_3(\zeta_3 - \zeta - \mathcal{A}_3 \varphi - \varepsilon \psi) \\ - f_1(\zeta_1 - \zeta + \mathcal{A}_1 \varphi + \varepsilon \psi) - f_2(\zeta_2 - \zeta + \mathcal{A}_2 \varphi + \varepsilon \psi) - f_3(\zeta_3 - \zeta - \mathcal{A}_3 \varphi + \varepsilon \psi) \end{array} \right\}$$

Diese Ausdrücke werden sehr vereinfacht, wenn man berücksichtigt, dass in der Wirklichkeit die auf eine und dieselbe Axe wirkenden Federn gleich starr, und in ruhigem Zustande um gleich viel zusammengepresst sind. Wir können also nehmen

$$f_1 = f_2 = f_3 = f_4$$

$$\zeta_1 = \zeta_2 = \zeta_3 = \zeta_4$$

Führt man diese Werthe in die obigen Ausdrücke ein und berücksichtigt die Gleichgewichtsbedingungen (4), so erhält man folgende Resultate

a) Summe aller Federkraft

$$G - 2\zeta(f_1 + f_2 + f_3) + 2\varphi(\mathcal{A}_1 f_1 + \mathcal{A}_2 f_2 - \mathcal{A}_3 f_3)$$

b) Summe der Momente in Bezug auf die Queraxe

$$+ 2\zeta(\mathcal{A}_1 f_1 + \mathcal{A}_2 f_2 - \mathcal{A}_3 f_3) - 2\varphi(f_1 \mathcal{A}_1^2 + f_2 \mathcal{A}_2^2 + f_3 \mathcal{A}_3^2)$$

c) Summe der Momente in Bezug auf die Längensaxe

$$- 2\varepsilon^2 \psi(f_1 + f_2 + f_3)$$

Somit sind nun die von den Federkräften herrührenden Bestandtheile der Summe ΣZ , Y_1 , X_1 berechnet, und wir gehen nun zur Bestimmung derjenigen Glieder über, welche die Pressungen der Gleitstücke gegen die Führungsliniale liefern.

Nennen wir

- P die Kraft, mit welcher der Kolben der vorderen Maschine getrieben wird.
- P_1 die Kraft, mit welcher der Kolben der hinteren Maschine getrieben wird. Diese Kräfte P und P_1 haben zwar gleiche Intensitäten, es ist aber gleichwohl zweckmässiger, sie so in Rechnung zu bringen, als wären sie ungleich;
- L die Länge einer Schubstange;
- r den Halbmesser einer Kurbel.
- e den Horizontalabstand der Axen der beiden Cylinder von der Längensaxe der Lokomotive (Fig. 54);
- ω die Winkelgeschwindigkeit der Triebräder;
- D den Durchmesser eines Triebrades;
- α den Winkel, den die Kurbel der vorderen Maschine mit der Axe des Cylinders in dem Zeitmoment bildet, in welchem die Position des Baues durch die Grössen ζ , φ und ψ bestimmt wird.
- $\frac{\pi}{2} - \alpha$ den Winkel, den gleichzeitig die Kurbel der hinteren Maschine mit der Richtung ihres Cylinders bildet. (Fig. 51);

Dies vorausgesetzt, sind, vermöge der Seite (138) gegebenen Erläuterungen, $P \frac{r}{L} \sin. \alpha$ $P_1 \frac{r}{L} \cos. \alpha$ die Pressungen der Gleitstücke gegen die oberen Führungsliniale, und sind ferner $r \cos. \alpha + L - \mathcal{A}_2$, $r \sin. \alpha + L - \mathcal{A}_3$ die Horizontalabstände der beiden Gleitstücke von der durch den Schwerpunkt des Baues gehenden Queraxe.

Die Momente dieser Pressungen sind demnach

d) in Bezug auf die durch den Schwerpunkt gehende Queraxe

$$P \frac{r}{L} \sin. \alpha (r \cos. \alpha + L - \mathcal{L}_2) + P_1 \frac{r}{L} \cos. \alpha (r \sin. \alpha + L - \mathcal{L}_2)$$

oder

$$\frac{1}{2} (P + P_1) \frac{r}{L} \sin. 2 \alpha + (L - \mathcal{L}_2) \frac{r}{L} (P \sin. \alpha + P_1 \cos. \alpha)$$

e) in Bezug auf die durch den Schwerpunkt gehende Längsaxe $O x_1$

$$P \frac{r}{L} \sin. \alpha e - P_1 \frac{r}{L} \cos. \alpha e$$

oder

$$\frac{r}{L} e (P \sin. \alpha - P_1 \cos. \alpha)$$

endlich ist die Summe der vertikal aufwärts wirkenden Pressungen

$$f) \quad \frac{r}{L} (P \sin. \alpha + P_1 \cos. \alpha)$$

Nun haben wir noch die auf den Rahmenbau einwirkenden Horizontalkräfte zu berücksichtigen.

Heissen wir K den numerischen Werth der Kraft, mit welcher ein Kolben getrieben wird (also die Differenz der Pressungen gegen die beiden Flächen eines Kolbens), so ist, wie schon früher gezeigt wurde, der Widerstand des ganzen Trains $2K \frac{2l}{D\pi}$, wobei l die Länge des Kolbenschubes bezeichnet. Nennen wir h_1 die Höhe des Schwerpunktes des Baues über dem Zusammenhangspunkt der Lokomotive mit dem Tender, so ist das Moment dieses Zuges in Bezug auf die durch den Schwerpunkt gehende Queraxe

$$g) \quad -h_1 \cdot 2K \frac{2l}{D\pi}$$

Streng genommen ist der Zug in der Zusammenhang der Lokomotive mit dem Tender nicht constant gleich dem mittleren Widerstand des Trains, sondern bei einem etwas unruhigen Lauf der Lokomotive periodisch veränderlich.

Wenn die Kurbeln der beiden Maschinen die in Fig. (51) dargestellte Stellung haben, wird, beim Vorwärtslaufen der Lokomotive, der vordere Kolben vorwärts, der Kolben der hinteren Maschine dagegen rückwärts getrieben; wird demnach der Cylinder der vorderen Maschine mit einer Kraft P zurück, der Cylinder der hinteren Maschine mit einer Kraft P_1 nach vorwärts getrieben. Nennen wir h die Höhe des Schwerpunktes über der Axe des Triebrades, so ist

$$h) \quad h(P_1 - P)$$

das Moment in Bezug auf die durch den Schwerpunkt gehende Queraxe.

Nun haben wir noch das Moment der Pressungen zu bestimmen, welche die Triebaxe gegen die Axengabeln ausübt. Dabei wollen wir uns aber erlauben, die Umdrehungsgeschwindigkeit der Triebaxe als constant anzunehmen, und die hin- und hergehenden Massen der Schubstangen, Kolbenstangen und Kolben zu vernachlässigen, oder, mit andern Worten, wir wollen die Pressungen der Triebaxe gegen die Axengabeln nach statischen Gesetzen berechnen; der Fehler, den wir dadurch begehen, ist von keinem Belang.

Zerlegt man die Pressungen der Schubstangen gegen die Kurbelzapfen in horizontale und vertikale Kräfte, so sind die ersteren P und P_1 , die letzteren dagegen $P \frac{r}{L} \sin. \alpha$, $P_1 \frac{r}{L} \cos. \alpha$.

Wir setzen voraus, dass die Triebräder auf der Bahn nicht glitschen, sondern nur rollen, dann können wir das Radwerk als einen Hebel ansehen, der im Berührungspunkte seinen Drehungspunkt hat. Nennen wir für einen Augenblick \mathfrak{R} den numerischen Werth des Druckes der Triebaxe gegen die Axenhalter, so haben wir zur Bestimmung desselben die Gleichung

$$\mathfrak{R} \frac{D}{2} = P \left(\frac{D}{2} + r \sin. \alpha \right) - P_1 \left(\frac{D}{2} - r \cos. \alpha \right) + P \frac{r}{L} \sin. \alpha \cdot r \cos. \alpha + P_1 \frac{r}{L} \cos. \alpha \cdot r \sin. \alpha$$

und hieraus folgt:

$$\mathfrak{R} = P - P_1 + \frac{2r}{D} (P \sin. \alpha + P_1 \cos. \alpha) + \frac{r^2}{LD} (P + P_1) \sin. 2\alpha$$

Das Moment dieses Druckes in Bezug auf die durch den Schwerpunkt gehende Queraxe ist:

$$i) \quad + \mathfrak{R} h = + h \left[P - P_1 + \frac{2r}{D} (P \sin. \alpha + P_1 \cos. \alpha) + \frac{r^2}{LD} (P + P_1) \sin. 2\alpha \right]$$

Hiemit sind nun endlich alle Bestandtheile der zu berechnenden Summe bestimmt; wir dürfen jedoch nicht übersehen, dass in der Summe der Vertikalkräfte auch das Gewicht des Baues aufgenommen werden muss. Fassen wir sämtliche Resultate a b c d e f g h i zusammen und berücksichtigen das Gewicht G des Baues, so finden wir nun:

$$\Sigma Z = -2\zeta (f_1 + f_2 + f_3) + 2\varphi (\mathcal{A}_1 f_1 + \mathcal{A}_2 f_2 - \mathcal{A}_3 f_3) + \frac{r}{L} (P \sin. \alpha + P_1 \cos. \alpha)$$

$$Y_1 = \left\{ \begin{array}{l} 2\zeta (\mathcal{A}_1 f_1 + \mathcal{A}_2 f_2 - \mathcal{A}_3 f_3) - 2\varphi (f_1 \mathcal{A}_1^2 + f_2 \mathcal{A}_2^2 + f_3 \mathcal{A}_3^2) \\ + \frac{1}{2} (P + P_1) \frac{r^2}{L} \sin. 2\alpha + (L - \mathcal{A}_3) \frac{r}{L} (P \sin. \alpha + P_1 \cos. \alpha) \\ - h_1 2K \frac{21}{D\pi} + h (P_1 - P) + h (P - P_1) \\ + h (P + P_1) \frac{r^2}{DL} \sin. 2\alpha + \frac{2r}{D} h (P \sin. \alpha + P_1 \cos. \alpha) \end{array} \right\}$$

$$X_1 = -2e^2 \psi (f_1 + f_2 + f_3) + \frac{r}{L} e (P \sin. \alpha - P_1 \cos. \alpha)$$

oder auch, wenn man in Y_1 zusammengehörige Glieder vereinigt:

Redtenbacher, Gesetze des Lokomotivbaues.

$$\left. \begin{aligned}
 \Sigma Z &= -2\zeta(f_1 + f_2 + f_3) + 2\varphi(\mathcal{A}_1 f_1 + \mathcal{A}_2 f_2 - \mathcal{A}_3 f_3) + \frac{r}{L}(P \sin. \alpha + P_1 \cos. \alpha) \\
 Y_1 &= -h_1 2K \frac{2l}{D\pi} + 2\zeta(\mathcal{A}_1 f_1 + \mathcal{A}_2 f_2 - \mathcal{A}_3 f_3) - 2\varphi(f_1 \mathcal{A}_1^2 + f_2 \mathcal{A}_2^2 + f_3 \mathcal{A}_3^2) \\
 &\quad + \frac{1}{2}(P + P_1) \frac{r^2}{L} \left(1 + \frac{2h}{D}\right) \sin. 2\alpha + \left[(L - \mathcal{A}_3) \frac{r}{L} + \frac{2rh}{D}\right] (P \sin. \alpha + P_1 \cos. \alpha) \\
 X_1 &= -2e^2 \psi(f_1 + f_2 + f_3) + \frac{r}{L} e (P \sin. \alpha - P_1 \cos. \alpha)
 \end{aligned} \right\} (6)$$

Rechnen wir die Zeit t von einem Augenblick* des Beharrungszustandes an, in welchem die Kurbel der vorderen Maschine mit der Richtung ihrer Kolbenstange einen Winkel α_0 bildete, so können wir in den Gleichungen (6), die für die Zeit t gelten $\alpha = \alpha_0 - \omega t$ setzen. Dies setzt jedoch voraus, dass α_0 gleich oder kleiner als 90° ist, indem die Gleichungen (6) zunächst nur gelten, so lange α zwischen 0 und 90° liegt.

Hiedurch erhalten wir nun:

$$\left. \begin{aligned}
 \Sigma Z &= -2\zeta(f_1 + f_2 + f_3) + 2\varphi(\mathcal{A}_1 f_1 + \mathcal{A}_2 f_2 - \mathcal{A}_3 f_3) + \frac{r}{L} [P \sin. (\alpha_0 - \omega t) + P_1 \cos. (\alpha_0 - \omega t)] \\
 Y_1 &= \left\{ \begin{aligned}
 &-h_1 2K \frac{2l}{D\pi} + 2\zeta(\mathcal{A}_1 f_1 + \mathcal{A}_2 f_2 - \mathcal{A}_3 f_3) - 2\varphi(f_1 \mathcal{A}_1^2 + f_2 \mathcal{A}_2^2 + f_3 \mathcal{A}_3^2) \\
 &+ \frac{1}{2}(P + P_1) \frac{r^2}{L} \left(1 + \frac{2h}{D}\right) \sin. 2(\alpha_0 - \omega t) \\
 &+ \left[(L - \mathcal{A}_3) \frac{r}{L} + \frac{2rh}{D}\right] [P \sin. (\alpha_0 - \omega t) + P_1 \cos. (\alpha_0 - \omega t)]
 \end{aligned} \right\} (7) \\
 X_1 &= -2e^2 \psi(f_1 + f_2 + f_3) + \frac{r}{L} e [P \sin. (\alpha_0 - \omega t) + P_1 \cos. (\alpha_0 - \omega t)]
 \end{aligned} \right\}$$

Aus diesen Werthen von ΣZ , Y_1 , X_1 könnte man bereits sehr viel wichtige Schlüsse ziehen, allein da eine vollständige Kenntniss der Bewegungszustände doch nur durch die Integrale der Bewegungsgleichungen erlangt werden kann, so wollen wir uns hier nicht länger aufhalten, sondern machen sogleich die Vorbereitungen zur Fortsetzung der Untersuchung.

Differenzialgleichungen, welche die gaukelnde Bewegung bestimmen.

Diese Differenzialgleichungen ergeben sich, wenn man in die Gleichungen (3) die so eben für ΣZ , Y_1 und X_1 gefundenen Werthe substituirt und ferner noch berichtigt, dass man hat:

$$\frac{dy_1}{dt} = \frac{d^2 \varphi}{dt^2} \quad \frac{dx_1}{dt} = \frac{d^2 \psi}{dt^2}$$

Macht man diese Substitution und setzt sodann zur Aabkürzung der Rechnungen:

$$\begin{aligned}
 m &= \frac{f_1 + f_2 + f_3}{M} & m_1 &= \frac{A_1 f_1 + A_2 f_2 - A_3 f_3}{B} & m_2 &= \frac{e^2 (f_1 + f_2 + f_3)}{A} \\
 n &= \frac{A_1 f_1 + A_2 f_2 - A_3 f_3}{M} & n_1 &= \frac{A_1' f_1 + A_2' f_2 + A_3' f_3}{B} \\
 p &= \frac{r}{2LM} & p_1 &= (L - A_1) \frac{r}{2LB} + \frac{rh}{BD} & p_2 &= \frac{re}{2AL} \\
 c &= \frac{2lhK}{BD\pi} & q_1 &= \frac{r^2}{2LB} \left(1 + \frac{2h}{D} \right)
 \end{aligned}
 \tag{8}$$

so erscheinen die Gleichungen (3) unter nachstehender Form;

$$\begin{aligned}
 \frac{d^2 \zeta}{dt^2} &= -m \zeta + n \varphi + p [P \sin. (\alpha_0 - \omega t) + P_1 \cos. (\alpha_0 - \omega t)] \\
 \frac{d^2 \varphi}{dt^2} &= -c + m_1 \zeta - n_1 \varphi + \frac{1}{2} (P + P_1) q_1 \sin. 2 (\alpha_0 - \omega t) \\
 &\quad + p_1 [P \sin. (\alpha_0 - \omega t) + P_1 \cos. (\alpha_0 - \omega t)] \\
 \frac{d^2 \psi}{dt^2} &= -m_2 \psi + p_2 [P \sin. (\alpha_0 - \omega t) - P_1 \cos. (\alpha_0 - \omega t)]
 \end{aligned}
 \tag{9}$$

Setzen wir:

$$\begin{aligned}
 \varphi &= \varphi_1 + c \frac{m}{m_1 n - n_1 m} \\
 \zeta &= \zeta_1 + c \frac{n}{m_1 n - n_1 m}
 \end{aligned}
 \tag{10}$$

so bedeuten φ_1 und ζ_1 zwei neue Variable, die von φ und ζ nur um constante Werthe verschieden sind.

Durch Einführung dieser Werthe von φ und ζ in die Gleichungen (9) nehmen dieselben folgende Form an:

$$\begin{aligned}
 \frac{d^2 \zeta_1}{dt^2} &= -m \zeta_1 + n \varphi_1 + p [P \sin. (\alpha_0 - \omega t) + P_1 \cos. (\alpha_0 - \omega t)] \\
 \frac{d^2 \varphi_1}{dt^2} &= +m_1 \zeta_1 - n_1 \varphi_1 + p_1 [P \sin. (\alpha_0 - \omega t) + P_1 \cos. (\alpha_0 - \omega t)] \\
 &\quad + \frac{1}{2} (P + P_1) q_1 \sin. 2 (\alpha_0 - \omega t) \\
 \frac{d^2 \psi}{dt^2} &= -m_2 \psi + p_2 [P \sin. (\alpha_0 - \omega t) - P_1 \cos. (\alpha_0 - \omega t)]
 \end{aligned}
 \tag{11}$$

Diese Gleichungen unterscheiden sich von den Gleichungen (9) dadurch, dass in ihnen kein absolut constantes Glied vorkommt. Integriert man die Gleichungen (11) und setzt sodann die für ζ_1 und φ_1 sich ergebenden Ausdrücke in (10), so erhält man die zu berechnenden Werthe von φ und ζ .

Es ist in Erinnerung zu bringen, dass diese Gleichungen (9) und (11) zunächst nur gelten, so lange $\alpha_0 - \omega t$ nicht ausserhalb 0 und $\frac{\pi}{2}$ liegt, d. h. nur für die Zeit gelten,

in der die Kurbel der vordern Maschine den Quadranten I, Fig. (51) durchläuft. Die Differenzialgleichungen für die Bewegung der Kurbel durch die übrigen Quadranten erhält man, wenn man in den Gleichungen (11) für P und P_1 diejenigen Werthe setzt, welche in folgendem Schema zusammengestellt sind:

| Wenn $\alpha_0 - \omega t$ liegt im Quadranten Fig. (51) | sind die Werthe von | | |
|---|---------------------|-------|-----------|
| | P | P_1 | $P + P_1$ |
| I. | +K | +K | 2K |
| II. | +K | -K | 0 |
| III. | -K | -K | -2K |
| IV. | -K | +K | 0 |

wobei K den numerischen Werth der Kraft bedeutet, mit welcher ein Kolben getrieben wird. Die numerischen Werthe von P und P_1 bleiben nämlich der Voraussetzung gemäss nun gleich k , die Zeichen von P und P_1 ändern sich dagegen in der Art, dass die Produkte $P \sin. (\alpha_0 - \omega t) P_1 \cos. (\alpha_0 - \omega t)$ stets positiv bleiben.

Die dritte der Gleichungen (11) kann unabhängig von den beiden andern integrirt werden, weil sie die beiden andern Variablen ξ_1 und φ_1 nicht enthält. Die beiden erstern der Gleichungen (11) müssen dagegen gleichzeitig integrirt werden, weil in jeder derselben sowohl ξ_1 als auch φ_1 vorkommt. Mit den Integrationen dieser Gleichungen werden wir uns nun beschäftigen.

Integration der Differenzialgleichung, welche das Wanken bestimmt.

Die wankende Bewegung wird durch die dritte der Gleichungen (10) also durch

$$\frac{d^2 \psi}{dt^2} = -m_2 \psi + p_2 [P \sin. (\alpha_0 - \omega t) - P_1 \cos. (\alpha_0 - \omega t)] \dots \dots \dots (1)$$

bestimmt. Das Integrale dieser Gleichung kann nach der von Lagrange gelehrtten Methode der Variation der Constanten integrirt werden. Dieser Weg führt jedoch zu weitläufigen Rechnungen, die man sich ersparen kann, indem die Form dieses Integrales errathen werden kann. Es ist nämlich die Vermuthung eine sehr nahe liegende, dass alle einzelnen Schwingungen, aus welchen das Gaukeln besteht, nach ähnlichen Gesetzen erfolgen, wie die Schwingungen der Saiten oder elastischen Körper. Es ist daher wahrscheinlich, dass wir der Gleichung (1) genügen werden, wenn wir setzen

$$\psi = \mathfrak{A} \sin. kt + \mathfrak{B} \cos. kt + \mathfrak{M} \sin. (\alpha_0 - \omega t) + \mathfrak{N} \cos. (\alpha_0 - \omega t) \dots \dots \dots (2)$$

Wenn diese Annahme eine richtige ist, so muss die Gleichung (1) durch Einführung dieses Werthes von ψ eine identische werden.

Aus (2) folgt durch zweimaliges Differenziren nach t .

$$\frac{d^2 \psi}{dt^2} = -k^2 (\mathfrak{A} \sin. kt + \mathfrak{B} \cos. kt) - \mathfrak{M} \omega^2 \sin. (\alpha_0 - \omega t) - \mathfrak{N} \omega^2 \cos. (\alpha_0 - \omega t) \dots \dots \dots (3)$$

Substituiert man diese Werthe von ψ und $\frac{d^2\psi}{dt^2}$ in (1) so findet man:

$$\begin{aligned}
 & -k^2 (\mathfrak{A} \sin. kt + \mathfrak{B} \cos. kt) - \mathfrak{M} \omega^2 \cos.^2 \sin. (\alpha_0 - \omega t) - \mathfrak{M} \omega^2 \cos. (\alpha_0 - \omega t) = \\
 & -m_2 (\mathfrak{A} \sin. kt + \mathfrak{B} \cos. kt) - \mathfrak{M} m_2 \sin. (\alpha_0 - \omega t) - \mathfrak{M} m_2 \cos. (\alpha_0 - \omega t) \\
 & + p_2 P \sin. (\alpha_0 - \omega t) - p_2 P_1 \cos. (\alpha_0 - \omega t)
 \end{aligned}$$

Diese Gleichung wird, wenn ω^2 nicht gleich m_2 ist, eine identische, wenn man setzt

$$k^2 = m_2 \quad -\mathfrak{M} \omega^2 = -\mathfrak{M} m_2 + p_2 P \quad -\mathfrak{M} \omega^2 = \mathfrak{M} m_2 - p_2 P_1$$

d. h. wenn

$$\left. \begin{aligned}
 K &= \sqrt{m_2} \\
 \mathfrak{M} &= \frac{p_2 P}{m_2 - \omega^2} \\
 \mathfrak{N} &= -\frac{p_2 P_1}{m_2 - \omega^2}
 \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (4)$$

genommen wird.

Setzt man die Werthe in (2), so findet man für das Integrale der Gleichung (1), wenn ω^2 nicht gleich m_2 ist folgenden Ausdruck:

$$\psi = \mathfrak{A} \sin. \sqrt{m_2} t + \mathfrak{B} \cos. \sqrt{m_2} t + \frac{p_2}{m_2 - \omega^2} [P \sin. (\alpha_0 - \omega t) - P_1 \cos. (\alpha_0 - \omega t)] \dots \dots (5)$$

in welchem \mathfrak{A} und \mathfrak{B} die beiden Constanten des Integrals bezeichnen. Den besonderen Fall, wenn $\omega^2 = m_2$ ist, werden wir in der Folge ins Auge fassen.

Die Gleichung (5) zeigt, dass die wankende Bewegung aus vier periodisch wiederkehrenden Schwingungen besteht. Die von ω , P und P_1 unabhängigen Schwingungen $\mathfrak{A} \sin. \sqrt{m_2} t$, $\mathfrak{B} \cos. \sqrt{m_2} t$, wollen wir Grundschwingungen nennen. Diese bleiben sich gleich, es mag die Lokomotive schnell oder langsam laufen, stark oder schwach getrieben werden. Sie treten allein auf, wenn man die Wirkung des Dampfes auf die Maschine aufhebt, und die Lokomotive nur durch die Trägheit ihrer Massen auf der Bahn fortläuft.

Wenn die Zeit t um $\frac{2\pi}{\sqrt{m_2}}$ wächst, kehrt die Lokomotive in die Lage zurück, in welcher sie sich zur Zeit t befand, $\frac{2\pi}{\sqrt{m_2}}$ ist daher die Zeit T eine Grundschwingung. Setzt man für m_2 seinen Werth, so findet man:

$$T = \frac{2\pi}{\epsilon} \sqrt{\frac{\Lambda}{f_1 + f_2 + f_3}} \dots \dots \dots (6)$$

Diese Zeit fällt klein aus, oder die Grundschwingungen folgen schnell aufeinander, 1) wenn $f_1 + f_2 + f_3$ gross, d. h. wenn die Federn starr sind, 2) wenn Λ klein, d. h. wenn das Trägheitsmoment des beweglichen Baues in Bezug auf die Längsaxe klein ist, 3) wenn ϵ gross ist, d. h. wenn die Federn möglichst weit aussen am Baue angebracht sind.

Das Glied

$$\frac{p_2}{m_2 - \omega^2} [P \sin. (\alpha_0 - \omega t) - P_1 \cos. (\alpha_0 - \omega t)]$$

bestimmt die Schwingungen, welche durch die Pressungen der Gleitstücke gegen die Führungsliniale veranlasst werden, wenn die Kolben durch Dampf getrieben werden. Diese Schwingungen richten sich genau nach den Kurbelbewegungen, wir wollen sie deshalb Kurbelschwingungen nennen. Die Dauer einer solchen Schwingung, d. h. die Zeit, in welcher die Lokomotive in Folge dieser Schwingungsweise in eine gewisse Lage zurückkehrt, ist $\frac{2\pi}{\omega}$ und stimmt genau mit der Umdrehung der Treibaxe überein. Je nachdem also die Lokomotive schnell oder langsam läuft, folgen diese Kurbelschwingungen schnell oder langsam aufeinander. Die grösste Ablenkung von der Ruheposition, welche in Folge dieser Schwingung eintritt, beträgt $\frac{p_2 P}{m_2 - \omega^2}$ oder wenn wir für p_2 und m_2 ihren Werth setzen:

$$\frac{P r e}{2 L A} \frac{1}{\varepsilon^2 (\ell_1 + \ell_2 + \ell_3) - \omega^2 A}$$

oder auch

$$\frac{P r e}{2 L} \frac{1}{\varepsilon^2 (\ell_1 + \ell_2 + \ell_3) - \omega^2 A} \dots \dots \dots (7)$$

Das durch die Pressungen der Gleitstücke gegen die Führungsliniale verursachte Wanken wird demnach bedenklich 1) wenn P gross ist, d. h. wenn die Maschinen kräftig wirken; 2) wenn e gross ist, d. h. wenn die Horizontalabstände der Cylinder gross ist; 3) wenn $\frac{r}{L}$ gross ist, d. h. wenn die Schubstangen im Verhältniss zum Kurbelhalbmesser eine geringe Länge haben; 4) wenn ε klein ist, d. h. wenn die Federn eng gestellt sind; 5) wenn $\ell_1 + \ell_2 + \ell_3$ klein ist, d. h. wenn die Federn weich sind; 6) wenn die Geschwindigkeit der Lokomotive demjenigen Werth nahe kommt, für welchen

$$\omega = \varepsilon \sqrt{\frac{\ell_1 + \ell_2 + \ell_3}{A}}$$

wird, d. h. wenn die Umdrehungszeit der Triebaxe mit der Zeit einer Grundschiwingung nahe übereinstimmt. Es gibt also für jede Lokomotive eine Winkelgeschwindigkeit der Triebaxe, bei welcher ein heftiges Wanken des beweglichen Baues eintreten muss.

