Badische Landesbibliothek Karlsruhe

Digitale Sammlung der Badischen Landesbibliothek Karlsruhe

Die Gesetze des Lokomotiv-Baues

Redtenbacher, Ferdinand

Mannheim, 1855

Das Wogen und Nicken

urn:nbn:de:bsz:31-266507

Visual Library

Das Wogen und Nicken.

Integration der Differenzialgleichungen, welche das Wogen und Nicken bestimmen.

Diese Differenzialgleichungen sind die beiden ersteren der Gleichungen (11) Seite 147 nämlich:

$$\left.\begin{aligned} \frac{d^2 \zeta_1}{dt^2} &= -m\,\zeta_1 + n\,\varphi_1 + p\,[P \sin.(\alpha_0 - \omega t) + P_1 \cos.(\alpha_0 - \omega t)] \\ \frac{d^2 \varphi_1}{dt^2} &= + m_1\,\zeta_1 - n_1\,\varphi_1 + p_1\,[P \sin(\alpha_0 - \omega t) + P_1 \cos.(\alpha_0 - \omega t)] \\ &\quad + \frac{1}{2}(P + P_1)\,q_1 \sin. 2(\alpha_0 - \omega t) \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (1)$$

Sowohl aus der Form dieser Gleichungen, als auch aus der Natur der Sache kann man vermuthen, dass diese Bewegungen des Nickens und Wogens aus Schwingungen bestehen werden, von denen jede einzelne entweder ein Gesetz von der Form $\mathfrak{M} \sin. kt$ oder ein Gesetz von der Form $\mathfrak{N} \cos. kt$ befolgt. Wir versuchen daher den Gleichungen (1) zu genügen, indem wir setzen:

$$\left.\begin{aligned} \zeta_1 &= \mathfrak{A} \sin. at + \mathfrak{B} \cos. at + \mathfrak{P} \sin. 2(\alpha_0 - \omega t) + \mathfrak{Q} \sin.(\alpha_0 - \omega t) + \mathfrak{R} \cos.(\alpha_0 - \omega t) \\ \varphi_1 &= \mathfrak{G} \sin. at + \mathfrak{D} \cos. at + \mathfrak{P}_1 \sin. 2(\alpha_0 - \omega t) + \mathfrak{Q}_1 \sin.(\alpha_0 - \omega t) + \mathfrak{R}_1 \cos.(\alpha_0 - \omega t) \end{aligned}\right\} \quad . \quad (2)$$

und es kommt nun darauf an, die Constanten $\mathfrak{A}\ \mathfrak{B}\ \mathfrak{G}\ \mathfrak{D}\ a\ \mathfrak{P}\ \mathfrak{Q}\ \mathfrak{R}\ \mathfrak{P}_1\ \mathfrak{Q}_1\ \mathfrak{R}_1$ so zu bestimmen, dass die Ausdrücke (2) die Integralien von (1) in der That darstellen können.

Differenzirt man die Ausdrücke (2) zweimal nach t und substituirt sodann die sich ergebenden Werthe von $\frac{d^2\zeta_1}{dt^2}$ $\frac{d\varphi_1}{dt^2}$, sowie auch die Werthe von ζ_1 und φ_1 in die Gleichungen (1), so erhält man folgende Beziehungen

$$\begin{aligned} &- a^2(\mathfrak{A} \sin. at + \mathfrak{B} \cos. at) - 4\,\omega^2\,\mathfrak{P} \sin. 2(\alpha_0 - \omega t) - \omega^2\,\mathfrak{Q} \sin.(\alpha_0 - \omega t) - \omega_2\,\mathfrak{R} \cos.(\alpha_0 - \omega t) = \\ &- m(\mathfrak{A} \sin. at + \mathfrak{B} \cos. at) - m\,\mathfrak{P} \sin. 2(\alpha_0 - \omega t) - m\,\mathfrak{Q} \sin.(\alpha_0 - \omega t) - m\,\mathfrak{R} \cos.(\alpha_0 - \omega t) \\ &+ n(\mathfrak{G} \sin. at + \mathfrak{D} \cos. at) + n\,\mathfrak{P}_1 \sin. 2(\alpha_0 - \omega t) + n\,\mathfrak{Q}_1 \sin.(\alpha_0 - \omega t) + n\,\mathfrak{R}_1 \cos.(\alpha_0 - \omega t) \\ &\qquad + p\,P \sin.(\alpha_0 - \omega t) + p\,P_1 \cos.(\alpha_0 - \omega t) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &- \alpha^2(\mathfrak{G} \sin. at + \mathfrak{D} \cos at) - 4\,\omega^2\,\mathfrak{P}_1 \sin. 2(\alpha_0 - \omega t) - \omega^2\,\mathfrak{Q}_1 \sin.(\alpha_0 - \omega t) - \omega^2\,\mathfrak{R}_1 \cos.(\alpha_0 - \omega t) = \\ &+ m_1(\mathfrak{A} \sin. at + \mathfrak{B} \cos. at) + n_1\,\mathfrak{P} \sin. 2(\alpha_0 - \omega t) + m_1\,\mathfrak{Q} \sin.(\alpha_0 - \omega t) + m_1\,\mathfrak{R} \cos(\alpha_0 + \omega t) \\ &- n_1(\mathfrak{G} \sin. at + \mathfrak{D} \cos. at) - n_1\,\mathfrak{P}_1 \sin. 2(\alpha_0 - \omega t) - n_1\,\mathfrak{Q}_1 \sin.(\alpha_0 - \omega t) - n_1\,\mathfrak{R}_1 \cos.(\alpha_0 - \omega t) \\ &\qquad + \frac{1}{2}\,q_1(P + P_1) \sin. 2(\alpha_0 - \omega t) + p_1\,P \sin.(\alpha_0 - \omega t) + p_1\,P_1 \cos.(\alpha_0 - \omega t) \end{aligned}$$

Damit die Ausdrücke (2) die Integrale von (1) darstellen können, müssen die so eben angeschriebenen Beziehungen für jeden Werth von t richtig sein. Diess ist der Fall, wenn man setzt:

$$\left.\begin{aligned} a^2 \mathfrak{A} &= m\,\mathfrak{A} - n\,\mathfrak{C} \\ a^2 \mathfrak{B} &= m\,\mathfrak{B} - n\,\mathfrak{D} \\ a^2 \mathfrak{C} &= n_1\,\mathfrak{C} - m_1\,\mathfrak{A} \\ a^2 \mathfrak{D} &= n_1\,\mathfrak{D} - m_1\,\mathfrak{B} \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (3($$

$$\left.\begin{aligned} 4\,\omega^2\,\mathfrak{P} &= m\,\mathfrak{P} - n\,\mathfrak{P}_1 \\ 4\,\omega^2\,\mathfrak{P}_1 &= n_1\,\mathfrak{P}_1 - m_1\,\mathfrak{P} - \frac{1}{2}\,q_1\,(P + P_1) \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (4)$$

$$\left.\begin{aligned} \omega^2\,\mathfrak{Q} &= m\,\mathfrak{Q} - n\,\mathfrak{Q}_1 - p\,P \\ \omega^2\,\mathfrak{Q}_1 &= n_1\,\mathfrak{Q}_1 - m_1\,\mathfrak{Q} - p_1\,P \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (5)$$

$$\left.\begin{aligned} \omega^2\,\mathfrak{R} &= m\,\mathfrak{R} - n\,\mathfrak{R}_1 - p\,P_1 \\ \omega^2\,\mathfrak{R}_1 &= n_1\,\mathfrak{R}_1 - m_1\,\mathfrak{R} - p_1\,P_1 \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (6)$$

Aus den Gleichungen (3) folgt zunächst:

$$\frac{\mathfrak{A}}{\mathfrak{C}} = \frac{\mathfrak{B}}{\mathfrak{D}} = \frac{n}{m - a^2} = \frac{n_1 - a^2}{m_1} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (7)$$

Aus der Gleichheit $\frac{n}{m - a^2} = \frac{n_1 - a^2}{m_1}$ folgt ferner:

$$a = \pm\sqrt{\frac{m + n_1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4}(m + n_1)^2 + n\,m_1 - m\,n_1}} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (8)$$

Wir erhalten demnach für a, und wegen (7) auch für $\frac{\mathfrak{A}}{\mathfrak{C}}$ und $\frac{\mathfrak{B}}{\mathfrak{D}}$, vier verschiedene Werthe, durch welche den Bedingungen (3) enthprochen werden kann. Setzen wir:

$$\left.\begin{aligned} a_1 &= +\sqrt{\frac{1}{2}(m + n_1) + \sqrt{\frac{1}{4}(m + n_1) + n\,m_1 - m\,n_1}} \\ a_2 &= +\sqrt{\frac{1}{2}(m + n_1) - \sqrt{\frac{1}{4}(m + n_1)^2 + n\,m_1 - m\,n_1}} \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (9)$$

so sind die vier Werthe von a:

$$+a_1 \quad -a_1 \quad +a_2 \quad -a_2$$

und es ist klar, dass den Gleichungen (1) auch dann Genüge geleistet wird, wenn man in (2) statt $\mathfrak{A}\,\sin.\,at + \mathfrak{B}\,\sin.\,at$ und $\mathfrak{C}\,\sin.\,at + \mathfrak{D}\,\cos.\,at$ $\Sigma(\mathfrak{A} + \sin.\,at\,\mathfrak{B}\,\cos.\,at)$ und $\Sigma\,(\mathfrak{C}\,\sin.\,at + \mathfrak{D}\,\cos.\,at)$ sptzt, wobei sich Σ auf alle vier Wurzeln von a bezieht.

Bezeichnet man die Werthe der Constanten $\mathfrak{A}\ \mathfrak{B}\ \mathfrak{C}\ \mathfrak{D}$, welche den individuellen Wurzeln entsprechen dadurch, dass man denselben diese Wurzeln beifügt, so dass z. B. $\binom{\mathfrak{A}}{+\alpha_1}$ denjenigen Werth von $\mathfrak{A}$ bedeutet, welcher der Wurzel $+\alpha_1$ entspricht, so hat man:

$$\Sigma(\mathfrak{A} \sin. at + \mathfrak{B} \cos. at) = \binom{A}{a_1} \sin. a_1 t + \binom{\mathfrak{B}}{a_1} \cos. a_1 t + \binom{\mathfrak{A}}{a_2} \sin. a_2 t + \binom{\mathfrak{B}}{a_2} \cos. a_2 t$$

$$- \binom{\mathfrak{A}}{-a_1} \sin. a_1 t + \binom{\mathfrak{B}}{-a_1} \cos. a_1 t - \binom{\mathfrak{A}}{-a_2} \sin. \alpha_2 t + \binom{\mathfrak{B}}{-a_2} \cos. a_2 t$$

$$\Sigma(\mathfrak{C} \sin. at + \mathfrak{D} \cos. at) = \binom{\mathfrak{C}}{a_1} \sin. a_1 t + \binom{\mathfrak{D}}{a_1} \cos. a_1 t + \binom{\mathfrak{C}}{a_2} \sin. a_2 t + \binom{\mathfrak{B}}{a_2} \cos. a_2 t$$

$$- \binom{\mathfrak{C}}{-a_1} \sin. a_1 t + \binom{\mathfrak{D}}{-a_1} \cos. a_1 t - \binom{\mathfrak{C}}{-a_2} \sin. a_2 t + \binom{\mathfrak{D}}{-a_2} \cos. a_2 t$$

Setzt man zur Abkürzung

$$\left.\begin{aligned}
\binom{\mathfrak{A}}{a_1} - \binom{\mathfrak{A}}{a_1} &= \mathfrak{G}_1 \\
\binom{\mathfrak{B}}{a_1} + \binom{\mathfrak{B}}{-a_1} &= \mathfrak{H}_1 \\
\binom{\mathfrak{A}}{a_2} - \binom{\mathfrak{A}}{-a_2} &= \mathfrak{G}_2 \\
\binom{\mathfrak{B}}{a_2} + \binom{\mathfrak{B}}{-a_2} &= \mathfrak{H}_2
\end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (10)$$

so findet man mit Berücksichtigung der Gleichung (7)

$$\left.\begin{aligned}
\binom{\mathfrak{C}}{a_1} - \binom{\mathfrak{C}}{-a_1} &= \frac{-m_1}{a_1^2 - n_1} \left[\binom{\mathfrak{A}}{a_1} - \binom{\mathfrak{A}}{-a_1}\right] = \frac{-m_1}{a_1^2 - n_1} \; \mathfrak{G}_1 \\
\binom{\mathfrak{C}}{a_2} - \binom{\mathfrak{C}}{-a_2} &= \frac{-m_1}{a_2^2 - n_1} \left[\binom{\mathfrak{A}}{a_2} - \binom{\mathfrak{A}}{-a_2}\right] = \frac{-m_1}{a_2^2 - n_1} \; \mathfrak{G}_2 \\
\binom{\mathfrak{D}}{a_1} + \binom{\mathfrak{D}}{-a_1} &= \frac{-m_1}{a_1^2 - n_1} \left[\binom{\mathfrak{B}}{a_1} - \binom{\mathfrak{B}}{-a_1}\right] = \frac{-m_1}{a_1^2 - n_1} \; \mathfrak{H}_1 \\
\binom{\mathfrak{D}}{a_2} + \binom{\mathfrak{D}}{-a_2} &= \frac{-m_1}{a_2^2 - n_1} \left[\binom{\mathfrak{B}}{a_2} - \binom{\mathfrak{B}}{-a_2}\right] = \frac{-m_1}{a_2^2 - n_1} \; \mathfrak{H}_2
\end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (11)$$

Führt man diese Werthe in obige Summen ein, so erhält man

$$\Sigma(\mathfrak{A} \sin. a t + \mathfrak{B} a \sin. at) = \quad (\mathfrak{G}_1 \sin. a_1 t + \mathfrak{H}_1 \cos. a_1 t) \quad + \quad (\mathfrak{G}_2 \sin. a_2 t + \mathfrak{H}_2 \cos. a_2 t)$$

$$\Sigma(\mathfrak{C} \sin. a t + \mathfrak{D} \cos. a t) = \frac{-m_1}{a_1^2 - m_1} (\mathfrak{G}_1 \sin. a_1 t + \mathfrak{H}_1 \cos. a_1 t) + \frac{-m_1}{a_2^2 - n_1} (\mathfrak{G}_2 \sin. a_2 t + \mathfrak{H}_2 \cos. a_2 t)$$

Diese Summenwerthe sind nun statt $\mathfrak{A}$ sin. at + $\mathfrak{B}$ sin at und statt $\mathfrak{C}$ sin. at + $\mathfrak{D}$ cos. at in die Gleichungen (2) zu setzen, und dadurch werden dieselben

$$\left.\begin{aligned}
\zeta_1 = {} & (\mathfrak{G}_1 \sin. a_1 t + \mathfrak{H}_1 \cos. a_1 t) + (\mathfrak{G}_2 \sin. a_2 t + \mathfrak{H}_2 \cos. a_2 t) \\
& + \mathfrak{P} \sin. 2(\alpha_0 - \omega t) + \mathfrak{Q} \sin. (\alpha_0 - \omega t) + \mathfrak{R} \cos. (\alpha_0 - \omega t) \\
\varphi_1 = {} & \frac{-m_1}{a_1^2 - n_1} (\mathfrak{G}_1 \sin. a_1 t + \mathfrak{H}_1 \cos. a_1 t) + \frac{-m_1}{a_2^2 - n_1} (\mathfrak{G}_2 \sin. a_2 t + \mathfrak{H}_2 \cos. a_2 t) \\
& + \mathfrak{P}_1 \sin. 2(\alpha_0 - \omega t) + \mathfrak{Q}_1 \sin. (\alpha_0 - \omega t) + \mathfrak{R}_1 \cos. (\alpha_0 - \omega t)
\end{aligned}\right\} \quad \ldots \quad (12)$$

Aus den Gleichungen (4) findet man ferner

$$\left.\begin{aligned}
\mathfrak{P} &= - \frac{\frac{1}{2} q_1 (P + P_1) n}{m_1 n - (4\omega^2 - m)(4\omega^2 - n_1)} \\
\mathfrak{P}_1 &= - \frac{\frac{1}{2} q_1 (P + P_1)(4\omega^2 - m)}{m_1 n - (4\omega^2 - m)(4\omega^2 - n_1)}
\end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (13)$$

sodann folgt aus den Gleichungen (5)

$$\left.\begin{aligned}
\mathfrak{Q} &= P \frac{p(\omega^2 - n_1) - p_1 n}{m_1 n - (\omega^2 - m)(\omega^2 - n_1)} \\
\mathfrak{Q}_1 &= P \frac{p_1 (\omega^2 - m) - p m_1}{m_1 n - (\omega^2 - m)(\omega^2 - n_1)}
\end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (14)$$

endlich geben die Gleichungen (6)

$$\left.\begin{aligned}
\mathfrak{R} &= P_1 \frac{p(\omega^2 - n_1) - p_1 n}{m_1 n - (\omega^2 - m)(\omega^2 - n_1)} \\
\mathfrak{R}_1 &= P_1 \frac{p_1 (\omega^2 - m) - p m_1}{m_1 n - (\omega^2 - m)(\omega^2 - n_1)}
\end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (15)$$

Die Werthe dieser Constanten können noch in anderer Weise ausgedrückt werden. Setzen wir zur Abkürzung

$$\left.\begin{aligned}
f_1 + f_2 + f_3 &= F_1 \\
\Delta_1 f_1 + \Delta_2 f_2 - \Delta_3 f_3 &= F_2 \\
\Delta_1^2 f_1 + \Delta_2^2 f_2 + \Delta_3^2 f_3 &= F_3
\end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (16)$$

so werden die Seite (147) zusammengestellten Werthe wie $m \; n \; p \; m_1 \; n_1 \; p_1 \; q_1$

$$\left.\begin{aligned}
m &= \frac{F_1}{M} \\
n &= \frac{F_2}{M} \\
p &= \frac{r}{2LM}
\end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (17)$$

$$\left.\begin{aligned}
m_1 &= \frac{F_2}{B} \\[2ex]
n_1 &= \frac{F_3}{B} \\[2ex]
p_1 &= (L-\Delta_2)\frac{r}{2LB} + \frac{rh}{BD} \\[2ex]
q_1 &= \frac{r^2}{2LB}\left(1+\frac{2h}{D}\right)
\end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (18)$$

führt man diese Werthe in (13), (14), (15) ein, so erhält man:

$$\left.\begin{aligned}
\mathfrak{P} &= -\frac{1}{4}(P+P_1)\left(\frac{r}{L}\right)^2\left(1+\frac{2h}{D}\right)\frac{F_2 L}{F_2^2-(4\omega^2 M-F_1)(4\omega^2 B-F_3)} \\[2ex]
\mathfrak{P}_1 &= +\frac{1}{4}(P+P_1)\left(\frac{r}{L}\right)^2\left(1+\frac{2h}{D}\right)\frac{L(4\omega^2 M-F_1)}{F_2^2-(4\omega^2 M-F_1)(4\omega^2 B-F_3)} \\[2ex]
\mathfrak{Q} &= \frac{1}{2}P\frac{r}{L}\frac{(\omega^2 B-F_3)-\left[(L-\Delta_2)+2h\frac{L}{D}\right]F_2}{F_2^2-(\omega^2 M-F_1)(\omega^2 B-F_3)} \\[2ex]
\mathfrak{Q}_1 &= \frac{1}{2}P\frac{r}{L}\frac{\left[(L-\Delta_2)+2h\frac{L}{D}\right](\omega^2 M-F_1)-F_2}{F_2^2-(\omega^2 M-F_1)(\omega^2 B-F_3)} \\[2ex]
\mathfrak{R} &= \frac{1}{2}P_1\frac{r}{L}\frac{(\omega^2 B-F_3)-\left[(L-\Delta_2)+2h\frac{L}{D}\right]F_2}{F_2^2-(\omega^2 M-F_1)(\omega^2 B-F_3)} \\[2ex]
\mathfrak{R}_1 &= \frac{1}{2}P_1\frac{r}{L}\frac{\left[(L-\Delta_2)+2h\frac{L}{D}\right](\omega^2 M-F_1)-F_2}{F_2^2-(\omega^2 M-F_1)(\omega^2 B-F_3)}
\end{aligned}\right\} \quad \ldots \quad (19)$$

führt man die Werthe (17) und (18) auch in die Wurzelwerthe (9) ein, so werden dieselben

$$\left.\begin{aligned}
a_1 &= \sqrt{\frac{1}{2}\left(\frac{F_1}{M}+\frac{F_3}{B}\right)+\sqrt{\frac{1}{4}\left(\frac{F_1}{M}-\frac{F_3}{B}\right)^2+\frac{F_2^2}{MB}}} \\[2ex]
a_2 &= \sqrt{\frac{1}{2}\left(\frac{F_1}{M}+\frac{F_3}{B}\right)-\sqrt{\frac{1}{4}\left(\frac{F_1}{M}-\frac{F_3}{B}\right)^2+\frac{F_2^2}{MB}}}
\end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (20)$$