Denkt man sich, dass eine Lokomotive ganz allmählig aus einem langsamen Bewegungszustand in einen extravagant schnellen übergeht, so wird anfänglich nur ein schwaches, dann ein stärkeres, hierauf ein sehr heftiges Wanken eintreten; hat man aber diesen gefährlichen Moment glücklich überstanden, so nimmt das Wanken bei noch weiter zunehmender Geschwindigkeit mehr und mehr ab, und würde bei einer grenzenlosen Geschwindigkeit so verschwinden, dass sich die Lokomotive ganz aufrecht stehend hielte.

Wir können auch die Einwirkungen der Unvollkommenheit der Bahn auf das Wanken der Lokomotive durch Rechnung verfolgen, wenn wir annehmen, dass diese Einwirkungen durch periodisch wiederkehrende Funktionen der Zeit ausgedrückt werden dürfen. Durch die Unebenheiten der Bahn werden die Räder, insbesondere an den Schienenverbindungen in die Höhe gestossen, werden ferner die Räder zwischen den Schienen hin und her geschoben. Durch diese Einwirkungen entstehen gewisse Drehungsmomente und wir wollen annehmen, dass dieselben durch

$$e \mathfrak{B} (\sin. \lambda t + \cos. \gamma t) \text{ und } h \mathfrak{G} (\sin. \mu t + \cos. \mu t)$$

ausgedrückt werden dürfen, wobei $2e$ der horizontale Abstand der rechtseitigen Federn von den linkseitigen und h die Höhe des Schwerpunktes des beweglichen Baues über den Axen der Räder bezeichnet. Ferner \mathfrak{B} λ \mathfrak{G} μ gewisse von dem Bau der Bahn und der Räder abhängige Constante sind.

Wir erhalten nun statt der Gleichung (1) die folgende

$$\frac{d^2 \psi}{dt^2} = -m_2 \psi + p_2 [P \sin. (\alpha_0 - \omega t) - P_1 \cos. (\alpha_0 - \omega t)] + \frac{e \mathfrak{B}}{2 \Lambda} (\sin. \lambda t + \cos. \lambda t) + \frac{h \mathfrak{G}}{2 \Lambda} (\sin. \mu t + \cos. \mu t)$$

Vorausgesetzt dass m_2 weder gleich ω^2 noch gleich λ^2 und auch nicht gleich μ^2 ist, findet man für das Integrale dieser Gleichung folgenden Ausdruck

$$\psi = \mathfrak{A} \sin. \sqrt{m_2} t + \mathfrak{B} \cos. \sqrt{m_2} t + \frac{p_2}{m_2 - \omega^2} [P \sin. (\alpha_0 - \omega t) - P_1 \cos. (\alpha_0 - \omega t)] + \frac{e \mathfrak{B}}{2 \Lambda (m_2 - \lambda^2)} (\sin. \lambda t + \cos. \lambda t) + \frac{h \mathfrak{G}}{2 \Lambda (m_2 - \mu^2)} (\sin. \mu t + \cos. \mu t) \quad (8)$$

Da sowohl $\sin. \lambda t + \cos. \lambda t$ als auch $\sin. \mu t + \cos. \mu t$ nicht grösser als $\sqrt{2}$ werden kann, so ist die grösste Neigung, die durch das Aufspringen der Räder verursacht werden kann,

$$\sqrt{2} \frac{e \mathfrak{B}}{2 \Lambda (m_2 - \lambda^2)} = \frac{1}{2} \sqrt{2} \frac{e \mathfrak{B}}{e^2 (l_1 + l_2 + l_3) - \lambda^2 \Lambda}$$

und die grösste Neigung, die aus der Hin- und Herbewegung der Räder zwischen den Schienen entstehen kann

$$\sqrt{2} \frac{h \mathfrak{G}}{2 \Lambda (m_2 - \mu^2)} = \frac{1}{2} \sqrt{2} \frac{h \mathfrak{G}}{e^2 (l_1 + l_2 + l_3) - \mu^2 \Lambda}$$

Hieraus sieht man, dass die Einwirkung der Bahn auf das Wanken der Lokomotive gross ausfällt: 1) wenn sich der Schwerpunkt des beweglichen Baues in einer beträchtlichen Höhe über den Axen der Räder befindet, 2) wenn m_2 nahe gleich λ^2 oder nahe gleich μ^2 wird. Diess ist aber dann der Fall, wenn die Zeit $\frac{2\pi}{\sqrt{m_2}}$ einer Grundschiwingung nahe gleich ist der Zeit $\frac{2\pi}{\lambda}$ von einem Radaufsprung bis zum nächsten, oder nahe gleich ist der Zeit $\frac{2\pi}{\mu}$ des Hin- und Herganges der Räder zwischen dem Geleise. Da die störenden Einwirkungen der Bahn vorzugsweise an den Schienenstössen stattfinden, so werden wir der Wahrheit ziemlich nahe kommen, wenn wir diese Zeiten $\frac{2\pi}{\lambda}$ und $\frac{2\pi}{\mu}$ gleich setzen der Zeit, in der die Lokomotive über eine Schienenlänge läuft; diese Zeit ist aber wenn wir die Laufgeschwindigkeit der Lokomotive mit v und die Länge einer Schiene mit s bezeichnen $\frac{s}{v}$. Durch die Einwirkung einer aus gleich langen Schienen bestehenden Bahn kann also das Wanken bedeutend werden, wenn annähernd

$$\frac{s}{v} = \frac{2\pi}{\sqrt{m_2}} = \frac{2\pi}{e} \sqrt{\frac{\Lambda}{l_1 + l_2 + l_3}}$$

oder annähernd

$$v = \frac{S \varepsilon}{2 \pi} \sqrt{\frac{\xi_1 + \xi_2 + \xi_3}{\Lambda}} \dots \dots \dots (9)$$

wird. Denkt man sich, dass eine Lokomotive aus einem sehr langsamen Beharrungszustand allmählig in einen extravagant raschen übergeht, so wird die Bahn anfangs nur ein schwaches, dann ein stärkeres, zuletzt aber, wenn die Geschwindigkeit sehr gross geworden ist, nur noch ein äusserst schwaches Wanken verursachen. Es gibt also auch hinsichtlich der Einwirkung der Bahn auf das Wanken eine gefährliche Geschwindigkeit; auch ist aus dem Gesagten klar, dass man sich durch ungleich lange Schienen gegen die Einwirkung der Bahn theilweise schützen könnte.

Gehen wir nun zur Behandlung der Ausnahmefälle über, in welchen der Ausdruck (9) das Integrale der Differenzialgleichung (8) nicht mehr darstellen kann.

Ausnahmefälle, in welchen die für das Wanken aufgefundenen Ausdrücke unrichtig sind.

Es gibt drei Fälle, in welchen die Gleichung (9) den wahren Werth von ψ nicht mehr richtig darstellt. Diese Fälle treten ein, wenn m_2 entweder gleich ω^2 oder gleich λ^2 oder endlich gleich μ^2 ist, d. h. wenn die Dauer $\frac{2\pi}{\sqrt{m_2}}$ entweder gleich ist der Umdrehungszeit $\frac{2\pi}{\omega}$ der Triebaxe oder gleich ist einer der Perioden $\frac{2\pi}{\lambda}$ $\frac{2\pi}{\mu}$ der Bahneinwirkungen. Die analytische Praxis lässt vermuthen, dass in einem dieser drei Fälle das wahre Integrale der Gleichung (8) ein mit der Zeit t multiplizirtes Glied enthalten müsse. Prüft man diese Vermuthung, so findet man, dass der Differenzialgleichung (8) in der That durch folgende Ausdrücke entsprochen wird:

1. Wenn $\omega^2 = m_2$ ist:

$$\begin{aligned} \psi = & \mathfrak{A} \sin. \omega t + \mathfrak{B} \cos. \omega t + \frac{P_2}{2 \sqrt{m_2}} [P \sin. (\alpha_0 - \omega t) + P_1 \cos. (\alpha_0 - \omega t)] t \\ & + \frac{\varepsilon \mathfrak{B}}{2 \Lambda (m_2 - \lambda^2)} (\sin. \lambda t + \cos. \lambda t) \\ & + \frac{h \mathfrak{G}}{2 \Lambda (m_2 - \mu^2)} (\sin. \mu t + \cos. \mu t) \end{aligned}$$

2. Wenn $\lambda^2 = m_2$ ist

$$\begin{aligned} \psi = & \mathfrak{A} \sin. \sqrt{m_2} t + \mathfrak{B} \cos. \sqrt{m_2} t + \frac{P_2}{m_2 - \omega^2} [P \sin. (\alpha_0 - \omega t) - P_1 \cos. (\alpha_0 - \omega t)] \\ & + \frac{\varepsilon \mathfrak{B}}{4 \Lambda \sqrt{m_2}} (\sin. \sqrt{m_2} t - \cos. \sqrt{m_2} t) t \\ & + \frac{h \mathfrak{G}}{2 \Lambda (m_2 - \mu^2)} (\sin. \mu t + \cos. \mu t) \end{aligned}$$

Wenn $\mu^2 = m_2$ ist:

$$\psi = \mathfrak{A} \sin. \sqrt{m_2} t + \mathfrak{B} \cos. \sqrt{m_2} t + \frac{P_2}{m_2 - \omega^2} [P \sin. (\alpha_0 - \omega t) - P_1 \cos. (\alpha_0 - \omega t)]$$

$$+ \frac{\varepsilon \mathfrak{B}}{2 \Lambda (m_2 - \lambda^2)} (\sin. \lambda t + \cos. \lambda t)$$

$$+ \frac{h \mathfrak{B}}{4 \Lambda \sqrt{m_2}} (\sin. \sqrt{m_2} t - \cos. \sqrt{m_2} t) t$$

Wäre gleichzeitig $\omega^2 = m_2$ und $\lambda^2 = m_2$ oder $\omega^2 = m_2$ und $\mu^2 = m_2$ oder endlich $\lambda^2 = m_2$ und $\mu^2 = m_2$, so würden in dem Ausdruck für ψ zwei mit der Zeit t multiplizierte Glieder vorkommen. Wäre gleichzeitig $m_2 = \omega^2 = \lambda^2 = \mu^2$ so würden in ψ drei mit t multiplizierte Glieder vorkommen.

In allen diesen Fällen wird das Wanken der Lokomotive mit der Zeit immer stärker und stärker, kann demnach mit der Zeit sehr drohend werden. Es ist daher von praktischem Interesse zu erfahren, was zu thun ist, damit in der Wirklichkeit diese gefährlichen Gleichheiten: $\omega^2 = m_2$, $\lambda^2 = m_2$, $\mu^2 = m_2$ nicht eintreten können.

Wenn die gefährliche Gleichheit $\omega^2 = m_2$ nicht eintreten soll, muss die grösste Winkelgeschwindigkeit, die in der Benutzung einer Lokomotive eintreten kann, kleiner sein als $\sqrt{m_2}$. Nennen wir v die grösste Laufgeschwindigkeit, bis zu welcher hin man eine Lokomotive laufen lassen will, D den Durchmesser eines Triebrades, so ist der grösste Werth von $\omega = 2 \frac{v}{D}$. Die gefährliche Gleichheit $\omega^2 = m_2$ wird also bei keiner der Geschwindigkeiten, mit welcher man die Lokomotive laufen lassen will, eintreten, wenn

$$2 \frac{v}{D} < \sqrt{m_2}$$

oder wenn

$$D > \frac{2v}{\sqrt{m_2}}$$

oder wenn

$$D > 2 \frac{v}{\varepsilon} \sqrt{\frac{\Lambda}{f_1 + f_2 + f_3}} \dots \dots \dots (1)$$

Diesem Ausdrucke kann man eine mehr sprechende Form geben. Das Federwerk einer Lokomotive soll, wie wir in der Folge sehen werden, immer so angeordnet werden, dass in unbewegtem Zustande der Lokomotive alle Federn gleich stark zusammengedrückt sind. Dieser Anforderung wird, wie Seite 142, Gleichung (5) erklärt wurde entsprechen, wenn

$$\left. \begin{aligned} f_1 \mathcal{A}_1 + f_2 \mathcal{A}_2 - f_3 \mathcal{A}_3 &= 0 \\ f_1 + f_2 + f_3 &= \frac{G}{2s} \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (2)$$

$s = z$ gesetzt ist, wobei s die Zusammendrückung jeder Feder bedeutet. Wir wollen annehmen, das Federwerk der Lokomotive entspreche dieser Anforderung.

Um das Trägheitsmoment Λ des beweglichen Baues in Bezug auf die durch den Schwerpunkt gehende Längsaxe auszudrücken, sei d_1 der Durchmesser eines Cylinders,

Redtenbacher, Gesetze des Lokomotivbaues.

dessen Gewicht gleich G und dessen Trägheitsmoment (als Masse ausgedrückt) in Bezug auf seine geometrische Axe gleich A ist, so hat man

$$\Lambda = \frac{G}{2g} \frac{d_1^2}{8} \dots \dots \dots (3)$$

Vermittelst dieses Werthes von Λ und des Werthes, den die zweite der Bedingungen (2) für $t_1 + t_2 + t_3$ darbietet, wird die Beziehung (1)

$$D > \frac{1}{2} \frac{d_1}{\epsilon} \sqrt{\frac{2s}{g}} \dots \dots \dots (4)$$

Die Zusammendrückung s der Federn durch das Gewicht des beweglichen Baues beträgt gewöhnlich 0.05 Meter, $\frac{d_1}{\epsilon}$ ist für die Lokomotive von *Crampton* annähernd gleich 2.5, $g = 9.808$. Die grösste, bei Personenschnellzügen vorkommende Geschwindigkeit v kann zu 16 Meter angenommen werden. Mit diesen Daten findet man aus (4)

$$D > 2 \text{ Meter.}$$

Diese numerische Rechnung ist nun allerdings nicht ganz zuverlässig, weil das Verhältniss $\frac{d_1}{\epsilon}$ nur nach einer ungefähren Schätzung genommen wurde, aber jedenfalls werden wir durch den Ausdruck (4) belehrt, dass weiche Federn (für welche s gross ist) und eine grosse Fahrgeschwindigkeit v grosse Triebräder erfordern, damit das Wanken nicht zu stark wird.

Untersuchen wir nun ferner, unter welchen Bedingungen die gefährlichen Gleichheiten $\lambda^2 = n_1$ und $\mu^2 = m_2$ vermieden werden können.

Die störenden Einwirkungen der Bahn auf die Bewegung der Lokomotive geschehen vorzugsweise an den Schienenverbindungen; es ist daher der Natur der Sache angemessen, wenn wir die Perioden $\frac{2\pi}{\mu}$ und $\frac{2\pi}{\lambda}$ gleich setzen der Zeit, in welcher die Lokomotive eine Schienenlänge durchläuft. Nennen wir also s eine Schienenlänge, v die Laufgeschwindigkeit der Lokomotive, so ist $\frac{s}{v}$ die Zeit, in der die Lokomotive eine Schienenlänge zurücklegt. Wir setzen daher

$$\frac{2\pi}{\mu} = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{s}{v}$$

oder

$$\lambda = \mu = 2\pi \frac{v}{s} \dots \dots \dots (5)$$

Damit nun bei keiner von den Geschwindigkeiten, die in der Wirklichkeit vorkommen, die gefährliche Gleichheit $\lambda^2 = m_2$ eintritt, muss, selbst für den grössten Werth von v , $\lambda < \sqrt{m_2}$ sein. Wir erhalten daher die Bedingung

$$2\pi \frac{v}{s} < \epsilon \sqrt{\frac{t_1 + t_2 + t_3}{\Lambda}}$$

oder

$$s > 2 \pi \frac{v}{\epsilon} \sqrt{\frac{A}{\ell_1 + \ell_2 + \ell_3}}$$

oder endlich wenn wir für A und $\ell_1 + \ell_2 + \ell_3$ die Werthe setzen, welchen die Gleichungen (2) und (3) darbieten

$$s > \frac{\pi}{2} \frac{d_1}{\epsilon} v \sqrt{\frac{23}{g}} \dots \dots \dots (5)$$

Weiche Federn (für welche s gross ist), eine grosse Fahrgeschwindigkeit und eine kleine Federdistanz ϵ erfordern also lange Schienen.

Setzen wir auch hier $\frac{d_1}{\epsilon} = 2.5$, $v = 16$, $s = 0.05$, $g = 9.81$, so folgt aus (5)

$$s > 6.28 \text{ Meter.}$$

Diese Schienenlänge stimmt mit den gegenwärtig üblichen Schienenlängen beinahe überein.

Für den ersten Augenblick wird es wohl Jedermann befremdend finden, dass gewisse, beinahe mässige Fahrgeschwindigkeiten gefährlicher sein können als extravagante Geschwindigkeiten, und ich muss gestehen, dass mir dieses Ergebniss der Analysis anfänglich mit der Natur der Sache so sehr im Widerspruche zu sein schien, dass ich irgend einen Rechnungsfehler begangen zu haben vermuthete. Lange suchte ich vergeblich nach diesem vermeintlichen Fehler, bewerkstelligte die Integration der Differentialgleichung (1) Seite 148 durch verschiedene Methoden, kam aber immer zu dem gleichen Endresultate. Endlich wurde es mir klar, dass die Rechnung recht habe, dass sich das Ergebniss mit der Natur der Sache sehr wohl vertrage, und dass ähnliche Erscheinungen in sehr vielen Fällen vorkommen. Es ist nämlich nicht schwer einzusehen, dass eine vorhandene periodisch schwingende Bewegung immer heftiger und heftiger werden muss, wenn dieselbe in Zeitintervallen, die der Schwingungsperiode gleich kommen, auf gleiche Weise gestört wird. Wenn z. B. auf ein schwingendes Pendel nach jedem Schwung ein wenn auch nur schwacher Schlag ausgeübt wird, so müssen die Schwingungen zuletzt immer grösser und grösser werden. Oder wenn gegen ein im Wasser schwankendes Schiff Wellenschläge einwirken, die in Zeitintervallen aufeinander folgen, welche der Schwingungszeit des Schiffes gleich sind, so muss nothwendig das Schwanken des Schiffes zuletzt immer stärker und stärker werden. Auch in der Astronomie kommt ein merkwürdiges Beispiel vor, das hier angeführt zu werden verdient.

La Place hat zuerst gezeigt, dass die Störung, welche in der Bewegung eines Planeten A durch einen Planeten B eintritt, wesentlich von dem Verhältniss der Umlaufzeiten dieser Planeten abhängt, und dass diese Störung fort und fort zunehmen muss, wenn die Umlaufzeit des einen Planeten ein Vielfaches von der Umlaufzeit des anderen Planeten ist.

In der später folgenden Untersuchung über das Nicken und Wogen werden wir ebenfalls der Erscheinung begegnen, dass sich unter gewissen Umständen die störenden Bewegungen immer mehr und mehr anhäufen können, und es ist meine Ueberzeugung, dass darin manche in den Bewegungen der Lokomotive vorkommende Erscheinungen ihren Grund haben, und dass namentlich oftmals Axenbrüche durch Ansammlung von störenden Bewegungen geschehen mögen.

Bedingungen, bei deren Erfüllung die wankenden Bewegungen einer Lokomotive nur in einem schwachen Grade eintreten.

Aus dieser Untersuchung über die wankenden Bewegungen geht hervor, dass diese störenden Bewegungen nur in einem schwachen Grade eintreten werden, wenn folgenden Bedingungen entsprochen wird.

A) Die wankenden Bewegungen, welche die Pressungen der Gleitstücke gegen die Führungsliniale verursachen, fallen vermöge des Ausdrucks (7) Seite 150 klein aus:

1. Wenn die Lokomotive nur mit schwacher Kraft getrieben wird, oder nur einen verhältnissmässig kleinen Widerstand zu überwinden hat.
2. Wenn die Schubstangen im Verhältniss zum Kurbelhalbmesser sehr lang sind.
3. Wenn die Cylinder der beiden Maschinen möglichst nah neben einander liegen. Innen liegende Cylinder sind also hinsichtlich des Wankens den aussen liegenden vorzuziehen.
4. Wenn die Federn einen hohen Grad von Starrheit besitzen.
5. Wenn die parallel mit den Axen der Räder gemessene Horizontaldistanz der Federn gross ist. Hinsichtlich des Wankens ist es also besser, wenn die Federn nicht innerhalb, sondern wenn sie ausserhalb der Räder angebracht werden. Auch ist eine grosse Spurweite vortheilhaft.
6. Wenn die beim schnellsten Lauf der Lokomotive eintretende Umdrehungszeit der Triebräder kleiner ist als die Zeit einer Grundschiwingung des auf den Federn liegenden Baues.

B) Die wankenden Bewegungen, welche aus den Einwirkungen der Bahn gegen die Räder entstehen, fallen klein aus.

7. Wenn der Schwerpunkt des Baues möglichst tief liegt.
8. Wenn die Federn, nach der Richtung der Triebaxe gemessen, weit auseinander angebracht sind.
9. Wenn die Federn starr sind, in welchem Fall jedoch harte Stösse eintreten, die noch nachtheiliger sind, als schwankende Bewegungen.
10. Wenn die Schienen der Bahn sehr lang sind, so dass die Zeit, welche die Lokomotive braucht, um über eine Schiene zu laufen, beträchtlich grösser ist, als die Zeit einer Grundschiwingung des Baues.

Die hinsichtlich des Wankens vortheilhaften Bedingungen sind also, wenn man sie in kurzen Worten zusammenfasst: Mässige Anstrengung der Lokomotive, lange Schubstangen, kleine Kurbelhalbmesser, innen liegende Cylinder, starre aussen liegende Federn, grosse Triebräder, tief liegender Schwerpunkt, lange Bahnschienen, grosse Spurweite.

Diese Untersuchung über das Wanken hat eine reichere Ausbeute geliefert, als das Studium über das Zucken und Schlingern; noch reicher ist die Ausbeute, welche die Untersuchung über das Wogen und Nicken liefert.

Bestimmung des hinsichtlich des Wankens vortheilhaftesten Durchmessers der Triebräder.

Der Ausdruck (7) Seite 150, welcher die Grösse des Wankens bestimmt, kann in eine Form gebracht werden, die über den Einfluss des Durchmessers der Triebräder auf das Wanken Aufschluss gibt.

Nennt man w den totalen Widerstand des Trains mit Einschluss des Widerstandes

der Lokomotive. D den Durchmesser eines Triebrades. v die Fahrgeschwindigkeit der Lokomotive, so ist

$$Pr = \frac{\pi}{8} D W \quad \omega = \frac{2v}{D}$$

Vermittelst dieser Werthe wird der Ausdruck (7), wenn man denselben zur Abkürzung mit X bezeichnet und $f_1 + f_2 + f_3 = F_1$ setzt:

$$X = \frac{\pi}{16} W \frac{e}{L} \frac{D^2}{e^2 D^2 F_1 - 4 V^2 A} \dots \dots \dots (1)$$

Es entsteht nun die Frage, wie gross für eine neu zu erbauende Lokomotive, die mit einer gewissen Geschwindigkeit v zu laufen bestimmt ist, der Durchmesser D genommen werden soll, damit das Wanken X so klein als möglich ausfällt. Der Ausdruck (1) zeigt, dass X verschwindet, wenn $D = 0$ ist. Dass aber X sowohl für $D = \infty$ als auch für $D = 2 \frac{v}{e} \sqrt{\frac{A}{F_1}}$ unendlich gross ausfällt; es muss also zwischen diesen Werthen von D ein Werth von D liegen, für welchen X ein relatives Minimum wird, d. h. es gibt einen hinsichtlich des Wankens vortheilhaftesten Durchmesser der Triebräder. Wir finden denselben, wenn wir den Differenzialquotienten $\frac{dX}{dD}$ suchen und gleich Null setzen.

Es ist nun

$$\frac{dX}{dD} = \frac{\pi}{16} W \frac{e}{L} \frac{(e^2 D^2 F_1 - 4 V^2 A) 3 D^2 - 2 D^4 e^2 F_1}{(e^2 D^2 F_1 - 4 V^2 A)^2}$$

Der Zähler dieses Ausdruckes verschwindet, wenn $D = 0$, so wie auch wenn

$$D = \frac{v}{e} \sqrt{12 \frac{A}{F_1}} \dots \dots \dots (2)$$

ist, und dies ist der hinsichtlich des Wankens vortheilhafteste Raddurchmesser. Führt man diesen Werth von D in (1) ein, so erhält man

$$X_{\text{min.}} = \frac{3\pi}{32} W \frac{e v}{e^2 F_1 L} \sqrt{\frac{12 A}{F_1}} \dots \dots \dots (3)$$

Setzt man in diese Ausdrücke (2) und (3) für A und $F_1 = f_1 + f_2 + f_3$ die Werthe, welche die Gleichungen (2) und (3) Seite 153 und 154 darbieten, so wird:

$$D = v \frac{d_1}{e} \sqrt{\frac{3 s}{2 g}} \dots \dots \dots (4)$$

$$X_{\text{min.}} = \frac{6\pi}{32} \frac{W}{G} \frac{e v s d_1}{e^2 L} \sqrt{\frac{3 s}{2 g}} \dots \dots \dots (5)$$

für die Lokomotive von *Crampton* ohne Blindaxe ist annähernd: $s = 0.05, g = 9.81, \frac{d_1}{e} = 2.5, \epsilon = 0.7, e = 0.9$ Meter, $L = 2.2, \frac{W}{G} = \frac{1}{20}$. Für diese Werthe findet man:

$$\left. \begin{aligned} D &= 0,22 V \\ X_{\text{min.}} &= \frac{V}{3750} \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (6)$$

Dieser Durchmesser ist sehr gross, denn er wird schon für die sehr mässige Fahrgeschwindigkeit von 10 Meter 2·2 Meter. Allein man sieht auch aus dem Werth von X, dass dieses schwächste Wanken verschwindend klein ist.

Wir wollen sehen, wie stark das Wanken wird, wenn der Durchmesser der Triebräder von dem vortheilhaftesten Werth abweicht.

Nehmen wir

$$D = m \frac{V}{\epsilon} \sqrt{12 \frac{A}{F_1}} = m V \frac{d_1}{\epsilon} \sqrt{\frac{3}{2} \frac{s}{g}} \dots \dots \dots (7)$$

wobei m irgend eine beliebige Zahl bezeichnet. Setzt man m = 1, so gibt (7) den vortheilhaftesten Durchmesser.

Der das Wanken messende allgemeine Werth von X wird für diesen Werth von D

$$\left. \begin{aligned} X &= \frac{3 \pi}{16} \frac{W e V}{L \epsilon^2 F_1} \sqrt{12 \frac{A}{F_1} \frac{m^2}{3 m^2 - 1}} \\ \text{oder} \\ X &= \frac{6 \pi}{16} \frac{W e V s d_1}{G \epsilon^2 L} \sqrt{\frac{3}{2} \frac{s}{g} \frac{m^2}{3 m^2 - 1}} \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (8)$$

Setzen wir auch hier s = 0·05 g = 9·81 $\frac{d_1}{\epsilon} = 2·5$ $\epsilon = 0·7$ e = 0·9 L = 2·2 $\frac{W}{G} = \frac{1}{20}$ so findet man:

$$\begin{aligned} D &= 0·22 m V \\ X &= \frac{V}{1875} \frac{m^2}{3 m^2 - 1} \end{aligned}$$

| | | | | | | |
|------|--------------------------------|------|-------|-------|-------|------------------------------|
| Für | m = 1 | 0·9 | 0·8 | 0·7 | 0·6 | $\frac{1}{\sqrt{3}} = 0·577$ |
| wird | $\frac{D}{V} = 0·22$ | 0·20 | 0·176 | 0·154 | 0·132 | 0·127 |
| und | $\frac{m^2}{3 m^2 - 1} = 0·50$ | 0·51 | 0·56 | 0·73 | 2·7 | ∞ |

Hieraus sieht man, dass ein bedenkliches Wanken erst dann eintritt, wenn der Durchmesser des Triebrades derjenigen Grenze ganz nahe kommt, bei welcher die Umdrehungszeit des Rades mit der Zeit einer Grundschiwingung zusammen trifft. Für m = 0·6 wird D = 0·132 V und $X = \frac{V}{694}$ und dieser Werth von X wird selbst für eine sehr grosse Geschwindigkeit von v = 20 nur $\frac{20}{694} = \frac{1}{34}$ d. h. die Lokomotive wankt dann nur im Winkel von 2° hin und her.

Das Wogen und Nicken.

Integration der Differenzialgleichungen, welche das Wogen und Nicken bestimmen.

Diese Differenzialgleichungen sind die beiden ersteren der Gleichungen (11) Seite 147 nämlich:

$$\left. \begin{aligned} \frac{d^2 \zeta_1}{dt^2} &= -m \zeta_1 + n \varphi_1 + p [P \sin. (\alpha_0 - \omega t) + P_1 \cos. (\alpha_0 - \omega t)] \\ \frac{d^2 \varphi_1}{dt^2} &= +m_1 \zeta_1 - n_1 \varphi_1 + p_1 [P \sin. (\alpha_0 - \omega t) + P_1 \cos. (\alpha_0 - \omega t)] \\ &\quad + \frac{1}{2} (P + P_1) q_1 \sin. 2 (\alpha_0 - \omega t) \end{aligned} \right\} \dots \dots (1)$$

Sowohl aus der Form dieser Gleichungen, als auch aus der Natur der Sache kann man vermuthen, dass diese Bewegungen des Nickens und Wogens aus Schwingungen bestehen werden, von denen jede einzelne entweder ein Gesetz von der Form $\mathfrak{R} \sin. kt$ oder ein Gesetz von der Form $\mathfrak{R} \cos. kt$ befolgt. Wir versuchen daher den Gleichungen (1) zu genügen, indem wir setzen:

$$\left. \begin{aligned} \zeta_1 &= \mathfrak{A} \sin. at + \mathfrak{B} \cos. at + \mathfrak{F} \sin. 2 (\alpha_0 - \omega t) + \mathfrak{D} \sin. (\alpha_0 - \omega t) + \mathfrak{R} \cos. (\alpha_0 - \omega t) \\ \varphi_1 &= \mathfrak{G} \sin. at + \mathfrak{D} \cos. at + \mathfrak{F}_1 \sin. 2 (\alpha_0 - \omega t) + \mathfrak{D}_1 \sin. (\alpha_0 - \omega t) + \mathfrak{R}_1 \cos. (\alpha_0 - \omega t) \end{aligned} \right\} \dots (2)$$

und es kommt nun darauf an, die Constanten $\mathfrak{A} \mathfrak{B} \mathfrak{G} \mathfrak{D} \mathfrak{F} \mathfrak{D}_1 \mathfrak{R} \mathfrak{F}_1 \mathfrak{D}_1 \mathfrak{R}_1$, so zu bestimmen, dass die Ausdrücke (2) die Integralien von (1) in der That darstellen können.

Differenzirt man die Ausdrücke (2) zweimal nach t und substituirt sodann die sich ergebenden Werthe von $\frac{d^2 \zeta_1}{dt^2}$, $\frac{d^2 \varphi_1}{dt^2}$, sowie auch die Werthe von ζ_1 und φ_1 in die Gleichungen (1), so erhält man folgende Beziehungen

$$\begin{aligned} &- a^2 (\mathfrak{A} \sin. at + \mathfrak{B} \cos. at) - 4 \omega^2 \mathfrak{F} \sin. 2 (\alpha_0 - \omega t) - \omega^2 \mathfrak{D} \sin. (\alpha_0 - \omega t) - \omega^2 \mathfrak{R} \cos. (\alpha_0 - \omega t) = \\ &- m (\mathfrak{A} \sin. at + \mathfrak{B} \cos. at) - m \mathfrak{F} \sin. 2 (\alpha_0 - \omega t) - m \mathfrak{D} \sin. (\alpha_0 - \omega t) - m \mathfrak{R} \cos. (\alpha_0 - \omega t) \\ &+ n (\mathfrak{G} \sin. at + \mathfrak{D} \cos. at) + n \mathfrak{F}_1 \sin. 2 (\alpha_0 - \omega t) + n \mathfrak{D}_1 \sin. (\alpha_0 - \omega t) + n \mathfrak{R}_1 \cos. (\alpha_0 - \omega t) \\ &\quad + p P \sin. (\alpha_0 - \omega t) + p P_1 \cos. (\alpha_0 - \omega t) \\ &- a^2 (\mathfrak{G} \sin. at + \mathfrak{D} \cos. at) - 4 \omega^2 \mathfrak{F}_1 \sin. 2 (\alpha_0 - \omega t) - \omega^2 \mathfrak{D}_1 \sin. (\alpha_0 - \omega t) - \omega^2 \mathfrak{R}_1 \cos. (\alpha_0 - \omega t) = \\ &+ m_1 (\mathfrak{A} \sin. at + \mathfrak{B} \cos. at) + n_1 \mathfrak{F} \sin. 2 (\alpha_0 - \omega t) + m_1 \mathfrak{D} \sin. (\alpha_0 - \omega t) + m_1 \mathfrak{R} \cos. (\alpha_0 - \omega t) \\ &- n_1 (\mathfrak{G} \sin. at + \mathfrak{D} \cos. at) - n_1 \mathfrak{F}_1 \sin. 2 (\alpha_0 - \omega t) - n_1 \mathfrak{D}_1 \sin. (\alpha_0 - \omega t) - n_1 \mathfrak{R}_1 \cos. (\alpha_0 - \omega t) \\ &\quad + \frac{1}{2} q_1 (P + P_1) \sin. 2 (\alpha_0 - \omega t) + p_1 P \sin. (\alpha_0 - \omega t) + p_1 P_1 \cos. (\alpha_0 - \omega t) \end{aligned}$$

Damit die Ausdrücke (2) die Integrale von (1) darstellen können, müssen die so eben

angeschriebenen Beziehungen für jeden Werth von t richtig sein. Diess ist der Fall, wenn man setzt:

$$\left. \begin{aligned} a^2 \mathfrak{K} &= m \mathfrak{K} - n \mathfrak{G} \\ a^2 \mathfrak{B} &= m \mathfrak{B} - n \mathfrak{D} \\ a^2 \mathfrak{G} &= n, \mathfrak{G} - m, \mathfrak{K} \\ a^2 \mathfrak{D} &= n, \mathfrak{D} - m, \mathfrak{B} \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (3)$$

$$\left. \begin{aligned} 4 \omega^2 \mathfrak{P} &= m \mathfrak{P} - n \mathfrak{P}_1 \\ 4 \omega^2 \mathfrak{P}_1 &= n, \mathfrak{P}_1 - m, \mathfrak{P} - \frac{1}{2} q, (P + P_1) \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (4)$$

$$\left. \begin{aligned} \omega^2 \mathfrak{C} &= m \mathfrak{C} - n \mathfrak{C}_1 - p P \\ \omega^2 \mathfrak{C}_1 &= n, \mathfrak{C}_1 - m, \mathfrak{C} - p, P \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (5)$$

$$\left. \begin{aligned} \omega^2 \mathfrak{R} &= m \mathfrak{R} - n \mathfrak{R}_1 - p P_1 \\ \omega^2 \mathfrak{R}_1 &= n, \mathfrak{R}_1 - m, \mathfrak{R} - p, P_1 \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (6)$$

Aus den Gleichungen (3) folgt zunächst:

$$\frac{\mathfrak{K}}{\mathfrak{G}} = \frac{\mathfrak{B}}{\mathfrak{D}} = \frac{n}{m - a^2} = \frac{n_1 - a^2}{m_1} \dots \dots \dots (7)$$

Aus der Gleichheit $\frac{n}{m - a^2} = \frac{n_1 - a^2}{m_1}$ folgt ferner:

$$a = \pm \sqrt{\frac{m + n_1}{2}} \pm \sqrt{\frac{1}{4} (m + n_1)^2 + n m_1 - m n_1} \dots \dots \dots (8)$$

Wir erhalten demnach für a , und wegen (7) auch für $\frac{\mathfrak{K}}{\mathfrak{G}}$ und $\frac{\mathfrak{B}}{\mathfrak{D}}$, vier verschiedene Werthe, durch welche den Bedingungen (3) entprochen werden kann. Setzen wir:

$$\left. \begin{aligned} a_1 &= + \sqrt{\frac{1}{2} (m + n_1)} + \sqrt{\frac{1}{4} (m + n_1)^2 + n m_1 - m n_1} \\ a_2 &= + \sqrt{\frac{1}{2} (m + n_1)} - \sqrt{\frac{1}{4} (m + n_1)^2 + n m_1 - m n_1} \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (9)$$

so sind die vier Werthe von a :

$$+ a_1 \quad - a_1 \quad + a_2 \quad - a_2$$

und es ist klar, dass den Gleichungen (1) auch dann Genüge geleistet wird, wenn man in (2) statt $\mathfrak{K} \sin. at + \mathfrak{B} \sin. at$ und $\mathfrak{G} \sin. at + \mathfrak{D} \cos. at$ $\Sigma (\mathfrak{K} + \sin. at \mathfrak{B} \cos. at)$ und $\Sigma (\mathfrak{G} \sin. at + \mathfrak{D} \cos. at)$ spetzt, wobei sich Σ auf alle vier Wurzeln von a bezieht.

Bezeichnet man die Werthe der Constanten $\mathfrak{K} \mathfrak{B} \mathfrak{G} \mathfrak{D}$, welche den individuellen Wur-

zeln entsprechen dadurch, dass man denselben diese Wurzeln beifügt, so dass z. B. $\begin{pmatrix} \mathfrak{A} \\ + \alpha_1 \end{pmatrix}$ denjenigen Werth von \mathfrak{A} bedeutet, welcher der Wurzel $+ \alpha_1$ entspricht, so hat man:

$$\begin{aligned} \Sigma(\mathfrak{A} \sin. at + \mathfrak{B} \cos. at) &= \begin{pmatrix} \mathfrak{A} \\ a_1 \end{pmatrix} \sin. a_1 t + \begin{pmatrix} \mathfrak{B} \\ a_1 \end{pmatrix} \cos. a_1 t + \begin{pmatrix} \mathfrak{A} \\ a_2 \end{pmatrix} \sin. a_2 t + \begin{pmatrix} \mathfrak{B} \\ a_2 \end{pmatrix} \cos. a_2 t \\ &\quad - \begin{pmatrix} \mathfrak{A} \\ -a_1 \end{pmatrix} \sin. a_1 t + \begin{pmatrix} \mathfrak{B} \\ -a_1 \end{pmatrix} \cos. a_1 t - \begin{pmatrix} \mathfrak{A} \\ -a_2 \end{pmatrix} \sin. a_2 t + \begin{pmatrix} \mathfrak{B} \\ -a_2 \end{pmatrix} \cos. a_2 t \\ \Sigma(\mathfrak{G} \sin. at + \mathfrak{D} \cos. at) &= \begin{pmatrix} \mathfrak{G} \\ a_1 \end{pmatrix} \sin. a_1 t + \begin{pmatrix} \mathfrak{D} \\ a_1 \end{pmatrix} \cos. a_1 t + \begin{pmatrix} \mathfrak{G} \\ a_2 \end{pmatrix} \sin. a_2 t + \begin{pmatrix} \mathfrak{D} \\ a_2 \end{pmatrix} \cos. a_2 t \\ &\quad - \begin{pmatrix} \mathfrak{G} \\ -a_1 \end{pmatrix} \sin. a_1 t + \begin{pmatrix} \mathfrak{D} \\ -a_1 \end{pmatrix} \cos. a_1 t - \begin{pmatrix} \mathfrak{G} \\ -a_2 \end{pmatrix} \sin. a_2 t + \begin{pmatrix} \mathfrak{D} \\ -a_2 \end{pmatrix} \cos. a_2 t \end{aligned}$$

Setzt man zur Abkürzung

$$\left. \begin{aligned} \begin{pmatrix} \mathfrak{A} \\ a_1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \mathfrak{A} \\ -a_1 \end{pmatrix} &= \mathfrak{G}_1 \\ \begin{pmatrix} \mathfrak{B} \\ a_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \mathfrak{B} \\ -a_1 \end{pmatrix} &= \mathfrak{D}_1 \\ \begin{pmatrix} \mathfrak{A} \\ a_2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \mathfrak{A} \\ -a_2 \end{pmatrix} &= \mathfrak{G}_2 \\ \begin{pmatrix} \mathfrak{B} \\ a_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \mathfrak{B} \\ -a_2 \end{pmatrix} &= \mathfrak{D}_2 \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (10)$$

so findet man mit Berücksichtigung der Gleichung (7)

$$\left. \begin{aligned} \begin{pmatrix} \mathfrak{G} \\ a_1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \mathfrak{G} \\ -a_1 \end{pmatrix} &= \frac{-m_1}{a_1^2 - n_1} \left[\begin{pmatrix} \mathfrak{A} \\ a_1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \mathfrak{A} \\ -a_1 \end{pmatrix} \right] = \frac{-m_1}{a_1^2 - n_1} \mathfrak{G}_1 \\ \begin{pmatrix} \mathfrak{G} \\ a_2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \mathfrak{G} \\ -a_2 \end{pmatrix} &= \frac{-m_1}{a_2^2 - n_1} \left[\begin{pmatrix} \mathfrak{A} \\ a_2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \mathfrak{A} \\ -a_2 \end{pmatrix} \right] = \frac{-m_1}{a_2^2 - n_1} \mathfrak{G}_2 \\ \begin{pmatrix} \mathfrak{D} \\ a_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \mathfrak{D} \\ -a_1 \end{pmatrix} &= \frac{-m_1}{a_1^2 - n_1} \left[\begin{pmatrix} \mathfrak{B} \\ a_1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \mathfrak{B} \\ -a_1 \end{pmatrix} \right] = \frac{-m_1}{a_1^2 - n_1} \mathfrak{D}_1 \\ \begin{pmatrix} \mathfrak{D} \\ a_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \mathfrak{D} \\ -a_2 \end{pmatrix} &= \frac{-m_1}{a_2^2 - n_1} \left[\begin{pmatrix} \mathfrak{B} \\ a_2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \mathfrak{B} \\ -a_2 \end{pmatrix} \right] = \frac{-m_1}{a_2^2 - n_1} \mathfrak{D}_2 \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (11)$$

Führt man diese Werthe in obige Summen ein, so erhält man

$$\begin{aligned} \Sigma(\mathfrak{A} \sin. at + \mathfrak{B} \cos. at) &= (\mathfrak{G}_1 \sin. a_1 t + \mathfrak{D}_1 \cos. a_1 t) + (\mathfrak{G}_2 \sin. a_2 t + \mathfrak{D}_2 \cos. a_2 t) \\ \Sigma(\mathfrak{G} \sin. at + \mathfrak{D} \cos. at) &= \frac{-m_1}{a_1^2 - n_1} (\mathfrak{G}_1 \sin. a_1 t + \mathfrak{D}_1 \cos. a_1 t) + \frac{-m_1}{a_2^2 - n_1} (\mathfrak{G}_2 \sin. a_2 t + \mathfrak{D}_2 \cos. a_2 t) \end{aligned}$$

Redtenbacher, Gesetze des Lokomotivbaus.

Diese Summenwerthe sind nun statt $\mathfrak{A} \sin. at + \mathfrak{B} \sin at$ und statt $\mathfrak{C} \sin. at + \mathfrak{D} \cos. at$ in die Gleichungen (2) zu setzen, und dadurch werden dieselben

$$\left. \begin{aligned} \zeta_1 &= (\mathfrak{G}_1 \sin. a_1 t + \mathfrak{H}_1 \cos. a_1 t) + (\mathfrak{G}_2 \sin. a_2 t + \mathfrak{H}_2 \cos. a_2 t) \\ &\quad + \mathfrak{P} \sin. 2 (\alpha_0 - \omega t) + \mathfrak{Q} \sin. (\alpha_0 - \omega t) + \mathfrak{R} \cos. (\alpha_0 - \omega t) \\ \varphi_1 &= \frac{-m_1}{a_1^2 - n_1} (\mathfrak{G}_1 \sin. a_1 t + \mathfrak{H}_1 \cos. a_1 t) + \frac{-m_1}{a_2^2 - n_1} (\mathfrak{G}_2 \sin. a_2 t + \mathfrak{H}_2 \cos. a_2 t) \\ &\quad + \mathfrak{P}_1 \sin. 2 (\alpha_0 - \omega t) + \mathfrak{Q}_1 \sin. (\alpha_0 - \omega t) + \mathfrak{R}_1 \cos. (\alpha_0 - \omega t) \end{aligned} \right\} \dots (12)$$

Aus den Gleichungen (4) findet man ferner

$$\left. \begin{aligned} \mathfrak{P} &= - \frac{\frac{1}{2} q_1 (P + P_1) n}{m_1 n - (4 \omega^2 - m)(4 \omega^2 - n_1)} \\ \mathfrak{P}_1 &= - \frac{\frac{1}{2} q_1 (P + P_1)(4 \omega^2 - m)}{m_1 n - (4 \omega^2 - m)(4 \omega^2 - n_1)} \end{aligned} \right\} \dots (13)$$

sodann folgt aus den Gleichungen (5)

$$\left. \begin{aligned} \mathfrak{Q} &= P \frac{p (\omega^2 - n_1) - p_1 n}{m_1 n - (\omega^2 - m)(\omega^2 - n_1)} \\ \mathfrak{Q}_1 &= P \frac{p_1 (\omega^2 - m) - p m_1}{m_1 n - (\omega^2 - m)(\omega^2 - n_1)} \end{aligned} \right\} \dots (14)$$

endlich geben die Gleichungen (6)

$$\left. \begin{aligned} \mathfrak{R} &= P_1 \frac{p (\omega^2 - n_1) - p_1 n}{m_1 n - (\omega^2 - m)(\omega^2 - n_1)} \\ \mathfrak{R}_1 &= P_1 \frac{p_1 (\omega^2 - m) - p m_1}{m_1 n - (\omega^2 - m)(\omega^2 - n_1)} \end{aligned} \right\} \dots (15)$$

Die Werthe dieser Constanten können noch in anderer Weise ausgedrückt werden. Setzen wir zur Abkürzung

$$\left. \begin{aligned} f_1 + f_2 + f_3 &= F_1 \\ \mathcal{A}_1 f_1 + \mathcal{A}_2 f_2 - \mathcal{A}_3 f_3 &= F_2 \\ \mathcal{A}_1^2 f_1 + \mathcal{A}_2^2 f_2 + \mathcal{A}_3^2 f_3 &= F_3 \end{aligned} \right\} \dots (16)$$

so werden die Seite (147) zusammengestellten Werthe wie $m \ n \ p \ m_1 \ n_1 \ p_1 \ q_1$

$$\left. \begin{aligned} m &= \frac{F_1}{M} \\ n &= \frac{F_2}{M} \\ p &= \frac{r}{2LM} \end{aligned} \right\} \dots (17)$$

$$\left. \begin{aligned} m_1 &= \frac{F_2}{B} \\ n_1 &= \frac{F_1}{B} \\ p_1 &= (L - \mathcal{A}_2) \frac{r}{2LB} + \frac{rh}{BD} \\ q_1 &= \frac{r^2}{2LB} \left(1 + \frac{2h}{D} \right) \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (18)$$

führt man diese Werthe in (13), (14), (15) ein, so erhält man:

$$\left. \begin{aligned} \mathfrak{F} &= -\frac{1}{4}(P + P_1) \left(\frac{r}{L} \right)^2 \left(1 + \frac{2h}{D} \right) \frac{F_2 L}{F_1^2 - (4\omega^2 M - F_1)(4\omega^2 B - F_2)} \\ \mathfrak{F}_1 &= +\frac{1}{4}(P + P_1) \left(\frac{r}{L} \right)^2 \left(1 + \frac{2h}{D} \right) \frac{L(4\omega^2 M - F_1)}{F_1^2 - (4\omega^2 M - F_1)(4\omega^2 B - F_2)} \\ \mathfrak{D} &= \frac{1}{2} P \frac{r}{L} \frac{(\omega^2 B - F_2) - \left[(L - \mathcal{A}_2) + 2h \frac{L}{D} \right] F_2}{F_1^2 - (\omega^2 M - F_1)(\omega^2 B - F_2)} \\ \mathfrak{D}_1 &= \frac{1}{2} P \frac{r}{L} \frac{\left[(L - \mathcal{A}_2) + 2h \frac{L}{D} \right] (\omega^2 M - F_1) - F_2}{F_1^2 - (\omega^2 M - F_1)(\omega^2 B - F_2)} \\ \mathfrak{R} &= \frac{1}{2} P_1 \frac{r}{L} \frac{(\omega^2 B - F_2) - \left[(L - \mathcal{A}_2) + 2h \frac{L}{D} \right] F_2}{F_1^2 - (\omega^2 M - F_1)(\omega^2 B - F_2)} \\ \mathfrak{R}_1 &= \frac{1}{2} P_1 \frac{r}{L} \frac{\left[(L - \mathcal{A}_2) + 2h \frac{L}{D} \right] (\omega^2 M - F_1) - F_2}{F_1^2 - (\omega^2 M - F_1)(\omega^2 B - F_2)} \end{aligned} \right\} \dots \dots (19)$$

führt man die Werthe (17) und (18) auch in die Wurzelwerthe (9) ein, so werden dieselben

$$\left. \begin{aligned} n_1 &= \sqrt{\frac{1}{2} \left(\frac{F_1}{M} + \frac{F_2}{B} \right)} + \sqrt{\frac{1}{4} \left(\frac{F_1}{M} - \frac{F_2}{B} \right)^2 + \frac{F_1^2}{MB}} \\ n_2 &= \sqrt{\frac{1}{2} \left(\frac{F_1}{M} + \frac{F_2}{B} \right)} - \sqrt{\frac{1}{4} \left(\frac{F_1}{M} - \frac{F_2}{B} \right)^2 + \frac{F_1^2}{MB}} \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (20)$$

Hiemit sind nun alle nicht willkürlichen Constanten der Integrale bestimmt. Setzt man in die Ausdrücke (10), Seite 147 für φ_1 und ζ_1 die Werthe (12) und für m_1, n_1, n_2 die Werthe (17) und (18), so erhalten wir schliesslich für ζ und φ folgende Ausdrücke:
21.

$$\zeta = \frac{21 h_1 K}{D \pi} \frac{F_2}{F_2^2 - F_1 F_3} + \left\{ \begin{array}{l} \mathfrak{G}_1 \sin. a_1 t + \mathfrak{G}_1 \cos. a_1 t + \mathfrak{G}_2 \sin. a_2 t + \mathfrak{G}_2 \cos. a_2 t \\ + \mathfrak{P} \sin. 2(\alpha_0 - \omega t) + \mathfrak{D} \sin. (\alpha_0 - \omega t) + \mathfrak{R} \cos. (\alpha_0 - \omega t) \end{array} \right\} \dots \dots (21)$$

$$\varphi = \frac{21 h_1 K}{D \pi} \frac{F_1}{F_2^2 - F_1 F_3} + \left\{ \begin{array}{l} \frac{-m_1}{a_1^2 - a_2} (\mathfrak{G}_1 \sin. a_1 t + \mathfrak{G}_1 \cos. a_1 t) + \frac{-m_1}{a_2^2 - a_1} (\mathfrak{G}_2 \sin. a_2 t + \mathfrak{G}_2 \cos. a_2 t) \\ + \mathfrak{P} \sin. 2(\alpha_0 - \omega t) + \mathfrak{D} \sin. (\alpha_0 - \omega t) + \mathfrak{R} \cos. (\alpha_0 - \omega t) \end{array} \right\} \dots \dots (22)$$

In diesen Ausdrücken sind $\mathfrak{G}_1, \mathfrak{G}_2, \mathfrak{G}_3, \mathfrak{G}_4$ die vier willkürlichen Constanten, welche die Integrale zweier Differenzialgleichungen der zweiten Ordnung erfordern.