Hiemit sind nun alle nicht willkürlichen Constanten der Integrale bestimmt. Setzt man in die Ausdrücke (10), Seite 147 für φ_1 und ζ_1 die Werthe (12) und für $m\ n\ m_1\ n_1$ die Werthe (17) und (18), so erhalten wir schliesslich für ζ und φ folgende Ausdrücke:

$$\zeta = \frac{2\,l\,h_1\,K}{D\,\pi}\,\frac{F_2}{F_2^2 - F_1\,F_3} + \left\{ \begin{array}{l} \mathfrak{G}_1 \sin. a_1 t + \mathfrak{H}_1 \cos. a_1 t + \mathfrak{G}_2 \sin. a_2 t + \mathfrak{H}_2 \cos. a_2 t \\ + \mathfrak{P} \sin. 2(\alpha_0 - \omega t) + \mathfrak{Q} \sin. (\alpha_0 - \omega t) + \mathfrak{R} \cos. (\alpha_0 - \omega t) \end{array} \right\} \quad \ldots \quad (21)$$

$$\varphi = \frac{2\,l\,h_1\,K}{D\,\pi}\,\frac{F_1}{F_2^2 - F_1\,F_3} + \left\{ \begin{array}{l} \frac{-m_1}{a_1^2 - n_1} (\mathfrak{G}_1 \sin. a_1 t + \mathfrak{H}_1 \cos. a_1 t) + \frac{-m_1}{a_2^2 - n_1} (\mathfrak{G}_2 \sin. a_2 t + \mathfrak{H}_2 \cos. a_2 t) \\ + \mathfrak{P}_1 \sin. 2(\alpha_0 - \omega t) + \mathfrak{Q}_1 \sin. (\alpha_0 - \omega t) + \mathfrak{R}_1 \cos. (\alpha_0 - \omega t) \end{array} \right\} \quad (22)$$

In diesen Ausdrücken sind $\mathfrak{G}_1$ $\mathfrak{H}_1$ $\mathfrak{G}_2$ $\mathfrak{H}_2$ die vier willkürlichen Constanten, welche die Integrale zweier Differenzialgleichungen der zweiten Ordnung erfordern.

Die Ausdrücke (21) und (22) stellen die Integrale der Gleichungen (1) nur in den Fällen richtig dar, in welchen der Werth von $\mathfrak{P}$ $\mathfrak{P}_1$ $\mathfrak{Q}$ $\mathfrak{Q}_1$ $\mathfrak{R}$ $\mathfrak{R}_1$ endlich sind, d. h. wenn die Nenner der Ausdrücke (19) nicht verschwinden. Allein die Nenner von $\mathfrak{P}$ und $\mathfrak{P}_1$ verschwinden, wenn

$$F_2^2 - (4\,\omega^2 M - F_1)(4\,\omega^2 B - F_3) = 0$$

ist, d. h. wenn ω entweder gleich:

$$\frac{1}{2}\sqrt{\left(\frac{F_1}{M} + \frac{F_3}{B}\right) + \sqrt{\frac{1}{4}\left(\frac{F_1}{M} - \frac{F_3}{B}\right)^2 + \frac{F_2^2}{MB}}}$$

oder wenn ω gleich

$$\frac{1}{2}\sqrt{\left(\frac{F_1}{M} + \frac{F_3}{B}\right) - \sqrt{\frac{1}{4}\left(\frac{F_1}{M} - \frac{F_3}{B}\right)^2 + \frac{F_2^2}{BM}}}$$

d. h. die Nenner von $\mathfrak{P}$ und $\mathfrak{P}_1$ verschwinden, wenn die Winkelgeschwindigkeit ω entweder gleich $\frac{a_1}{2}$ oder gleich $\frac{a_2}{2}$ ist. Die Nenner von $\mathfrak{Q}$ $\mathfrak{Q}_1$ $\mathfrak{R}$ $\mathfrak{R}_1$ verschwinden dagegen, wenn

$$F_2^2 - (\omega^2 M - F_1)(\omega^2 M - F_3) = 0$$

ist, d. h. wenn ω entweder gleich:

$$\sqrt{\frac{1}{2}\left(\frac{F_1}{M} + \frac{F_3}{B}\right) + \sqrt{\frac{1}{4}\left(\frac{F_1}{M} - \frac{F_3}{B}\right)^2 + \frac{F_2^2}{MB}}}$$

oder wenn die Winkelgeschwindigkeit ω gleich

$$\sqrt{\frac{1}{2}\left(\frac{F_1}{M} + \frac{F_3}{B}\right) - \sqrt{\frac{1}{4}\left(\frac{F_1}{M} - \frac{F_3}{B}\right)^2 + \frac{F_2^2}{MB}}}$$

d. h. wenn die Winkelgeschwindigkeit ω entweder gleich a_1 oder gleich a_2 ist.

Die Gleichungen (21) und (22) stellen also nur dann die Integrale der Differenzial-Gleichungen (1) dar, wenn die Winkelgeschwindigkeit ω mit keinem der vier Werthe

$$\frac{1}{2}a_1 \qquad \frac{1}{2}a_2 \qquad a_1 \qquad a_2$$

zusammentrifft. Es gibt also hinsichtlich des Nickens und Wogens vier Ausnahmsfälle, in welchen die hypothetischen Annahmen (2) nicht mehr zulässig sind. Wenn wir diese Ausnahmsfälle vollständig analytisch behandeln wollten, so müssten wir uns neuerdings in ein Gewühle von Formeln stürzen. Diese Arbeit können wir uns aber ersparen, denn es ist mit Sicherheit anzunehmen, dass in den Integralen, welche die Bewegungen φ und ζ in jedem dieser vier Ausnahmsfälle darstellen, Glieder von der Form

$$t\left[\mathfrak{M} \sin. (\alpha_0 - \omega t) + \mathfrak{N} \cos. \alpha_0 - \omega t\right]$$

vorkommen würden. Dass also in jedem dieser vier Ausnahmsfälle Schwingungen eintreten, die mit der Zeit t immer grösser und grösser werden müssten.

Interpretation der Integrale (21) (22). Die Gesetze des Wogens und Nickens.

Vorausgesetzt, dass die Winkelgeschwindigkeit ω der Triebaxe mit keinem der vier Werthe $a_1 \cdot a_2 \ \frac{1}{2} a_1 \ \frac{1}{2} a_2$ übereinstimmt, besteht, wie aus den Gleichungen (21) und (22) zu ersehen ist, sowohl das Wogen als auch das Nicken aus sieben einfachen periodisch wiederkehrenden Schwingungen, wie sie durch Kurbelmechanismen hervorgebracht werden können, und die ganze totale Bewegung bleibt stets innerhalb gewisser Grenzen. Da die Werthe von t, welche gleiche Werthe von ζ geben, mit den Werthen von t, die gleiche Werthe von φ geben, nicht übereinstimmen, so kommen in der ganzen Bewegungsdauer der Lokomotive zwei gleiche Lagerungen oder zwei gleiche Bewegungszustände nicht vor. Jede einzelne von den vier Elementarschwingungen erreicht ihren numerisch grössten oder kleinsten Werth, wenn der ihr entsprechende Sinus oder Cosinus + oder — Eins wird. Die Schwingungslängen der einzelnen Elementarschwingungen sind:

$$2\mathfrak{G}_1 \quad 2\mathfrak{H}_1 \quad 2\mathfrak{G}_2 \quad 2\mathfrak{H}_2 \quad 2\mathfrak{P} \quad 2\mathfrak{Q} \quad 2\mathfrak{R}$$

$$2\frac{m_1}{a_1^2 - n_1}\mathfrak{G}_1 \qquad 2\frac{m_1}{a_1^2 - n_1}\mathfrak{H}_1 \qquad 2\frac{m_1}{a_2^2 - n_1}\mathfrak{G}_2 \qquad 2\frac{m_1}{a_2^2 - n_1}\mathfrak{H}_2$$

$$2\mathfrak{P}_1 \qquad 2\mathfrak{Q}_1 \qquad 2\mathfrak{R}_1$$

Die Schwingungszeiten sind

$$\frac{2\pi}{a_1} \quad \frac{2\pi}{a_2} \quad \frac{2\pi}{\omega} \quad \frac{\pi}{\omega}$$

Diese 14 Elementarschwingungen können in 2 Klassen eingetheilt werden, die wir Grundschwingungen und Kurbelschwingungen nennen wollen.

Die Grundschwingungen werden durch die Glieder

$$\mathfrak{G}_1 \sin. a_1 t \qquad \mathfrak{H}_1 \cos. a_1 t \qquad \mathfrak{G}_2 \sin. a_2 t \qquad \mathfrak{H}_2 \cos. a_2 t$$

$$\frac{m_1}{a_1^2 - n_1}\mathfrak{G}_1 \sin. a_1 t \qquad \frac{m_1}{a_1^2 - n_1}\mathfrak{H}_1 \cos. a_1 t \qquad \frac{m_1}{a_2^2 - n_1}\mathfrak{G}_2 \sin. a_2 t \qquad \frac{m_1}{a_2^2 - n_1}\mathfrak{H}_2 \cos. a_2 t$$

bestimmt. Sie sind, weil ω in den Ausdrücken (20) für a_1 und a_2 nicht vorkommt, unabhängig von der Winkelgeschwindigkeit der Triebaxe, erfolgen also immer in der gleichen Weise wie auch die Geschwindigkeit der Lokomotive sein mag, und richten sich nun allein nach den Werthen von F_1 F_2 F, M und B, d. h. nach der Anordnung des Feder-Systems und nach der Grösse und Vertheilung der Massen des Baues. Diese Grundschwingungen treten allein auf, wenn die Lokomotive, ohne vom Dampf getrieben zu werden, bloss durch ihre Trägheit auf der Bahn fortläuft. Ueber die Schwingungslängen dieser Grundschwingungen kann uns leider unsere Theorie keinen Aufschluss geben. Die durchgeführten Rechnungen gelten nur allein für den Beharrungszustand der Bewegung, denn wir haben die Integrationen nur für den Fall, dass ω constant ist, bewerkstelliget. Die Werthe der vier Constanten $\mathfrak{G}_1$ $\mathfrak{H}_1$ $\mathfrak{G}_2$ $\mathfrak{H}_2$ könnten aber nur dann bestimmt werden, wenn man die Rechnung für die Periode des Anlaufes anlegte, was nicht geschehen ist, weil die Bewegungen während des Anlaufes so komplizirt sind, dass sie nur durch ein wahres Gewühl von Formeln ausgedrückt werden könnten.

Die Kurbelschwingungen, welche durch die Glieder

$$\mathfrak{P} \sin. 2 (\alpha_0 - \omega t) \qquad \mathfrak{Q} \sin. (\alpha_0 - \omega t) \qquad \mathfrak{R} \cos. (\alpha_0 - \omega t)$$

$$\mathfrak{P}_1 \sin. 2 (\alpha_0 - \omega t) \qquad \mathfrak{Q}_1 \sin. (\alpha_0 - \omega t) \qquad \mathfrak{R}_1 \cos. (\alpha_0 - \omega t)$$

ausgedrückt werden, entstehen durch die Pressungen der Gleitstücke gegen die Führungslineale und durch die auf den Rahmenbau einwirkenden Horizontalkräfte. Ihre Schwingungsgrössen $\mathfrak{P}$ $\mathfrak{Q}$ $\mathfrak{R}$ $\mathfrak{P}_1$ $\mathfrak{Q}_1$ $\mathfrak{R}_1$ hängen, wie die Ausdrücke (19) zeigen, von allen wesentlichern Construktionsverhältnissen der Lokomotive, sowie auch von der Winkelgeschwindigkeit der Triebaxe ab. Die Schwingungszeiten dieser Schwingungen richten sich aber nur allein nach der Winkelgeschwindigkeit der Triebaxe. Wenn diese Schwingungen allein vorhanden wären, würde die Lokomotive nach jeder Umdrehung der Triebaxe in die gleiche Lage und auch in den gleichen Bewegungszustand zurückkehren. Läuft eine Lokomotive schnell und hat sie kleine Triebräder, so folgen diese Schwingungen schnell auf einander. Läuft eine Lokomotive langsam und hat sie grosse Triebräder, so folgen diese Schwingungen langsam aufeinander, während die Grundschwingungen immer in gleicher Weise fortgehen, wie auch die Lokomotive laufen mag.

In der Weise, wie so eben dargestellt wurde, erfolgt aber die Bewegung der Lokomotive nur dann, wenn die Winkelgeschwindigkeit ω keinem der vier Werthe a_1 a_2 $\frac{1}{2} a_1$ $\frac{1}{2} a_2$ gleich kommt, d. h. nur dann, wenn die Umdrehungszeit $\frac{2\pi}{\omega}$ verschieden ist von den Schwingungszeiten $\frac{2\pi}{a_1}$ $\frac{2\pi}{a_2}$ $\frac{2\pi}{\frac{1}{2} a_1}$ $\frac{2\pi}{\frac{1}{2} a_2}$ der Grundschwingungen. Stimmt dagegen die Umdrehungszeit der Triebaxe mit der Schwingungszeit von einer oder von der andern der vier Grundschwingungen überein, so wird das Wogen und Nicken nicht mehr durch die Gleichungen (21) (22) Seite 164, sondern durch Gleichungen ausgedrückt, in welchen Glieder vorkommen, die die Zeit t als Faktor enthalten. Der Bewegungszustand bleibt daher in diesem Falle nicht innerhalb gewisser Grenzen, sondern er nimmt mit der Zeit immer mehr und mehr zu, so dass zuletzt ein äusserst drohender Zustand eintreten kann. Es gibt also hinsichtlich des Wogens und Nickens vier gefährliche Geschwindigkeiten, bei welchen ein stets wachsendes Ansammeln der Schwingungen eintritt. Diese vier gefährlichen Winkelgeschwindigkeiten sind:

$$a_1 \qquad a_2 \qquad \frac{1}{2} a_1 \qquad \frac{1}{2} a_2$$

Damit also bei keiner von den Winkelgeschwindigkeiten, mit denen man eine Lo-

BLB BADISCHE LANDESBIBLIOTHEK Baden-Württemberg

komotive laufen lassen will, ein gefährlicher Zustand eintreten könne, muss der kleinste von den vier Werthen $\mathfrak{a}_1$ $\mathfrak{a}_2$ $\frac{1}{2}\mathfrak{a}_1$ $\frac{1}{2}\mathfrak{a}_2$ grösser sein, als die grössten der Winkelgeschwindigkeiten, mit der man die Lokomotive noch laufen lassen will. Nennt man $\mathfrak{a}_0$ den kleinsten der vier Werthe $\mathfrak{a}_1$ $\mathfrak{a}_2$ $\frac{1}{2}\mathfrak{a}_1$ $\frac{1}{2}\mathfrak{a}_2$ V die grösste Laufgeschwindigkeit der Lokomotive, D den Durchmesser des Triebrads, so ist $\frac{V}{\frac{1}{2}D} = \frac{2V}{D}$ die grösste Winkelgeschwindigkeit. Damit also die Lokomotive ohne Gefahr mit jeder Geschwindigkeit, die zwischen 0 und V liegt, laufen kann, muss:

$$\mathfrak{a}_0 > 2\frac{V}{D}$$

oder

$$D > 2\frac{V}{\mathfrak{a}_0}$$

sein. Und umgekehrt kann eine Lokomotive, deren Triebräder einen Durchmesser D haben, ohne Gefahr mit jeder Geschwindigkeit laufen, die kleiner als $\frac{1}{2}\mathfrak{a}_0 D$ ist.

Die grösste von den gefährlichen Winkelgeschwindigkeiten ist $\mathfrak{a}_1$. Denken wir uns, dass eine Lokomotive durch einen äusserst energischen Antrieb glücklich die grösste von den gefährlichen Geschwindigkeiten überschritten habe, und dass von da an ihre Geschwindigkeit noch fort und fort wachse, so zeigen die Ausdrücke (19), dass das Wogen und Nicken fort und fort schwächer wird und zuletzt bei einer ganz rasenden Geschwindigkeit beinahe verschwindet, denn betrachten wir ω als eine beinahe unendlich grosse Grösse, so nähern sich die Werthe der Ausdrücke immer mehr und mehr folgenden Werthen:

$$\mathfrak{P} = +\frac{1}{4}(P + P_1)\left(\frac{r}{L}\right)^2 \frac{L F_2}{16\,\omega^4 M B}$$

$$\mathfrak{P}_1 = -\frac{1}{4}(P + P_1)\left(\frac{r}{L}\right)^2 \frac{L}{4\,\omega^2 B}\left(1 + \frac{2h}{D}\right)$$

$$\mathfrak{Q} = -\frac{1}{2}P\left(\frac{r}{L}\right)\frac{1}{\omega^2 M}$$

$$\mathfrak{Q}_1 = -\frac{1}{2}P\left(\frac{r}{L}\right)\frac{L - \Delta_2 + 2h\frac{L}{D}}{\omega^2 B}$$

$$\mathfrak{R} = -\frac{1}{2}P_1\left(\frac{r}{L}\right)\frac{1}{\omega^2 M}$$

$$\mathfrak{R}_1 = -\frac{1}{2}P_1\left(\frac{r}{L}\right)\frac{(L - \Delta_2) + 2h\frac{L}{D}}{\omega^2 B}$$

die mit dem Wachsen von ω immer mehr und mehr abnehmen und für unendliche Werthe von ω ganz verschwinden. Es wird demnach jede Lokomotive, wie sie auch

BLB BADISCHE LANDESBIBLIOTHEK

Baden-Württemberg

gebaut sein mag, bei extravaganter Geschwindigkeit weder ein Wanken noch ein Nicken noch ein Wogen zeigen, sondern sie wird starr aufrecht stehend fortrasen. Wenn sich also eine Lokomotive bei extravaganter Geschwindigkeit starrsinnig verhält, so darf man daraus nicht folgern, dass ihre Bauart eine stabile sei. Bei Probefahrten, die man in England mit *Crampton*'schen Lokomotiven angestellt hat, ist man mit Geschwindigkeiten von 120 Kilometer per 1 Stunde oder mit 33 Meter in der Sekunde, also ungefähr 3 mal so schnell als ein schneller Güterzug gefahren, und dabei war ein Wanken, Wogen oder Nicken kaum zu bemerken oder zu spüren. Die englischen Ingenieure zogen aus diesem Verhalten der Lokomotive den Schluss, dass ihre Bauart eine bewunderswürdige Stabilität gewähre. Dieser Schluss ist ein Fehlschluss, spricht aber dessen ungeachtet eine Wahrheit aus. Er ist ein Fehlschluss, weil sich ein so günstiges Verhalten bei einer Geschwindigkeit, die (wie sich in der Folge zeigen wird) beträchtlich grösser ist, als die grösste von den gefährlichen Geschwindigkeiten, auch bei einer hinsichtlich der Stabilität der Bewegung ganz verfehlt erbauten Lokomotive zeigen würde. Er spricht eine Wahrheit aus, weil diese Lokomotive von *Crampton*, wie wir in der Folge sehen werden, in der That in Bezug auf Stabilität vortrefflich angeordnet ist. Hätte man bei den Probefahrten durch längere Zeit eine Geschwindigkeit von nur 16 Meter eintreten lassen, so würde die Maschine so unruhige Bewegungen gezeigt haben, dass die Herren Ingenieure das Urtheil gefällt hätten: dass diese Lokomotive keine Stabilität besitze

Schwächung und Aufhebung der Bewegungen des Nickens und Wogens.

Es unterliegt wohl keinem Zweifel, dass die Kenntniss der Bedingungen, bei deren Erfüllung die störenden Bewegungen entweder gar nicht oder nur in einem schwachen Grad eintreten, für den Lokomotivbau von grösster Wichtigkeit ist. Dies weiss auch die Praxis, und das Bestreben der Construkteure ist gegenwärtig vorzugsweise dahin gerichtet, die Lokomotive in solcher Weise zu bauen, dass sie sicher und ruhig über das Geleise hinrollen, denn von der Erreichung dieses Zieles wird es abhängen, in welchem Maasse die Fahrgeschwindigkeiten auf Eisenbahnen gesteigert werden können. Ueber diesen wichtigen Gegenstand geben uns die durch das Studium über das Wogen und Nicken gewonnenen Resultate die wünschenswerthesten Aufschlüsse.

Wenn es möglich wäre, die störenden Kurbelschwingungen ganz aufzuheben, so würden auch die Grundschwingungen verschwinden, und es würden dann die Werthe von ζ und φ entweder constant oder gleich Null sein. Allein diese Kurbelschwingungen können nicht alle aufgehoben werden, weil es nicht möglich ist, die Zähler sämmtlicher Brüche der Ausdrücke (19) Seite 163 zum Verschwinden zu bringen, und gleichzeitig die Nenner gegen das Nullwerden zu schützen. Eine vollständige Vertilgung dieser Schwingungen ist daher nicht möglich; man muss sich also mit dem Erreichbaren begnügen, d. h. man muss suchen die Werthe von ζ und φ [Gleichungen (21) und (22) Seite 164] möglichs klein zu machen.

Die von der Zeit unabhängigen Glieder der Ausdrücke 21 und 22 werden klein, wenn $\mathfrak{h}_1$ klein ist. Damit die periodischen Glieder dieser Ausdrücke möglichst kleine numerische Werthe erhalten, müssen die Werthe von $\mathfrak{P}\ \mathfrak{S}\ \mathfrak{R}\ \mathfrak{P}_1\ \mathfrak{S}_1\ \mathfrak{R}_1$ möglichst geschwächt werden. Zu diesem Zwecke nehmen wir zunächst an

$$F_2 = 0 \qquad L - \Delta_2 = 0 \qquad \ldots \ldots \ldots \ldots \qquad (1)$$

Dann werden die Ausdrücke (19) Seite 163

$$
\left.\begin{aligned}
\mathfrak{P} &= 0 \\
\mathfrak{Q} &= +\frac{1}{2} P \left(\frac{r}{L}\right) \frac{1}{-\omega^2 M + F_1} \\
\mathfrak{R} &= +\frac{1}{2} P_1 \left(\frac{r}{L}\right) \frac{1}{-\omega^2 M + F_1} \\
\mathfrak{P}_1 &= +\frac{1}{4} (P + P_1) \left(\frac{r}{L}\right)^2 \left(1 + \frac{2h}{D}\right) \frac{L}{-4\omega^2 B + F_2} \\
\mathfrak{Q}_1 &= +P \frac{r}{D} \frac{h}{-\omega^2 B + F_2} \\
\mathfrak{R}_1 &= +P_1 \frac{r}{D} \frac{h}{-\omega^2 B + F_2}
\end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (2)
$$

Den Werth von $\mathfrak{P}_1$ können wir füglich von nun an ganz unberücksichtigt lassen; denn für die Bewegung durch die Quadranten, in welchen die Richtungen der Kolbenbewegungen übereinstimmen, ist, wie schon Seite (148) bemerkt wurde, $P + P_1$ gleich Null; verschwindet also $\mathfrak{P}_1$ gänzlich, und für die beiden andern Quadranten ist $\mathfrak{P}_1$ sehr klein, weil es, wie man sieht, dem Quadrat von $\frac{r}{L}$ proportional ist. Wir wollen also $\mathfrak{P}_1$ von nun an ganz unberücksichtigt lassen.

Nennen wir W den totalen Widerstand des Trains, so ist im Beharrungszustand der Bewegung

$$
P = P_1 = \frac{\pi}{8} W \frac{D}{r}
$$

durch Einführung dieser Werthe von P und P_1 in (2) werden diese Ausdrücke für $\mathfrak{Q}$ $\mathfrak{R}$ $\mathfrak{Q}_1$ $\mathfrak{R}_1$

$$
\left.\begin{aligned}
\mathfrak{Q} &= +\frac{\pi}{16} W \frac{D}{L} \frac{1}{-\omega^2 M + F_1} \\
\mathfrak{R} &= +\frac{\pi}{16} W \frac{D}{L} \frac{1}{-\omega^2 M + F_1} \\
\mathfrak{Q}_1 &= +\frac{\pi}{8} W \frac{h}{-\omega^2 B + F_2} \\
\mathfrak{R}_1 &= +\frac{\pi}{8} W \frac{h}{-\omega^2 B + F_2}
\end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (3)
$$

Aus diesen Ausdrücken kann man nun leicht herauslesen, was zu thun ist, um die Werthe von $\mathfrak{Q}$ $\mathfrak{R}$ $\mathfrak{Q}_1$ $\mathfrak{R}_1$ noch weiter zu schwächen, als es schon durch die Annahmen (1) geschehen ist. Die numerischen Werthe der Ausdrücke (2) und (3) fallen klein aus, 1) wenn W klein ist, d. h. wenn die Lokomotive nur einen geringen Widerstand zu überwinden hat; 2) wenn $\frac{D}{L}$ klein ist, d. h. wenn die Schubstangen im Verhältniss zum

BLB BADISCHE LANDESBIBLIOTHEK
Baden-Württemberg

Durchmsser der Triebräder lang sind; 3) wenn sowohl der absolute Werth von h als auch das Verhältniss $\frac{2\,h}{D}$ klein ist, d. h. wenn die Höhe des Schwerpunktes des auf den Federn liegenden Baues über der Axe des Triebrades klein ist und wenn überdies diese Höhe im Verhältniss zum Durchmesser des Triebrades einen kleinen Werth hat; 4) wenn F_1 so gross ist, dass die Differenz $F_1 - \omega^2 M$ selbst für die grössten zulässigen Werthe von ω gross ausfällt; 5) wenn F_2 so gross ist, dass die Differenz $F_2 - \omega^2 B_1$ selbst für die grössten noch zulässigen Werthe von ω sehr gross ausfällt. Diese 5 Bedingungen und die zuerst angegebenen, dass 6) h_1 klein, dass 7) $F_3 = 0$ und dass 8) $L - \Delta_2 = 0$ sein soll, müssen also erfüllt werden, damit das Nicken und Wogen nur in einem schwachen Grade eintritt.

Wir wollen diese acht Bedingungen näher betrachten, um ihre Bedeutung vollständig kennen zu lernen.

Die Bedingung 1) dass W klein sein soll, sagt aus, dass jede Lokomotive nur ein schwaches Nicken und Wogen zeigen wird, wenn sie nur einen kleinen Widerstand zu überwinden hat. Diess ist auch leicht einzusehen, denn wenn der Widerstand W klein ist, werden auch die Pressungen der Gleitstücke gegen die Führungslineale und die Pressungen der Triebaxe gegen die Axengabeln kleine Werthe haben; diese Pressungen sind es aber vorzugsweise, welche das Nicken und Wogen verursachen.

Die Bedingung 2) dass nämlich $\frac{D}{L}$ klein sein soll, sagt aus, dass die Schubstangen im Verhältniss zu dem Durchmesser der Triebräder lang sein sollen. Dieser Anforderung könnte man allerdings auch durch kleine Triebräder entsprechen, allein wir werden bald sehen, dass kleine Triebräder gefährlich sind, das Verhältniss $\frac{D}{L}$ soll also selbst für die durchaus nothwendigen grossen Triebräder klein ausfallen, was nur durch verhältnissmässig lange Schubstangen möglich ist.

Die Bedingungen 3) und 6) dass nämlich h und h_1 möglichst klein, d. h. wo möglich gleich Null sein sollen, sagen aus, dass der Schwerpunkt des auf den Federn liegenden Baues, die Triebaxe und die Zusammenhängung der Lokomotive mit dem Tender in einer und derselben horizontalen Ebene liegen sollen, oder mit andern Worten, dass der Schwerpunkt des Baues und der Zusammenhängungspunkt in der Höhe der Axe der Triebräder liegen soll. Dass diese Bedingung eine wesentliche ist, kann man leicht einsehen, denn wenn dieselbe erfüllt ist, liegen alle auf den Rahmenbau einwirkenden Horizontalkräfte in der durch den Schwerpunkt des Baues gehenden Horizontalebene, können also nur eine Fortbewegung, aber keine Drehung um die durch den Schwerpunkt gehende Queraxe hervorbringen, oder die Horizontalkräfte verursachen keine nickende Bewegung, wenn h und h_1 gleich Null sind. Die Mehrzahl der Construkteure hat sich bereits für eine niedrige Lage des Schwerpunktes ausgesprochen, allein dieser Ausspruch ist insofern ein unbestimmter, als damit nicht bestimmt gesagt ist, ob die Höhe des Schwerpunktes über der Bahn, oder die Höhe des Schwerpunktes über der Triebaxe gemeint ist. Unsere trocknen Formeln sagen aber aus, dass es hinsichtlich des Nickens nicht auf die Höhe des Schwerpunktes über der Bahn, sondern nur allein auf die Höhe des Schwerpunktes über der Triebaxe ankommt.

Die Bedingung 4) dass F_1 möglichst gross sein soll, kann leicht durch Worte ausgesprochen werden. Es ist nämlich $F_1 = f_1 + f_2 + f_3$ Seite (162), woraus hervorgeht, dass die Federn sehr starr sein sollen. Die Aufhebung oder Schwächung der störenden Schwingungen durch Anwendnng von starren Federn ist aber ein fehlerhaftes Mittel, weil dadurch harte erschütternde Einwirkungen der Bahn hervorgerufen werden, gegen welche man sich durch die Federn schützen will. Eine Lokomotive hat nur dann einen zweck-

BLB BADISCHE LANDESBIBLIOTHEK Baden-Württemberg

mässig angeordneten Bau, wenn sie selbst mit verhältnissmässig weichen Federn keine gaukelnden Bewegungen zeigt.

Die Bedingung 7) dass $F_2 = 0$ sein soll, kann auch leicht mit Worten ausgedrückt werden. Es ist nämlich Seite (162) $F_2 = f_1 \Delta_1 + f_2 \Delta_2 - f_3 \Delta_3$ gesetzt worden. Es soll also $f_1 \Delta_1 + f_2 \Delta_2 - f_3 \Delta_3 = 0$ sein. Diese Beziehung sagt aber aus, wie schon Seite (142) erklärt wurde, dass im ruhenden Zustand der Lokomotive alle Federn durch den auf denselben liegenden Bau um gleich viel zusammengedrückt sein sollen.

Nennt man $\mathfrak{P}_1\ \mathfrak{P}_2\ \mathfrak{P}_3$ die Belastungen der drei Axen der Lokomotive, s die Zusammendrückung jeder der sechs Federn, so ist

$$\left.\begin{array}{c} \mathfrak{P}_1 = 2 f_1 s \qquad \mathfrak{P}_2 = 2 f_2 s \qquad \mathfrak{P}_3 = 2 f_3 s \\ G = \mathfrak{P}_1 + \mathfrak{P}_2 + \mathfrak{P}_3 \end{array}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (4)$$

Multiplizirt man die Gleichung $f_1 \Delta_1 + f_2 \Delta_2 - f_3 \Delta_3 = 0$ mit $2s$ und berücksichtiget die Werthe (4) so kann dieselbe auch geschrieben werden wie folgt:

$$\mathfrak{P}_1 \Delta_1 + \mathfrak{P}_2 \Delta_2 - \mathfrak{P}_3 \Delta_3 = 0 \qquad (5)$$

Diese Gleichungen (4) und (5) leisten für die Anordnung der Axenstellung und der Federnwerke wesentliche Dienste.

Wenn ein Lokomotivbau angeordnet werden soll, wird anzugeben sein: 1) G das Gewicht des auf den Axen liegenden Baues; 2) die Pressung $\mathfrak{P}_3$ auf die Vorderaxe; 3) die Pressung auf die Triebaxe; 4) die Zusammendrückung s der Federn im ruhigen Zustand der Lokomotive. Mit diesen Daten findet man zunächst aus (4) die Starrheits-Coeffizienten der Federn, nämlich:

$$f_1 = \frac{G - \mathfrak{P}_2 - \mathfrak{P}_3}{2s} \qquad f_2 = \frac{\mathfrak{P}_2}{2s} \qquad f_3 = \frac{\mathfrak{P}_3}{2s} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (6)$$

und die Gleichung (5) liefert dann eine Beziehung, durch welche die Position eine der drei Axen gegen den Schwerpunkt bestimmt werden kann, wenn die Position der beiden andern Axen gegeben sind.

Die Bedingung 5) dass F_3 möglichst gross sein soll, kann ebenfalls mit Worten ausgedrückt werden. Es ist nämlich $F_3 = f_1 \Delta_1^2 + f_2 \Delta_2^2 + f_3 \Delta_3^2$. Setzen wir voraus, dass im ruhenden Zustand der Lokomotive alle Federn gleich stark zusammengedrückt sind, so ist vermöge (4)

$$F_1 = \frac{\mathfrak{P}_1}{2s} \qquad F_2 = \frac{\mathfrak{P}_2}{2s} \qquad F_3 = \frac{\mathfrak{P}_3}{2s}$$

der Werth von F_3 wird demnach

$$F_3 = \frac{\mathfrak{P}_1 \Delta_1^2 + \mathfrak{P}_2 \Delta_2^2 + \mathfrak{P}_3 \Delta_3^2}{2s} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (7)$$

Der Werth von F_3 fällt also, wie man aus diesem Ausdruck ersieht, möglichst gross aus, wenn sowohl die vordere als auch die hintere Axe möglichst weit vom Schwerpunkt entfernt gestellt wird, und wenn diese zwei Axen möglichst stark belastet werden. Am besten ist es also in dieser Hinsicht, in der Mitte der Lokomotive gar keine Axe anzubringen, und die Vorder- und Hinteraxe weit auseinander zu stellen, oder kurz gesagt: Weite Radstellung, keine Mittelaxe! oder jedenfalls nur eine schwach belastete Mittelaxe.

Bei Personenlokomotiven sollen also die Triebräder, welche jederzeit eine ansehnliche Belastung erfordern, niemals in der Mitte, sondern an den Enden angebracht werden. Allein da die Triebräder immer eine bedeutende Grösse erhalten müssen, und grosse Vorderräder leicht ausgleisen, so sollen die Triebräder der Personenlokomotive nur an der hinteren Axe der Lokomotive angebracht werden.

Die Bedingung 8) dass $L - \Delta_4 = 0$ oder dass $L = \Delta_4$ sein solle, ist von grosser Wichtigkeit, denn sie bestimmt die richtige Position der Dampfcylinder. Es ist Δ_4 der Horizontalabstand des Schwerpunktes von der Triebaxe, L die Länge der Schubstange. $L = \Delta_4$ sagt demnach aus, dass die mittlere Position der Gleitstücke (d. h. diejenige Position der Gleitstücke, in welcher sie sich befinden, wenn die Kolben auf halbem Schub stehen) in die Vertikalebene fallen sollen, die quer durch den Schwerpunkt des Baues gelegt werden kann. Es ist also, wie man sieht, nicht gleichgiltig, wo man die Cylinder anbringt, sondern es wird ihnen durch unsere trocknen Formeln eine ganz bestimmte Position angewiesen; und diess ist auch sehr natürlich. Denn offenbar werden die Pressungen der Gleitstücke gegen die Führungslineale ein möglichst schwaches Nicken veranlassen, wenn sich die Gleitstücke so wenig als möglich von der quer durch den Schwerpunkt gehenden Vertikalebene entfernen, diess ist aber dann der Fall, wenn die mittlere Position der Gleitstücke in diese Schwerpunktsebene fällt.

Untersuchen wir nun ferner noch, unter welchen Umständen $F_1 > \omega^2 M$ und $F_3 > \omega^2 B$ wird.

Nennen wir V die Fahrgeschwindigkeit, D den Durchmesser eines Triebrades, so ist $\omega = 2\frac{V}{D}$. Es soll daher:

$$F_1 > \left(2\,\frac{V}{D}\right)^2 M \quad \text{und} \quad F_3 > \left(2\,\frac{V}{D}\right)^2 B$$

oder

$$D > 2V\sqrt{\frac{M}{F_1}} \quad \text{und} \quad D > 2V\sqrt{\frac{B}{F_3}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (8)$$

sein.