Die Ausdrücke (21) und (22) stellen die Integrale der Gleichungen (1) nur in den Fällen richtig dar, in welchen der Werth von $\mathfrak{P}, \mathfrak{Q}, \mathfrak{D}, \mathfrak{R}, \mathfrak{R}$, endlich sind, d. h. wenn die Nenner der Ausdrücke (19) nicht verschwinden. Allein die Nenner von \mathfrak{P} und \mathfrak{Q} , verschwinden, wenn

$$F_2^2 - (4 \omega^2 M - F_1)(4 \omega^2 B - F_3) = 0$$

ist, d. h. wenn ω entweder gleich:

$$\frac{1}{2} \sqrt{\left(\frac{F_1}{M} + \frac{F_3}{B}\right)} + \sqrt{\frac{1}{4} \left(\frac{F_1}{M} - \frac{F_3}{B}\right)^2 + \frac{F_1^2}{MB}}$$

oder wenn ω gleich

$$\frac{1}{2} \sqrt{\left(\frac{F_1}{M} + \frac{F_3}{B}\right)} - \sqrt{\frac{1}{4} \left(\frac{F_1}{M} - \frac{F_3}{B}\right)^2 + \frac{F_1^2}{BM}}$$

d. h. die Nenner von \mathfrak{P} und \mathfrak{Q} , verschwinden, wenn die Winkelgeschwindigkeit ω entweder gleich $\frac{a_1}{2}$ oder gleich $\frac{a_2}{2}$ ist. Die Nenner von $\mathfrak{D}, \mathfrak{D}, \mathfrak{R}, \mathfrak{R}$, verschwinden dagegen, wenn

$$F_2^2 - (\omega^2 M - F_1)(\omega^2 M - F_3) = 0$$

ist, d. h. wenn ω entweder gleich:

$$\sqrt{\frac{1}{2} \left(\frac{F_1}{M} + \frac{F_3}{B}\right)} + \sqrt{\frac{1}{4} \left(\frac{F_1}{M} - \frac{F_3}{B}\right)^2 + \frac{F_1^2}{MB}}$$

oder wenn die Winkelgeschwindigkeit ω gleich

$$\sqrt{\frac{1}{2} \left(\frac{F_1}{M} + \frac{F_3}{B}\right)} - \sqrt{\frac{1}{4} \left(\frac{F_1}{M} - \frac{F_3}{B}\right)^2 + \frac{F_1^2}{MB}}$$

d. h. wenn die Winkelgeschwindigkeit ω entweder gleich a_1 oder gleich a_2 ist.

Die Gleichungen (21) und (22) stellen also nur dann die Integrale der Differenzialgleichungen (1) dar, wenn die Winkelgeschwindigkeit ω mit keinem der vier Werthe

$$\frac{1}{2} a_1, \quad \frac{1}{2} a_2, \quad a_1, \quad a_2$$

zusammentrifft. Es gibt also hinsichtlich des Nickens und Wogens vier Ausnahmefälle, in welchen die hypothetischen Annahmen (2) nicht mehr zulässig sind. Wenn wir diese Ausnahmefälle vollständig analytisch behandeln wollten, so müssten wir uns neuerdings in ein Gewühle von Formeln stürzen. Diese Arbeit können wir uns aber ersparen, denn es ist mit Sicherheit anzunehmen, dass in den Integralen, welche die Bewegungen φ und ζ in jedem dieser vier Ausnahmefälle darstellen, Glieder von der Form

$$t[\mathfrak{M} \sin. (\alpha_0 - \omega t) + \mathfrak{N} \cos. \alpha_0 - \omega t]$$

vorkommen würden. Dass also in jedem dieser vier Ausnahmefälle Schwingungen eintreten, die mit der Zeit t immer grösser und grösser werden müssten.

Interpretation der Integrale (21) (22). Die Gesetze des Wogens und Nickens.

Vorausgesetzt, dass die Winkelgeschwindigkeit ω der Triebaxe mit keinem der vier Werthe $a_1 \cdot a_2$, $\frac{1}{2} a_1$, $\frac{1}{2} a_2$ übereinstimmt, besteht, wie aus den Gleichungen (21) und (22) zu ersehen ist, sowohl das Wogen als auch das Nicken aus sieben einfachen periodisch wiederkehrenden Schwingungen, wie sie durch Kurbelmechanismen hervorgebracht werden können, und die ganze totale Bewegung bleibt stets innerhalb gewisser Grenzen. Da die Werthe von t , welche gleiche Werthe von ζ geben, mit den Werthen von t , die gleiche Werthe von φ geben, nicht übereinstimmen, so kommen in der ganzen Bewegungsdauer der Lokomotive zwei gleiche Lagerungen oder zwei gleiche Bewegungszustände nicht vor. Jede einzelne von den vier Elementarschwingungen erreicht ihren numerisch grössten oder kleinsten Werth, wenn der ihr entsprechende Sinus oder Cosinus + oder - Eins wird. Die Schwingungslängen der einzelnen Elementarschwingungen sind:

$$\begin{aligned} & 2 \mathfrak{G}_1, \quad 2 \mathfrak{G}_2, \quad 2 \mathfrak{G}_3, \quad 2 \mathfrak{G}_4, \quad 2 \mathfrak{F}, \quad 2 \mathfrak{D}, \quad 2 \mathfrak{R} \\ & 2 \frac{m_1}{a_1^2 - n_1} \mathfrak{G}_1, \quad 2 \frac{m_1}{a_1^2 - n_1} \mathfrak{G}_2, \quad 2 \frac{m_1}{a_2^2 - n_1} \mathfrak{G}_3, \quad 2 \frac{m_1}{a_2^2 - n_1} \mathfrak{G}_4, \\ & 2 \mathfrak{F}, \quad 2 \mathfrak{D}, \quad 2 \mathfrak{R}, \end{aligned}$$

Die Schwingungszeiten sind

$$\frac{2\pi}{a_1}, \quad \frac{2\pi}{a_2}, \quad \frac{2\pi}{\omega}, \quad \frac{\pi}{\omega}$$

Diese 14 Elementarschwingungen können in 2 Klassen eingetheilt werden, die wir Grundschwingungen und Kurbelschwingungen nennen wollen.

Die Grundschwingungen werden durch die Glieder

$$\begin{aligned} & \mathfrak{G}_1 \sin. a_1 t, \quad \mathfrak{G}_2 \cos. a_1 t, \quad \mathfrak{G}_3 \sin. a_2 t, \quad \mathfrak{G}_4 \cos. a_2 t \\ & \frac{m_1}{a_1^2 - n_1} \mathfrak{G}_1 \sin. a_1 t, \quad \frac{m_1}{a_1^2 - n_1} \mathfrak{G}_2 \cos. a_1 t, \quad \frac{m_1}{a_2^2 - n_1} \mathfrak{G}_3 \sin. a_2 t, \quad \frac{m_1}{a_2^2 - n_1} \mathfrak{G}_4 \cos. a_2 t \end{aligned}$$

bestimmt. Sie sind, weil ω in den Ausdrücken (20) für a_1 und a_2 nicht vorkommt, un-

abhängig von der Winkelgeschwindigkeit der Triebaxe, erfolgen also immer in der gleichen Weise wie auch die Geschwindigkeit der Lokomotive sein mag, und richten sich nun allein nach den Werthen von F_1 , F_2 , F_3 , M und B , d. h. nach der Anordnung des Feder-Systems und nach der Grösse und Vertheilung der Massen des Baues. Diese Grundschiwungen treten allein auf, wenn die Lokomotive, ohne vom Dampf getrieben zu werden, bloss durch ihre Trägheit auf der Bahn fortläuft. Ueber die Schwingungslängen dieser Grundschiwungen kann uns leider unsere Theorie keinen Aufschluss geben. Die durchgeführten Rechnungen gelten nur allein für den Beharrungszustand der Bewegung, denn wir haben die Integrationen nur für den Fall, dass ω constant ist, bewerkstelliget. Die Werthe der vier Constanten \mathfrak{P} , \mathfrak{Q} , \mathfrak{R} , \mathfrak{S} könnten aber nur dann bestimmt werden, wenn man die Rechnung für die Periode des Anlaufes anlegte, was nicht geschehen ist, weil die Bewegungen während des Anlaufes so komplizirt sind, dass sie nur durch ein wahres Gewühl von Formeln ausgedrückt werden könnten.

Die Kurbelschwingungen, welche durch die Glieder

$$\begin{aligned} \mathfrak{P} \sin. 2(\alpha_0 - \omega t) & \quad \mathfrak{Q} \sin. (\alpha_0 - \omega t) & \quad \mathfrak{R} \cos. (\alpha_0 - \omega t) \\ \mathfrak{P}_1 \sin. 2(\alpha_0 - \omega t) & \quad \mathfrak{Q}_1 \sin. (\alpha_0 - \omega t) & \quad \mathfrak{R}_1 \cos. (\alpha_0 - \omega t) \end{aligned}$$

ausgedrückt werden, entstehen durch die Pressungen der Gleitstücke gegen die Führungsliniale und durch die auf den Rahmenbau einwirkenden Horizontalkräfte. Ihre Schwingungsgrössen \mathfrak{P} , \mathfrak{Q} , \mathfrak{R} , \mathfrak{P}_1 , \mathfrak{Q}_1 , \mathfrak{R}_1 hängen, wie die Ausdrücke (19) zeigen, von allen wesentlicheren Konstruktionsverhältnissen der Lokomotive, sowie auch von der Winkelgeschwindigkeit der Triebaxe ab. Die Schwingungszeiten dieser Schwingungen richten sich aber nur allein nach der Winkelgeschwindigkeit der Triebaxe. Wenn diese Schwingungen allein vorhanden wären, würde die Lokomotive nach jeder Umdrehung der Triebaxe in die gleiche Lage und auch in den gleichen Bewegungszustand zurückkehren. Läuft eine Lokomotive schnell und hat sie kleine Triebräder, so folgen diese Schwingungen schnell auf einander. Läuft eine Lokomotive langsam und hat sie grosse Triebräder, so folgen diese Schwingungen langsam aufeinander, während die Grundschiwungen immer in gleicher Weise fortgehen, wie auch die Lokomotive laufen mag.

In der Weise, wie so eben dargestellt wurde, erfolgt aber die Bewegung der Lokomotive nur dann, wenn die Winkelgeschwindigkeit ω keinem der vier Werthe a_1 , a_2 , $\frac{1}{2} a_1$, $\frac{1}{2} a_2$ gleich kommt, d. h. nur dann, wenn die Umdrehungszeit $\frac{2\pi}{\omega}$ verschieden ist von den Schwingungszeiten $\frac{2\pi}{a_1}$, $\frac{2\pi}{a_2}$, $\frac{2\pi}{\frac{1}{2} a_1}$, $\frac{2\pi}{\frac{1}{2} a_2}$ der Grundschiwungen. Stimmt da-

gegen die Umdrehungszeit der Triebaxe mit der Schwingungszeit von einer oder von der andern der vier Grundschiwungen überein, so wird das Wogen und Nicken nicht mehr durch die Gleichungen (21) (22) Seite 164, sondern durch Gleichungen ausgedrückt, in welchen Glieder vorkommen, die die Zeit t als Faktor enthalten. Der Bewegungszustand bleibt daher in diesem Falle nicht innerhalb gewisser Grenzen, sondern er nimmt mit der Zeit immer mehr und mehr zu, so dass zuletzt ein äusserst drohender Zustand eintreten kann. Es gibt also hinsichtlich des Wogens und Nickens vier gefährliche Geschwindigkeiten, bei welchen ein stets wachsendes Ansammeln der Schwingungen eintritt. Diese vier gefährlichen Winkelgeschwindigkeiten sind:

$$a_1 \quad a_2 \quad \frac{1}{2} a_1 \quad \frac{1}{2} a_2$$

Damit also bei keiner von den Winkelgeschwindigkeiten, mit denen man eine Lo-

komotive laufen lassen will, ein gefährlicher Zustand eintreten könne, muss der kleinste von den vier Werthen $a_1, a_2, \frac{1}{2} a_1, \frac{1}{2} a_2$ grösser sein, als die grössten der Winkelgeschwindigkeiten, mit der man die Lokomotive noch laufen lassen will. Nennt man a_0 den kleinsten der vier Werthe $a_1, a_2, \frac{1}{2} a_1, \frac{1}{2} a_2$ v die grösste Laufgeschwindigkeit der Lokomotive, D den Durchmesser des Triebrads, so ist $\frac{v}{\frac{1}{2} D} = \frac{2v}{D}$ die grösste Winkelgeschwindigkeit. Damit also die Lokomotive ohne Gefahr mit jeder Geschwindigkeit, die zwischen 0 und v liegt, laufen kann, muss:

$$a_0 > 2 \frac{v}{D}$$

oder

$$D > 2 \frac{v}{a_0}$$

sein. Und umgekehrt kann eine Lokomotive, deren Triebräder einen Durchmesser D haben, ohne Gefahr mit jeder Geschwindigkeit laufen, die kleiner als $\frac{1}{2} a_0 D$ ist.

Die grösste von den gefährlichen Winkelgeschwindigkeiten ist a_1 . Denken wir uns, dass eine Lokomotive durch einen äusserst energischen Antrieb glücklich die grösste von den gefährlichen Geschwindigkeiten überschritten habe, und dass von da an ihre Geschwindigkeit noch fort und fort wachse, so zeigen die Ausdrücke (19), dass das Wogen und Nicken fort und fort schwächer wird und zuletzt bei einer ganz rasenden Geschwindigkeit beinahe verschwindet, denn betrachten wir ω als eine beinahe unendlich grosse Grösse, so nähern sich die Werthe der Ausdrücke immer mehr und mehr folgenden Werthen:

$$\mathfrak{P} = + \frac{1}{4} (P + P_1) \left(\frac{r}{L} \right)^2 \frac{L F_1}{16 \omega^2 M B}$$

$$\mathfrak{P}_1 = - \frac{1}{4} (P + P_1) \left(\frac{r}{L} \right)^2 \frac{L}{4 \omega^2 B} \left(1 + \frac{2h}{D} \right)$$

$$\mathfrak{Q} = - \frac{1}{2} P \left(\frac{r}{L} \right) \frac{1}{\omega^2 M}$$

$$\mathfrak{Q}_1 = - \frac{1}{2} P \left(\frac{r}{L} \right) \frac{L - \mathcal{A}_1 + 2h \frac{L}{D}}{\omega^2 B}$$

$$\mathfrak{R} = - \frac{1}{2} P_1 \left(\frac{r}{L} \right) \frac{1}{\omega^2 M}$$

$$\mathfrak{R}_1 = - \frac{1}{2} P_1 \left(\frac{r}{L} \right) \frac{(L - \mathcal{A}_1) + 2h \frac{L}{D}}{\omega^2 B}$$

die mit dem Wachsen von ω immer mehr und mehr abnehmen und für unendliche Werthe von ω ganz verschwinden. Es wird demnach jede Lokomotive, wie sie auch

gebaut sein mag, bei extravaganter Geschwindigkeit weder ein Wanken noch ein Nicken noch ein Wogen zeigen, sondern sie wird starr aufrecht stehend forttrassen. Wenn sich also eine Lokomotive bei extravaganter Geschwindigkeit starrsinnig verhält, so darf man daraus nicht folgern, dass ihre Bauart eine stabile sei. Bei Probefahrten, die man in England mit *Crampton'schen* Lokomotiven angestellt hat, ist man mit Geschwindigkeiten von 120 Kilometer per 1 Stunde oder mit 33 Meter in der Sekunde, also ungefähr 3 mal so schnell als ein schneller Güterzug gefahren, und dabei war ein Wanken, Wogen oder Nicken kaum zu bemerken oder zu spüren. Die englischen Ingenieure zogen aus diesem Verhalten der Lokomotive den Schluss, dass ihre Bauart eine bewundernswürdige Stabilität gewähre. Dieser Schluss ist ein Fehlschluss, spricht aber dessen ungeachtet eine Wahrheit aus. Er ist ein Fehlschluss, weil sich ein so günstiges Verhalten bei einer Geschwindigkeit, die (wie sich in der Folge zeigen wird) beträchtlich grösser ist, als die grösste von den gefährlichen Geschwindigkeiten, auch bei einer hinsichtlich der Stabilität der Bewegung ganz verfehlt erbauten Lokomotive zeigen würde. Er spricht eine Wahrheit aus, weil diese Lokomotive von *Crampton*, wie wir in der Folge sehen werden, in der That in Bezug auf Stabilität vortrefflich angeordnet ist. Hätte man bei den Probefahrten durch längere Zeit eine Geschwindigkeit von nur 16 Meter eintreten lassen, so würde die Maschine so unruhige Bewegungen gezeigt haben, dass die Herren Ingenieure das Urtheil gefällt hätten: dass diese Lokomotive keine Stabilität besitze

Schwächung und Aufhebung der Bewegungen des Nickens und Wogens.

Es unterliegt wohl keinem Zweifel, dass die Kenntniss der Bedingungen, bei deren Erfüllung die störenden Bewegungen entweder gar nicht oder nur in einem schwachen Grad eintreten, für den Lokomotivbau von grösster Wichtigkeit ist. Dies weiss auch die Praxis, und das Bestreben der Constructeure ist gegenwärtig vorzugsweise dahin gerichtet, die Lokomotive in solcher Weise zu bauen, dass sie sicher und ruhig über das Geleise hinrollen, denn von der Erreichung dieses Zieles wird es abhängen, in welchem Maasse die Fahrgeschwindigkeiten auf Eisenbahnen gesteigert werden können. Ueber diesen wichtigen Gegenstand geben uns die durch das Studium über das Wogen und Nicken gewonnenen Resultate die wünschenswerthesten Aufschlüsse.

Wenn es möglich wäre, die störenden Kurbelschwingungen ganz aufzuheben, so würden auch die Grundschwingungen verschwinden, und es würden dann die Werthe von ζ und φ entweder constant oder gleich Null sein. Allein diese Kurbelschwingungen können nicht alle aufgehoben werden, weil es nicht möglich ist, die Zähler sämtlicher Brüche der Ausdrücke (19) Seite 163 zum Verschwinden zu bringen, und gleichzeitig die Nenner gegen das Nullwerden zu schützen. Eine vollständige Vertilgung dieser Schwingungen ist daher nicht möglich; man muss sich also mit dem Erreichbaren begnügen, d. h. man muss suchen die Werthe von ζ und φ [Gleichungen (21) und (22) Seite 164] möglichs klein zu machen.

Die von der Zeit unabhängigen Glieder der Ausdrücke 21 und 22 werden klein, wenn h_1 klein ist. Damit die periodischen Glieder dieser Ausdrücke möglichst kleine numerische Werthe erhalten, müssen die Werthe von $\mathfrak{P}, \mathfrak{Q}, \mathfrak{R}, \mathfrak{P}, \mathfrak{Q}, \mathfrak{R}$, möglichst geschwächt werden. Zu diesem Zwecke nehmen wir zunächst an

$$F_2 = 0 \quad L - \mathcal{A}_1 = 0 \quad \dots \dots \dots (1)$$

Dann werden die Ausdrücke (19) Seite 163

$$\left. \begin{aligned}
 \mathfrak{P} &= 0 \\
 \mathfrak{Q} &= + \frac{1}{2} P \left(\frac{r}{L} \right) \frac{1}{-\omega^2 M + F_1} \\
 \mathfrak{R} &= + \frac{1}{2} P_1 \left(\frac{r}{L} \right) \frac{1}{-\omega^2 M + F_1} \\
 \mathfrak{P}_1 &= + \frac{1}{4} (P + P_1) \left(\frac{r}{L} \right)^2 \left(1 + \frac{2h}{D} \right) \frac{L}{-4\omega^2 B + F_2} \\
 \mathfrak{Q}_1 &= + P \frac{r}{D} \frac{h}{-\omega^2 B + F_2} \\
 \mathfrak{R}_1 &= + P_1 \frac{r}{D} \frac{h}{-\omega^2 B + F_2}
 \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (2)$$

Den Werth von \mathfrak{P}_1 können wir füglich von nun an ganz unberücksichtigt lassen; denn für die Bewegung durch die Quadranten, in welchen die Richtungen der Kolbenbewegungen übereinstimmen, ist, wie schon Seite (148) bemerkt wurde, $P + P_1$ gleich Null; verschwindet also \mathfrak{P}_1 gänzlich, und für die beiden andern Quadranten ist \mathfrak{P}_1 sehr klein, weil es, wie man sieht, dem Quadrat von $\frac{r}{L}$ proportional ist. Wir wollen also \mathfrak{P}_1 von nun an ganz unberücksichtigt lassen.

Nennen wir w den totalen Widerstand des Trains, so ist im Beharrungszustand der Bewegung

$$P = P_1 = \frac{\pi}{8} W \frac{D}{r}$$

durch Einführung dieser Werthe von P und P_1 in (2) werden diese Ausdrücke für $\mathfrak{Q} \mathfrak{R} \mathfrak{Q}_1 \mathfrak{R}_1$

$$\left. \begin{aligned}
 \mathfrak{Q} &= + \frac{\pi}{16} W \frac{D}{L} \frac{1}{-\omega^2 M + F_1} \\
 \mathfrak{R} &= + \frac{\pi}{16} W \frac{D}{L} \frac{1}{-\omega^2 M + F_1} \\
 \mathfrak{Q}_1 &= + \frac{\pi}{8} W \frac{h}{-\omega^2 B + F_2} \\
 \mathfrak{R}_1 &= + \frac{\pi}{8} W \frac{h}{-\omega^2 B + F_2}
 \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (3)$$

Aus diesen Ausdrücken kann man nun leicht herauslesen, was zu thun ist, um die Werthe von $\mathfrak{Q} \mathfrak{R} \mathfrak{Q}_1 \mathfrak{R}_1$ noch weiter zu schwächen, als es schon durch die Annahmen (1) geschehen ist. Die numerischen Werthe der Ausdrücke (2) und (3) fallen klein aus, 1) wenn w klein ist, d. h. wenn die Lokomotive nur einen geringen Widerstand zu überwinden hat; 2) wenn $\frac{D}{L}$ klein ist, d. h. wenn die Schubstangen im Verhältniss zum

Durchmesser der Triebräder lang sind; 3) wenn sowohl der absolute Werth von h als auch das Verhältniss $\frac{2h}{D}$ klein ist, d. h. wenn die Höhe des Schwerpunktes des auf den Federn liegenden Baues über der Axe des Triebrades klein ist und wenn überdies diese Höhe im Verhältniss zum Durchmesser des Triebrades einen kleinen Werth hat; 4) wenn F_1 so gross ist, dass die Differenz $F_1 - \omega^2 M$ selbst für die grössten zulässigen Werthe von ω gross ausfällt; 5) wenn F_2 so gross ist, dass die Differenz $F_2 - \omega^2 B_1$ selbst für die grössten noch zulässigen Werthe von ω sehr gross ausfällt. Diese 5 Bedingungen und die zuerst angegebenen, dass 6) h_1 klein, dass 7) $F_2 = 0$ und dass 8) $L - A_1 = 0$ sein soll, müssen also erfüllt werden, damit das Nicken und Wogen nur in einem schwachen Grade eintritt.

Wir wollen diese acht Bedingungen näher betrachten, um ihre Bedeutung vollständig kennen zu lernen.

Die Bedingung 1) dass w klein sein soll, sagt aus, dass jede Lokomotive nur ein schwaches Nicken und Wogen zeigen wird, wenn sie nur einen kleinen Widerstand zu überwinden hat. Diess ist auch leicht einzusehen, denn wenn der Widerstand w klein ist, werden auch die Pressungen der Gleitstücke gegen die Führungsliniale und die Pressungen der Triebaxe gegen die Axengabeln kleine Werthe haben; diese Pressungen sind es aber vorzugsweise, welche das Nicken und Wogen verursachen.

Die Bedingung 2) dass nämlich $\frac{D}{L}$ klein sein soll, sagt aus, dass die Schubstangen im Verhältniss zu dem Durchmesser der Triebräder lang sein sollen. Dieser Anforderung könnte man allerdings auch durch kleine Triebräder entsprechen, allein wir werden bald sehen, dass kleine Triebräder gefährlich sind, das Verhältniss $\frac{D}{L}$ soll also selbst für die durchaus notwendigen grossen Triebräder klein ausfallen, was nur durch verhältnissmässig lange Schubstangen möglich ist.

Die Bedingungen 3) und 6) dass nämlich h und h_1 möglichst klein, d. h. wo möglich gleich Null sein sollen, sagen aus, dass der Schwerpunkt des auf den Federn liegenden Baues, die Triebaxe und die Zusammenhängung der Lokomotive mit dem Tender in einer und derselben horizontalen Ebene liegen sollen, oder mit andern Worten, dass der Schwerpunkt des Baues und der Zusammenhängungspunkt in der Höhe der Axe der Triebräder liegen soll. Dass diese Bedingung eine wesentliche ist, kann man leicht einsehen, denn wenn dieselbe erfüllt ist, liegen alle auf den Rahmenbau einwirkenden Horizontalkräfte in der durch den Schwerpunkt des Baues gehenden Horizontalebene, können also nur eine Fortbewegung, aber keine Drehung um die durch den Schwerpunkt gehende Queraxe hervorbringen, oder die Horizontalkräfte verursachen keine nickende Bewegung, wenn h und h_1 gleich Null sind. Die Mehrzahl der Constructeure hat sich bereits für eine niedrige Lage des Schwerpunktes ausgesprochen, allein dieser Ausspruch ist insofern ein unbestimmter, als damit nicht bestimmt gesagt ist, ob die Höhe des Schwerpunktes über der Bahn, oder die Höhe des Schwerpunktes über der Triebaxe gemeint ist. Unsere trocknen Formeln sagen aber aus, dass es hinsichtlich des Nickens nicht auf die Höhe des Schwerpunktes über der Bahn, sondern nur allein auf die Höhe des Schwerpunktes über der Triebaxe ankommt.

Die Bedingung 4) dass F_1 möglichst gross sein soll, kann leicht durch Worte ausgesprochen werden. Es ist nämlich $F_1 = r_1 + r_2 + r_3$ Seite (162), woraus hervorgeht, dass die Federn sehr starr sein sollen. Die Aufhebung oder Schwächung der störenden Schwingungen durch Anwendung von starren Federn ist aber ein fehlerhaftes Mittel, weil dadurch harte erschütternde Einwirkungen der Bahn hervorgerufen werden, gegen welche man sich durch die Federn schützen will. Eine Lokomotive hat nur dann einen zweck-

mässig angeordneten Bau, wenn sie selbst mit verhältnissmässig weichen Federn keine gaukelnden Bewegungen zeigt.

Die Bedingung 7) dass $F_3 = 0$ sein soll, kann auch leicht mit Worten ausgedrückt werden. Es ist nämlich Seite (162) $F_3 = f_1 A_1 + f_2 A_2 - f_3 A_3$ gesetzt worden. Es soll also $f_1 A_1 + f_2 A_2 - f_3 A_3 = 0$ sein. Diese Beziehung sagt aber aus, wie schon Seite (142) erklärt wurde, dass im ruhenden Zustand der Lokomotive alle Federn durch den auf denselben liegenden Bau um gleich viel zusammengedrückt sein sollen.

Nennt man $\mathfrak{P}_1, \mathfrak{P}_2, \mathfrak{P}_3$ die Belastungen der drei Axen der Lokomotive, s die Zusammendrückung jeder der sechs Federn, so ist

$$\left. \begin{aligned} \mathfrak{P}_1 &= 2 f_1 s & \mathfrak{P}_2 &= 2 f_2 s & \mathfrak{P}_3 &= 2 f_3 s \\ G &= \mathfrak{P}_1 + \mathfrak{P}_2 + \mathfrak{P}_3 \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (4)$$

Multipliziert man die Gleichung $f_1 A_1 + f_2 A_2 - f_3 A_3 = 0$ mit $2s$ und berücksichtigt die Werthe (4) so kann dieselbe auch geschrieben werden wie folgt:

$$\mathfrak{P}_1 A_1 + \mathfrak{P}_2 A_2 - \mathfrak{P}_3 A_3 = 0 \quad (5)$$

Diese Gleichungen (4) und (5) leisten für die Anordnung der Axenstellung und der Federnwerke wesentliche Dienste.