Setzen wir voraus, dass im ruhenden Zustand der Lokomotive alle Federn gleich stark zusammengedrückt sind, so ist:

$$F_1 = \frac{\mathfrak{P}_1 + \mathfrak{P}_2 + \mathfrak{P}_3}{2s} = \frac{G}{2s}$$

$$F_3 = \frac{\Delta_1^2\,\mathfrak{P}_1 + \Delta_2^2\,\mathfrak{P}_2 + \Delta_3^2\,\mathfrak{P}_3}{2s}$$

$$F_2 = \frac{\Delta_1\,\mathfrak{P}_1 + \Delta_2\,\mathfrak{P}_2 - \Delta_3\,\mathfrak{P}_3}{2s} = 0$$

Aus diesen Ausdrücken findet man:

$$F_3 = \frac{1}{2s}\left[G\,\Delta_1\,\Delta_3 + \mathfrak{P}_2\,\frac{\Delta_1\,\Delta_2\,(\Delta_2 - \Delta_1) - \Delta_1\,\Delta_3\,(\Delta_1 + \Delta_3) + \Delta_2\,\Delta_3\,(\Delta_2 + \Delta_3)}{\Delta_1 + \Delta_3}\right]$$

Die Bedingungen (8) können demnach geschrieben werden:

$$\left.\begin{aligned} D &> 2V\sqrt{2s\frac{M}{G}} \\ D &> 2V\sqrt{2s\frac{B(\varDelta_1+\varDelta_3)}{(G-\mathfrak{P}_2)(\varDelta_1+\varDelta_3)\varDelta_1\varDelta_3+\mathfrak{P}_1(\varDelta_3-\varDelta_1)\varDelta_1\varDelta_3+\mathfrak{P}_3(\varDelta_1+\varDelta_3)\varDelta_2\varDelta_3}} \end{aligned}\right\} \quad . \; . \; (9)$$

Für numerische Berechnungen ist es nothwendig, das als Masse ausgedrückte Trägheitsmoment B des Baues zu bestimmen. Denken wir uns, dass man in einem parallelepipedischen Raum die Masse $\frac{G}{2g}$ ganz gleichförmig vertheile, so ist es immer möglich, die Dimensionen dieses Parallelepipeds so zu wählen, dass das Trägheitsmoment desselben mit dem wahren Trägheitsmoment B genau übereinstimmt. Nennen wir h_2 die Höhe, l_2 die mit der Längenrichtung der Lokomotive parallele Dimension des Parallelepipeds, so ist bekanntlich das Trägheitsmoment desselben $\frac{G}{2g}\frac{1}{12}(l_2^2+h_2^2)$ Wir können daher schreiben:

$$B = \frac{G}{2g}\frac{1}{12}(l_2^2+h_2^2) \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (10)$$

Wäre B und G bekannt, so würde man vermittelst dieses Ausdruckes die Dimensionen l_2 und h_2 leicht so bestimmen können, dass das Trägheitsmoment des Parallelepipeds mit dem Trägheitsmoment des wirklichen Baues übereinstimmt. Allein B ist eben nicht bekannt, sondern nur G, und es handelt sich darum, l_2 und h_2 so zu wählen, dass $\frac{G}{2g}\frac{1}{12}(l_2^2+h_2^2)$ dem wahren Trägheitsmoment B gleich wird. Wir werden wohl keinen erheblichen Fehler begehen, wenn wir für l_2 die totale Länge des Kessels, und für h_2 den Durchmesser des Röhrenkessels in Rechnung bringen.

Setzt man in den ersten der Ausdrücke (9) für M seinen Werth $\frac{G}{2g}$ und in den zweiten für B obigen Werth (10) so erhalten wir:

$$\left.\begin{aligned} D &> 2V\sqrt{\frac{s}{g}} \\ D &> 2V\sqrt{\frac{s}{g}\cdot\frac{1}{12}\,\frac{(l_2^2+h_2^2)\;(\varDelta_1+\varDelta_3)\,G}{(G-\mathfrak{P}_2)(\varDelta_1+\varDelta_3)\varDelta_1\varDelta_3+\mathfrak{P}_1(\varDelta_2-\varDelta_1)\varDelta_1\varDelta_2+\mathfrak{P}_3(\varDelta_1+\varDelta_3)\varDelta_2\varDelta_3}} \end{aligned}\right\} \quad (11)$$

Den Bedingungen $F_1 > \omega^2 M$ und $F_2 > 4\omega^2 B$ wird demnach entsprochen, wenn der Durchmesser eines Triebrades grösser genommen wird, als der grössere von den zwei Werthen, welche die Ausdrücke (11) bestimmen.

Wir wollen sehen, wie gross nach dieser Regel die Triebräder einer *Stephenson'shen* und einer *Crampton'schen* Lokomotive werden müsste.

Bei der Personenlokomotive von *Stephenson* liegt die Triebaxe immer nahe, bisweilen sogar ganz genau unter dem Schwerpunkt des Baues. Wir wollen das Letztere annehmen, setzen daher $\varDelta_2 = 0$. Die Belastung $\mathfrak{P}_2$ der Triebräder beträgt bei dieser Lokomotive in der Regel 0.44 vom Gewicht des Baues. Wir setzen daher $\mathfrak{P}_2 = 0.44\,G$. Der Durchmesser des Röhrenkessels ist ungefähr um $\frac{1}{5}$ von der totalen Länge, es ist also h_2 ungefähr $\frac{1}{5}\,l_2$ und h_2^2 gleich $\frac{1}{25}\,l_2^2$, wir dürfen uns also erlauben h_2^2 gegen l_2^2 zu vernachlässigen. Die beiden Tragaxen sind vom Schwerpunkt nahe gleich weit entfernt. Wir dürfen also $\Delta_1 = \Delta_3 = \frac{\Delta_1 + \Delta_3}{2}$ setzen. Mit dieser die Personenlokomotive von *Stephenson* charakterisirenden Annahmen werden die Ausdrücke (11)

$$\left. \begin{aligned} & D > 2V\sqrt{\frac{s}{g}} \\ & D > 1.5\,V \frac{l_2}{\Delta_1 + \Delta_3} \sqrt{\frac{s}{g}} \end{aligned} \right\} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (12)$$

Der Durchmesser des Triebrades muss also um so grösser sein, je grösser die grösste Fahrgeschwindigkeit und je kleiner der Radstand $\Delta_1 + \Delta_3$ im Verhältniss zur Länge des Baues ist.

Bei einer von *Stephenson* erbauten Lokomotive beträgt die Total-Kessellänge 6 Meter und der Radstand 3.55 Meter. Die Zusammendrückung s der Federn ist nie kleiner als 0.04 Meter. Mit diesen Daten gibt der erste der Ausdrücke (12)

$$D > 0{\cdot}13\,V \text{ und } V < 8\,D$$

gibt dagegen der zweite der Ausdrücke 12

$$D > 0.18\,V \text{ und } V < 5{\cdot}6\,D \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (13)$$

Die grösste Fahrgeschwindigkeit dieser Lokomotive von *Stephenson* soll also nach dieser Rechnung kleiner als $5.6\,D$ sein. Sie wird, wenn man Triebräder von $D = 2$ Meter Durchmesser annimmt, nun $2 \times 5{\cdot}6 = 11{\cdot}2$ Meter.

Für eine Personenzug-Lokomotive nach dem System von *Crampton* haben wir folgende Annahmen zu machen.

Wir haben unserer Untersuchung eine Lokomotive zu Grunde gelegt, bei welcher die Triebaxe um Δ_2 und eine Tragaxe um Δ_1 hinter dem Schwerpunkt, die zweite Trag-Axe dagegen um Δ_3 vor dem Schwerpunkte liegt. In der Lokomotive von *Crampton* sind die Entfernungen des Schwerpunktes von der hinter der Feuerbüchse angebrachten Trieb-Axe und von der vordersten Tragaxe gleich gross, wir müssen also $\Delta_2 = \Delta_3$ setzen. Hinter dem Schwerpunkt kommt keine Tragaxe vor, wohl ist aber eine solche genau unter dem Schwerpunkt angebracht; wir müssen also $\Delta_1 = 0$ setzen. Die Belastung der Triebaxe ist nahe 0·44 vom Gewichte des auf den Federn liegenden Baues; wir haben daher $\mathfrak{P}_2 = 0{\cdot}44\,G$. h_2^2 dürfen wir auch hier wie früher gegen l_2^2 vernachlässigen. Mit diesen Daten werden die Ausdrücke (11)

$$\left. \begin{aligned} & D > 2V\sqrt{\frac{s}{g}} \\ & D > 1{\cdot}23\,V \frac{l_2}{\Delta_2 + \Delta_3} \sqrt{\frac{s}{g}} \end{aligned} \right\} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (14)$$

An dieser Lokomotive ist aber der Radstand $\Delta_2 + \Delta_3$ so gross, als die totale Kessellänge ist, also $\frac{l_2}{\Delta_2 + \Delta_3} = 1$. Nehmen wir auch hier $s = 0{\cdot}04$ $g = 9{\cdot}81$, so erhalten wir

BLB BADISCHE LANDESBIBLIOTHEK Baden-Württemberg

$$D > 0{\cdot}13\ V \text{ und } V < 8\,D$$

$$D > 0{\cdot}079\ V \text{ und } V < 12{\cdot}6\,D$$

Die grösste Fahrgeschwindigkeit dieser Lokomotive von *Crampton* soll also nach dieser Rechnung kleiner als $8\,D$ sein. Sie wird, wenn man Triebräder von 2·3 Meter Durchmesser annimmt, 18·4 Meter. Man kann also mit dieser Lokomotive ohne Gefahr bedeutend schneller fahren, als mit der von *Stephenson*.

Unsere Formeln (3) Seite (169) sagen uns nicht nur, wie gross die Triebräder nicht sein sollen, sie belehren uns auch, wie gross die Räder sein sollen, damit eine Lokomotive bei einer gewissen Geschwindigkeit, mit der sie zu laufen bestimmt ist, möglichst schwache Störungen verursacht.

Die Werthe von $\mathfrak{P}_1$ und $\mathfrak{Q}_1$ der Formeln (3) Seite (169), welche das Nicken bestimmen, werden bei einer unendlich kleinen Winkelgeschwindigkeit, also bei einem unendlich grossen Durchmesser der Triebräder am kleinsten. Anders verhält es sich mit den Werthen von $\mathfrak{Q}$ und $\mathfrak{R}$, die das Wogen bestimmen. Diese werden für eine bestimmte endliche Grösse der Triebräder, nämlich für denjenigen Werth von D am kleinsten, für welchen

$$\frac{D}{F_1 - \omega^2 M}$$

den kleinsten Werth hat. Setzen wir diesen Ausdruck X und führen in denselben für ω seinen Werth $\frac{2V}{D}$ ein, so wird:

$$X = \frac{D^3}{F_1 D^2 - 4 V^2 M}$$

Dieser Ausdruck verschwindet für $D = 0$ und wird unendlich, sowohl für $D = 2V\sqrt{\frac{M}{F_1}}$ als auch für $D = \infty$; zwischen diesen beiden Werthen von D liegt also nothwendig ein gewisser endlicher Werth, für welchen X ein Minimum wird, d. h. es gibt nebst dem nicht ausführbaren Werth $D = 0$ noch einen endlichen Werth von D, für welchen das Wogen möglichst schwach ausfällt. Für diesen vortheilhaftesten Werth von D muss $\frac{dX}{dD} = 0$ sein. Nun ist

$$\frac{dX}{dD} = \frac{D^2 (D^2 F_1 - 12 V^2 M)}{(F_1 D^2 - 4 V^2 M)^2}$$

Der diesen Ausdruck zum Verschwinden bringende vortheilhafteste Werth von D ist demnach

$$D = V\sqrt{12\frac{M}{F_1}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (15)$$

oder auch weil $\sqrt{\frac{M}{F_1}} = \sqrt{\frac{s}{g}}$ ist

$$D = 2V\sqrt{3\frac{s}{g}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (16)$$

für $s = 0·04$ Meter. $g = 9·808$ wird

$$D = 0·22\ V$$

Dieser Durchmesser ist aber sehr gross, denn er wird selbst für eine mässige Fahrgeschwindigkeit von 10 Meter bereits 2·2 Meter.

Bezeichnet man mit V_1 die gefährliche Geschwindigkeit einer Lokomotive, deren Triebräder einen Durchmesser D haben, so hat man zur Bestimmung derselben

$$D^2 F_1 = 4 V_1^2 M$$

Daraus folgt:

$$D = V_1 \sqrt{4 \frac{M}{F_1}} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (17)$$

Aus (15) und (17) folgt aber:

$$V_1 = V \sqrt{3} = 1·73\ V \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (18)$$

Das Wogen einer Lokomotive, die mit einer Geschwindigkeit V zu fahren bestimmt ist, wird also möglichst schwach, wenn der Durchmesser der Triebräder so gross genommen wird, als der Ausdruck (16) bestimmt, und die gefährliche Geschwindigkeit ist dann 1·73 mal so gross als die Geschwindigkeit V.

Für den vortheilhaftesten Werth von D, den die Gleichung (15) darbietet, wird, wenn man berücksichtigt dass $M = \frac{G}{2g}$ $F_1 = \frac{G}{2s}$ ist

$$X = 6 \frac{V}{G} s \sqrt{3 \frac{s}{g}}$$

Die Werthe von $\mathfrak{Q}$ und $\mathfrak{R}$ der Ausdrücke (3) Seite 169 werden mithin:

$$\mathfrak{Q} = \mathfrak{R} = \frac{6}{16} \pi \cdot \frac{W}{G} \cdot \frac{V}{L} \cdot s \sqrt{3 \frac{s}{g}}$$

$\frac{W}{G}$ ist für alle Lokomotive sehr nahe eine Constante, eben so auch die Zusammendrückung s der Federn. Damit also die Werthe von $\mathfrak{Q}$ und $\mathfrak{R}$ für alle Lokomotive gleich gross ausfallen, muss auch $\frac{V}{L}$ constant sein, oder es muss die Länge der Schubstange der Fahrgeschwindigkeit proportional genommen werden. Eine grosse Fahrgeschwindigkeit erfordert also nicht nur grosse Triebräder, sondern auch lange Schubstangen. Das erstere dieser Elemente ist jedoch viel wichtiger als das letztere, denn wenn der Durchmesser D genau oder annähernd so gross ist als die Gleichung (15) vorschreibt, fallen die Werthe von $\mathfrak{Q}$ $\mathfrak{R}$ $\mathfrak{Q}_1$ $\mathfrak{R}_1$ selbst bei einem mässigen Werth von L beinahe verschwindend klein aus.

Setzen wir z. B. $V = 12$ $s = 0·05$ $\frac{W}{G} = \frac{1}{20}$ $g = 9.81$ $L = 2$, so wird der vortheilhafteste Werth von $D = 3$ und $\mathfrak{Q} = \mathfrak{R} = \frac{1}{453}$ Meter.

BLB BADISCHE LANDESBIBLIOTHEK Baden-Württemberg

Diese numerischen Rechnungen sind nun freilich nicht ganz zuverlässig, indem das Trägheitsmoment B beinahe nur durch eine Schätzung in Rechnung gebracht wurde, allein so viel kann man doch daraus sehen, dass die wirklichen Fahrgeschwindigkeiten der Personenlokomotive den gefährlichen Geschwindigkeiten oftmals sehr nahe kommen dürften. Wenn aber auch diese numerischen Rechnungen nicht ganz verlässlich sind, so ist doch die Form der Ausdrücke (12) und (14) eine Wahrheit; wir sind also zu dem Ausspruch berechtiget, dass eine grosse Fahrgeschwindigkeit grosse Triebräder, starre Federn und eine im Verhältniss zur Länge des Lokomotivbaues weite Radstellung erfordert.

Diese Gesetze, welche uns die Untersuchung über das Wanken, Wogen und Nicken geliefert hat, gelten nicht nur für diese specielle Lokomotive, die wir der Untersuchung zu Grunde gelegt haben, sondern sie gelten auch für alle andern Anordnungen, die nicht mit Blindaxen versehen sind, vorausgesetzt, dass man sich an den Sinn dieser Gesetze und an den wörtlichen Ausdruck derselben, nicht aber an den Buchstaben der Formeln hält. Es gilt z. B. für alle Lokomotive das Gesetz, dass alle Federn im ruhenden Zustand der Lokomotive gleich stark zusammengepresst sein sollen, dass ferner die Gleitstücke in ihrer mittleren Position in die durch den Schwerpunkt gehende Querebene fallen sollen; dass die Federn starr sein sollen; dass die Summe der Produkte aus den Axenbelastungen in die Quadrate der Entfernungen der Axen von dem Schwerpunkt möglichst gross sein soll etc. Hält man sich also an den wahren Sinn dieser Gesetze, so darf man sie jederzeit anwenden.

Diese Gesetze sind als Grundgesetze anzusehen, die bei dem Bau einer jeden Lokomotive beobachtet werden müssen, und die man ungestraft nicht übertreten darf. Eine Lokomotive ist richtig oder fehlerhaft angeordnet je nachdem ihre Bauart diesen Gesetzen entspricht oder diese Gesetze verletzt. Einzelne dieser Gesetze sind zwar auch auf empirischem Wege aufgefunden oder durch das gesunde Gefühl errathen worden, allein im Allgemeinen fehlt es in der Praxis noch sehr an klarer Uebersicht, das Herumprobiren ist noch immer an der Tagesordnung und die Constructeurs sprechen sich noch immer dahin aus, dass es überhaupt nicht möglich sei, allgemein gültige Regeln für den Bau der Lokomotive aufzustellen. Hoffentlich wird man über den Lokomotivbau zu einer anderen Ansicht kommen, wenn sich einmal die hier aufgestellten Regeln in der Praxis verbreitet haben werden.

Die aufgefundenen Gesetze werden uns in der Folge zur Bestimmung der Dimensionen von neu zu erbauenden Lokomotiven wesentliche Dienste leisten, zunächst wollen wir uns derselben bedienen um die gegenwärtig am häufigsten im Gebrauch befindlichen Lokomotive hinsichtlich der Stabilität ihres Baues zu beurtheilen.

Beurtheilung verschiedener Lokomotive hinsichtlich der Stabilität ihres Baues.

1. Die Personenlokomotive von *Stephenson* mit innen liegenden Cylindern, die Triebaxe in der Mitte, die drei Axen zwischen dem Feuerkasten und der Rauchkammer, innere Rahmen. (Tab. I, Fig. 3, 4.)

Obgleich die Construction dieser Lokomotive die am meisten verbreitete ist, so können wir doch von ihrer Stabilität nur wenig Gutes sagen. Die Cylinder liegen zwar nahe neben einander, allein die Schubstangen haben immer im Verhältniss zu den Kurbeln nur eine geringe Länge. Die Kurbeltriebaxe liegt unter dem Kessel, der Schwerpunkt des beweglichen Baues liegt also hoch. Die Maschine hat innere Rahmen, die Entfernung der Federn der einen Seite von den Federn der andern Seite der Lokomotive ist also klein. Es ist mithin nur eine von den Bedingungen erfüllt, durch die man sich gegen das Wanken schützen kann. Noch ungünstiger ist diese Lokomotive hinsichtlich des Wogens und Nickens gebaut. Die Radstellung ist eine enge, denn alle Axen befinden sich zwischen dem Feuerkasten und der Rauchkammer. Die jederzeit eine beträchtliche Belastung erfordernde Triebaxe ist in der Mitte ganz in der Nähe des Schwerpunktes angebracht, die Belastung der Vorder- und Hinterräder ist also zu schwach. Die Cylinder liegen viel zu weit vor dem Schwerpunkt des Baues, die Gleitstücke sollten in ihrer mittleren Position in der durch den Schwerpunkt gehenden Querebene liegen, befinden sich aber weit vorne, ungefähr über der Vorderaxe. Die Schubstangen sollten auch zur Schwächung des Wogens und Nickens eine beträchtliche Länge haben, was, wie schon gesagt wurde, nicht der Fall ist Es ist also an dieser Lokomotive hinsichtlich der Stabilität nichts zu loben, als dass die Cylinder nahe neben einander liegen. Man wird gut thun, wenn man diese Bauart ganz verlässt.

2. Die Personenlokomotive von *Stephenson* mit aussen, vorne neben der Rauchkammer liegenden Cylindern, die Triebaxe in der Mitte, die drei Axen zwischen dem Feuerkasten und der Rauchkammer, innere Rahmen. (Tab. II, Fig. 5 und 6.)

An dieser Lokomotive ist keine von den Bedingungen erfüllt, die wir als Merkmale einer guten Construction aufgefunden haben. Die Schubstangen haben eine geringe Länge, die Cylinder liegen zu weit vorne, die mittlere Position der Gleitstücke fällt um ein Beträchtliches vor den Schwerpunkt des Baues. Durch die äussere Lage der Cylinder sind sie zu weit von einander entfernt, verursachen also Wanken. Die Triebräder sind in der Mitte und sollten hinten sein. Die Radstellung ist eine enge, weil alle Axen zwischen dem Feuerkasten und der Rauchkammer liegen. Der Schwerpunkt liegt hoch, insbesondere über den Axen der Tragräder. Es sind innere Rahmen vorhanden, die Federn sind daher zu nahe neben einander. Diese Lokomotive hat durch die Einfachheit ihres Baues ein „praktisches" Ansehen, ist aber so fehlerhaft als nur möglich angeordnet. Wenn die Federn nicht so starr wären, könnte man sie sicherlich gar nicht brauchen.

3. *Stephenson's* Personenzuglokomotive mit in der Mitte des Wagenbaues liegenden Cylindern, die Triebaxe in der Nähe der Feuerbüchse, jedoch vor derselben, innere Rahmen. (Tab. II, Fig. 7 und 8.)

Bei dieser Lokomotive sind mehrere von den von uns aufgestellten Bedingungen einer richtigen Bauart ganz gut erfüllt. Die hintere Axe ist hier Triebaxe, und die Gylinder haben eine solche Lage, dass die Gleitstücke in ihrer mittleren Position wenigstens nahe in die Vertikalebene fallen, die quer durch den Schwerpunkt des Baues geht. Allein der Radstand $(\Delta_2 + \Delta_1)$ ist zu klein und die Schubstangen sind auch wie bei allen *Stephenson*'schen Lokomotiven zu kurz, es sind also zwei von den Bedingungen, durch deren Erfüllung das Nicken und Wogen möglichst geschwächt werden kann, nicht realisirt. Hinsichtlich des Wankens ist diese Lokomotive sehr fehlerhaft angeordnet. Die Cylinder liegen aussen, die Schubstangen haben eine geringe Länge, es sind innere Rahmen angebracht oder die Federn liegen innerhalb der Räder, der Schwerpunkt des Baues liegt hoch, weil die Axe der grossen Triebräder unter dem Kessel durchgeht. Der lobenswerthen Eigenschaften hat also diese Lokomotive nur die zwei zuerst genannten.

4. Die Personenlokomotive von *Crampton* ohne Blindaxe, mit aussen liegenden Cylindern und mit grossen Triebrädern, deren Axe hinter der Feuerbüchse liegt. (Tab. II, Fig 9 und 10.)

Ueber diese Maschine fällen auch unsere trocknen Formeln ein sehr günstiges Urtheil. Die Cylinder sind so gelegt, dass die mittlere Position der Gleitstücke in die durch den Schwerpunkt gehende vertikale Querebene fallen. Die Triebräder haben eine bedeutende

BLB BADISCHE LANDESBIBLIOTHEK Baden-Württemberg

Grösse und ihre Axe liegt nicht in der Mitte, sondern hinter der Feuerbüchse. Der Radstand ist grösser, als bei irgend einer andern Personenlokomotive. Die Schubstangen haben eine sehr beträchtliche Länge. Werden die Federn hinreichend starr gemacht und in der Weise angeordnet, dass sie in ruhigem Zustand der Lokomotive um gleich viel zusammengedrückt sind, so entspricht diese Lokomotive vollkommen und vollständig den Bedingungen hinsichtlich des Wogens und Nickens. Aber auch gegen das Wanken ist diese Lokomotive in mehrfacher Hinsicht gut gebaut. Die Schubstangen haben, wie schon gesagt wurde, eine sehr beträchtliche Länge. Der Schwerpunkt des Baues liegt tiefer, als bei irgend einer andern Personenlokomotive, und es liegen wenigstens die vordern Federn ausserhalb der Räder. Nur allein der Umstand ist ein ungünstiger, dass die Cylinder ausserhalb liegen. Diese Lokomotive hat also nach dem Urtheile unserer Formeln nur eine einzige Unvollkommenheit; und sie würde zu dem wahren Vorbild aller Personenlokomotiven gemacht werden können, wenn man diese äussere Lage der Cylinder mit einer inneren Lage vertauschen könnte, ohne eine von den übrigen der wirklich realisirten Bedingungen zu verletzen.

Sucht man eine Construction in einer Hinsicht zu verbessern, so begegnet es gewöhnlich, dass man sie in einer andern Hinsicht verschlechtert. *Crampton* war glücklicher. Er wollte nur Eine Verbesserung machen, dieser folgten aber mehrere andere freiwillig nach. *Crampton* wollte grössere Räder anwenden, ohne den Schwerpunkt des Baues höher legen zu müssen, und hatte den glücklichen Gedanken, sie von der Mitte wegzunehmen und hinter die Feuerbüchse zu verlegen, dadurch konnte nun der Schwerpunkt tiefer gelegt werden, wurde der Radstand grösser, erhielten die Cylinder ihre richtige Längenposition und wurden die Schubstangen von selbst länger.

5. Die Lokomotive von *Norris* mit aussen liegenden Cylindern, mit vier gekuppelten Triebrädern und mit einem beweglichen vierrädrigen Laufwagen. (Tab. V, Fig. 17 und 18.)

Die Lage der Cylinder ist theils eine ungünstige, theils eine fehlerhafte; sie ist ungünstig, weil die Cylinder aussen liegen; fehlerhaft, weil sie zu weit vorne liegen. Bringt man die Cylinder in eine solche Lage, dass die mittlere Position der Gleitstücke in die durch den Schwerpunkt gehende Querebene fällt, so muss die hinter der Feuerbüchse befindliche Triebaxe von den Gleitstücken aus vermittelst Schubstangen getrieben werden, weil sonst die Schubstangen zu kurz würden. Die Radstellung ist eine richtige, allein der Schwerpunkt der Maschine kommt ziemlich hoch zu liegen, weil die vor dem Feuerkasten befindliche Triebaxe unter dem Kessel durchgeht. Beseitiget man die Fehler dieser Construction, so kommt man zur Lokomotive von *Crampton* ohne Blindaxe.

Die Lokomotive von Crampton mit Blindaxe.

Die ganze frühere Untersuchung über das Wanken, Wogen und Nicken der Lokomotive bezieht sich nur allein auf solche Anordnungen, bei welchen die Kraft von den Gleitstücken aus direkt durch Schubstangen auf die Triebaxe übertragen wird. In dieser neueren Personenzuglokomotive von *Crampton* ist eine so direkte Uebertragung der Kraft nicht vorhanden, sondern die Kraft wird zunächst von den Gleitstücken aus vermittelst Schubstangen auf eine gegen den Rahmenbau unveränderlich gelagerte Kurbelaxe übertragen, und erst von dieser aus wird die hinter der Feuerbüchse befindliche Triebaxe vermittelst Kurbeln und Kupplungsstangen getrieben. Diese in dem Rahmenbau liegende, mit inneren Maschinenkurbeln und mit äusseren Kupplungskurbeln versehene Blindaxe wird, beim Vorwärtslaufen der Lokomotive, nach vertikaler Richtung abwärts gedrückt, und diese Pressung, in Verbindung mit allen übrigen auf den Rahmenbau einwirkenden

BLB BADISCHE LANDESBIBLIOTHEK Baden-Württemberg

Horizontal- und Vertikalkräften, bewirkt in dieser Lokomotive das Wanken, Wogen und Nicken.

In der Maschine von *Crampton* liegt die Triebaxe höher als die Blindaxe und als die Gleitstücke, allein da die äusseren Kupplungsstangen im Verhältniss zur Höhe der Triebaxe über der Blindaxe sehr lang sind, so werden wir keinen merklichen Fehler begehen, wenn wir annehmen, dass die Triebaxe, die Blindaxe und die Gleitstücke in einer und derselben horizontalen Ebene liegen, in welchem Falle die äusseren Kupplungsstangen stets eine horizontale Lage haben. Tab. XIV, Fig. 55 stellt den Mechanismus und das Kräftesystem der vordern Maschine dar, Fig. 56 den Mechanismus und das Kräftesystem der hintern Maschine. Fig. 57 ist eine ideale Darstellung des Rahmenbaues und der auf denselben einwirkenden Kräfte. ε ist der Verbindungspunkt des Tenders mit der Lokomotive. A die Triebaxe. B die Blindaxe. C D die Gleitstücke der beiden Maschinen. F die Punkte, in welchen die Cylinder mit dem Rahmen verbunden sind. H der Schwerpunkt des auf den Federn liegenden Baues. Die in Betrachtung zu ziehenden Kräfte sind folgende:

Das Gleitstück der vordern Maschine übt gegen das obere Führungslineal nach vertikaler Richtung aufwärts einen Druck $P\frac{r}{L}\sin.\alpha$ aus. Das Gleitstück der hintern Maschine übt gegen das Führungslineal nach vertikaler Richtung aufwärts einen Druck $P_1\frac{r}{L}\cos.\alpha$ aus. Gegen den Zapfen der vorderen Maschinenkurbel wird nach horizontaler Richtung nach vorwärts ein Druck P, nach vertikaler Richtung abwärts ein Druck $P\frac{r}{L}\sin.\alpha$ ausgeübt. Gegen den Zapfen der hintern Maschine wird nach horizontaler Richtung nach rückwärts ein Druck P_1, nach vertikaler Richtung abwärts ein Druck $P_1\frac{r}{L}\cos.\alpha$ ausgeübt. Gegen den Zapfen der vorderen Kupplungskurbel wirkt nach horizontaler Richtung nach vorwärts ein Druck P, nach vertikaler Richtung kein Druck. Gegen den Zapfen der hinteren Kupplungskurbel wirkt nach horizontaler Richtung, aber nach rückwärts zielend, eine Kraft P_1, nach vertikaler Richtung keine Kraft. Die Blindaxe zieht also den Rahmenbau nach horizontaler Richtung vorwärts mit einer Kraft $2P$, nach horizontaler Richtung rückwärts mit einer Kraft $2P_1$, nach vertikaler Richtung abwärts mit einer Kraft $P\frac{r}{L}\sin.\alpha + P_1\frac{r}{L}\cos.\alpha$.

Den in A (Fig. 57) nach horizontaler Richtung und nach vorwärts wirkenden Druck der Triebaxe gegen die Axengabeln $\mathfrak{H}$ genannt, so hat man zur Bestimmung derselben

$$\mathfrak{H}\frac{D}{2} = P_1\left(\frac{D}{2} + r\cos.\alpha\right) - P\left(\frac{D}{2} - r\sin.\alpha\right)$$

$$\mathfrak{H} = P_1 - P + \frac{2r}{D}(P\sin.\alpha + P_1\cos.\alpha) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

Um das Wanken, Wogen und Nicken der Maschine zu bestimmen, müssen wir bestimmen: 1) die Summe der Vertikalkräfte ΣZ, welche auf den Bau einwirken. 2) die Summe der Momente der Kräfte in Bezug auf die durch den Schwerpunkt gehende Queraxe. 3) Die Summe der Momente in Bezug auf die durch den Schwerpunkt gehende Längenaxe.

Die Summe der Vertikalkräfte reduzirt sich aber hier einzig und allein auf die Summe der Federkräfte und das Gewicht G des Baues; denn die Summe der Kräfte, welche die Blindaxe abwärts pressen, ist genau so gross, als die Summe der Pressungen,

BLB BADISCHE LANDESBIBLIOTHEK Baden-Württemberg

welche die Gleitstücke nach vertikaler Richtung aufwärts ausüben. Es ist demnach für diese Maschine

$$\Sigma Z = -2\zeta F_1 + 2\varphi F_2 \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (2)$$

Die Summe der Momente in Bezug auf die Längenaxe reduzirt sich hier ebenfalls auf die Summe der Momente der Federkräfte, denn die Pressungen der Gleitstücke geben eine Momentensumme $e\left(P\frac{r}{L}\sin\alpha - P_1\frac{r}{L}\cos.\alpha\right)$ und die Pressungen gegen die Zapfen der Maschinenkurbeln geben eine Momentensumme $e\left(P_1\frac{r}{L}\cos.\alpha - P\frac{r}{L}\sin.\alpha\right)$. Der Gesammtbetrag dieser Summe ist demnach gleich Null.

Die Summe der Momente aller auf den Bau einwirkender Kräfte ist demnach vermöge c, Seite 143

$$X_1 = -2\varepsilon^2\psi F_1 \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (3)$$

Nennt man Δ den Horizontalabstand der Blindaxe von dem Schwerpunkt, h die Höhe dieses Schwerpunkts über der Horizontalebene, in der, der Voraussetzung gemäss, die Triebaxe, die Blindaxe und die Gleitstücke liegen. W den Widerstand des Trains, und berücksichtiget, dass die Horizontalabstände der Gleitstücke vom Schwerpunkt annähernd $r\cos.\alpha + L - \Delta$ $r\sin.\alpha + L - \Delta$ sind, so erhalten wir für die Summe der Momente aller Kräfte in Bezug auf die durch den Schwerpunkt gehende Queraxe folgenden Ausdruck:

$$Y_1 = \left\{\begin{array}{l} +2\zeta F_2 - 2\varphi F_2 \\[1em] h(P_1 - P + 2P - 2P_1 + \mathfrak{H} - W) \\[1em] P\frac{r}{L}\sin.\alpha\,(r\cos.\alpha + L - \Delta) + P_1\frac{r}{L}\cos.\alpha\,(r\sin.\alpha + L - \Delta) \\[1em] \Delta\left(P\frac{r}{L}\sin.\alpha + P_1\frac{r}{L}\cos.\alpha\right) \end{array}\right\} \quad \ldots \quad (4)$$

wobei die erste Zeile die Momente der Federkräfte (b Seite 143), die zweite Zeile die Momente der Horizontalkräfte, die dritte Zeile die Momente der Pressungen der Gleitstücke, die vierte Zeile die Momente der Pressungen der Blindaxe ausdrückt.

Führt man in diesen Ausdruck für $\mathfrak{H}$ seinen Werth aus (1) ein und berücksichtiget, dass im Beharrungszustand der Bewegung

$$W = 2K\frac{2l}{D\pi} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (5)$$

ist, so findet man nach einigen einfachen Reductionen:

$$\left.\begin{array}{l} Y_1 = -h\,2K\frac{2l}{D\pi} + 2\zeta F_2 - 2\varphi F_2 + \frac{1}{2}\frac{r^2}{L}(P + P_1)\sin.2\alpha \\[1em] \qquad\qquad + r\left(1 + \frac{2h}{D}\right)(P\sin.\alpha + P_1\cos.\alpha) \end{array}\right\} \quad \ldots \quad (6)$$

Diese Werthe ΣZ X_1 Y_1 sind unabhängig: 1) von der Horizontalentfernung der

Axen der Maschinen, 2) von der Länge der äusseren Kupplungsstangen, 3) von dem Horizontalabstand $\varDelta$ der Blindaxe von dem Schwerpunkt. Es ist demnach ganz gleichgültig, ob die Cylinder bei dieser Lokomotive innen, oder ob sie aussen liegend angebracht werden, und nach wohin man die Blindaxe in horizontalem Sinne verlegt. Da ferner, wie wir gesehen haben, die Triebkräfte P und P_1 weder in der Summe ΣZ, noch in der Summe X_1 erscheinen, so kann in dieser Lokomotive, abgesehen von den Einwirkungen der Bahn, weder ein Wogen noch ein Wanken, sondern einzig und allein ein Nicken eintreten. Wir wollen nun sehen, ob dieses Nicken stärker oder schwächer ist, als bei einer gewöhnlichen Lokomotive ohne Blindaxe.

Vermöge des Ausdruckes (6) Seite 146 ist der Werth von Y_1 für eine Lokomotive ohne Blindaxe

$$\left.\begin{aligned} Y_1 = & - h_1 2K \frac{2l}{D\pi} + 2\zeta F_2 - 2\varphi F_1 + \frac{1}{2}(P+P_1)\frac{r^2}{L}\left(1+\frac{2h}{D}\right)\sin. 2\alpha \\ & + \left[(L-\varDelta_2)\frac{r}{L} + \frac{2rh}{D}\right](P\sin.\alpha + P_1\cos.\alpha) \end{aligned}\right\} \quad \ldots (7)$$

Machen wir, um die Vergleichung dieses Ausdruckes mit (6) zu erleichtern, die günstige Voraussetzung, dass in beiden Maschinen $h = h_1 = 0$ seie, so werden die Werthe von Y_1

A) Für die Maschine von *Crampton mit* Blindaxe:

$$2\zeta F_2 - 2\varphi F_1 + \frac{1}{2}\frac{r^2}{L}(P+P_1)\sin. 2\alpha + r(P\sin.\alpha + P_1\cos.\alpha) \quad \ldots\ldots (8)$$

B) Für die Maschine *ohne* Blindaxe:

$$2\zeta F_2 - 2\varphi F_1 + \frac{1}{2}\frac{r^2}{L}(P+P_1)\sin. 2\alpha + r\frac{L-\varDelta_2}{L}(P\sin.\alpha + P_1\cos.\alpha) \quad \ldots\ldots (9)$$

Diesen letzteren Ausdruck können wir noch weiter spezialisiren. Es ist nämlich $\varDelta_2$ für die Personenlokomotive von *Stephenson* ohne Blindaxe nahe gleich Null, und für die Personenlokomotive von *Crampton* ohne Blindaxe gleich L. Die Werthe von Y_1 sind daher:

C) Für die Personenlokomotive von *Stephenson ohne* Blindaxe:

$$2\zeta F_2 - 2\varphi F_1 + \frac{1}{2}\left(\frac{r^2}{L}\right)(P+P_1)\sin. 2\alpha + r(P\sin.\alpha + P_1\cos.\alpha) \quad \ldots\ldots (10)$$

D) Für die Personenlokomotive von *Crampton ohne* Blindaxe:

$$2\zeta F_2 - 2\varphi F_1 + \frac{1}{2}\frac{r^2}{L}(P+P_1)\sin. 2\alpha \quad \ldots\ldots (11)$$

Vergleicht man diese Ausdrücke (10) und (11) mit (8) so folgt, dass die Maschine von *Crampton mit* Blindaxe 1) gerade so stark nickt, als die Personenlokomotive von *Stephenson ohne* Blindaxe, 2) weit stärker nickt, als die Personenlokomotive von *Crampton* ohne Blindaxe. Dabei ist jedoch vorausgesetzt, dass die Werthe von F_2 für alle drei Maschinen übereinstimmen.

Kurz angedeutet ist also das Urtheil unserer Untersuchung:

Stephenson: innere Cylinder	schwaches Wanken	starkes Wogen	starkes Nicken.
Crampton: ohne Blindaxe	starkes Wanken	kein Wogen	kein Nicken.
Crampton: mit Blindaxe	kein Wanken	kein Wogen	starkes Nicken.