Wenn ein Lokomotivbau angeordnet werden soll, wird anzugeben sein: 1) G das Gewicht des auf den Axen liegenden Baues; 2) die Pressung \mathfrak{P}_1 auf die Vorderaxe; 3) die Pressung auf die Triebaxe; 4) die Zusammendrückung s der Federn im ruhigen Zustand der Lokomotive. Mit diesen Daten findet man zunächst aus (4) die Starrheits-Coeffizienten der Federn, nämlich:

$$f_1 = \frac{G - \mathfrak{P}_2 - \mathfrak{P}_3}{2s} \quad f_2 = \frac{\mathfrak{P}_2}{2s} \quad f_3 = \frac{\mathfrak{P}_3}{2s} \quad \dots \dots \dots (6)$$

und die Gleichung (5) liefert dann eine Beziehung, durch welche die Position eine der drei Axen gegen den Schwerpunkt bestimmt werden kann, wenn die Position der beiden andern Axen gegeben sind.

Die Bedingung 5) dass F_3 möglichst gross sein soll, kann ebenfalls mit Worten ausgedrückt werden. Es ist nämlich $F_3 = f_1 A_1^2 + f_2 A_2^2 + f_3 A_3^2$. Setzen wir voraus, dass im ruhenden Zustand der Lokomotive alle Federn gleich stark zusammengedrückt sind, so ist vermöge (4)

$$F_1 = \frac{\mathfrak{P}_1}{2s} \quad F_2 = \frac{\mathfrak{P}_2}{2s} \quad F_3 = \frac{\mathfrak{P}_3}{2s}$$

der Werth von F_3 wird demnach

$$F_3 = \frac{\mathfrak{P}_1 A_1^2 + \mathfrak{P}_2 A_2^2 + \mathfrak{P}_3 A_3^2}{2s} \quad \dots \dots \dots (7)$$

Der Werth von F_3 fällt also, wie man aus diesem Ausdruck ersieht, möglichst gross aus, wenn sowohl die vordere als auch die hintere Axe möglichst weit vom Schwerpunkt entfernt gestellt wird, und wenn diese zwei Axen möglichst stark belastet werden. Am besten ist es also in dieser Hinsicht, in der Mitte der Lokomotive gar keine Axe anzu-

bringen, und die Vorder- und Hinteraxe weit auseinander zu stellen, oder kurz gesagt: Weite Radstellung, keine Mittelaxe! oder jedenfalls nur eine schwach belastete Mittelaxe.

Bei Personenlokomotiven sollen also die Triebräder, welche jederzeit eine ansehnliche Belastung erfordern, niemals in der Mitte, sondern an den Enden angebracht werden. Allein da die Triebräder immer eine bedeutende GröÙe erhalten müssen, und grosse Vorderräder leicht ausgleisen, so sollen die Triebräder der Personenlokomotive nur an der hinteren Axe der Lokomotive angebracht werden.

Die Bedingung 8) dass $L - \mathcal{A}_1 = 0$ oder dass $L = \mathcal{A}_1$ sein solle, ist von grosser Wichtigkeit, denn sie bestimmt die richtige Position der Dampfeylinder. Es ist \mathcal{A}_1 der Horizontalabstand des Schwerpunktes von der Triebaxe, L die Länge der Schubstange. $L = \mathcal{A}_1$ sagt demnach aus, dass die mittlere Position der Gleitstücke (d. h. diejenige Position der Gleitstücke, in welcher sie sich befinden, wenn die Kolben auf halbem Schub stehen) in die Vertikalebene fallen sollen, die quer durch den Schwerpunkt des Baues gelegt werden kann. Es ist also, wie man sieht, nicht gleichgültig, wo man die Cylinder anbringt, sondern es wird ihnen durch unsere trocknen Formeln eine ganz bestimmte Position angewiesen; und diess ist auch sehr natürlich. Denn offenbar werden die Pressungen der Gleitstücke gegen die Führungsliniale ein möglichst schwaches Nicken veranlassen, wenn sich die Gleitstücke so wenig als möglich von der quer durch den Schwerpunkt gehenden Vertikalebene entfernen, diess ist aber dann der Fall, wenn die mittlere Position der Gleitstücke in diese Schwerpunktsebene fällt.

Untersuchen wir nun ferner noch, unter welchen Umständen $F_1 > \omega^2 M$ und $F_3 > \omega^2 B$ wird.

Nennen wir v die Fahrgeschwindigkeit, D den Durchmesser eines Triebrades, so ist $\omega = 2 \frac{v}{D}$. Es soll daher:

$$F_1 > \left(2 \frac{v}{D}\right)^2 M \quad \text{und} \quad F_3 > \left(2 \frac{v}{D}\right)^2 B$$

oder

$$D > 2v \sqrt{\frac{M}{F_1}} \quad \text{und} \quad D > 2v \sqrt{\frac{B}{F_3}} \quad \dots \dots \dots (8)$$

sein.

Setzen wir voraus, dass im ruhenden Zustand der Lokomotive alle Federn gleich stark zusammengedrückt sind, so ist:

$$F_1 = \frac{\mathfrak{P}_1 + \mathfrak{P}_2 + \mathfrak{P}_3}{2s} = \frac{G}{2s}$$

$$F_3 = \frac{\mathcal{A}_1^2 \mathfrak{P}_1 + \mathcal{A}_2^2 \mathfrak{P}_2 + \mathcal{A}_3^2 \mathfrak{P}_3}{2s}$$

$$F_2 = \frac{\mathcal{A}_1 \mathfrak{P}_1 + \mathcal{A}_2 \mathfrak{P}_2 - \mathcal{A}_3 \mathfrak{P}_3}{2s} = 0$$

Aus diesen Ausdrücken findet man:

$$F_3 = \frac{1}{2s} \left[G \mathcal{A}_1 \mathcal{A}_3 + \mathfrak{P}_3 \frac{\mathcal{A}_1 \mathcal{A}_2 (\mathcal{A}_2 - \mathcal{A}_1) - \mathcal{A}_1 \mathcal{A}_2 (\mathcal{A}_1 + \mathcal{A}_2) + \mathcal{A}_1 \mathcal{A}_3 (\mathcal{A}_2 + \mathcal{A}_3)}{\mathcal{A}_1 + \mathcal{A}_3} \right]$$

Die Bedingungen (8) können demnach geschrieben werden:

$$\left. \begin{aligned}
 D > 2v \sqrt{2s \frac{M}{G}} \\
 D > 2v \sqrt{2s \frac{B(A_1 + A_2)}{(G - \mathfrak{P}_2)(A_1 + A_2) A_1 A_2 + \mathfrak{P}_2(A_1 - A_2) A_1 A_2 + \mathfrak{P}_2(A_1 + A_2) A_2 A_1}}
 \end{aligned} \right\} \dots (9)$$

Für numerische Berechnungen ist es nothwendig, das als Masse ausgedrückte Trägheitsmoment B des Baues zu bestimmen. Denken wir uns, dass man in einem parallelepipedischen Raum die Masse $\frac{G}{2g}$ ganz gleichförmig vertheilt, so ist es immer möglich, die Dimensionen dieses Parallelepipedes so zu wählen, dass das Trägheitsmoment desselben mit dem wahren Trägheitsmoment B genau übereinstimmt. Nennen wir h_1 die Höhe, l_1 die mit der Längenrichtung der Lokomotive parallele Dimension des Parallelepipedes, so ist bekanntlich das Trägheitsmoment desselben $\frac{G}{2g} \frac{1}{12} (l_1^2 + h_1^2)$. Wir können daher schreiben:

$$B = \frac{G}{2g} \frac{1}{12} (l_1^2 + h_1^2) \dots \dots \dots (10)$$

Wäre B und G bekannt, so würde man vermittelst dieses Ausdruckes die Dimensionen l_1 und h_1 leicht so bestimmen können, dass das Trägheitsmoment des Parallelepipedes mit dem Trägheitsmoment des wirklichen Baues übereinstimmt. Allein B ist eben nicht bekannt, sondern nur G , und es handelt sich darum, l_1 und h_1 so zu wählen, dass $\frac{G}{2g} \frac{1}{12} (l_1^2 + h_1^2)$ dem wahren Trägheitsmoment B gleich wird. Wir werden wohl keinen erheblichen Fehler begehen, wenn wir für l_1 die totale Länge des Kessels, und für h_1 den Durchmesser des Röhrenkessels in Rechnung bringen.

Setzt man in den ersten der Ausdrücke (9) für M seinen Werth $\frac{G}{2g}$ und in den zweiten für B obigen Werth (10) so erhalten wir:

$$\left. \begin{aligned}
 D > 2v \sqrt{\frac{s}{g}} \\
 D > 2v \sqrt{\frac{s}{g} \cdot \frac{1}{12} \frac{(l_1^2 + h_1^2) (A_1 + A_2) G}{(G - \mathfrak{P}_2)(A_1 + A_2) A_1 A_2 + \mathfrak{P}_2(A_1 - A_2) A_1 A_2 + \mathfrak{P}_2(A_1 + A_2) A_2 A_1}}
 \end{aligned} \right\} (11)$$

Den Bedingungen $F_1 > \omega^2 M$ und $F_2 > 4 \omega^2 B$ wird demnach entsprochen, wenn der Durchmesser eines Triebrades grösser genommen wird, als der grössere von den zwei Werthen, welche die Ausdrücke (11) bestimmen.

Wir wollen sehen, wie gross nach dieser Regel die Triebräder einer *Stephenson'shen* und einer *Crampton'schen* Lokomotive werden müsste.

Bei der Personenlokomotive von *Stephenson* liegt die Triebaxe immer nahe, bisweilen sogar ganz genau unter dem Schwerpunkt des Baues. Wir wollen das Letztere annehmen, setzen daher $A_2 = 0$. Die Belastung \mathfrak{P}_2 der Triebräder beträgt bei dieser Lokomotive in der Regel 0.44 vom Gewicht des Baues. Wir setzen daher $\mathfrak{P}_2 = 0.44 G$. Der Durchmesser des Röhrenkessels ist ungefähr um $\frac{1}{5}$ von der totalen Länge, es ist also h_1 ungefähr $\frac{1}{5} l_1$ und h_1^2 gleich $\frac{1}{25} l_1^2$, wir dürfen

uns also erlauben h_2^2 gegen h_1^2 zu vernachlässigen. Die beiden Tragaxen sind vom Schwerpunkt nahe gleich weit entfernt. Wir dürfen also $A_1 = A_2 = \frac{A_1 + A_2}{2}$ setzen. Mit dieser die Personenlokomotive von *Stephenson* charakterisirenden Annahmen werden die Ausdrücke (11)

$$\left. \begin{aligned} D &> 2V \sqrt{\frac{s}{g}} \\ D &> 1.5V \frac{l_2}{A_1 + A_2} \sqrt{\frac{s}{g}} \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (12)$$

Der Durchmesser des Triebrades muss also um so grösser sein, je grösser die grösste Fahrgeschwindigkeit und je kleiner der Radstand $A_1 + A_2$ im Verhältniss zur Länge des Baues ist.

Bei einer von *Stephenson* erbauten Lokomotive beträgt die Total-Kessellänge 6 Meter und der Radstand 3.55 Meter. Die Zusammendrückung s der Federn ist nie kleiner als 0.04 Meter. Mit diesen Daten gibt der erste der Ausdrücke (12)

$$\left. \begin{aligned} D &> 0.13V \text{ und } V < 8D \\ \text{gibt dagegen der zweite der Ausdrücke 12} \\ D &> 0.18V \text{ und } V < 5.6D \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (13)$$

Die grösste Fahrgeschwindigkeit dieser Lokomotive von *Stephenson* soll also nach dieser Rechnung kleiner als 5.6 D sein. Sie wird, wenn man Triebräder von $D = 2$ Meter Durchmesser annimmt, nun $2 \times 5.6 = 11.2$ Meter.

Für eine Personenzug-Lokomotive nach dem System von *Crampton* haben wir folgende Annahmen zu machen.

Wir haben unserer Untersuchung eine Lokomotive zu Grunde gelegt, bei welcher die Triebaxe um A_2 und eine Tragaxe um A_1 hinter dem Schwerpunkt, die zweite Tragaxe dagegen um A_1 vor dem Schwerpunkte liegt. In der Lokomotive von *Crampton* sind die Entfernungen des Schwerpunktes von der hinter der Feuerbüchse angebrachten Triebaxe und von der vordersten Tragaxe gleich gross, wir müssen also $A_2 = A_1$ setzen. Hinter dem Schwerpunkt kommt keine Tragaxe vor, wohl ist aber eine solche genau unter dem Schwerpunkt angebracht; wir müssen also $A_1 = 0$ setzen. Die Belastung der Triebaxe ist nahe 0.44 vom Gewichte des auf den Federn liegenden Baues; wir haben daher $p_2 = 0.44G$. h_2^2 dürfen wir auch hier wie früher gegen h_1^2 vernachlässigen. Mit diesen Daten werden die Ausdrücke (11)

$$\left. \begin{aligned} D &> 2V \sqrt{\frac{s}{g}} \\ D &> 1.23V \frac{l_2}{A_1 + A_2} \sqrt{\frac{s}{g}} \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (14)$$

An dieser Lokomotive ist aber der Radstand $A_2 + A_1$ so gross, als die totale Kessellänge ist, also $\frac{l_2}{A_1 + A_2} = 1$. Nehmen wir auch hier $s = 0.04$ $g = 9.81$, so erhalten wir

$$D > 0.13 V \text{ und } V < 8 D$$

$$D > 0.079 V \text{ und } V < 12.6 D$$

Die grösste Fahrgeschwindigkeit dieser Lokomotive von *Crampton* soll also nach dieser Rechnung kleiner als $8D$ sein. Sie wird, wenn man Triebräder von 2.3 Meter Durchmesser annimmt, 18.4 Meter. Man kann also mit dieser Lokomotive ohne Gefahr bedeutend schneller fahren, als mit der von *Stephenson*.

Unsere Formeln (3) Seite (169) sagen uns nicht nur, wie gross die Triebräder nicht sein sollen, sie belehren uns auch, wie gross die Räder sein sollen, damit eine Lokomotive bei einer gewissen Geschwindigkeit, mit der sie zu laufen bestimmt ist, möglichst schwache Störungen verursacht.

Die Werthe von ϑ , und ϱ , der Formeln (3) Seite (169), welche das Nicken bestimmen, werden bei einer unendlich kleinen Winkelgeschwindigkeit, also bei einem unendlich grossen Durchmesser der Triebräder am kleinsten. Anders verhält es sich mit den Werthen von ϱ und ϑ , die das Wogen bestimmen. Diese werden für eine bestimmte endliche Grösse der Triebräder, nämlich für denjenigen Werth von D am kleinsten, für welchen

$$\frac{D}{F_1 - \omega^2 M}$$

den kleinsten Werth hat. Setzen wir diesen Ausdruck X und führen in denselben für ω seinen Werth $\frac{2V}{D}$ ein, so wird:

$$X = \frac{D^3}{F_1 D^2 - 4 V^2 M}$$

Dieser Ausdruck verschwindet für $D=0$ und wird unendlich, sowohl für $D = 2V \sqrt{\frac{M}{F_1}}$ als auch für $D = \infty$; zwischen diesen beiden Werthen von D liegt also nothwendig ein gewisser endlicher Werth, für welchen X ein Minimum wird, d. h. es gibt nebst dem nicht ausführbaren Werth $D=0$ noch einen endlichen Werth von D , für welchen das Wogen möglichst schwach ausfällt. Für diesen vortheilhaftesten Werth von D muss $\frac{dX}{dD} = 0$ sein. Nun ist

$$\frac{dX}{dD} = \frac{D^2 (D^2 F_1 - 12 V^2 M)}{(F_1 D^2 - 4 V^2 M)^2}$$

Der diesen Ausdruck zum Verschwinden bringende vortheilhafteste Werth von D ist demnach

$$D = V \sqrt{12 \frac{M}{F_1}} \dots \dots \dots (15)$$

oder auch weil $V \sqrt{\frac{M}{F_1}} = V \sqrt{\frac{s}{g}}$ ist

$$D = 2V \sqrt{3 \frac{s}{g}} \dots \dots \dots (16)$$

für $s = 0.04$ Meter, $g = 9.808$ wird

$$D = 0.22 V$$

Dieser Durchmesser ist aber sehr gross, denn er wird selbst für eine mässige Fahrgeschwindigkeit von 10 Meter bereits 2.2 Meter.

Bezeichnet man mit v_1 die gefährliche Geschwindigkeit einer Lokomotive, deren Triebräder einen Durchmesser D haben, so hat man zur Bestimmung derselben

$$D^2 F_1 = 4 v_1^2 M$$

Daraus folgt:

$$D = v_1 \sqrt{\frac{4M}{F_1}} \dots \dots \dots (17)$$

Aus (15) und (17) folgt aber:

$$v_1 = v \sqrt{3} = 1.73 v \dots \dots \dots (18)$$

Das Wogen einer Lokomotive, die mit einer Geschwindigkeit v zu fahren bestimmt ist, wird also möglichst schwach, wenn der Durchmesser der Triebräder so gross genommen wird, als der Ausdruck (16) bestimmt, und die gefährliche Geschwindigkeit ist dann 1.73 mal so gross als die Geschwindigkeit v .

Für den vortheilhaftesten Werth von D , den die Gleichung (15) darbietet, wird, wenn man berücksichtigt dass $M = \frac{G}{2g}$ $F_1 = \frac{G}{2s}$ ist

$$x = 6 \frac{v}{G} s \sqrt{3 \frac{s}{g}}$$

Die Werthe von Ω und \mathfrak{R} der Ausdrücke (3) Seite 169 werden mithin:

$$\Omega = \mathfrak{R} = \frac{6}{16} \pi \cdot \frac{W}{G} \cdot \frac{v}{L} \cdot s \sqrt{3 \frac{s}{g}}$$

$\frac{W}{G}$ ist für alle Lokomotive sehr nahe eine Constante, eben so auch die Zusammenrückung s der Federn. Damit also die Werthe von Ω und \mathfrak{R} für alle Lokomotive gleich gross ausfallen, muss auch $\frac{v}{L}$ constant sein, oder es muss die Länge der Schubstange der Fahrgeschwindigkeit proportional genommen werden. Eine grosse Fahrgeschwindigkeit erfordert also nicht nur grosse Triebräder, sondern auch lange Schubstangen. Das erstere dieser Elemente ist jedoch viel wichtiger als das letztere, denn wenn der Durchmesser D genau oder annähernd so gross ist als die Gleichung (15) vorschreibt, fallen die Werthe von Ω \mathfrak{R} Ω_1 \mathfrak{R}_1 selbst bei einem mässigen Werth von L beinahe verschwindend klein aus.

Setzen wir z. B. $v = 12$ $s = 0.05$ $\frac{W}{G} = \frac{1}{20}$ $g = 9.81$ $L = 2$, so wird der vortheilhafteste Werth von $D = 3$ und $\Omega = \mathfrak{R} = \frac{1}{453}$ Meter.

Diese numerischen Rechnungen sind nun freilich nicht ganz zuverlässig, indem das Trägheitsmoment B beinahe nur durch eine Schätzung in Rechnung gebracht wurde, allein so viel kann man doch daraus sehen, dass die wirklichen Fahrgeschwindigkeiten der Personenlokomotive den gefährlichen Geschwindigkeiten oftmals sehr nahe kommen dürften. Wenn aber auch diese numerischen Rechnungen nicht ganz verlässlich sind, so ist doch die Form der Ausdrücke (12) und (14) eine Wahrheit; wir sind also zu dem Ausspruch berechtigt, dass eine grosse Fahrgeschwindigkeit grosse Triebräder, starre Federn und eine im Verhältniss zur Länge des Lokomotivbaues weite Radstellung erfordert.

Diese Gesetze, welche uns die Untersuchung über das Wanken, Wogen und Nicken geliefert hat, gelten nicht nur für diese specielle Lokomotive, die wir der Untersuchung zu Grunde gelegt haben, sondern sie gelten auch für alle andern Anordnungen, die nicht mit Blindaxen versehen sind, vorausgesetzt, dass man sich an den Sinn dieser Gesetze und an den wörtlichen Ausdruck derselben, nicht aber an den Buchstaben der Formeln hält. Es gilt z. B. für alle Lokomotive das Gesetz, dass alle Federn im ruhenden Zustand der Lokomotive gleich stark zusammengepresst sein sollen, dass ferner die Gleitstücke in ihrer mittleren Position in die durch den Schwerpunkt gehende Querebene fallen sollen; dass die Federn starr sein sollen; dass die Summe der Produkte aus den Axenbelastungen in die Quadrate der Entfernungen der Axen von dem Schwerpunkt möglichst gross sein soll etc. Hält man sich also an den wahren Sinn dieser Gesetze, so darf man sie jederzeit anwenden.

Diese Gesetze sind als Grundgesetze anzusehen, die bei dem Bau einer jeden Lokomotive beobachtet werden müssen, und die man ungestraft nicht übertreten darf. Eine Lokomotive ist richtig oder fehlerhaft angeordnet je nachdem ihre Bauart diesen Gesetzen entspricht oder diese Gesetze verletzt. Einzelne dieser Gesetze sind zwar auch auf empirischem Wege aufgefunden oder durch das gesunde Gefühl errathen worden, allein im Allgemeinen fehlt es in der Praxis noch sehr an klarer Uebersicht, das Herumprobiren ist noch immer an der Tagesordnung und die Constructeurs sprechen sich noch immer dahin aus, dass es überhaupt nicht möglich sei, allgemein gültige Regeln für den Bau der Lokomotive aufzustellen. Hoffentlich wird man über den Lokomotivbau zu einer anderen Ansicht kommen, wenn sich einmal die hier aufgestellten Regeln in der Praxis verbreitet haben werden.

Die aufgefundenen Gesetze werden uns in der Folge zur Bestimmung der Dimensionen von neu zu erbauenden Lokomotiven wesentliche Dienste leisten, zunächst wollen wir uns derselben bedienen um die gegenwärtig am häufigsten im Gebrauch befindlichen Lokomotive hinsichtlich der Stabilität ihres Baues zu beurtheilen.

Beurtheilung verschiedener Lokomotive hinsichtlich der Stabilität ihres Baues.

1. Die Personenlokomotive von *Stephenson* mit innen liegenden Cylindern, die Triebaxe in der Mitte, die drei Axen zwischen dem Feuerkasten und der Rauchkammer, innere Rahmen. (Tab. I, Fig. 3, 4.)

Obgleich die Construction dieser Lokomotive die am meisten verbreitete ist, so können wir doch von ihrer Stabilität nur wenig Gutes sagen. Die Cylinder liegen zwar nahe neben einander, allein die Schubstangen haben immer im Verhältniss zu den Kurbeln nur eine geringe Länge. Die Kurbeltriebaxe liegt unter dem Kessel, der Schwerpunkt des beweglichen Baues liegt also hoch. Die Maschine hat innere Rahmen, die Entfernung der Federn der einen Seite von den Federn der andern Seite der Lokomotive ist also

klein. Es ist mithin nur eine von den Bedingungen erfüllt, durch die man sich gegen das Wanken schützen kann. Noch ungünstiger ist diese Lokomotive hinsichtlich des Wogens und Nickens gebaut. Die Radstellung ist eine enge, denn alle Axen befinden sich zwischen dem Feuerkasten und der Rauchkammer. Die jederzeit eine beträchtliche Belastung erfordernde Triebaxe ist in der Mitte ganz in der Nähe des Schwerpunktes angebracht, die Belastung der Vorder- und Hinterräder ist also zu schwach. Die Cylinder liegen viel zu weit vor dem Schwerpunkt des Baues, die Gleitstücke sollten in ihrer mittleren Position in der durch den Schwerpunkt gehenden Querebene liegen, befinden sich aber weit vorne, ungefähr über der Vorderaxe. Die Schubstangen sollten auch zur Schwächung des Wogens und Nickens eine beträchtliche Länge haben, was, wie schon gesagt wurde, nicht der Fall ist. Es ist also an dieser Lokomotive hinsichtlich der Stabilität nichts zu loben, als dass die Cylinder nahe neben einander liegen. Man wird gut thun, wenn man diese Bauart ganz verlässt.

2. Die Personenlokomotive von *Stephenson* mit aussen, vorne neben der Rauchkammer liegenden Cylindern, die Triebaxe in der Mitte, die drei Axen zwischen dem Feuerkasten und der Rauchkammer, innere Rahmen. (Tab. II, Fig. 5 und 6.)

An dieser Lokomotive ist keine von den Bedingungen erfüllt, die wir als Merkmale einer guten Construction aufgefunden haben. Die Schubstangen haben eine geringe Länge, die Cylinder liegen zu weit vorne, die mittlere Position der Gleitstücke fällt um ein Beträchtliches vor den Schwerpunkt des Baues. Durch die äussere Lage der Cylinder sind sie zu weit von einander entfernt, verursachen also Wanken. Die Triebräder sind in der Mitte und sollten hinten sein. Die Radstellung ist eine enge, weil alle Axen zwischen dem Feuerkasten und der Rauchkammer liegen. Der Schwerpunkt liegt hoch, insbesondere über den Axen der Tragräder. Es sind innere Rahmen vorhanden, die Federn sind daher zu nahe neben einander. Diese Lokomotive hat durch die Einfachheit ihres Baues ein „praktisches“ Ansehen, ist aber so fehlerhaft als nur möglich angeordnet. Wenn die Federn nicht so starr wären, könnte man sie sicherlich gar nicht brauchen.

3. *Stephenson's* Personenzuglokomotive mit in der Mitte des Wagenbaues liegenden Cylindern, die Triebaxe in der Nähe der Feuerbüchse, jedoch vor derselben, innere Rahmen. (Tab. II, Fig. 7 und 8.)

Bei dieser Lokomotive sind mehrere von den von uns aufgestellten Bedingungen einer richtigen Bauart ganz gut erfüllt. Die hintere Axe ist hier Triebaxe, und die Cylinder haben eine solche Lage, dass die Gleitstücke in ihrer mittleren Position wenigstens nahe in die Vertikalebene fallen, die quer durch den Schwerpunkt des Baues geht. Allein der Radstand ($\mathcal{A}_2 + \mathcal{A}_1$) ist zu klein und die Schubstangen sind auch wie bei allen *Stephenson's*chen Lokomotiven zu kurz, es sind also zwei von den Bedingungen, durch deren Erfüllung das Nicken und Wogen möglichst geschwächt werden kann, nicht realisirt. Hinsichtlich des Wankens ist diese Lokomotive sehr fehlerhaft angeordnet. Die Cylinder liegen aussen, die Schubstangen haben eine geringe Länge, es sind innere Rahmen angebracht oder die Federn liegen innerhalb der Räder, der Schwerpunkt des Baues liegt hoch, weil die Axe der grossen Triebräder unter dem Kessel durchgeht. Der lobenswerthen Eigenschaften hat also diese Lokomotive nur die zwei zuerst genannten.