Schliesslich wollen wir noch die Werthe von ζ φ und ψ für die Lokomotive von *Crampton* mit Blindaxe aufstellen. Die Differenzialgleichungen (3) Seite 141 der gaukelnden Bewegungen werden vermittelst der Werthe (2), (3), (6)

$$\left.\begin{aligned} \frac{d^2\zeta}{dt^2} &= -m\zeta + n\varphi \\ \frac{d^2\varphi}{dt^2} &= -c + m_1\zeta - n_1\varphi + \frac{1}{2}(P+P_1)\,q_1 \sin. 2(\alpha_0 - \omega t) \\ &\qquad + p_1\left[P \sin.(\alpha_0 - \omega t) + P_1 \cos.(\alpha_0 - \omega t)\right] \\ \frac{d^2\psi}{dt^2} &= -m_2\psi \end{aligned}\right\} \quad . \; . \; (12)$$

wobei die Coeffizienten $m\, n\, m_1\, n_1\, m_2\, p_1\, q_1$ folgende Werthe haben.

$$\left.\begin{aligned} m &= \frac{f_1+f_2+f_3}{M} = \frac{F_1}{M} & m_1 &= \frac{\Delta_1 f_1 + \Delta_2 f_2 - \Delta_3 f_3}{B} = \frac{F^2}{B} \\ n &= \frac{\Delta_1 f_1 + \Delta_2 f_2 - \Delta_3 f_3}{M} = \frac{F_2}{M} & n_1 &= \frac{\Delta_1^2 f_1 + \Delta_2^2 f_2 + \Delta_3^2 f_3}{B} = \frac{F_3}{B} \\ c &= \frac{2\,l\,h\,K}{B\,D\,\pi} & q_1 &= \frac{r^2}{2\,L\,B} \\ m_2 &= \frac{\varepsilon^2(f_1+f_2+f_3)}{A} = \frac{\varepsilon^2 F_1}{A} & p_1 &= \frac{r}{2B}\left(1+\frac{2h}{D}\right) \end{aligned}\right\} \quad (13)$$

Da die Gleichungen (12) der Form nach mit den Gleichungen (9) Seite 147 übereinstimmen, so werden wir die Integrale der Gleichungen (12) erhalten, wenn wir in die Gleichung (5) Seite 149 und in die Gleichungen (13), (14), (15), Seite 162, so wie endlich in die Gleichungen (21), (22), Seite 164 für $m\, n\, c\, m_1\, n_1\, m_2\, p_1\, q_1$ die so eben zusammengestellten Werthe (13) setzen und ferner noch $p = 0$ und $p_2 = 0$ schreiben.

Wir erhalten somit für die Integrale der Gleichungen (12) folgende Ausdrücke:

$$\psi = \mathfrak{A} \sin. \sqrt{m_2}\, t + \mathfrak{B} \cos. \sqrt{m_2}\, t$$

$$\zeta = \frac{2\,l\,h}{D\,\pi} K \frac{F_2}{F_2^2 - F_1 F_3} + \left\{\begin{array}{l} \mathfrak{G}_1 \sin. a_1 t + \mathfrak{H}_1 \cos. a_1 t + \mathfrak{G}_2 \sin. a_2 t + \mathfrak{H}_2 \cos. a_2 t \\ + \mathfrak{P} \sin. 2(\alpha_0 - \omega t) + \mathfrak{Q} \sin. (\alpha_0 - \omega t) + \mathfrak{R} \cos. (\alpha_0 - \omega t) \end{array}\right\}$$

$$\varphi = \frac{2\,l\,h\,K}{D\,\pi}\,\frac{F_1}{F_2^2 - F_1 F_2} + \left\{\begin{array}{l} \frac{-m_1}{a_1^2 - n_1}\left(\mathfrak{G}_1 \sin. a_1 t + \mathfrak{H}_1 \cos. a_1 t\right) + \frac{-m_1}{a_2^2 - n_1}\left(\mathfrak{G}_2 \sin. a_2 t + \mathfrak{H}_2 \cos. a_2 t\right) \\ + \mathfrak{P}_1 \sin. 2(\alpha_0 - \omega t) + \mathfrak{Q}_1 \sin. (\alpha_0 - \omega t) + \mathfrak{R}_1 \cos. (\alpha_0 - \omega t) \end{array}\right\}$$

$$\mathfrak{P} = -\frac{1}{4}\,\frac{r^2}{L}\,(P + P_1)\,\frac{F_2}{F_2^2 - (4\,\omega^2 M - F_1)(4\,\omega^2 B - F_3)}$$

$$\mathfrak{P}_1 = \frac{1}{4}\,\frac{r^2}{L}\,(P + P_1)\,\frac{4\,\omega^2 M - F_1}{F_2^2 - (4\,\omega^2 M - F_1)(4\,\omega^2 B - F_3)}$$

$$\mathfrak{Q} = -\frac{1}{2}\,r\left(1 + \frac{2\,h}{D}\right) P\,\frac{F_2}{F_2^2 - (\omega^2 M - F_1)(\omega^2 B - F_3)}$$

$$\mathfrak{Q}_1 = +\frac{1}{2}\,r\left(1 + \frac{2\,h}{D}\right) P\,\frac{\omega^2 M - F_1}{F_2^2 - (\omega^2 M - F_1)(\omega^2 B - F_3)}$$

$$\mathfrak{R} = -\frac{1}{2}\,r\left(1 + \frac{2\,h}{D}\right) P_1\,\frac{F_2}{F_2^2 - (\omega^2 M - F_1)(\omega^2 B - F_3)}$$

$$\mathfrak{R}_1 = +\frac{1}{2}\,r\left(1 + \frac{2\,h}{D}\right) P_1\,\frac{(\omega^2 M - F_1)}{F_2^2 - (\omega^2 M - F_1)(\omega^2 B - F_3)}$$

Ist $F_2 = 0$, d. h. sind die Federn so construirt, dass sie im ruhigen Zustand der Lokomotive gleich stark zusammengedrückt sind, so werden diese Ausdrücke bedeutend einfacher, denn unter dieser Voraussetzung wird zunächst:

$$\mathfrak{P} = 0 \qquad \mathfrak{Q} = 0 \qquad \mathfrak{R} = 0$$

$$\mathfrak{P}_1 = -\frac{1}{4}\,\frac{r_2}{L}\,(P + P_1)\,\frac{1}{4\,\omega^2 B - F_3} \qquad \mathfrak{Q}_1 = -\frac{r}{2}\left(1 + \frac{2\,h}{D}\right) P\,\frac{1}{\omega^2 B - F_3}$$

$$\mathfrak{R}_1 = -\frac{r}{2}\left(1 + \frac{2\,h}{D}\right) P_1\,\frac{1}{\omega^2 B - F_3}$$

Allein weil wir von den Einwirkungen der Bahn absehen, so muss $\mathfrak{A} = \mathfrak{B} = 0$ sein und weil auch $\mathfrak{P} = \mathfrak{Q} = \mathfrak{R} = 0$ ist, so muss noch überdies $\mathfrak{G}_1 = \mathfrak{H}_1 = \mathfrak{G}_2 = \mathfrak{H}_2 = 0$ sein; denn Grundschwingungen können, wenn die Bahn keine Einwirkungen hervorbringt, nur durch Kurbelschwingungen hervorgerufen werden; in dem Ausdruck für ψ erscheint aber überhaupt keine Kurbelschwingung, und in dem Ausdruck für ζ verschwinden die Kurbelschwingungen, wenn $\mathfrak{P} = \mathfrak{Q} = \mathfrak{R} = 0$ ist; es müssen also nothwendig sowohl in ψ als in ζ die Grundschwingungen verschwinden, d. h. es muss $\mathfrak{A} = \mathfrak{B} = \mathfrak{G}_1 = \mathfrak{H}_1 = \mathfrak{G}_2 = \mathfrak{H}_2 = 0$ sein. Dann aber reduzirt sich der totale Bewegungszustand bloss auf eine nickende Bewegung, die durch folgenden Ausdruck bestimmt wird:

$$\varphi = -\frac{2\,l\,h\,K}{D\,\pi\,F_3} + \frac{1}{4}\,\frac{r^2}{L}\,(P + P_1)\,\frac{\sin. 2(\alpha_0 - \omega t)}{F_3 - 4\,\omega^2 B} + \frac{\frac{r}{2}\left(1 + \frac{2\,h}{D}\right)}{F_3 - \omega^2 B}\left[P \sin. (\alpha_0 - \omega t) + P_1 \cos. (\alpha_0 - \omega t)\right]$$

Lokomotive mit Schleifenbewegung.

Es ist mir der Gedanke gekommen, dass man vielleicht den Schubstangen-Mechanismus durch die Schleifenbewegung mit Vortheil ersetzen könnte. Tab. VIII, Fig. 31 und 32 und Tab. XV, 59, 60, 61. Die Cylinder liegen aussen und sind an den Rahmenbau befestiget. Zur Uebertragung der Kraft von den Kolben aus auf die Kurbeln der Triebaxe dienen die Schleifen. Der Stiel einer Schleife bewegt sich in zwei an dem Rahmenbau angebrachten Führungen b c und an jeden Kurbelzapfen ist ein Gleitstück gesteckt, das mit dem Kurbelzapfen herumgehet und gleichzeitig in der Schleife auf- und abgleitet. Wir wollen vorläufig von den Schwierigkeiten einer soliden Ausführung dieser Anordnung ganz absehen, und nur zunächst untersuchen, wie sich eine solche Lokomotive hinsichtlich des Wankens, Wogens und Nickens verhält.

Die nach horizontaler Richtung und nach rückwärts zielende Pressung P des Gleitstückes der vordern Maschine gegen ihre Schleife sucht den ganzen Körper der Schleife zu drehen, und dadurch wird die Führung b nach abwärts, die Führung c nach aufwärts gepresst. Diese beiden Pressungen sind gleich gross und der numerische Werth jeder derselben ist $P\frac{r}{\varDelta}\sin.\alpha$, wobei $\varDelta$ die Entfernung der Punkte b und c bedeutet. Die Kraft P_1 der hintern Maschine sucht die Schleife der hintern Maschine zu drehen, und zwar in dem gleichen Sinne, in welchem das Schleifenstück der vordern Maschine zur Drehung angeregt wird. Dadurch erleidet der Führungspunkt b der hintern Maschine einen Druck $P\frac{r}{\varDelta}\cos.\alpha$ nach abwärts und der Führungspunkt c der hintern Maschine einen Druck $P\frac{r}{\varDelta}\cos.\alpha$ nach aufwärts.

Setzen wir zur Abkürzung:

$$\left.\begin{aligned} P\frac{r}{\varDelta}\sin.\alpha &= \mathfrak{B}_1 \\ P_1\frac{r}{\varDelta}\cos.\alpha &= \mathfrak{B}_1 \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

und nennen ferner: W den Widerstand des Trains, $\mathfrak{H}$ den Druck der Triebaxe gegen die Axengabeln, h die Höhe des Schwerpunktes des auf den Federn liegenden Baues über der Axe der Triebräder, so hat man zunächst zur Bestimmung von $\mathfrak{H}$ die Gleichung

$$\mathfrak{H}\frac{D}{2} = P\left(\frac{D}{2} + r\sin.\alpha\right) - P_1\left(\frac{D}{2} - r\cos.\alpha\right)$$

woraus folgt:

$$\mathfrak{H} = P - P_1 + \frac{2r}{D}(P\sin.\alpha + P_1\cos.\alpha) \quad \ldots\ldots\ldots \quad (2)$$

In Figur 61 ist das auf den Bau einwirkende Kräftensystem angegeben, a ist der Angriffspunkt des Widerstandes W, b und c sind die Führungspunkte der Schleifenstiele. Am vordern Punkt c wirkt eine Kräftensumme $\mathfrak{B}+\mathfrak{B}_1$ vertikal aufwärts, am hintern Punkt b wirkt eine eben so grosse Kräftensumme vertikal abwärts, d ist der Angriffspunkt der Kraft $\mathfrak{H}$, e ist der Stopfbüchsendeckel des Cylinders der vordern Maschine, gegen welchen der Druck p wirkt; e_1 der Bodendeckel des Cylinders der hinteren Maschine, gegen welchen der Druck p_1 wirkt. H der Schwerpunkt des auf den Federn liegenden Baues, $\varDelta_2$ die Horizontaldistanz des Schwerpunktes von der Triebaxe. Hieraus folgt nun:

1. Dass die algebraische Summe der Vertikalkräfte gleich Null ist. Ein Wogen wird mithin durch die auf den Bau einwirkenden Kräfte nicht angeregt;
2. dass die algebraische Summe der statischen Momente dieser Kräfte in Bezug auf eine durch den Schwerpunkt gehende Längenaxe ebenfalls gleich Null ist. Ein Wanken wird also durch diese Kräfte ebenfalls nicht angeregt;
3. dass die Kräfte W $\mathfrak{H}$ $\mathfrak{B}$ $\mathfrak{B}_1$ P P_1 den auf den Federn liegenden Bau um eine durch den Schwerpunkt gehende Queraxe mit einem Moment

$$h(-W+\mathfrak{H}+P_1-P)+(\mathfrak{B}+\mathfrak{B}_1)\left(\varDelta_2+\frac{1}{2}\varDelta\right)-(\mathfrak{B}+\mathfrak{B}_1)\left(\varDelta_2-\frac{1}{2}\varDelta\right) \quad . \; . \; . \; . \quad (3)$$

zur Bewegung anregen, und zwar in dem Sinn, dass der vordere Theil des Lokomotivbaues gehoben wird.

Setzt man für $\mathfrak{B}$ $\mathfrak{B}_1$ und $\mathfrak{H}$ die bereits berechneten Werthe (1) und (2), so wird das Moment (3)

$$-hW+r\left(1+\frac{2h}{D}\right)(P\sin.\alpha+P_1\cos.\alpha) \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (4)$$

Die Lokomotive wird also ein dem Werthe dieses Momentes entsprechendes Nicken zeigen müssen.

Der vollständige Werth von Y_1, d. h. die vollständige Summe der Momente aller auf den Bau einwirkenden Kräfte in Bezug auf die durch den Schwerpunkt gehende Queraxe ist nun

$$Y_1=-h\,2K\frac{2l}{D\pi}+2\zeta F_2-2\varphi F_3+r\left(1+\frac{2h}{D}\right)(P\sin.\alpha+P_1\cos.\alpha) \quad . \; . \; . \; . \; . \quad (5)$$

Vergleichen wir diesen Werth von Y_1 mit jenem, den wir Seite 181, für die *Crampton*'sche Lokomotive mit Blindaxe gefunden haben, so sieht man, dass sie sich nur durch das Glied

$$\frac{1}{2}\frac{r^2}{L}(P+P_1)\sin.2\alpha$$

unterscheiden. Dieses Glied ist aber von keinem Belang, denn wenn die Kolben der beiden Maschinen nach einerlei Richtung gehen, verschwindet es ganz, weil dann $(P+P_1)$ gleich Null ist, (Siehe Seite 148), und wenn die Kolben nach entgegengesetzten Richtungen gehen, hat es immer nur einen kleinen, bald positiven, bald negativen Werth. Im Mittel genommen, kann man also sagen, dass diese Lokomotive mit Schleifenbewegung hinsichtlich des Nickens gerade so gut, oder um ein Unbedeutendes besser ist, als die Lokomotive von *Crampton* mit Blindaxe. Beide Anordnungen haben aber die vortreffliche Eigenschaft, dass sie weder Wanken noch Wogen verursachen.

Wenn $F_2=0$ ist, d. h. wenn die Federn so angeordnet sind, dass sie im ruhenden Zustand der Lokomotive um gleich viel zusammengepresst sind, wird die Differenzialgleichung der nickenden Bewegung

BLB BADISCHE LANDESBIBLIOTHEK
Baden-Württemberg

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} = -\frac{hW}{2B} + \frac{r\left(1+\frac{2h}{D}\right)}{2B}(P\sin.\alpha + P_1\cos.\alpha) - \frac{F_1}{B}\varphi \quad \ldots \quad (6)$$

oder wenn man $\alpha = \alpha_0 - \omega t$ setzt

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} = -\frac{hW}{2B} + \frac{r\left(1+\frac{2h}{D}\right)}{2B}\left[P\sin.(\alpha_0-\omega t) + P_1\cos.(\alpha_0-\omega t)\right] - \frac{F_1}{B}\varphi \quad \ldots \quad (7)$$

Für das Integrale dieser Gleichung findet man leicht direkt folgenden Ausdruck:

$$\left.\begin{array}{l}\varphi = -\frac{hW}{2F_1} + \left(\mathfrak{A}\sin.\sqrt{\frac{F_1}{B}}t + \mathfrak{B}\cos.\sqrt{\frac{F_1}{B}}t\right) + \frac{\frac{r}{2}\left(1+\frac{2h}{D}\right)}{F_1-\omega^2 B}\left[P\sin.(\alpha_0-\omega t)\right. \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \left.+P_1\cos.(\alpha_0-\omega t)\right]\end{array}\right\} \quad (8)$$

in welchem $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ die willkürlichen Constanten bedeuten.

Die numerischen Werthe von P und P_1 sind für jede Stellung der Kurbeln. $\frac{\pi}{8}$ W $\frac{D}{r}$

Nennt man V die Fahrgeschwindigkeit, welche der Winkelgeschwindigkeit ω entspricht, so ist $\omega = \frac{2V}{D}$; der Ausdruck für φ wird daher auch:

$$\left.\begin{array}{l}\varphi = -\frac{hW}{2F_1} + \left(\mathfrak{A}\sin.\sqrt{\frac{F_1}{B}}t + \mathfrak{B}\cos.\sqrt{\frac{F_1}{B}}t\right) + \frac{\pi}{16}\,W\,\frac{D^2(D+2h)}{F_1D^2-4V^2B}\times \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad [\pm\sin.(\alpha_0-\omega t) \pm \cos.(\alpha_0-\omega t)]\end{array}\right\} \quad (9)$$

dabei sind die Zeichen so zu wählen, dass $\pm\sin.(\alpha_0-\omega t)$ und $\pm\cos.(\alpha_0-\omega t)$ stets positiv bleiben.

Der Ausdruck $\frac{D^2(D+2h)}{F_1D^2-4V^2B}$ verschwindet für $D=0$, wird unendlich für $F_1D^2-4V^2B = 0$ oder für $D = 2V\sqrt{\frac{B}{F_1}}$, wird auch unendlich für $D=\infty$. Zwischen diesen beiden letzteren Werthen von D liegt also nothwendig ein Werth, für welchen jener Ausdruck ein Minimum wird, und diesen wollen wir suchen. Setzen wir für einen Augenblick:

$$X = \frac{D^2(D+2h)}{F_1D^2-4V^2B} \quad \ldots \quad (10)$$

Differenziren wir diesen Ausdruck in Bezug auf D, so wird:

$$\frac{dX}{dD} = \frac{DF_1}{(D^2F_1-4V^2B)^2}\left(D^3 - \frac{12V^2BD}{F_1} - 16\frac{V^2Bh}{F_1}\right)$$

Für denjenigen Werth von D, welcher X zu einem Minimum macht, muss $\frac{dX}{dD}$ verschwinden, diess ist der Fall für $D=0$ und für denjenigen reellen Werth von D, für welchen wird

$$D^3 - \frac{12V^2BD}{F_1} - \frac{16V^2Bh}{F_1} = 0 \quad \ldots \quad (11)$$

24.