4. Die Personenlokomotive von *Crampton* ohne Blindaxe, mit aussen liegenden Cylindern und mit grossen Triebrädern, deren Axe hinter der Feuerbüchse liegt. (Tab. II, Fig. 9 und 10.)

Ueber diese Maschine fallen auch unsere trocknen Formeln ein sehr günstiges Urtheil. Die Cylinder sind so gelegt, dass die mittlere Position der Gleitstücke in die durch den Schwerpunkt gehende vertikale Querebene fallen. Die Triebräder haben eine bedeutende

Grösse und ihre Axe liegt nicht in der Mitte, sondern hinter der Feuerbüchse. Der Radstand ist grösser, als bei irgend einer andern Personenlokomotive. Die Schubstangen haben eine sehr beträchtliche Länge. Werden die Federn hinreichend starr gemacht und in der Weise angeordnet, dass sie in ruhigem Zustand der Lokomotive um gleich viel zusammengedrückt sind, so entspricht diese Lokomotive vollkommen und vollständig den Bedingungen hinsichtlich des Wogens und Nickens. Aber auch gegen das Wanken ist diese Lokomotive in mehrfacher Hinsicht gut gebaut. Die Schubstangen haben, wie schon gesagt wurde, eine sehr beträchtliche Länge. Der Schwerpunkt des Baues liegt tiefer, als bei irgend einer andern Personenlokomotive, und es liegen wenigstens die vordern Federn ausserhalb der Räder. Nur allein der Umstand ist ein ungünstiger, dass die Cylinder ausserhalb liegen. Diese Lokomotive hat also nach dem Urtheile unserer Formeln nur eine einzige Unvollkommenheit; und sie würde zu dem wahren Vorbild aller Personenlokomotiven gemacht werden können, wenn man diese äussere Lage der Cylinder mit einer inneren Lage vertauschen könnte, ohne eine von den übrigen der wirklich realisirten Bedingungen zu verletzen.

Sucht man eine Construction in einer Hinsicht zu verbessern, so begegnet es gewöhnlich, dass man sie in einer andern Hinsicht verschlechtert. *Crampton* war glücklicher. Er wollte nur Eine Verbesserung machen, dieser folgten aber mehrere andere freiwillig nach. *Crampton* wollte grössere Räder anwenden, ohne den Schwerpunkt des Baues höher legen zu müssen, und hatte den glücklichen Gedanken, sie von der Mitte wegzunehmen und hinter die Feuerbüchse zu verlegen, dadurch konnte nun der Schwerpunkt tiefer gelegt werden, wurde der Radstand grösser, erhielten die Cylinder ihre richtige Längenposition und wurden die Schubstangen von selbst länger.

5. Die Lokomotive von *Norris* mit aussen liegenden Cylindern, mit vier gekuppelten Triebrädern und mit einem beweglichen vierrädrigen Laufwagen. (Tab. V, Fig. 17 und 18.)

Die Lage der Cylinder ist theils eine ungünstige, theils eine fehlerhafte; sie ist ungünstig, weil die Cylinder aussen liegen; fehlerhaft, weil sie zu weit vorne liegen. Bringt man die Cylinder in eine solche Lage, dass die mittlere Position der Gleitstücke in die durch den Schwerpunkt gehende Querebene fällt, so muss die hinter der Feuerbüchse befindliche Triebaxe von den Gleitstücken aus vermittelst Schubstangen getrieben werden, weil sonst die Schubstangen zu kurz würden. Die Radstellung ist eine richtige, allein der Schwerpunkt der Maschine kommt ziemlich hoch zu liegen, weil die vor dem Feuerkasten befindliche Triebaxe unter dem Kessel durchgeht. Beseitiget man die Fehler dieser Construction, so kommt man zur Lokomotive von *Crampton* ohne Blindaxe.

Die Lokomotive von *Crampton* mit Blindaxe.

Die ganze frühere Untersuchung über das Wanken, Wogen und Nicken der Lokomotive bezieht sich nur allein auf solche Anordnungen, bei welchen die Kraft von den Gleitstücken aus direkt durch Schubstangen auf die Triebaxe übertragen wird. In dieser neueren Personenzuglokomotive von *Crampton* ist eine so direkte Uebertragung der Kraft nicht vorhanden, sondern die Kraft wird zunächst von den Gleitstücken aus vermittelst Schubstangen auf eine gegen den Rahmenbau unveränderlich gelagerte Kurbelaxe übertragen, und erst von dieser aus wird die hinter der Feuerbüchse befindliche Triebaxe vermittelst Kurbeln und Kupplungsstangen getrieben. Diese in dem Rahmenbau liegende, mit inneren Maschinenkurbeln und mit äusseren Kupplungskurbeln versehene Blindaxe wird, beim Vorwärtslafen der Lokomotive, nach vertikaler Richtung abwärts gedrückt, und diese Pressung, in Verbindung mit allen übrigen auf den Rahmenbau einwirkenden

Horizontal- und Vertikalkräften, bewirkt in dieser Lokomotive das Wanken, Wogen und Nicken.

In der Maschine von *Crampton* liegt die Triebaxe höher als die Blindaxe und als die Gleitstücke, allein da die äusseren Kupplungsstangen im Verhältniss zur Höhe der Triebaxe über der Blindaxe sehr lang sind, so werden wir keinen merklichen Fehler begehen, wenn wir annehmen, dass die Triebaxe, die Blindaxe und die Gleitstücke in einer und derselben horizontalen Ebene liegen, in welchem Falle die äusseren Kupplungsstangen stets eine horizontale Lage haben. Tab. XIV, Fig. 55 stellt den Mechanismus und das Kräftesystem der vordern Maschine dar, Fig. 56 den Mechanismus und das Kräftesystem der hintern Maschine. Fig. 57 ist eine ideale Darstellung des Rahmenbaues und der auf denselben einwirkenden Kräfte. *e* ist der Verbindungspunkt des Tenders mit der Lokomotive. *A* die Triebaxe. *B* die Blindaxe. *CD* die Gleitstücke der beiden Maschinen. *F* die Punkte, in welchen die Cylinder mit dem Rahmen verbunden sind. *H* der Schwerpunkt des auf den Federn liegenden Baues. Die in Betrachtung zu ziehenden Kräfte sind folgende:

Das Gleitstück der vordern Maschine übt gegen das obere Führunglineal nach vertikaler Richtung aufwärts einen Druck $P \frac{r}{L} \sin. \alpha$ aus. Das Gleitstück der hintern Maschine übt gegen das Führunglineal nach vertikaler Richtung aufwärts einen Druck $P_1 \frac{r}{L} \cos. \alpha$ aus. Gegen den Zapfen der vorderen Maschinenkurbel wird nach horizontaler Richtung nach vorwärts ein Druck *P*, nach vertikaler Richtung abwärts ein Druck $P \frac{r}{L} \sin. \alpha$ ausgeübt. Gegen den Zapfen der hintern Maschine wird nach horizontaler Richtung nach rückwärts ein Druck *P*₁, nach vertikaler Richtung abwärts ein Druck $P_1 \frac{r}{L} \cos. \alpha$ ausgeübt. Gegen den Zapfen der vorderen Kupplungskurbel wirkt nach horizontaler Richtung nach vorwärts ein Druck *P*, nach vertikaler Richtung kein Druck. Gegen den Zapfen der hinteren Kupplungskurbel wirkt nach horizontaler Richtung, aber nach rückwärts zielend, eine Kraft *P*₁, nach vertikaler Richtung keine Kraft. Die Blindaxe zieht also den Rahmenbau nach horizontaler Richtung vorwärts mit einer Kraft 2*P*, nach horizontaler Richtung rückwärts mit einer Kraft 2*P*₁, nach vertikaler Richtung abwärts mit einer Kraft $P \frac{r}{L} \sin. \alpha + P_1 \frac{r}{L} \cos. \alpha$.

Den in *A* (Fig. 57) nach horizontaler Richtung und nach vorwärts wirkenden Druck der Triebaxe gegen die Axengabeln ϕ genannt, so hat man zur Bestimmung derselben

$$\phi \frac{D}{2} = P_1 \left(\frac{D}{2} + r \cos. \alpha \right) - P \left(\frac{D}{2} - r \sin. \alpha \right)$$

$$\phi = P_1 - P + \frac{2r}{D} (P \sin. \alpha + P_1 \cos. \alpha) \dots \dots \dots (1)$$

Um das Wanken, Wogen und Nicken der Maschine zu bestimmen, müssen wir bestimmen: 1) die Summe der Vertikalkräfte ΣZ , welche auf den Bau einwirken. 2) die Summe der Momente der Kräfte in Bezug auf die durch den Schwerpunkt gehende Queraxe. 3) Die Summe der Momente in Bezug auf die durch den Schwerpunkt gehende Längsaxe.

Die Summe der Vertikalkräfte reduziert sich aber hier einzig und allein auf die Summe der Federkräfte und das Gewicht *G* des Baues; denn die Summe der Kräfte, welche die Blindaxe abwärts pressen, ist genau so gross, als die Summe der Pressungen,

welche die Gleitstücke nach vertikaler Richtung aufwärts ausüben. Es ist demnach für diese Maschine

$$\Sigma Z = -2 \zeta F_1 + 2 \varphi F_2 \dots \dots \dots (2)$$

Die Summe der Momente in Bezug auf die Längsaxe reduziert sich hier ebenfalls auf die Summe der Momente der Federkräfte, denn die Pressungen der Gleitstücke geben eine Momentensumme $e \left(P \frac{r}{L} \sin \alpha - P_1 \frac{r}{L} \cos \alpha \right)$ und die Pressungen gegen die Zapfen der Maschinenkurbeln geben eine Momentensumme $e \left(P_1 \frac{r}{L} \cos \alpha - P \frac{r}{L} \sin \alpha \right)$. Der Gesamtbetrag dieser Summe ist demnach gleich Null.

Die Summe der Momente aller auf den Bau einwirkender Kräfte ist demnach vermöge c, Seite 143

$$X_1 = -2 e^2 \varphi F_1 \dots \dots \dots (3)$$

Nennt man \mathcal{L} den Horizontalabstand der Blindaxe von dem Schwerpunkt, h die Höhe dieses Schwerpunkts über der Horizontalebene, in der, der Voraussetzung gemäss, die Triebaxe, die Blindaxe und die Gleitstücke liegen. w den Widerstand des Trains, und berücksichtigt, dass die Horizontalabstände der Gleitstücke vom Schwerpunkt annähernd $r \cos \alpha + L - \mathcal{L}$ $r \sin \alpha + L - \mathcal{L}$ sind, so erhalten wir für die Summe der Momente aller Kräfte in Bezug auf die durch den Schwerpunkt gehende Queraxe folgenden Ausdruck:

$$Y_1 = \left\{ \begin{array}{l} + 2 \zeta F_1 - 2 \varphi F_2 \\ h (P_1 - P + 2 P - 2 P_1 + \mathcal{G} - W) \\ P \frac{r}{L} \sin \alpha (r \cos \alpha + L - \mathcal{L}) + P_1 \frac{r}{L} \cos \alpha (r \sin \alpha + L - \mathcal{L}) \\ \mathcal{L} \left(P \frac{r}{L} \sin \alpha + P_1 \frac{r}{L} \cos \alpha \right) \end{array} \right\} \dots \dots (4)$$

wobei die erste Zeile die Momente der Federkräfte (b Seite 143), die zweite Zeile die Momente der Horizontalkräfte, die dritte Zeile die Momente der Pressungen der Gleitstücke, die vierte Zeile die Momente der Pressungen der Blindaxe ausdrückt.

Führt man in diesen Ausdruck für \mathcal{G} seinen Werth aus (1) ein und berücksichtigt, dass im Beharrungszustand der Bewegung

$$W = 2 K \frac{2l}{D \pi} \dots \dots \dots (5)$$

ist, so findet man nach einigen einfachen Reductionen:

$$Y_1 = \left\{ \begin{array}{l} - h 2 K \frac{2l}{D \pi} + 2 \zeta F_1 - 2 \varphi F_2 + \frac{1}{2} \frac{r^2}{L} (P + P_1) \sin 2 \alpha \\ + r \left(1 + \frac{2h}{D} \right) (P \sin \alpha + P_1 \cos \alpha) \end{array} \right\} \dots \dots (6)$$

Diese Werthe ΣZ X_1 Y_1 sind unabhängig: 1) von der Horizontalentfernung der

Axen der Maschinen, 2) von der Länge der äusseren Kupplungsstangen, 3) von dem Horizontalabstand \mathcal{L} der Blindaxe von dem Schwerpunkt. Es ist demnach ganz gleichgültig, ob die Cylinder bei dieser Lokomotive innen, oder ob sie aussen liegend angebracht werden, und nach wohin man die Blindaxe in horizontalem Sinne verlegt. Da ferner, wie wir gesehen haben, die Triebkräfte P und P_1 weder in der Summe ΣZ , noch in der Summe X , erscheinen, so kann in dieser Lokomotive, abgesehen von den Einwirkungen der Bahn, weder ein Wogen noch ein Wanken, sondern einzig und allein ein Nicken eintreten. Wir wollen nun sehen, ob dieses Nicken stärker oder schwächer ist, als bei einer gewöhnlichen Lokomotive ohne Blindaxe.

Vermöge des Ausdruckes (6) Seite 146 ist der Werth von Y_1 für eine Lokomotive ohne Blindaxe

$$Y_1 = -h_1 2K \frac{2l}{D\pi} + 2\zeta F_2 - 2\varphi F_1 + \frac{1}{2}(P + P_1) \frac{r^2}{L} \left(1 + \frac{2h}{D}\right) \sin. 2\alpha \quad \left. \begin{array}{l} \\ \\ \end{array} \right\} \dots (7)$$

$$+ \left[(L - \mathcal{L}_2) \frac{r}{L} + \frac{2rh}{D} \right] (P \sin. \alpha + P_1 \cos. \alpha) \quad \left. \begin{array}{l} \\ \\ \end{array} \right\}$$

Machen wir, um die Vergleichung dieses Ausdruckes mit (6) zu erleichtern, die günstige Voraussetzung, dass in beiden Maschinen $h = h_1 = 0$ sei, so werden die Werthe von Y_1

A) Für die Maschine von *Crampton mit* Blindaxe:

$$2\zeta F_2 - 2\varphi F_1 + \frac{1}{2} \frac{r^2}{L} (P + P_1) \sin. 2\alpha + r (P \sin. \alpha + P_1 \cos. \alpha) \dots (8)$$

B) Für die Maschine *ohne* Blindaxe:

$$2\zeta F_2 - 2\varphi F_1 + \frac{1}{2} \frac{r^2}{L} (P + P_1) \sin. 2\alpha + r \frac{L - \mathcal{L}_2}{L} (P \sin. \alpha + P_1 \cos. \alpha) \dots (9)$$

Diesen letzteren Ausdruck können wir noch weiter spezialisiren. Es ist nämlich \mathcal{L}_2 für die Personenlokomotive von *Stephenson ohne* Blindaxe nahe gleich Null, und für die Personenlokomotive von *Crampton ohne* Blindaxe gleich L . Die Werthe von Y_1 sind daher:

C) Für die Personenlokomotive von *Stephenson ohne* Blindaxe:

$$2\zeta F_2 - 2\varphi F_1 + \frac{1}{2} \left(\frac{r^2}{L}\right) (P + P_1) \sin. 2\alpha + r (P \sin. \alpha + P_1 \cos. \alpha) \dots (10)$$

D) Für die Personenlokomotive von *Crampton ohne* Blindaxe:

$$2\zeta F_2 - 2\varphi F_1 + \frac{1}{2} \frac{r^2}{L} (P + P_1) \sin. 2\alpha \dots (11)$$

Vergleicht man diese Ausdrücke (10) und (11) mit (8) so folgt, dass die Maschine von *Crampton mit* Blindaxe 1) gerade so stark nickt, als die Personenlokomotive von *Stephenson ohne* Blindaxe, 2) weit stärker nickt, als die Personenlokomotive von *Crampton ohne* Blindaxe. Dabei ist jedoch vorausgesetzt, dass die Werthe von F_2 für alle drei Maschinen übereinstimmen.

Kurz angedeutet ist also das Urtheil unserer Untersuchung:

| | | | |
|---------------------------------------|--------------------|---------------|-----------------|
| <i>Stephenson:</i> innere Cylinder | } schwaches Wanken | starkes Wogen | starkes Nicken. |
| <i>Crampton:</i> ohne Blindaxe | | | |
| <i>Crampton:</i> mit Blindaxe | } kein Wanken | kein Wogen | starkes Nicken. |
| | | | |

Schliesslich wollen wir noch die Werthe von ζ , φ und ψ für die Lokomotive von *Crampton* mit Blindaxe aufstellen. Die Differenzialgleichungen (3) Seite 141 der gaukelnden Bewegungen werden vermittelt der Werthe (2), (3), (6)

$$\left. \begin{aligned} \frac{d^2 \zeta}{dt^2} &= -m \zeta + n \varphi \\ \frac{d^2 \varphi}{dt^2} &= -c + m_1 \zeta - n_1 \varphi + \frac{1}{2} (P + P_1) q_1 \sin. 2(\alpha_0 - \omega t) \\ &\quad + p_1 [P \sin. (\alpha_0 - \omega t) + P_1 \cos. (\alpha_0 - \omega t)] \\ \frac{d^2 \psi}{dt^2} &= -m_2 \psi \end{aligned} \right\} \dots (12)$$

wobei die Coefficienten $m, n, m_1, n_1, m_2, p_1, q_1$ folgende Werthe haben.

$$\left. \begin{aligned} m &= \frac{f_1 + f_2 + f_3}{M} = \frac{F_1}{M} & m_1 &= \frac{d_1 f_1 + d_2 f_2 - d_3 f_3}{B} = \frac{F_2}{B} \\ n &= \frac{d_1 f_1 + d_2 f_2 - d_3 f_3}{M} = \frac{F_2}{M} & n_1 &= \frac{d_1' f_1 + d_2' f_2 + d_3' f_3}{B} = \frac{F_3}{B} \\ c &= \frac{2lhK}{BD\pi} & q_1 &= \frac{r^2}{2LB} \\ m_2 &= \frac{e^2(f_1 + f_2 + f_3)}{A} = \frac{e^2 F_1}{A} & p_1 &= \frac{r}{2B} \left(1 + \frac{2h}{D} \right) \end{aligned} \right\} (13)$$

Da die Gleichungen (12) der Form nach mit den Gleichungen (9) Seite 147 übereinstimmen, so werden wir die Integrale der Gleichungen (12) erhalten, wenn wir in die Gleichung (5) Seite 149 und in die Gleichungen (13), (14), (15), Seite 162, so wie endlich in die Gleichungen (21), (22), Seite 164 für $m, n, m_1, n_1, m_2, p_1, q_1$ die so eben zusammengestellten Werthe (13) setzen und ferner noch $p = 0$ und $p_2 = 0$ schreiben.

Wir erhalten somit für die Integrale der Gleichungen (12) folgende Ausdrücke:

$$\psi = \mathfrak{A} \sin. \sqrt{m_2} t + \mathfrak{B} \cos. \sqrt{m_2} t$$

$$\zeta = \frac{2lhK}{D\pi} \frac{F_2}{F_1 - F_1 F_3} + \left\{ \begin{aligned} &\mathfrak{C}_1 \sin. a_1 t + \mathfrak{C}_2 \cos. a_1 t + \mathfrak{C}_3 \sin. a_2 t + \mathfrak{C}_4 \cos. a_2 t \\ &+ \mathfrak{D} \sin. 2(\alpha_0 - \omega t) + \mathfrak{E} \sin. (\alpha_0 - \omega t) + \mathfrak{F} \cos. (\alpha_0 - \omega t) \end{aligned} \right\}$$

$$\varphi = \frac{21hK}{D\pi} \frac{F_1}{F_2^2 - F_1 F_2} + \left\{ \begin{array}{l} \frac{-m_1}{a_1^2 - n_1} (\mathcal{G}_1 \sin. a_1 t + \mathcal{G}_1 \cos. a_1 t) + \frac{-m_2}{a_2^2 - n_2} (\mathcal{G}_2 \sin. a_2 t + \mathcal{G}_2 \cos. a_2 t) \\ + \mathfrak{P}_1 \sin. 2(\alpha_0 - \omega t) + \mathfrak{D}_1 \sin. (\alpha_0 - \omega t) + \mathfrak{R}_1 \cos. (\alpha_0 - \omega t) \end{array} \right\}$$

$$\mathfrak{P} = -\frac{1}{4} \frac{r^2}{L} (P + P_1) \frac{F_2}{F_2^2 - (4\omega^2 M - F_1)(4\omega^2 B - F_2)}$$

$$\mathfrak{P}_1 = \frac{1}{4} \frac{r^2}{L} (P + P_1) \frac{4\omega^2 M - F_1}{F_2^2 - (4\omega^2 M - F_1)(4\omega^2 B - F_2)}$$

$$\mathfrak{D} = -\frac{1}{2} r \left(1 + \frac{2h}{D}\right) P \frac{F_2}{F_2^2 - (\omega^2 M - F_1)(\omega^2 B - F_2)}$$

$$\mathfrak{D}_1 = +\frac{1}{2} r \left(1 + \frac{2h}{D}\right) P \frac{\omega^2 M - F_1}{F_2^2 - (\omega^2 M - F_1)(\omega^2 B - F_2)}$$

$$\mathfrak{R} = -\frac{1}{2} r \left(1 + \frac{2h}{D}\right) P_1 \frac{F_2}{F_2^2 - (\omega^2 M - F_1)(\omega^2 B - F_2)}$$

$$\mathfrak{R}_1 = +\frac{1}{2} r \left(1 + \frac{2h}{D}\right) P_1 \frac{(\omega^2 M - F_1)}{F_2^2 - (\omega^2 M - F_1)(\omega^2 B - F_2)}$$

Ist $F_1 = 0$, d. h. sind die Federn so construirt, dass sie im ruhigen Zustand der Lokomotive gleich stark zusammengedrückt sind, so werden diese Ausdrücke bedeutend einfacher, denn unter dieser Voraussetzung wird zunächst:

$$\mathfrak{P} = 0 \quad \mathfrak{D} = 0 \quad \mathfrak{R} = 0$$

$$\mathfrak{P}_1 = -\frac{1}{4} \frac{r^2}{L} (P + P_1) \frac{1}{4\omega^2 B - F_2} \quad \mathfrak{D}_1 = -\frac{r}{2} \left(1 + \frac{2h}{D}\right) P \frac{1}{\omega^2 B - F_2}$$

$$\mathfrak{R}_1 = -\frac{r}{2} \left(1 + \frac{2h}{D}\right) P_1 \frac{1}{\omega^2 B - F_2}$$

Allein weil wir von den Einwirkungen der Bahn absehen, so muss $\mathfrak{R} = \mathfrak{P} = 0$ sein und weil auch $\mathfrak{P} = \mathfrak{D} = \mathfrak{R} = 0$ ist, so muss noch überdies $\mathcal{G}_1 = \mathcal{G}_2 = \mathcal{G}_3 = \mathcal{G}_4 = 0$ sein; denn Grundschwingungen können, wenn die Bahn keine Einwirkungen hervorbringt, nur durch Kurbelschwingungen hervorgerufen werden; in dem Ausdruck für φ erscheint aber überhaupt keine Kurbelschwingung, und in dem Ausdruck für ζ verschwinden die Kurbelschwingungen, wenn $\mathfrak{P} = \mathfrak{D} = \mathfrak{R} = 0$ ist; es müssen also nothwendig sowohl in φ als in ζ die Grundschwingungen verschwinden, d. h. es muss $\mathfrak{R} = \mathfrak{P} = \mathcal{G}_1 = \mathcal{G}_2 = \mathcal{G}_3 = \mathcal{G}_4 = 0$ sein. Dann aber reduziert sich der totale Bewegungszustand bloss auf eine nickende Bewegung, die durch folgenden Ausdruck bestimmt wird:

$$\varphi = -\frac{21hK}{D\pi F_2} + \frac{1}{4} \frac{r^2}{L} (P + P_1) \frac{\sin. 2(\alpha_0 - \omega t)}{F_2 - 4\omega^2 B} + \frac{r}{2} \left(1 + \frac{2h}{D}\right) \frac{1}{F_2 - \omega^2 B} [P \sin. (\alpha_0 - \omega t) + P_1 \cos. (\alpha_0 - \omega t)]$$

Lokomotive mit Schleifenbewegung.

Es ist mir der Gedanke gekommen, dass man vielleicht den Schubstangen-Mechanismus durch die Schleifenbewegung mit Vortheil ersetzen könnte. Tab. VIII, Fig. 31 und 32 und Tab. XV, 59, 60, 61. Die Cylinder liegen aussen und sind an den Rahmenbau befestigt. Zur Uebertragung der Kraft von den Kolben aus auf die Kurbeln der Triebaxe dienen die Schleifen. Der Stiel einer Schleife bewegt sich in zwei an dem Rahmenbau angebrachten Führungen *b c* und an jeden Kurbelzapfen ist ein Gleitstück gesteckt, das mit dem Kurbelzapfen herumgeht und gleichzeitig in der Schleife auf- und abgleitet. Wir wollen vorläufig von den Schwierigkeiten einer soliden Ausführung dieser Anordnung ganz absehen, und nur zunächst untersuchen, wie sich eine solche Lokomotive hinsichtlich des Wankens, Wogens und Nickens verhält.

Die nach horizontaler Richtung und nach rückwärts zielende Pressung *p* des Gleitstückes der vordern Maschine gegen ihre Schleife sucht den ganzen Körper der Schleife zu drehen, und dadurch wird die Führung *b* nach abwärts, die Führung *c* nach aufwärts gepresst. Diese beiden Pressungen sind gleich gross und der numerische Werth jeder derselben ist $P \frac{r}{\Delta} \sin. \alpha$, wobei Δ die Entfernung der Punkte *b* und *c* bedeutet. Die Kraft *p*, der hintern Maschine sucht die Schleife der hintern Maschine zu drehen, und zwar in dem gleichen Sinne, in welchem das Schleifenstück der vordern Maschine zur Drehung angeregt wird. Dadurch erleidet der Führungspunkt *b* der hintern Maschine einen Druck $P \frac{r}{\Delta} \cos. \alpha$ nach abwärts und der Führungspunkt *c* der hintern Maschine einen Druck $P \frac{r}{\Delta} \cos. \alpha$ nach aufwärts.