Da h im Vergleich zu $\frac{3}{4}$ D immer sehr klein ist, so kann man $\frac{16 V^2 B h}{F_2}$ gegen $\frac{12 V^2 B D}{F_2}$ vernachlässigen und dann folgt aus dieser kubischen Gleichung

$$D^2 = \frac{12 V^2 B}{F_2}$$

oder

$$D = 2 V \sqrt{\frac{3 B}{F_2}} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (12)$$

Für diesen Werth von D wird der Werth von X, wenn man in demselben ebenfalls 2h gegen D vernachlässigt.

$$X = \frac{3}{2} \frac{V}{F_2} \sqrt{12 \frac{B}{F_2}} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (13)$$

Das Nicken wird also bei dieser Lokomotive am schwächsten, wenn der Durchmesser der Triebräder so gross genommen wird, als der Ausdruck (12) gibt, und dieses Nicken beträgt dann:

$$\varphi = \mathfrak{A} \sin. \sqrt{\frac{F_2}{B}}\, t + \mathfrak{B} \cos. \sqrt{\frac{F_2}{B}}\, t + \frac{3\pi}{32} \frac{W V}{F_2} \sqrt{12 \frac{B}{F_2}} \left[\pm \sin. (\alpha_0 - \omega t) \pm \cos. (\alpha_0 - \omega t)\right] \quad . \quad (14)$$

Für die Lokomotive von *Crampton* ist $\sqrt{\frac{B}{F_2}}$ nahe gleich 0.039 ist. Für diesen Werth gibt die Gleichung (12)

$$D = 0{\cdot}135\, V$$

Dieser Durchmesser wird selbst für eine Geschwindigkeit V von 16 Meter nur 2.1 Meter, ist also sehr wohl ausführbar.

Nennt man V_1 die gefährliche Fahrgeschwindigkeit, d. h. diejenige Geschwindigkeit, für welche der Nenner des Ausdruckes (10) verschwindet, so hat man zur Bestimmung derselben die Gleichung:

$$F_2 D^2 - 4 V_1^2 B - 0$$

woraus folgt:

$$V_1 = \frac{D}{2} \sqrt{\frac{F_2}{B}} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (15)$$

Aus dieser und aus der Gleichung (13) folgt:

$$V_1 = \sqrt{3}\, V = 1{\cdot}73\, V$$

Wenn wir die soeben gefundenen Resultate in Worte fassen, so können wir Folgendes aussprechen:

Wenn man den Durchmesser D der Triebräder einer Lokomotive, die bestimmt ist im Maximum mit einer Geschwindigkeit V zu laufen, so gross nimmt, als die Gleichung

(12) angibt, so tritt bei dieser Geschwindigkeit V das schwächste Nicken ein, nnd die gefährliche Geschwindigkeit V_1 ist dann 1.73mal so gross, als diese grösste Geschwindigkeit V. Ist $\sqrt{\frac{B}{F_2}} = 0.039$. $V = 16$, so wird $D = 2{\cdot}16$ und $V_1 = 28$ Meter.

Wir wollen noch berechnen, wie stark das Nicken in dem allgemeinen Falle wird, wenn der Durchmesser des Triebrades von dem einer gewissen Fahrgeschwindigkeit entsprechenden vortheilhaftesten Werthe abweicht. Setzen wir:

$$D = m\, 2\, V \sqrt{3 \frac{B}{F_2}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (16)$$

wobei m irgend eine positive Zahl bedeutet, die für den vortheilhaftesten Durchmesser gleich eins ist, vernachlässigen in dem Ausdruck (9) $2h$ gegen D und setzen zur Abkürzung:

$$Y = \frac{\pi}{16} W \frac{D^3}{F_2 D^2 - 4 V^2 B} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (17)$$

Führen wir in diesen Ausdruck, nach welchem das Nicken zu beurtheilen ist, den obigen Werth von D ein, so wird derselbe

$$Y = \frac{6\pi}{16} W \frac{V}{F_2} \sqrt{3 \frac{B}{F_2}} \frac{m^3}{3 m^2 - 1} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (18)$$

Für B können wir, wie bisher immer geschehen ist, setzen:

$$B = \frac{G}{2g} \frac{(l_2^2 + h_2^2)}{12} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (19)$$

Um F_2 näher zu bestimmen, wollen wir annehmen, dass die Lokomotive mit 2 Triebrädern und mit einem vierrädrigen vordern Laufwerk versehen, also in der Weise angeordnet sei, wie Fig. (31) zeigt. Nennen wir Δ_2 den Horizontalabstand des Schwerpunktes von der hinter der Feuerbüchse befindlichen Triebaxe, Δ_1 den Horizontalabstand des Schwerpunktes von dem Mittelpunkt des Laufwerkes, $\mathfrak{P}_2$ die Belastung der Triebaxe, $\mathfrak{P}_1$ die Belastung des Laufwerkes, s die Zusammendrückung der Federn im unbewegten Zustand der Lokomotive, so hat man:

$$\left.\begin{aligned} \mathfrak{P}_2 + \mathfrak{P}_1 &= G \\ \mathfrak{P}_2 \Delta_2 &= \mathfrak{P}_1 \Delta_1 \\ F_2 &= \frac{\mathfrak{P}_2 \Delta_2^2 + \mathfrak{P}_1 \Delta_1^2}{2s} \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (20)$$

Hieraus findet man leicht durch Elimination von Δ_1 und $\mathfrak{P}_1$:

$$= \mathfrak{P}_2 \Delta_2^2 \frac{G}{2s(G - \mathfrak{P}_2)} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (21)$$

Führt man die Werthe von B und F_2, welche die Ausdrücke (19) und (20) darbieten, in (16) und (18) ein, so findet man nach einigen Reduktionen:

BLB BADISCHE LANDESBIBLIOTHEK
Baden-Württemberg

$$Y = \frac{6\pi}{16} \frac{W}{G} \frac{s\, l_2\, V}{\Delta_2^2} \sqrt{\frac{s}{g}} \left(\frac{G}{\mathfrak{P}_2} - 1\right) \sqrt{\left[1 + \left(\frac{h_2}{l_2}\right)^2\right] \left(\frac{G}{\mathfrak{P}_2} - 1\right)}\, \frac{m^3}{3\, m^2 - 1} \quad \ldots \quad (22)$$

$$D = m\, V\, \frac{l_2}{\Delta_2} \sqrt{\frac{s}{g}} \sqrt{\left[1 + \left(\frac{h_2}{l_2}\right)^2\right] \left(\frac{G}{\mathfrak{P}_2} - 1\right)} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (23)$$

Wenn wir im Wesentlichen die Verhältnisse der *Crampton*'schen Lokomotive annehmen, dürfen wir setzen:

$$\frac{W}{G} = \frac{1}{20} \quad \frac{G}{\mathfrak{P}_2} = \frac{G}{0{\cdot}44\, G} = 2{\cdot}3 \quad s = 0{\cdot}05 \quad l_2 = 6 \quad h_2 = 1{\cdot}2 \quad \Delta_2 = 2{\cdot}5 \quad g = 0{\cdot}808 \text{ Meter}$$

und dann wird

$$\left.\begin{aligned} D &= 0{\cdot}2\, m\, V \\ Y &= \frac{1}{8178} \frac{-m^3}{3\, m^2 - 1}\, V \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (24)$$

Dieser Werth von Y fällt selbst für einen sehr beträchtlichen Werth von V beinahe verschwindend klein aus, wenn m nur etwas verschieden von demjenigen Werth genommen wird, für welchen $3\, m^2 - 1 = 0$ ist, d. h. wenn m nicht gleich $\frac{1}{\sqrt{3}}$ also nicht gleich $0{\cdot}577$ genommen wird. Wenn also der Durchmesser D um etwas grösser als $0{\cdot}577 \times 0{\cdot}2\, V = 0{\cdot}1154\, V$ genommen wird, so fällt bereits das Nicken schon so schwach aus, dass es in praktischer Hinsicht gar nicht mehr zu beachten ist.

Diese numerische Rechnung ist nur insofern, als das Trägheitsmoment B nur annähernd bestimmt wurde, etwas unzuverlässig. Mit vollkommener Schärfe würde man das Trägheitsmoment des auf den Federn liegenden Baues durch Versuche bestimmen können, und dann liesse sich der einer gewissen Geschwindigkeit entsprechende vortheilhafteste, so wie auch der einer gewissen Geschwindigkeit entsprechende gefährliche Durchmesser ganz scharf durch Rechnung bestimmen. Nennen wir n die Anzahl der Umdrehungen der Triebaxe in einer Sekunde, so ist:

$$n = \frac{1}{\pi} \frac{V}{D}$$

oder wenn wir $D = 0{\cdot}2\, m\, V$ setzen

$$n = \frac{1{\cdot}6}{m}$$

Setzen wir $m = 1$, so wird $D = 0{\cdot}2\, V$ und $n = 1{\cdot}6$, d. h. wenn eine Lokomotive bestimmt ist, mit einer Geschwindigkeit V zu laufen, so ist es am vortheilhaftesten, den Triebrädern einen Durchmesser $0.2\, V$ zu geben, und diese besten Triebräder machen bei der Fahrgeschwindigkeit V in jeder Sekunde $1{\cdot}6$ Umdrehungen.

Setzen wir $m = 0.577$, so wird $D = 0{\cdot}1154\, V$ und $n = 2{\cdot}8$, d. h. wenn man den Triebrädern einer Lokomotive, die bestimmt ist, mit einer Geschwindigkeit V zu laufen einen Durchmesser $D = 0{\cdot}1154\, V$ gibt, so würden die Räder in jeder Sekunde $2{\cdot}8$ Umdrehungen machen, und dabei würde ein heftiges Nicken eintreten.

BLB BADISCHE LANDESBIBLIOTHEK
Baden-Württemberg

Aus den Gleichungen (20) folgt $\frac{G}{\mathfrak{P}_2} - 1 = \frac{\Delta_2}{\Delta_1}$ Führt man diesen Werth in (23) ein, so erhält man:

$$D = m\,V\,l_2 \sqrt{\frac{s}{g}} \sqrt{\left[1 + \left(\frac{h_2}{l_2}\right)^2\right] \frac{1}{\Delta_1\,\Delta_2}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (25)$$

Bezeichnet man mit δ den Radstand, setzt also $\Delta_1 + \Delta_2 = \delta$, so wird $\Delta_1\,\Delta_2 = \Delta_1\,(\delta - \Delta_1)$. Dieses Produkt wird am grössten, wenn $\Delta_1 = \frac{\delta}{2}$ ist und wird dann $\frac{\delta}{2}\,\frac{\delta}{2} = \frac{\delta^2}{4}$. Der Durchmesser der Triebräder fällt also am kleinsten aus, wenn die Axe der Triebräder und der Mittelpunkt des Laufwerks gleich weit vom Schwerpunkt entfernt sind. Ist dieser Bedingung entsprochen, so wird:

$$D = 2\,m\,V\,\frac{l_2}{\delta} \sqrt{1 + \left(\frac{h_2}{l_2}\right)^2} \sqrt{\frac{s}{g}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (26)$$

und dann ist der Durchmesser der Triebräder der Fahrgeschwindigkeit v und der Länge des Baues direkt, dagegen dem Radstand verkehrt proportional.

Integration der Differenzialgleichungen, welche das Wogen und Nicken bestimmen, nach der Methode der Variation der Constanten.

Die Kenntniss der Gesetze der störenden Bewegungen ist von so bedeutender praktischer Wichtigkeit, dass es mir, um ganz sicher zu gehen, angemessen zu sein schien, die Integration der Differenzialgleichungen, aus welchen diese Gesetze hergeleitet werden können, auch nach der Methode der Variation der Constanten durchzuführen.

Diese Differenzialgleichungen sind die Gleichungen (1) Seite 159, nämlich:

$$\left.\begin{aligned} \frac{d^2\zeta}{dt^2} &= -m\,\zeta + n\,\varphi + p\,K\left[\frac{P}{K}\sin.(\alpha_0 - \omega t) + \frac{P_1}{K}\cos.(\alpha_0 - \omega t)\right] \\ \frac{d^2\varphi}{dt^2} &= +\,m_1\,\zeta - n_1\,\varphi + q_1\,K\,\frac{\frac{1}{2}(P + P_1)}{K}\sin.2(\alpha_0 - \omega t) + p_1\,K\left[\frac{P}{K}\sin.(\alpha_0 - \omega t)\right. \\ &\qquad\qquad \left. + \frac{P_1}{K}\cos.(\alpha_0 - \omega t)\right] \end{aligned}\right\} \quad \ldots \quad (1)$$

Um diese Gleichungen nach der Methode der Variationen der Constanten zu integriren, lassen wir zunächst die Glieder, welche trigonometrische Funktionen enthalten, weg und suchen die Integrale der einfacheren Gleichungen:

$$\left.\begin{aligned} \frac{d^2\zeta_1}{dt^2} &= -m\,\zeta_1 + n\,\varphi_1 \\ \frac{d^2\varphi_1}{dt^2} &= +\,m_1\,\zeta_1 - n_1\,\varphi_1 \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (2)$$

BLB BADISCHE LANDESBIBLIOTHEK Baden-Württemberg

Versuchen wir, ob diesen Gleichungen entsprochen werden kann, wenn man setzt:

$$\left.\begin{aligned} \zeta_1 &= \mathfrak{A} \sin. at + \mathfrak{B} \cos. at \\ \varphi_1 &= \mathfrak{C} \sin. at + \mathfrak{D} \cos. at \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (3)$$

Setzt man diese Werthe von ζ und φ, so wie auch die durch zweimaliges Differenziren sich ergebenden Werthe von $\frac{d^2 \zeta_1}{dt^2}$ und $\frac{d^2 \varphi_1}{dt^2}$ in die Gleichungen (2), so werden dieselben:

$$\left.\begin{aligned} -a^2 (\mathfrak{A} \sin. at + \mathfrak{B} \cos. at) &= -m (\mathfrak{A} \sin. at + \mathfrak{B} \cos. at) + n (\mathfrak{C} \sin. at + \mathfrak{D} \cos. at) \\ -\alpha^2 (\mathfrak{C} \sin. at + \mathfrak{D} \cos at) &= + m_1 (\mathfrak{A} \sin. at + \mathfrak{B} \cos. at) - n_1 (\mathfrak{C} \sin. at + \mathfrak{D} \cos. at) \end{aligned}\right| \quad \ldots \quad (4)$$

Damit diese Gleichungen für jeden Werth von t bestehen können, muss sein:

$$-a^2 \mathfrak{A} = -m \mathfrak{A} + n \mathfrak{C} \qquad -a^2 \mathfrak{B} = -m \mathfrak{B} + n \mathfrak{D}$$

$$-a^2 \mathfrak{C} = + m_1 \mathfrak{A} - n_1 \mathfrak{C} \qquad -a^2 \mathfrak{D} = + m_1 \mathfrak{B} - n_1 \mathfrak{D}$$

Aus diesen vier Gleichheiten folgt:

$$\frac{\mathfrak{A}}{\mathfrak{C}} = \frac{\mathfrak{B}}{\mathfrak{D}} = \frac{-n}{a^2 - m} = \frac{a^2 - n_1}{-m_1} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (5)$$

folglich auch

$$a = \pm \sqrt{\frac{m + n_1}{2} \pm \sqrt{\frac{(m + n_1)^2}{4} + n m_1 - m n_1}} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (6)$$

Wir erhalten also für a vier verschiedene Werthe und eben so auch für $\frac{\mathfrak{A}}{\mathfrak{C}}$ und $\frac{\mathfrak{B}}{\mathfrak{D}}$. Es gibt demnach vier verschiedene Werthe von a und von $\frac{\mathfrak{A}}{\mathfrak{C}}$ und $\frac{\mathfrak{B}}{\mathfrak{D}}$, durch welche die Gleichungen (3) den Gleichungen (2) genügen.

Setzt man

$$\left.\begin{aligned} a_1 &= \sqrt{\frac{m + n_1}{2} + \sqrt{\frac{(m + n_1)^2}{4} + n m_1 - m n_1}} \\ a_2 &= \sqrt{\frac{m + n_1}{2} - \sqrt{\frac{(m + n_1)^2}{4} + n m_1 - m n_1}} \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (7)$$

so sind die vier Werthe von a:

$$+ a_1 \quad - a_1 \quad + a_2 \quad - a_2$$

Wegen der linearen Form der Gleichungen (2) genügt denselben auch die Summe aller partikularen Integrale, die den vier Wurzelwerthen von a entsprechen. Bezeichnet man die Werthe von $\mathfrak{A}\ \mathfrak{B}\ \mathfrak{C}\ \mathfrak{D}$, welche den einzelnen Werthen von a entsprechen, dadurch, dass man die Wurzelwerthe als Zeichen darunter schreibt, so sind die allgemeinen aus den vier partikularen Integralien zusammengesetzten Integrale der Gleichungen (2):

$$\left.\begin{array}{l}
\zeta_1 = \left\{\begin{array}{l} \binom{\mathfrak{A}}{a_1}\sin. a_1 t + \binom{\mathfrak{B}}{a_1}\cos. a_1 t \\ -\binom{\mathfrak{A}}{-a_1}\sin. a_1 t + \binom{\mathfrak{B}}{-a_1}\cos. a_1 t \end{array}\right\} + \left\{\begin{array}{l} \binom{\mathfrak{A}}{a_2}\sin\, a_2 t + \binom{\mathfrak{B}}{a_2}\cos. a_2 t \\ -\binom{\mathfrak{A}}{-a_2}\sin. a_2 t + \binom{\mathfrak{B}}{-a_2}\cos. a_2 t \end{array}\right\} \\
\varphi_1 = \left\{\begin{array}{l} \binom{\mathfrak{C}}{a_1}\sin. a_1 t + \binom{\mathfrak{D}}{a_1}\cos. a_1 t \\ -\binom{\mathfrak{C}}{-a_1}\sin. a_1 t + \binom{\mathfrak{D}}{-a_1}\cos. a_1 t \end{array}\right\} + \left\{\begin{array}{l} \binom{\mathfrak{C}}{a_2}\sin. a_2 t + \binom{\mathfrak{D}}{a_2}\cos. a_2 t \\ -\binom{\mathfrak{C}}{a_2}\sin. a_2 t + \binom{\mathfrak{D}}{-a_2}\cos. a_2 t \end{array}\right\}
\end{array}\right\} \;. \quad (8)$$

Setzt man

$$\binom{\mathfrak{A}}{a_1} - \binom{\mathfrak{A}}{-a_1} = \mathfrak{G}_1$$

$$\binom{\mathfrak{B}}{a_1} + \binom{\mathfrak{B}}{-a_1} = \mathfrak{H}_1$$

$$\binom{\mathfrak{A}}{a_2} - \binom{\mathfrak{A}}{-a_2} = \mathfrak{G}_2$$

$$\binom{\mathfrak{B}}{a_2} + \binom{\mathfrak{B}}{-a_2} = \mathfrak{H}_2$$

und berücksichtiget, dass wegen (5):

$$\binom{\mathfrak{C}}{a_1} - \binom{\mathfrak{C}}{-a_1} = -\frac{m_1}{a_1^2 - n_1}\left[\binom{\mathfrak{A}}{a_1} - \binom{\mathfrak{A}}{-a_1}\right] = -\frac{m_1}{a_1^2 - n_1}\,\mathfrak{G}_1$$

$$\binom{\mathfrak{C}}{a_2} - \binom{\mathfrak{C}}{-a_2} = -\frac{m_1}{a_2^2 - n_1}\left[\binom{\mathfrak{A}}{a_2} - \binom{\mathfrak{A}}{-a_2}\right] = -\frac{-m_1}{a_2^2 - n_1}\,\mathfrak{G}_2$$

$$\binom{\mathfrak{D}}{a_1} + \binom{\mathfrak{D}}{-a_1} = -\frac{m_1}{a_1^2 - n_1}\left[\binom{\mathfrak{B}}{a_1} + \binom{\mathfrak{B}}{-a_1}\right] = -\frac{m_1}{a_1^2 - n_1}\,\mathfrak{H}_1$$

$$\binom{\mathfrak{D}}{a_2} + \binom{\mathfrak{D}}{-a_2} = -\frac{m_1}{a_2^2 - n_1}\left[\binom{\mathfrak{B}}{a_2} + \binom{\mathfrak{B}}{-a_2}\right] = -\frac{m_1}{a_2^2 - n_1}\,\mathfrak{H}_2$$

ist, so können die Integrale (8) geschrieben werden, wie folgt:

$$\left.\begin{array}{l}
\zeta_1 = \mathfrak{G}_1 \sin. a_1 t + \mathfrak{H}_1 \cos. a_1 t + \mathfrak{G}_2 \sin. a_2 t + \mathfrak{H}_2 \cos a_2 t \\
\varphi_1 = -\frac{m_1}{a_1^2 - n_1}(\mathfrak{G}_1 \sin. a_1 t + \mathfrak{H}_1 \cos. a_1 t) - \frac{m_1}{a_2^2 - n_1}(\mathfrak{G}_2 \sin\, a_2 t + \mathfrak{H}_2 \cos. a_2 t)
\end{array}\right\} \;\ldots\; (9)$$

Dies sind also die Integrale der Gleichungen (2) und $\mathfrak{G}_1$ $\mathfrak{G}_2$ $\mathfrak{H}_1$ $\mathfrak{H}_2$ sind die vier Constanten der Integration, welche diese zwei Gleichungen des zweiten Grades erfordern.