Setzen wir zur Abkürzung:

$$\left. \begin{aligned} P \frac{r}{\Delta} \sin. \alpha &= \mathfrak{B}_1 \\ P_1 \frac{r}{\Delta} \cos. \alpha &= \mathfrak{B}_2 \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (1)$$

und nennen ferner: *w* den Widerstand des Trains, \mathfrak{S} den Druck der Triebaxe gegen die Axengabeln, *h* die Höhe des Schwerpunktes des auf den Federn liegenden Baues über der Axe der Triebräder, so hat man zunächst zur Bestimmung von \mathfrak{S} die Gleichung

$$\mathfrak{S} \frac{D}{2} = P \left(\frac{D}{2} + r \sin. \alpha \right) - P_1 \left(\frac{D}{2} - r \cos. \alpha \right)$$

woraus folgt:

$$\mathfrak{S} = P - P_1 + \frac{2r}{D} (P \sin. \alpha + P_1 \cos. \alpha) \dots \dots \dots (2)$$

In Figur 61 ist das auf den Bau einwirkende Kräftensystem angegeben, *a* ist der Angriffspunkt des Widerstandes *w*, *b* und *c* sind die Führungspunkte der Schleifenstiele. Am vordern Punkt *c* wirkt eine Kräftensumme $\mathfrak{B} + \mathfrak{B}_1$ vertikal aufwärts, am hintern Punkt *b* wirkt eine eben so grosse Kräftensumme vertikal abwärts, *d* ist der Angriffspunkt der Kraft \mathfrak{S} , *e* ist der Stopfbüchsendeckel des Cylinders der vordern Maschine,

Heddenbacher, Gesetze des Lokomotivbaues.

gegen welchen der Druck P wirkt; e , der Bodendeckel des Cylinders der hinteren Maschine, gegen welchen der Druck P_1 wirkt. H der Schwerpunkt des auf den Federn liegenden Baues, A , die Horizontalabstand des Schwerpunktes von der Triebaxe. Hieraus folgt nun:

1. Dass die algebraische Summe der Vertikalkräfte gleich Null ist. Ein Wogen wird mithin durch die auf den Bau einwirkenden Kräfte nicht angeregt;
2. dass die algebraische Summe der statischen Momente dieser Kräfte in Bezug auf eine durch den Schwerpunkt gehende Längenaxe ebenfalls gleich Null ist. Ein Wanken wird also durch diese Kräfte ebenfalls nicht angeregt;
3. dass die Kräfte $W, \wp, \mathfrak{B}, P, P_1$, den auf den Federn liegenden Bau um eine durch den Schwerpunkt gehende Queraxe mit einem Moment

$$h(-W + \wp + P, -P) + (\mathfrak{B} + \mathfrak{B}_1) \left(A_1 + \frac{1}{2} A \right) - (\mathfrak{B} + \mathfrak{B}_1) \left(A_2 - \frac{1}{2} A \right) \dots \dots (3)$$

zur Bewegung anregen, und zwar in dem Sinn, dass der vordere Theil des Lokomotivbaues gehoben wird.

Setzt man für $\mathfrak{B}, \mathfrak{B}_1$, und \wp die bereits berechneten Werthe (1) und (2), so wird das Moment (3)

$$-hW + r \left(1 + \frac{2h}{D} \right) (P \sin. \alpha + P_1 \cos. \alpha) \dots \dots \dots (4)$$

Die Lokomotive wird also ein dem Werthe dieses Momentes entsprechendes Nicken zeigen müssen.

Der vollständige Werth von Y_1 , d. h. die vollständige Summe der Momente aller auf den Bau einwirkenden Kräfte in Bezug auf die durch den Schwerpunkt gehende Queraxe ist nun

$$Y_1 = -h2K \frac{21}{D\pi} + 2\zeta F_2 - 2\varphi F_1 + r \left(1 + \frac{2h}{D} \right) (P \sin. \alpha + P_1 \cos. \alpha) \dots \dots \dots (5)$$

Vergleichen wir diesen Werth von Y_1 mit jenem, den wir Seite 181, für die *Crampton'sche* Lokomotive mit Blindaxe gefunden haben, so sieht man, dass sie sich nur durch das Glied

$$\frac{1}{2} \frac{r^2}{L} (P + P_1) \sin. 2\alpha$$

unterscheiden. Dieses Glied ist aber von keinem Belang, denn wenn die Kolben der beiden Maschinen nach einerlei Richtung gehen, verschwindet es ganz, weil dann $(P + P_1)$ gleich Null ist, (Siehe Seite 148), und wenn die Kolben nach entgegengesetzten Richtungen gehen, hat es immer nur einen kleinen, bald positiven, bald negativen Werth. Im Mittel genommen, kann man also sagen, dass diese Lokomotive mit Schleifenbewegung hinsichtlich des Nickens gerade so gut, oder um ein Unbedeutendes besser ist, als die Lokomotive von *Crampton* mit Blindaxe. Beide Anordnungen haben aber die vortreffliche Eigenschaft, dass sie weder Wanken noch Wogen verursachen.

Wenn $F_2 = 0$ ist, d. h. wenn die Federn so angeordnet sind, dass sie im ruhenden Zustand der Lokomotive um gleich viel zusammengepresst sind, wird die Differentialgleichung der nickenden Bewegung

$$\frac{d^2 \varphi}{dt^2} = -\frac{hW}{2B} + \frac{r \left(1 + \frac{2h}{D}\right)}{2B} (P \sin. \alpha + P_1 \cos. \alpha) - \frac{F_1}{B} \varphi \dots \dots \dots (6)$$

oder wenn man $\alpha = \alpha_0 - \omega t$ setzt

$$\frac{d^2 \varphi}{dt^2} = -\frac{hW}{2B} + \frac{r \left(1 + \frac{2h}{D}\right)}{2B} [P \sin. (\alpha_0 - \omega t) + P_1 \cos. (\alpha_0 - \omega t)] - \frac{F_1}{B} \varphi \dots \dots \dots (7)$$

Für das Integrale dieser Gleichung findet man leicht direkt folgenden Ausdruck:

$$\varphi = -\frac{hW}{2F_1} + \left(\mathfrak{A} \sin. \sqrt{\frac{F_1}{B}} t + \mathfrak{B} \cos. \sqrt{\frac{F_1}{B}} t \right) + \frac{r \left(1 + \frac{2h}{D}\right)}{F_1 - \omega^2 B} [P \sin. (\alpha_0 - \omega t) + P_1 \cos. (\alpha_0 - \omega t)] \dots \dots \dots (8)$$

in welchem \mathfrak{A} und \mathfrak{B} die willkürlichen Constanten bedeuten.

Die numerischen Werthe von P und P_1 sind für jede Stellung der Kurbeln. $\frac{\pi}{8} W \frac{D}{r}$

Nennt man v die Fahrgeschwindigkeit, welche der Winkelgeschwindigkeit ω entspricht, so ist $\omega = \frac{2v}{D}$; der Ausdruck für φ wird daher auch:

$$\varphi = -\frac{hW}{2F_1} + \left(\mathfrak{A} \sin. \sqrt{\frac{F_1}{B}} t + \mathfrak{B} \cos. \sqrt{\frac{F_1}{B}} t \right) + \frac{\pi}{16} W \frac{D^2(D+2h)}{F_1 D^2 - 4v^2 B} \times \left[\pm \sin. (\alpha_0 - \omega t) \pm \cos. (\alpha_0 - \omega t) \right] \dots \dots \dots (9)$$

dabei sind die Zeichen so zu wählen, dass $\pm \sin. (\alpha_0 - \omega t)$ und $\pm \cos. (\alpha_0 - \omega t)$ stets positiv bleiben.

Der Ausdruck $\frac{D^2(D+2h)}{F_1 D^2 - 4v^2 B}$ verschwindet für $D=0$, wird unendlich für $F_1 D^2 - 4v^2 B = 0$ oder für $D = 2v \sqrt{\frac{B}{F_1}}$, wird auch unendlich für $D = \infty$. Zwischen diesen beiden letzteren Werthen von D liegt also nothwendig ein Werth, für welchen jener Ausdruck ein Minimum wird, und diesen wollen wir suchen. Setzen wir für einen Augenblick:

$$X = \frac{D^2(D+2h)}{F_1 D^2 - 4v^2 B} \dots \dots \dots (10)$$

Differenziren wir diesen Ausdruck in Bezug auf D , so wird:

$$\frac{dX}{dD} = \frac{DF_1}{(D^2 F_1 - 4v^2 B)^2} \left(D^3 - \frac{12v^2 B D}{F_1} - 16 \frac{v^2 B h}{F_1} \right)$$

Für denjenigen Werth von D , welcher X zu einem Minimum macht, muss $\frac{dX}{dD}$ verschwinden, diess ist der Fall für $D=0$ und für denjenigen reellen Werth von D , für welchen wird

$$D^3 - \frac{12v^2 B D}{F_1} - \frac{16v^2 B h}{F_1} = 0 \dots \dots \dots (11)$$

Da h im Vergleich zu $\frac{3}{4}D$ immer sehr klein ist, so kann man $\frac{16 V^2 B h}{F_1}$ gegen $\frac{12 V^2 B D}{F_1}$ vernachlässigen und dann folgt aus dieser kubischen Gleichung

$$D^3 = \frac{12 V^2 B}{F_1}$$

oder

$$D = 2 V \sqrt[3]{\frac{3 B}{F_1}} \dots \dots \dots (12)$$

Für diesen Werth von D wird der Werth von X , wenn man in demselben ebenfalls $2h$ gegen D vernachlässigt.

$$X = \frac{3}{2} \frac{V}{F_1} \sqrt[3]{\frac{12 B}{F_1}} \dots \dots \dots (13)$$

Das Nicken wird also bei dieser Lokomotive am schwächsten, wenn der Durchmesser der Triebräder so gross genommen wird, als der Ausdruck (12) gibt, und dieses Nicken beträgt dann:

$$\varphi = \mathfrak{A} \sin. \sqrt{\frac{F_2}{B}} t + \mathfrak{B} \cos. \sqrt{\frac{F_2}{B}} t + \frac{3 \pi W V}{32 F_1} \sqrt[3]{\frac{12 B}{F_1}} [\pm \sin. (\alpha_0 - \omega t) \pm \cos. (\alpha_0 - \omega t)] \dots (14)$$

Für die Lokomotive von *Crampton* ist $\sqrt[3]{\frac{B}{F_1}}$ nahe gleich 0.039 ist. Für diesen Werth gibt die Gleichung (12)

$$D = 0.135 V$$

Dieser Durchmesser wird selbst für eine Geschwindigkeit v von 16 Meter nur 2.1 Meter, ist also sehr wohl ausführbar.

Nennt man v_1 die gefährliche Fahrgeschwindigkeit, d. h. diejenige Geschwindigkeit, für welche der Nenner des Ausdruckes (10) verschwindet, so hat man zur Bestimmung derselben die Gleichung:

$$F_2 D^2 - 4 V_1^2 B = 0$$

woraus folgt:

$$v_1 = \frac{D}{2} \sqrt{\frac{F_2}{B}} \dots \dots \dots (15)$$

Aus dieser und aus der Gleichung (13) folgt:

$$v_1 = \sqrt{3V} = 1.73 V$$

Wenn wir die soeben gefundenen Resultate in Worte fassen, so können wir Folgendes aussprechen:

Wenn man den Durchmesser D der Triebräder einer Lokomotive, die bestimmt ist im Maximum mit einer Geschwindigkeit v zu laufen, so gross nimmt, als die Gleichung

(12) angibt, so tritt bei dieser Geschwindigkeit v das schwächste Nicken ein, und die gefährliche Geschwindigkeit v , ist dann 1.73mal so gross, als diese grösste Geschwindigkeit v .

Ist $\sqrt{\frac{B}{F_1}} = 0.039$. $v = 16$, so wird $D = 2.16$ und $V_1 = 28$ Meter.

Wir wollen noch berechnen, wie stark das Nicken in dem allgemeinen Falle wird, wenn der Durchmesser des Triebrades von dem einer gewissen Fahrgeschwindigkeit entsprechenden vortheilhaftesten Werthe abweicht. Setzen wir:

$$D = m \cdot v \sqrt{3 \frac{B}{F_1}} \dots \dots \dots (16)$$

wobei m irgend eine positive Zahl bedeutet, die für den vortheilhaftesten Durchmesser gleich eins ist, vernachlässigen in dem Ausdruck (9) $2h$ gegen D und setzen zur Abkürzung:

$$Y = \frac{\pi}{16} W \frac{D^3}{F_1 D^2 - 4 v^2 B} \dots \dots \dots (17)$$

Führen wir in diesen Ausdruck, nach welchem das Nicken zu beurtheilen ist, den obigen Werth von D ein, so wird derselbe

$$Y = \frac{6 \pi}{16} W \frac{v}{F_1} \sqrt{3 \frac{B}{F_1}} \frac{m^3}{3 m^2 - 1} \dots \dots \dots (18)$$

Für B können wir, wie bisher immer geschehen ist, setzen:

$$B = \frac{G (l_1^2 + h_1^2)}{2g} \dots \dots \dots (19)$$

Um F_1 näher zu bestimmen, wollen wir annehmen, dass die Lokomotive mit 2 Triebrädern und mit einem vierrädrigen vordern Laufwerk versehen, also in der Weise angeordnet sei, wie Fig. (31) zeigt. Nennen wir \mathcal{A}_1 den Horizontalabstand des Schwerpunktes von der hinter der Feuerbüchse befindlichen Triebaxe, \mathcal{A}_2 den Horizontalabstand des Schwerpunktes von dem Mittelpunkt des Laufwerkes, \mathfrak{P}_1 die Belastung der Triebaxe, \mathfrak{P}_2 die Belastung des Laufwerkes, s die Zusammendrückung der Federn im unbewegten Zustand der Lokomotive, so hat man:

$$\left. \begin{aligned} \mathfrak{P}_1 + \mathfrak{P}_2 &= G \\ \mathfrak{P}_1 \mathcal{A}_1 &= \mathfrak{P}_2 \mathcal{A}_2 \\ F_1 &= \frac{\mathfrak{P}_1 \mathcal{A}_1^2 + \mathfrak{P}_2 \mathcal{A}_2^2}{2s} \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (20)$$

Hieraus findet man leicht durch Elimination von \mathcal{A}_2 und \mathfrak{P}_2 :

$$= \mathfrak{P}_1 \mathcal{A}_1 \frac{G}{2s(G - \mathfrak{P}_1)} \dots \dots \dots (21)$$

Führt man die Werthe von B und F_1 , welche die Ausdrücke (19) und (20) darbieten, in (16) und (18) ein, so findet man nach einigen Reduktionen:

$$Y = \frac{6\pi}{16} \frac{W}{G} \frac{s l_2 V}{A_1^2} \sqrt{\frac{s}{g}} \left(\frac{G}{\Phi_2} - 1 \right) \sqrt{\left[1 + \left(\frac{h_2}{l_2} \right)^2 \right] \left(\frac{G}{\Phi_2} - 1 \right)} \frac{m^3}{3m^2 - 1} \dots (22)$$

$$D = m V \frac{l_2}{A_1} \sqrt{\frac{s}{g}} \sqrt{\left[1 + \left(\frac{h_2}{l_2} \right)^2 \right] \left(\frac{G}{\Phi_2} - 1 \right)} \dots (23)$$

Wenn wir im Wesentlichen die Verhältnisse der *Crampton'schen* Lokomotive annehmen, dürfen wir setzen:

$$\frac{W}{G} = \frac{1}{20} \quad \frac{G}{\Phi_2} = \frac{G}{0.44 G} = 2.3 \quad s = 0.05 \quad l_2 = 6 \quad h_2 = 1.2 \quad A_1 = 2.5 \quad g = 0.808 \text{ Meter}$$

und dann wird

$$\left. \begin{aligned} D &= 0.2 m V \\ Y &= \frac{1}{8178} \frac{-m^3}{3m^2 - 1} V \end{aligned} \right\} \dots (24)$$

Dieser Werth von Y fällt selbst für einen sehr beträchtlichen Werth von v beinahe verschwindend klein aus, wenn m nur etwas verschieden von demjenigen Werth genommen wird, für welchen $3m^2 - 1 = 0$ ist, d. h. wenn m nicht gleich $\frac{1}{\sqrt{3}}$ also nicht gleich 0.577 genommen wird. Wenn also der Durchmesser D um etwas grösser als $0.577 \times 0.2 V = 0.1154 V$ genommen wird, so fällt bereits das Nicken schon so schwach aus, dass es in praktischer Hinsicht gar nicht mehr zu beachten ist.

Diese numerische Rechnung ist nur insofern, als das Trägheitsmoment B nur annähernd bestimmt wurde, etwas unzuverlässig. Mit vollkommener Schärfe würde man das Trägheitsmoment des auf den Federn liegenden Baues durch Versuche bestimmen können, und dann liesse sich der einer gewissen Geschwindigkeit entsprechende vortheilhafteste, so wie auch der einer gewissen Geschwindigkeit entsprechende gefährliche Durchmesser ganz scharf durch Rechnung bestimmen. Nennen wir n die Anzahl der Umdrehungen der Triebaxe in einer Sekunde, so ist:

$$n = \frac{1}{\pi} \frac{V}{D}$$

oder wenn wir $D = 0.2 m V$ setzen

$$n = \frac{1.6}{m}$$

Setzen wir $m = 1$, so wird $D = 0.2 V$ und $n = 1.6$, d. h. wenn eine Lokomotive bestimmt ist, mit einer Geschwindigkeit v zu laufen, so ist es am vortheilhaftesten, den Triebrädern einen Durchmesser $0.2 V$ zu geben, und diese besten Triebräder machen bei der Fahrgeschwindigkeit v in jeder Sekunde 1.6 Umdrehungen.

Setzen wir $m = 0.577$, so wird $D = 0.1154 V$ und $n = 2.8$, d. h. wenn man den Triebrädern einer Lokomotive, die bestimmt ist, mit einer Geschwindigkeit v zu laufen einen Durchmesser $D = 0.1154 V$ gibt, so würden die Räder in jeder Sekunde 2.8 Umdrehungen machen, und dabei würde ein heftiges Nicken eintreten.

Aus den Gleichungen (20) folgt $\frac{G}{\mathfrak{P}_1} - 1 = \frac{A_2}{A_1}$ Führt man diesen Werth in (23) ein, so erhält man:

$$D = m v l_1 \sqrt{\frac{s}{g}} \sqrt{\left[1 + \left(\frac{h_2}{l_2}\right)^2\right] \frac{1}{A_1 A_2}} \dots \dots \dots (25)$$

Bezeichnet man mit δ den Radstand, setzt also $A_1 + A_2 = \delta$, so wird $A_1 A_2 = A_1 (\delta - A_1)$. Dieses Produkt wird am grössten, wenn $A_1 = \frac{\delta}{2}$ ist und wird dann $\frac{\delta}{2} \cdot \frac{\delta}{2} = \frac{\delta^2}{4}$. Der Durchmesser der Triebräder fällt also am kleinsten aus, wenn die Axe der Triebräder und der Mittelpunkt des Laufwerks gleich weit vom Schwerpunkt entfernt sind. Ist dieser Bedingung entsprochen, so wird:

$$D = 2 m v \frac{l_1}{\delta} \sqrt{1 + \left(\frac{h_2}{l_2}\right)^2} \sqrt{\frac{s}{g}} \dots \dots \dots (26)$$

und dann ist der Durchmesser der Triebräder der Fahrgeschwindigkeit v und der Länge des Baues direkt, dagegen dem Radstand verkehrt proportional.

Integration der Differenzialgleichungen, welche das Wogen und Nicken bestimmen, nach der Methode der Variation der Constanten.

Die Kenntniss der Gesetze der störenden Bewegungen ist von so bedeutender praktischer Wichtigkeit, dass es mir, um ganz sicher zu gehen, angemessen zu sein schien, die Integration der Differenzialgleichungen, aus welchen diese Gesetze hergeleitet werden können, auch nach der Methode der Variation der Constanten durchzuführen.

Diese Differenzialgleichungen sind die Gleichungen (1) Seite 159, nämlich:

$$\left. \begin{aligned} \frac{d^2 \zeta}{dt^2} &= -m \zeta + n \varphi + p K \left[\frac{P}{K} \sin. (\alpha_0 - \omega t) + \frac{P_1}{K} \cos. (\alpha_0 - \omega t) \right] \\ \frac{d^2 \varphi}{dt^2} &= + m_1 \zeta - n_1 \varphi + q_1 K \left[\frac{1}{2} \frac{(P + P_1)}{K} \sin. 2 (\alpha_0 - \omega t) + p_1 K \left[\frac{P}{K} \sin. (\alpha_0 - \omega t) \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \frac{P_1}{K} \cos. (\alpha_0 - \omega t) \right] \right] \end{aligned} \right\} \dots \dots (1)$$

Um diese Gleichungen nach der Methode der Variationen der Constanten zu integriren, lassen wir zunächst die Glieder, welche trigonometrische Funktionen enthalten, weg und suchen die Integrale der einfacheren Gleichungen:

$$\left. \begin{aligned} \frac{d^2 \zeta_1}{dt^2} &= -m \zeta_1 + n \varphi_1 \\ \frac{d^2 \varphi_1}{dt^2} &= + m_1 \zeta_1 - n_1 \varphi_1 \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (2)$$

Versuchen wir, ob diesen Gleichungen entsprochen werden kann, wenn man setzt:

$$\left. \begin{aligned} \zeta_1 &= \mathfrak{X} \sin. at + \mathfrak{B} \cos. at \\ \varphi_1 &= \mathfrak{G} \sin. at + \mathfrak{D} \cos. at \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (3)$$

Setzt man diese Werthe von ζ und φ , so wie auch die durch zweimaliges Differenziren sich ergebenden Werthe von $\frac{d^2 \zeta_1}{dt^2}$ und $\frac{d^2 \varphi_1}{dt^2}$ in die Gleichungen (2), so werden dieselben:

$$\left. \begin{aligned} -a^2 (\mathfrak{X} \sin. at + \mathfrak{B} \cos. at) &= -m (\mathfrak{X} \sin. at + \mathfrak{B} \cos. at) + n (\mathfrak{G} \sin. at + \mathfrak{D} \cos. at) \\ -a^2 (\mathfrak{G} \sin. at + \mathfrak{D} \cos. at) &= +m_1 (\mathfrak{X} \sin. at + \mathfrak{B} \cos. at) - n_1 (\mathfrak{G} \sin. at + \mathfrak{D} \cos. at) \end{aligned} \right\} \dots \dots (4)$$

Damit diese Gleichungen für jeden Werth von t bestehen können, muss sein:

$$\begin{aligned} -a^2 \mathfrak{X} &= -m \mathfrak{X} + n \mathfrak{G} & -a^2 \mathfrak{B} &= -m \mathfrak{B} + n \mathfrak{D} \\ -a^2 \mathfrak{G} &= +m_1 \mathfrak{X} - n_1 \mathfrak{G} & -a^2 \mathfrak{D} &= +m_1 \mathfrak{B} - n_1 \mathfrak{D} \end{aligned}$$

Aus diesen vier Gleichheiten folgt:

$$\frac{\mathfrak{X}}{\mathfrak{G}} = \frac{\mathfrak{B}}{\mathfrak{D}} = \frac{-n}{a^2 - m} = \frac{a^2 - n_1}{-m_1} \dots \dots \dots (5)$$

folglich auch

$$a = \pm \sqrt{\frac{m+n_1}{2} \pm \sqrt{\frac{(m+n_1)^2}{4} + n m_1 - m n_1}} \dots \dots \dots (6)$$

Wir erhalten also für a vier verschiedene Werthe und eben so auch für $\frac{\mathfrak{X}}{\mathfrak{G}}$ und $\frac{\mathfrak{B}}{\mathfrak{D}}$. Es gibt demnach vier verschiedene Werthe von a und von $\frac{\mathfrak{X}}{\mathfrak{G}}$ und $\frac{\mathfrak{B}}{\mathfrak{D}}$, durch welche die Gleichungen (3) den Gleichungen (2) genügen.

Setzt man

$$\left. \begin{aligned} a_1 &= \sqrt{\frac{m+n_1}{2} + \sqrt{\frac{(m+n_1)^2}{4} + n m_1 - m n_1}} \\ a_2 &= \sqrt{\frac{m+n_1}{2} - \sqrt{\frac{(m+n_1)^2}{4} + n m_1 - m n_1}} \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (7)$$

so sind die vier Werthe von a :

$$+a_1 \quad -a_1 \quad +a_2 \quad -a_2$$

Wegen der linearen Form der Gleichungen (2) genügt denselben auch die Summe aller partikularen Integrale, die den vier Wurzelwerthen von a entsprechen. Bezeichnet man die Werthe von $\mathfrak{X} \mathfrak{B} \mathfrak{G} \mathfrak{D}$, welche den einzelnen Werthen von a entsprechen, dadurch,

dass man die Wurzelwerthe als Zeichen darunter schreibt, so sind die allgemeinen aus den vier partikularen Integralien zusammengesetzten Integrale der Gleichungen (2):

$$\zeta_1 = \left\{ \begin{array}{l} \left(\begin{array}{l} \mathfrak{A} \\ a_1 \end{array} \right) \sin. a_1 t + \left(\begin{array}{l} \mathfrak{B} \\ a_1 \end{array} \right) \cos. a_1 t \\ - \left(\begin{array}{l} \mathfrak{A} \\ -a_1 \end{array} \right) \sin. a_1 t + \left(\begin{array}{l} \mathfrak{B} \\ -a_1 \end{array} \right) \cos. a_1 t \end{array} \right\} + \left\{ \begin{array}{l} \left(\begin{array}{l} \mathfrak{A} \\ a_2 \end{array} \right) \sin. a_2 t + \left(\begin{array}{l} \mathfrak{B} \\ a_2 \end{array} \right) \cos. a_2 t \\ - \left(\begin{array}{l} \mathfrak{A} \\ -a_2 \end{array} \right) \sin. a_2 t + \left(\begin{array}{l} \mathfrak{B} \\ -a_2 \end{array} \right) \cos. a_2 t \end{array} \right\} \quad (8)$$

$$\varphi_1 = \left\{ \begin{array}{l} \left(\begin{array}{l} \mathfrak{G} \\ a_1 \end{array} \right) \sin. a_1 t + \left(\begin{array}{l} \mathfrak{D} \\ a_1 \end{array} \right) \cos. a_1 t \\ - \left(\begin{array}{l} \mathfrak{G} \\ -a_1 \end{array} \right) \sin. a_1 t + \left(\begin{array}{l} \mathfrak{D} \\ -a_1 \end{array} \right) \cos. a_1 t \end{array} \right\} + \left\{ \begin{array}{l} \left(\begin{array}{l} \mathfrak{G} \\ a_2 \end{array} \right) \sin. a_2 t + \left(\begin{array}{l} \mathfrak{D} \\ a_2 \end{array} \right) \cos. a_2 t \\ - \left(\begin{array}{l} \mathfrak{G} \\ -a_2 \end{array} \right) \sin. a_2 t + \left(\begin{array}{l} \mathfrak{D} \\ -a_2 \end{array} \right) \cos. a_2 t \end{array} \right\}$$

Setzt man

$$\left(\begin{array}{l} \mathfrak{A} \\ a_1 \end{array} \right) - \left(\begin{array}{l} \mathfrak{A} \\ -a_1 \end{array} \right) = \mathfrak{G}_1$$

$$\left(\begin{array}{l} \mathfrak{B} \\ a_1 \end{array} \right) + \left(\begin{array}{l} \mathfrak{B} \\ -a_1 \end{array} \right) = \mathfrak{D}_1$$

$$\left(\begin{array}{l} \mathfrak{A} \\ a_2 \end{array} \right) - \left(\begin{array}{l} \mathfrak{A} \\ -a_2 \end{array} \right) = \mathfrak{G}_2$$

$$\left(\begin{array}{l} \mathfrak{B} \\ a_2 \end{array} \right) + \left(\begin{array}{l} \mathfrak{B} \\ -a_2 \end{array} \right) = \mathfrak{D}_2$$

und berücksichtigt, dass wegen (5):

$$\left(\begin{array}{l} \mathfrak{G} \\ a_1 \end{array} \right) - \left(\begin{array}{l} \mathfrak{G} \\ -a_1 \end{array} \right) = -\frac{m_1}{a_1^2 - n_1} \left[\left(\begin{array}{l} \mathfrak{A} \\ a_1 \end{array} \right) - \left(\begin{array}{l} \mathfrak{A} \\ -a_1 \end{array} \right) \right] = -\frac{m_1}{a_1^2 - n_1} \mathfrak{G}_1$$

$$\left(\begin{array}{l} \mathfrak{G} \\ a_2 \end{array} \right) - \left(\begin{array}{l} \mathfrak{G} \\ -a_2 \end{array} \right) = -\frac{m_2}{a_2^2 - n_2} \left[\left(\begin{array}{l} \mathfrak{A} \\ a_2 \end{array} \right) - \left(\begin{array}{l} \mathfrak{A} \\ -a_2 \end{array} \right) \right] = -\frac{m_2}{a_2^2 - n_2} \mathfrak{G}_2$$

$$\left(\begin{array}{l} \mathfrak{D} \\ a_1 \end{array} \right) + \left(\begin{array}{l} \mathfrak{D} \\ -a_1 \end{array} \right) = -\frac{m_1}{a_1^2 - n_1} \left[\left(\begin{array}{l} \mathfrak{B} \\ a_1 \end{array} \right) + \left(\begin{array}{l} \mathfrak{B} \\ -a_1 \end{array} \right) \right] = -\frac{m_1}{a_1^2 - n_1} \mathfrak{D}_1$$

$$\left(\begin{array}{l} \mathfrak{D} \\ a_2 \end{array} \right) + \left(\begin{array}{l} \mathfrak{D} \\ -a_2 \end{array} \right) = -\frac{m_2}{a_2^2 - n_2} \left[\left(\begin{array}{l} \mathfrak{B} \\ a_2 \end{array} \right) + \left(\begin{array}{l} \mathfrak{B} \\ -a_2 \end{array} \right) \right] = -\frac{m_2}{a_2^2 - n_2} \mathfrak{D}_2$$

ist, so können die Integrale (8) geschrieben werden, wie folgt:

$$\zeta_1 = \left. \begin{array}{l} \mathfrak{G}_1 \sin. a_1 t + \mathfrak{D}_1 \cos. a_1 t \quad + \quad \mathfrak{G}_2 \sin. a_2 t + \mathfrak{D}_2 \cos. a_2 t \\ -\frac{m_1}{a_1^2 - n_1} (\mathfrak{G}_1 \sin. a_1 t + \mathfrak{D}_1 \cos. a_1 t) - \frac{m_2}{a_2^2 - n_2} (\mathfrak{G}_2 \sin. a_2 t + \mathfrak{D}_2 \cos. a_2 t) \end{array} \right\} \dots (9)$$

Dies sind also die Integrale der Gleichungen (2) und $\mathfrak{G}_1, \mathfrak{G}_2, \mathfrak{D}_1, \mathfrak{D}_2$ sind die vier Constanten der Integration, welche diese zwei Gleichungen des zweiten Grades erfordern.

Um nun die Gleichungen (1) zu integrieren, wenden wir die von *Lagrange* erfundene Methode der Variation der Constanten an. Diese Methode besteht darin, dass man $\Theta, \Theta_2, \Phi, \Phi_2$ als solche Funktionen von t zu bestimmen sucht, dass die Ausdrücke (9) auch den Gleichungen (1) genügen müssen.

Nennt man für einen Augenblick φ_1 und ζ_1 die Differenzialquotienten von φ und ζ , insofern man $\Theta, \Phi, \Theta_2, \Phi_2$ als constante Grössen ansieht und φ_2, ζ_2 die Differenzialquotienten von φ und ζ nach t , insofern man nur allein $\Theta, \Phi, \Theta_2, \Phi_2$ als veränderlich betrachtet, so ist:

$$\frac{d\zeta}{dt} = \zeta_1 + \zeta_2 \quad \frac{d\varphi}{dt} = \varphi_1 + \varphi_2 \quad \dots \dots \dots (10)$$

Damit aber die Werthe von φ und ζ , welche die Gleichungen (9) darbieten, sowohl den Gleichungen (2), als auch den Gleichungen (1) genügen können, wenn man $\Theta, \Phi, \Theta_2, \Phi_2$ als Funktionen von t ansieht, muss:

$$\zeta_2 = 0 \quad \varphi_2 = 0 \quad \text{und} \quad \frac{d\zeta}{dt} = \zeta_1 \quad \frac{d\varphi}{dt} = \varphi_1$$

sein.

Man erhält demnach aus (9):

$$\left. \begin{aligned} 0 &= \sin. a_1 t \frac{d\Theta_1}{dt} + \cos. a_1 t \frac{d\Phi_1}{dt} + \sin. a_2 t \frac{d\Theta_2}{dt} + \cos. a_2 t \frac{d\Phi_2}{dt} \\ 0 &= \frac{m_1}{a_1^2 - n_1} \left(\sin. a_1 t \frac{d\Theta_1}{dt} + \cos. a_1 t \frac{d\Phi_1}{dt} \right) + \frac{m_2}{a_2^2 - n_2} \left(\sin. a_2 t \frac{d\Theta_2}{dt} + \cos. a_2 t \frac{d\Phi_2}{dt} \right) \end{aligned} \right\} \dots (11)$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{d\zeta}{dt} &= a_1 (\Theta_1 \cos. a_1 t - \Phi_1 \sin. a_1 t) + a_2 (\Theta_2 \cos. a_2 t - \Phi_2 \sin. a_2 t) \\ \frac{d\varphi}{dt} &= -\frac{m_1 a_1}{a_1^2 - n_1} (\Theta_1 \cos. a_1 t - \Phi_1 \sin. a_1 t) - \frac{m_2 a_2}{a_2^2 - n_2} (\Theta_2 \cos. a_2 t - \Phi_2 \sin. a_2 t) \end{aligned} \right\} \dots (12)$$

Da a_1 nicht $= a_2$ ist, so können die Gleichungen (11) nur bestehen, wenn:

$$\left. \begin{aligned} \sin. a_1 t \frac{d\Theta_1}{dt} + \cos. a_1 t \frac{d\Phi_1}{dt} &= 0 \\ \sin. a_2 t \frac{d\Theta_2}{dt} + \cos. a_2 t \frac{d\Phi_2}{dt} &= 0 \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (13)$$

Durch nochmalige vollständige Differenziation dieser zwei Gleichungen findet man:

$$\frac{d^2\zeta}{dt^2} = -a_1^2 (\Theta_1 \sin. a_1 t + \Phi_1 \cos. a_1 t) - a_2^2 (\Theta_2 \sin. a_2 t + \Phi_2 \cos. a_2 t) + a_1 \left(\cos. a_1 t \frac{d\Theta_1}{dt} - \sin. a_1 t \frac{d\Phi_1}{dt} \right) + a_2 \left(\cos. a_2 t \frac{d\Theta_2}{dt} - \sin. a_2 t \frac{d\Phi_2}{dt} \right) \dots (14)$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{d^2 \varphi}{dt^2} = & + \frac{m_1 a_1^2}{a_1^2 - n_1} (\Theta_1 \sin. a_1 t + \Phi_1 \cos. a_1 t) + \frac{a_2^2 m_1}{a_2^2 - n_1} (\Theta_2 \sin. a_2 t + \Phi_2 \cos. a_2 t) \\ & - \frac{m_1 a_1}{a_1^2 - n_1} \left(\cos. a_1 t \frac{d\Theta_1}{dt} - \sin. a_1 t \frac{d\Phi_1}{dt} \right) \\ & - \frac{m_1 a_2}{a_2^2 - n_1} \left(\cos. a_2 t \frac{d\Theta_2}{dt} - \sin. a_2 t \frac{d\Phi_2}{dt} \right) \end{aligned} \right\} \dots (14)$$

Substituiert man die Werthe von φ ζ $\frac{d^2 \varphi}{dt^2}$ $\frac{d^2 \zeta}{dt^2}$, welche die Ausdrücke (9) und (14) darbieten in die zu integrierenden Gleichungen (1) und berücksichtigt, dass wegen (5):

$$(a_1^2 - n_1)(a_1^2 - m) = n m_1 \quad (a_2^2 - n_1)(a_2^2 - m) = n m_1$$

ist, so findet man:

$$\left. \begin{aligned} a_1 \left(\cos. a_1 t \frac{d\Theta_1}{dt} - \sin. a_1 t \frac{d\Phi_1}{dt} \right) + a_2 \left(\cos. a_2 t \frac{d\Theta_2}{dt} - \sin. a_2 t \frac{d\Phi_2}{dt} \right) &= p [P \sin. (\alpha_0 - \omega t) \\ &+ P_1 \cos. (\alpha_0 - \omega t)] \\ - \frac{m_1 a_1}{a_1^2 - n_1} \left(\cos. a_1 t \frac{d\Theta_1}{dt} - \sin. a_1 t \frac{d\Phi_1}{dt} \right) - \frac{m_1 a_2}{a_2^2 - n_1} \left(\cos. a_2 t \frac{d\Theta_2}{dt} - \sin. a_2 t \frac{d\Phi_2}{dt} \right) & \\ = \frac{1}{2} q_1 (P + P_1) \sin. 2(\alpha_0 - \omega t) + p_1 [P \sin. (\alpha_0 - \omega t) + P_1 \cos. (\alpha_0 - \omega t)] & \end{aligned} \right\} \dots (15)$$

Aus diesen zwei Gleichungen, in Verbindung mit den Gleichungen (5) und (13) findet man:

$$\left. \begin{aligned} \frac{d\Theta_1}{dt} &= + \frac{n \cos. a_1 t}{a_1 (a_2^2 - a_1^2)} \left\{ \frac{1}{2} q_1 (P + P_1) \sin. 2(\alpha_0 - \omega t) + \left(p_1 + \frac{p m_1}{a_2^2 - n_1} \right) [P \sin. (\alpha_0 - \omega t) + P_1 \cos. (\alpha_0 - \omega t)] \right\} \\ \frac{d\Phi_1}{dt} &= - \frac{n \sin. a_1 t}{a_1 (a_2^2 - a_1^2)} \left\{ \frac{1}{2} q_1 (P + P_1) \sin. 2(\alpha_0 - \omega t) + \left(p_1 + \frac{p m_1}{a_2^2 - n_1} \right) [P \sin. (\alpha_0 - \omega t) + P_1 \cos. (\alpha_0 - \omega t)] \right\} \\ \frac{d\Theta_2}{dt} &= - \frac{n \cos. a_2 t}{a_2 (a_2^2 - a_1^2)} \left\{ \frac{1}{2} q_1 (P + P_1) \sin. 2(\alpha_0 - \omega t) + \left(p_1 + \frac{p m_1}{a_2^2 - n_1} \right) [P \sin. (\alpha_0 - \omega t) + P_1 \cos. (\alpha_0 - \omega t)] \right\} \\ \frac{d\Phi_2}{dt} &= + \frac{n \sin. a_2 t}{a_2 (a_2^2 - a_1^2)} \left\{ \frac{1}{2} q_1 (P + P_1) \sin. 2(\alpha_0 - \omega t) + \left(p_1 + \frac{p m_1}{a_2^2 - n_1} \right) [P \sin. (\alpha_0 - \omega t) + P_1 \cos. (\alpha_0 - \omega t)] \right\} \end{aligned} \right\} \dots (16)$$

Durch Integration des ersten und zweiten dieser Ausdrücke findet man:

$$\Theta_1 = \frac{-n}{a_1 (a_2^2 - a_1^2)} \left\{ \begin{aligned} & \frac{1}{4} q_1 (P + P_1) \left[\frac{\cos. [2 \alpha_0 + (a_1 - 2 \omega) t]}{a_1 - 2 \omega} - \frac{\cos. [(a_1 + 2 \omega) t - 2 \alpha_0]}{a_1 + 2 \omega} \right] \\ & \frac{1}{2} \left(p_1 + \frac{p m_1}{a_2^2 - a_1^2} \right) \left\{ \begin{aligned} & P \left[\frac{\cos. [\alpha_0 + (a_1 - \omega) t]}{a_1 - \omega} - \frac{\cos. [(a_1 + \omega) t - \alpha_0]}{a_1 + \omega} \right] \\ & P_1 \left[-\frac{\sin. [\alpha_0 + (a_1 - \omega) t]}{a_1 - \omega} - \frac{\sin. [(a_1 + \omega) t - \alpha_0]}{a_1 + \omega} \right] \end{aligned} \right\} \end{aligned} \right\} + \Theta$$

$$\Phi_1 = \frac{-n}{a_1 (a_2^2 - a_1^2)} \left\{ \begin{aligned} & + \frac{1}{4} q_1 (P + P_1) \left[-\frac{\sin. [2 \alpha_0 + (a_1 - 2 \omega) t]}{a_1 - 2 \omega} + \frac{\sin. [(a_1 + 2 \omega) t - 2 \alpha_0]}{a_1 + 2 \omega} \right] \\ & + \frac{1}{2} \left(p_1 + \frac{q m_1}{a_2^2 - a_1^2} \right) \left\{ \begin{aligned} & P \left[-\frac{\sin. [\alpha_0 + (a_1 - \omega) t]}{a_1 - \omega} + \frac{\sin. [(a_1 + \omega) t - \alpha_0]}{a_1 + \omega} \right] \\ & P_1 \left[-\frac{\cos. [\alpha_0 + (a_1 - \omega) t]}{a_1 - \omega} - \frac{\cos. [(a_1 + \omega) t - \alpha_0]}{a_1 + \omega} \right] \end{aligned} \right\} \end{aligned} \right\} + \Phi$$

wobei Θ und Φ zwei neue Integrationsconstanten bezeichnen. Multipliziert man die erste dieser Gleichungen mit $\sin. a_1 t$ und die zweite mit $\cos. a_1 t$ und addirt sie hierauf, so findet man nach einer Reihe von Reduktionen:

$$\left. \begin{aligned} \Theta_1 \sin. a_1 t + \Phi_1 \cos. a_1 t = & + \frac{1}{2} \frac{n q_1 (P + P_1)}{(a_2^2 - a_1^2) (a_1^2 - 4 \omega^2)} \sin. 2 (\alpha_0 - \omega t) \\ & + \frac{n \left(p_1 + \frac{p m_1}{a_2^2 - a_1^2} \right)}{(a_2^2 - a_1^2) (a_1^2 - \omega^2)} [P \sin. (\alpha_0 - \omega t) + P_1 \cos. (\alpha_0 - \omega t)] \\ & + \Theta \sin. a_1 t + \Phi \cos. a_1 t \end{aligned} \right\} \quad (17)$$

Vertauscht man in diesem Ausdruck a_1 mit a_2 und a_2 mit a_1 , so findet man ohne weitere Rechnung:

$$\left. \begin{aligned} \Theta_2 \sin. a_2 t + \Phi_2 \cos. a_2 t = & - \frac{1}{2} \frac{n q_2 (P + P_1)}{(a_2^2 - a_1^2) (a_2^2 - 4 \omega^2)} \sin. 2 (\alpha_0 - \omega t) \\ & - \frac{n \left(p_2 + \frac{p m_2}{a_2^2 - a_1^2} \right)}{(a_2^2 - a_1^2) (a_2^2 - \omega^2)} [P \sin. (\alpha_0 - \omega t) + P_1 \cos. (\alpha_0 - \omega t)] \\ & + \mathfrak{J} \sin. a_2 t + \mathfrak{K} \cos. a_2 t \end{aligned} \right\} \quad (18)$$

wobei wiederum \mathfrak{J} und \mathfrak{K} die Integrationsconstanten bezeichnen.

Setzt man diese Werthe von $\Theta_1 \sin. a_1 t + \Phi_1 \cos. a_1 t$ und von $\Theta_2 \sin. a_2 t + \Phi_2 \cos. a_2 t$ in die Gleichungen (9), so findet man endlich:

$$\xi = + \frac{\frac{1}{2} n q_1 (P + P_1)}{(a_2^2 - 4 \omega^2) (a_1^2 - 4 \omega^2)} \sin. 2 (\alpha_0 - \omega t) - \frac{n}{a_2^2 - a_1^2} \left[\frac{p_1 (a_1^2 - n_1) + p m_1}{(a_1^2 - \omega^2) (a_1^2 - n_1)} - \frac{p_1 (a_2^2 - n_1) + p m_1}{(a_1^2 - \omega^2) (a_2^2 - n_1)} \right] [P \sin. (\alpha_0 - \omega t) + P_1 \cos. (\alpha_0 - \omega t)] + \mathcal{G} \sin. a_1 t + \mathcal{H} \cos. a_1 t + \mathcal{J} \sin. a_2 t + \mathcal{K} \cos. a_2 t \quad (19)$$

$$\varphi = \frac{m_1}{a_1^2 - n_1} \left\{ - \frac{1}{2} \frac{n q_1 (P + P_1)}{(a_2^2 - a_1^2) (a_1^2 - 4 \omega^2)} \sin. 2 (\alpha_0 - \omega t) - \frac{n \left(p_1 + \frac{p m_1}{a_2^2 - n_1} \right)}{(a_2^2 - a_1^2) (a_1^2 - \omega^2)} [P \sin. (\alpha_0 - \omega t) + P_1 \cos. (\alpha_0 - \omega t)] \right\} + \frac{m_1}{a_2^2 - n_1} \left\{ + \frac{1}{2} \frac{n q_1 (P + P_1)}{(a_2^2 - a_1^2) (a_2^2 - 4 \omega^2)} \sin. 2 (\alpha_0 - \omega t) + \frac{n \left(p_1 + \frac{p m_1}{a_1^2 - n_1} \right)}{(a_2^2 - a_1^2) (a_2^2 - \omega^2)} [P \sin. (\alpha_0 - \omega t) + P_1 \cos. (\alpha_0 - \omega t)] \right\} - \frac{m_1}{a_1^2 - n_1} (\mathcal{G} \sin. a_1 t + \mathcal{H} \cos. a_1 t) - \frac{m_1}{a_2^2 - n_1} (\mathcal{J} \sin. a_2 t + \mathcal{K} \cos. a_2 t) \quad (20)$$

Diese beiden Ausdrücke können noch bedeutend umgestaltet werden.
Setzen wir zur Abkürzung:

$$(a_1^2 - 4 \omega^2) (a_2^2 - 4 \omega^2) = k.$$

Durch Entwicklung findet man:

$$K = a_1^2 a_2^2 - 4 \omega^2 (a_1^2 + a_2^2) + 16 \omega^4.$$

Setzt man für a_1 und a_2 die Werthe, welche die Gleichungen (7) darbieten, so findet man:

$$k = \left[\frac{m + n_1}{2} + \sqrt{\left(\frac{m + n_1}{2} \right)^2 + n m_1 - m n_1} \right] \left[\frac{m + n_1}{2} - \sqrt{\left(\frac{m + n_1}{2} \right)^2 + n m_1 - m n_1} \right] - 4 \omega^2 (m + n_1) + 16 \omega^4.$$

Durch weitere Reduktion findet man:

$$k = (4 \omega^2 - m) (4 \omega^2 - n_1) - n m_1 \dots \dots \dots (21)$$

Setzen wir ferner zur Abkürzung:

$$\frac{p_1 (a_1^2 - n_1) + p m_1}{(a_2^2 - \omega^2) (a_1^2 - n_1)} - \frac{p_1 (a_2^2 - n_1) + p m_1}{(a_1^2 - \omega^2) (a_2^2 - n_1)} = h$$

Bringt man diese Brüche auf einerlei Nenner, so findet man nach einigen Reduktionen:

$$h = (a_1^2 - a_2^2) \frac{p_1 (a_1^2 - n_1) (a_2^2 - n_1) - p m_1 (n_1 - \omega^2)}{(a_1^2 - \omega^2) (a_2^2 - \omega^2) (a_1^2 - n_1) (a_2^2 - n_1)}$$

Mit Berücksichtigung der Ausdrücke (7) findet man aber:

$$(a_1^2 - n_1) (a_2^2 - n_1) = -n m_1$$

$$(a_1^2 - \omega^2) (a_2^2 - \omega^2) = (\omega^2 - m) (\omega^2 - n_1) - n m_1$$

Daher wird:

$$h = \frac{(a_2^2 - a_1^2)}{n} \frac{-p (\omega^2 - n_1) + p_1 n}{n m_1 - (\omega^2 - m) (\omega^2 - n_1)} \dots \dots \dots (22)$$

Vermittelt der Werthe, welche die Ausdrücke (21) und (22) für k und h darbieten, wird der Werth von ζ , Gleichung (19):

$$\zeta = \left\{ \begin{array}{l} -\frac{1}{2} \frac{n q_1 (P + P_1)}{n m_1 - (4 \omega^2 - m) (4 \omega^2 - n_1)} \sin. 2 (\alpha_0 - \omega t) \\ -\frac{p_1 n - p (\omega^2 - n_1)}{n m_1 - (\omega^2 - m) (\omega^2 - n_1)} [P \sin. (\alpha_0 - \omega t) + P_1 \cos. (\alpha_0 - \omega t)] \\ + \mathcal{G} \sin. a_1 t + \mathcal{H} \cos. a_1 t + \mathcal{J} \sin. a_2 t + \mathcal{K} \cos. a_2 t \end{array} \right\} \dots \dots \dots (23)$$

Der Ausdruck (20) für φ kann geschrieben werden wie folgt:

$$\varphi = \frac{m_1 n}{a_1^2 - a_2^2} \left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{2} q_1 (P + P_1) \sin. 2 (\alpha_0 - \omega t) \left[-\frac{1}{(a_1^2 - n_1) (a_1^2 - 4 \omega^2)} + \frac{1}{(a_2^2 - n_1) (a_2^2 - 4 \omega^2)} \right] \\ + [P \sin. (\alpha_0 - \omega t) + P_1 \cos. (\alpha_0 - \omega t)] \left\{ \frac{p_1 + \frac{p m_1}{a_1^2 - n_1}}{(a_2^2 - \omega^2) (a_2^2 - n_1)} - \frac{p_1 + \frac{p m_1}{a_2^2 - n_1}}{(a_1^2 - \omega^2) (a_1^2 - n_1)} \right\} \\ - \frac{m_1}{a_1^2 - n_1} (\mathcal{G} \sin. a_1 t + \mathcal{H} \cos. a_1 t) - \frac{m_1}{a_2^2 - n_1} (\mathcal{J} \sin. a_2 t + \mathcal{K} \cos. a_2 t) \end{array} \right\} \dots \dots \dots (24)$$

Setzen wir zur Abkürzung.

$$-\frac{1}{(a_1^2 - n_1) (a_1^2 - 4 \omega^2)} + \frac{1}{(a_2^2 - n_1) (a_2^2 - 4 \omega^2)} = h_1$$

Bringt man diese Brüche auf gleiche Nenner, so findet man nach einigen Reduktionen:

$$h_1 = (a_1^2 - a_2^2) \frac{a_1^2 + a_2^2 - 4\omega^2 - n_1}{(a_1^2 - n_1)(a_2^2 - n_1)(a_1^2 - 4\omega^2)(a_2^2 - 4\omega^2)}$$

Es ist aber vermöge der Ausdrücke (7)

$$\left. \begin{aligned} a_1^2 + a_2^2 &= m + n_1 & (a_1^2 - n_1)(a_2^2 - n) &= -n m_1 \\ (a_1^2 - 4\omega^2)(a_2^2 - 4\omega^2) &= (4\omega^2 - m)(4\omega^2 - n_1) - n m_1 \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (25)$$

Daher wird:

$$h_1 = \frac{a_2^2 - a_1^2}{n m_1} \frac{4\omega^2 - m}{n m_1 - (4\omega^2 - m)(4\omega^2 - n_1)} \dots \dots \dots (26)$$

Setzen wir endlich zur Abkürzung:

$$\frac{p_1 + \frac{p m_1}{a_1^2 - n_1}}{(a_2^2 - \omega^2)(a_2^2 - n_1)} - \frac{p_1 + \frac{p m_1}{a_2^2 - n_1}}{(a_1^2 - \omega^2)(a_1^2 - n_1)} = k_1$$

Bringt man diese Brüche auf einerlei Nenner, so findet man, aber erst nach mehreren Reduktionen:

$$k_1 = (a_2^2 - a_1^2) \frac{-p m_1 - p_1 (a_1^2 + a_2^2 - \omega^2 - n_1)}{(a_1^2 - \omega^2)(a_2^2 - \omega^2)(a_1^2 - n_1)(a_2^2 - n_1)}$$

Dieser Ausdruck wird wegen der Werthe (25)

$$k_1 = \frac{a_2^2 - a_1^2}{n m_1} \frac{-p m_1 + p_1 (\omega^2 - m)}{n m_1 - (\omega^2 - m)(\omega^2 - n_1)} \dots \dots \dots (27)$$

Vermittelst der Werthe, welche (25) und (27) für h_1 und k_1 darbieten, wird der Ausdruck (24) für φ :

$$\varphi = \left\{ \begin{array}{l} + \frac{1}{2} \frac{q_1 (P + P_1) (4 \omega^2 - m)}{n m_1 - (4 \omega^2 - m) (4 \omega^2 - n_1)} \sin. 2 (\alpha_0 - \omega t) \\ + \frac{-p m_1 + p_1 (\omega^2 - m)}{n m_1 - (\omega^2 - m) (\omega^2 - n_1)} [P \sin. (\alpha_0 - \omega t) + P_1 \cos. (\alpha_0 - \omega t)] \\ - \frac{m_1}{a_1^2 - n_1} [\mathfrak{G} \sin. a_1 t + \mathfrak{H} \cos. a_1 t] - \frac{m_1}{a_2^2 - n_1} [\mathfrak{J} \sin. a_2 t + \mathfrak{K} \cos. a_2 t] \end{array} \right\} \quad (28)$$

Die Ausdrücke (23) und (28) für ζ und φ stimmen mit denjenigen überein, welche wir Seite 162 gefunden haben. Die Methode der Variation der Constanten hat uns also zu denselben Resultaten geführt, wie das zuerst befolgte Integrationsverfahren, welches, streng genommen, nur ein Versuchen war.