Um nun die Gleichungen (1) zu integriren, wenden wir die von *Lagrange* erfundene Methode der Variation der Constanten an. Diese Methode besteht darin, dass man $\mathfrak{G}_1\ \mathfrak{G}_2\ \mathfrak{H}_1\ \mathfrak{H}_2$ als solche Funktionen von t zu bestimmen sucht, dass die Ausdrücke (9) auch den Gleichungen (1) genügen müssen.

Nennt man für einen Augenblick φ_1 und ζ_1 die Differenzialquotienten von φ und ζ, insofern man $\mathfrak{G}_1\ \mathfrak{H}_1\ \mathfrak{G}_2\ \mathfrak{H}_2$ als constante Grössen ansieht und $\varphi_2\ \zeta_2$ die Differenzialquotienten von φ und ζ nach t, insofern man nur allein $\mathfrak{G}_1\ \mathfrak{H}_1\ \mathfrak{G}_2\ \mathfrak{H}_2$ als veränderlich betrachtet, so ist:

$$\frac{d\zeta}{dt} = \zeta_1 + \zeta_2 \qquad \frac{d\varphi}{dt} = \varphi_1 + \varphi_2 \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (10)$$

Damit aber die Werthe von φ und ζ, welche die Gleichungen (9) darbieten, sowohl den Gleichungen (2), als auch den Gleichungen (1) genügen können, wenn man $\mathfrak{G}_1\ \mathfrak{H}_1\ \mathfrak{G}_2\ \mathfrak{H}_2$ als Funktionen von t ansieht, muss:

$$\zeta_2 = 0 \qquad \varphi_2 = 0 \quad \text{und} \quad \frac{d\zeta}{dt} = \zeta_1 \qquad \frac{d\varphi}{dt} = \varphi_1$$

sein.

Man erhält demnach aus (9):

$$\left.\begin{aligned} 0 &= \sin. a_1 t\,\frac{d\mathfrak{G}_1}{dt} + \cos. a_1 t\,\frac{d\mathfrak{H}_1}{dt} + \sin. a_2 t\,\frac{d\mathfrak{G}_2}{dt} + \cos. a_2 t\,\frac{d\mathfrak{H}_2}{dt} \\ 0 &= \frac{m_1}{a_1^2 - n_1}\left(\sin. a_1 t\,\frac{d\mathfrak{G}_1}{dt} + \cos. a_1 t\,\frac{d\mathfrak{H}_1}{dt}\right) + \frac{m_1}{a_2^2 - n_1}\left(\sin. a_2 t\,\frac{d\mathfrak{G}_2}{dt} + \cos. a_2 t\,\frac{d\mathfrak{H}_2}{dt}\right) \end{aligned}\right\} \quad \ldots \quad (11)$$

$$\left.\begin{aligned} \frac{d\zeta}{dt} &= a_1\,(\mathfrak{G}_1 \cos. a_1 t - \mathfrak{H}_1 \sin. a_1 t) + a_2\,(\mathfrak{G}_2 \cos\ a_2 t - \mathfrak{H}_2 \sin. a_2 t) \\ \frac{d\varphi}{dt} &= -\frac{m_1 a_1}{a_1^2 - n_1}\,(\mathfrak{G}_1 \cos. a_1 t - \mathfrak{H}_1 \sin. a_1 t) - \frac{a_2 m_1}{a_2^2 - n_1}\,(\mathfrak{G}_2 \cos. a_2 t - \mathfrak{H}_2 \sin. a_2 t) \end{aligned}\right\} \quad \ldots \quad (12)$$

Da a_1 nicht $= a_2$ ist, so können die Gleichungen (11) nur bestehen, wenn:

$$\left.\begin{aligned} \sin. a_1 t\,\frac{d\mathfrak{G}_1}{dt} + \cos a_1 t\,\frac{d\mathfrak{H}_1}{dt} &= 0 \\ \sin. a_2 t\,\frac{d\mathfrak{G}_2}{dt} + \cos. a_2 t\,\frac{d\mathfrak{H}_2}{dt} &= 0 \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (13)$$

Durch nochmalige vollständige Differenziation dieser zwei Gleichungen findet man:

$$\left.\begin{aligned} \frac{d^2\zeta}{dt^2} = -a_1^2\,(\mathfrak{G}_1 \sin. a_1 t + \mathfrak{H}_1 \cos. a_1 t) - a_2^2\,(\mathfrak{G}_2 \sin. a_2 t + \mathfrak{H}_2 \cos. a_2 t) + a_1\left(\cos. a_1 t\,\frac{d\mathfrak{G}_1}{dt} - \sin. a_1 t\,\frac{d\mathfrak{H}_1}{dt}\right) \\ + a_2\left(\cos. a_2 t\,\frac{d\mathfrak{G}_2}{dt} - \sin. a_2 t\,\frac{d\mathfrak{H}_2}{dt}\right) \end{aligned}\right\} (14)$$

$$\left.\begin{aligned}\frac{d^2\varphi}{dt^2} = &+ \frac{m_1 a_1^2}{a_1^2 - n_1}(\mathfrak{G}_1 \sin. a_1 t + \mathfrak{H}_1 \cos. a_1 t) + \frac{a_2^2 m_1}{a_2^2 - n_1}(\mathfrak{G}_2 \sin. a_2 t + \mathfrak{H}_2 \cos. a_2 t)\\ &- \frac{m_1 a_1}{a_1^2 - n_1}\left(\cos. a_1 t \frac{d\mathfrak{G}_1}{dt} - \sin. a_1 t \frac{d\mathfrak{H}_1}{dt}\right)\\ &- \frac{m_1 a_2}{a_2^2 - n_1}\left(\cos. a_2 t \frac{d\mathfrak{G}_2}{dt} - \sin. a_2 t \frac{d\mathfrak{H}_2}{dt}\right)\end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad (14)$$

Substituirt man die Werthe von $\varphi\, \zeta\, \frac{d^2\varphi}{dt^2}\, \frac{d^2\zeta}{dt}$, welche die Ausdrücke (9) und (14) darbieten in die zu integrirenden Gleichungen (1) und berücksictiget, dass wegen (5):

$$(a_1^2 - n_1)(a_1^2 - m) = n\, m_1 \qquad (a_2^2 - n_1)(a_2^2 - m) = n\, m_1$$

ist, so findet man:

$$\left.\begin{aligned}&a_1\left(\cos. a_1 t \frac{d\mathfrak{G}_1}{dt} - \sin. a_1 t \frac{d\mathfrak{H}_1}{dt}\right) + a_2\left(\cos. a_2 t \frac{d\mathfrak{G}_2}{dt} - \sin. a_2 t \frac{d\mathfrak{H}_2}{dt}\right) = p\,[P \sin. (\alpha_0 - \omega t)\\ &\qquad\qquad + P_1 \cos. (\alpha_0 - \omega t)]\\ &- \frac{m_1 a_1}{a_1^2 - n_1}\left(\cos. a_1 t \frac{d\mathfrak{G}_1}{dt} - \sin. a_1 t \frac{d\mathfrak{H}_1}{dt}\right) - \frac{m_1 a_2}{a_2^2 - n_1}\left(\cos. a_2 t \frac{d\mathfrak{G}_2}{dt} - \sin. a_2 t \frac{d\mathfrak{H}_2}{dt}\right)\\ &\qquad = \frac{1}{2} q_1 (P + P_1) \sin. 2(\alpha_0 - \omega t) + p_1\,[P \sin. (\alpha_0 - \omega t) + P_1 \cos. (\alpha_0 - \omega t)]\end{aligned}\right\} \quad . \quad (15)$$

Aus diesen zwei Gleichungen, in Verbindung mit den Gleichungen (5) und (13) findet man:

$$\left.\begin{aligned}\frac{d\mathfrak{G}_1}{dt} &= + \frac{n \cos. a_1 t}{a_1 (a_2^2 - a_1^2)}\left\{\frac{1}{2} q_1 (P + P_1) \sin. 2(\alpha_0 - \omega t) + \left(p_1 + \frac{p\, m_1}{a_2^2 - n_1}\right)[P \sin. (\alpha_0 - \omega t) + P_1 \cos. (\alpha_0 - \omega t)]\right\}\\ \frac{d\mathfrak{H}_1}{dt} &= - \frac{n \sin. a_1 t}{a_1 (a_2^2 - a_1^2)}\left\{\frac{1}{2} q_1 (P + P_1) \sin. 2(\alpha_0 - \omega t) + \left(p_1 + \frac{p\, m_1}{a_2^2 - n_1}\right)[P \sin. (\alpha_0 - \omega t) + P_1 \cos. (\alpha_0 - \omega t)]\right\}\\ \frac{d\mathfrak{G}_2}{dt} &= - \frac{n \cos. a_2 t}{a_2 (a_2^2 - a_1^2)}\left\{\frac{1}{2} q_1 (P + P_1) \sin. 2(\alpha_0 - \omega t) + \left(p_1 + \frac{p\, m_1}{a_1^2 - n_1}\right)[P \sin. (\alpha_0 - \omega t) + P_1 \cos. (\alpha_0 - \omega t)]\right\}\\ \frac{d\mathfrak{H}_2}{dt} &= + \frac{n \sin. a_2 t}{a_2 (a_2^2 - a_1^2)}\left\{\frac{1}{2} q_1 (P + P_1) \sin. 2(\alpha_0 - \omega t) + \left(p_1 + \frac{p\, m_1}{a_1^2 - n_1}\right)[P \sin. (\alpha_0 - \omega t) + P_1 \cos (\alpha_0 - \omega t)]\right\}\end{aligned}\right\} \quad (16)$$

Durch Integration des ersten und zweiten dieser Ausdrücke findet man:

$$\mathfrak{G}_1 = \frac{-n}{a_1(a_2^2 - a_1^2)} \left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{4} q_1 (P + P_1) \left[\frac{\cos.\left[2\alpha_0 + (a_1 - 2\omega)t\right]}{a_1 - 2\omega} - \frac{\cos.\left[(a_1 + 2\omega)t - 2\alpha_0\right]}{a_1 + 2\omega} \right] \\ \frac{1}{2}\left(p_1 + \frac{p\, m_1}{a_2^2 - n_1}\right) \left\{ \begin{array}{l} P \left[\frac{\cos.\left[\alpha_0 + (a_1 - \omega)t\right]}{a_1 - \omega} - \frac{\cos.\left[(a_1 + \omega)t - \alpha_0\right]}{a_1 + \omega} \right] \\ P_1 \left[- \frac{\sin.\left[\alpha_0 + (a_1 - \omega)t\right]}{a_1 - \omega} - \frac{\sin.\left[(a_1 + \omega)t - \delta\alpha_0\right]}{a_1 + \omega} \right] \end{array} \right\} \end{array} \right\} + \mathfrak{G}$$

$$\mathfrak{H}_1 = \frac{-n}{a_1(a_2^2 - a_1^2)} \left\{ \begin{array}{l} + \frac{1}{4} q_1 (P + P_1) \left[- \frac{\sin.\left[2\alpha_0 + (a_1 - 2\omega)t\right]}{a_1 - 2\omega} + \frac{\sin.\left[(a_1 + 2\omega)t - 2\alpha_0\right]}{a_1 + 2\omega} \right] \\ + \frac{1}{2}\left(p_1 + \frac{q\, m_1}{a_2^2 - n_1}\right) \left\{ \begin{array}{l} P \left[- \frac{\sin.\left[\alpha_0 + (a_1 - \omega)t\right]}{a_1 - \omega} + \frac{\sin.\left[(a_1 + \omega)t - \alpha_0\right]}{a_1 + \omega} \right] \\ P_1 \left[- \frac{\cos.\left[\alpha_0 + (a_1 - \omega)t\right]}{a_1 - \omega} - \frac{\cos.\left[(a_1 + \omega)t - \alpha_0\right]}{a_1 + \omega} \right] \end{array} \right\} \end{array} \right\} + \mathfrak{H}$$

wobei $\mathfrak{G}$ und $\mathfrak{H}$ zwei neue Integrationsconstanten bezeichnen. Multiplizirt man die erste dieser Gleichungen mit $\sin.\, a_1 t$ und die zweite mit $\cos.\, a_1 t$ und addirt sie hierauf, so findet man nach einer Reihe von Reduktionen:

$$\left. \begin{array}{l} \mathfrak{G}_1 \sin.\, a_1 t + \mathfrak{H}_1 \cos.\, a_1 t = + \frac{1}{2} \frac{n\, q_1 (P + P_1)}{(a_2^2 - a_1^2)(a_1^2 - 4\omega^2)} \sin.\, 2(\alpha_0 - \omega t) \\ \qquad + \frac{n\left(p_1 + \frac{p\, m_1}{a_2^2 - n_1}\right)}{(a_2^2 - a_1^2)(a_1^2 - \omega^2)} \left[P \sin.\, (\alpha_0 - \omega t) + P_1 \cos.\, (\alpha_0 - \omega t)\right] \\ \qquad + \mathfrak{G} \sin.\, a_1 t + \mathfrak{H} \cos.\, a_1 t \end{array} \right\} \quad . (17)$$

Vertauscht man in diesem Ausdruck a_1 mit a_2 und a_2 mit a_1, so findet man ohne weitere Rechnung:

$$\left. \begin{array}{l} \mathfrak{G}_2 \sin.\, a_2 t + \mathfrak{H}_2 \cos.\, a_2 t = - \frac{1}{2} \frac{n\, q_1 (P + P_1)}{(a_2^2 - a_1^2)(a_2^2 - 4\omega^2)} \sin.\, 2(\alpha_0 - \omega t) \\ \qquad - \frac{n\left(p_1 + \frac{p\, m_1}{a_1^2 - n_1}\right)}{(a_2^2 - a_1^2)(a_2^2 - \omega^2)} \left[P \sin.\, (\alpha_0 - \omega t) + P_1 \cos.\, (a_0 - \omega t)\right] \\ \qquad + \mathfrak{J} \sin.\, a_2 t + \mathfrak{K} \cos.\, a_2 t \end{array} \right\} \quad (18)$$

wobei wiederum $\mathfrak{J}$ und $\mathfrak{K}$ die Integrationsconstanten bezeichnen.

Setzt man diese Werthe von $\mathfrak{G}_1 \sin.\, a_1 t + \mathfrak{H}_1 \cos.\, a_1 t$ und von $\mathfrak{G}_2 \sin.\, a_2 t + \mathfrak{H}_2 \cos.\, a_2 t$ in die Gleichungen (9), so findet man endlich:

$$\left.\begin{aligned}
\zeta = &+ \frac{\frac{1}{2}\, n\, q_1 (P + P_1)}{(a_2^2 - 4\,\omega^2)\ \ (a_1^2 - 4\,\omega^2)} \sin. 2\,(\alpha_0 - \omega t) \\
&- \frac{n}{a_2^2 - a_1^2} \left[\frac{p_1 (a_1^2 - n_1) + p\, m_1}{(a_2^2 - \omega^2)\,(a_1^2 - n_1)} - \frac{p_1 (a_2^2 - n_1) + p m_1}{(a_1^2 - \omega^2)\,(a_2^2 - n_1)} \right] \left[P \sin. (\alpha_0 - \omega t) + P_1 \cos. (\alpha_0 - \omega t)\right] \\
&+ \mathfrak{G} \sin. a_1\, t + \mathfrak{H} \cos. a_1\, t + \mathfrak{J} \sin. a_2\, t + \mathfrak{K} \cos. a_2 t
\end{aligned}\right\} \quad (19)$$

$$\left.\begin{aligned}
\varphi = &\frac{m_1}{a_1^2 - n_1} \left\{ - \frac{1}{2} \frac{n\, q_1 (P + P_1)}{(a_2^2 - a_1^2)\,(a_1^2 - 4\,\omega^2)} \sin. 2\,(\alpha_0 - \omega t) - \frac{n \left(p_1 + \frac{p m_1}{a_2^2 - n_1}\right)}{(a_2^2 - a_1^2)\,(a_1^2 - \omega^2)} \left[P \sin. (\alpha_0 - \omega t) + P_1 \cos. (\alpha_0 - \omega t)\right] \right\} \\
&+ \frac{m_1}{a_2^2 - n_1} \left\{ + \frac{1}{2} \frac{n\, q_1 (P + P_1)}{(a_2^2 - a_1^2)\,(a_2^2 - 4\,\omega^2)} \sin. 2\,(\alpha_0 - \omega t) + \frac{n \left(p_1 + \frac{p m_1}{a_1^2 - n_1}\right)}{(a_2^2 - a_1^2)\,(a_2^2 - \omega^2)} \left[P. \sin (\alpha_0 - \omega t) + P_1 \cos. (\alpha_0 - \omega t)\right] \right\} \\
&- \frac{m_1}{a_1^2 - n_1} (\mathfrak{G} \sin. a_1 t + \mathfrak{H} \cos. a_1 t) - \frac{m_1}{a_2^2 - n_1} (\mathfrak{J} \sin. a_2 t + \mathfrak{K} \cos. a_2 t)
\end{aligned}\right\} \quad (20)$$

Diese beiden Ausdrücke können noch bedeutend umgestaltet werden.

Setzen wir zur Abkürzung:

$$(a_2^2 - 4\,\omega^2)\,(a_1^2 - 4\,\omega^2) = k.$$

Durch Entwicklung findet man:

$$K = a_1^2\, a_2^2 - 4\,\omega^2\,(a_1^2 + a_2^2) + 16\,\omega^4.$$

Setzt man für a_1 und a_2 die Werthe, welche die Gleichungen (7) darbieten, so findet man:

$$k = \left[\frac{m + n_1}{2} + \sqrt{\left(\frac{m + n_1}{2}\right)^2 + n m_1 - m n_1}\right] \left[\frac{m + n_1}{2} - \sqrt{\left(\frac{m + n_1}{2}\right)^2 + n m_1 - m n_1}\right]$$

$$- 4\,\omega^2\,(m + n_1) + 16\,\omega^4.$$

Durch weitere Reduktion findet man:

$$k = (4\,\omega^2 - m)\,(4\,\omega^2 - n_1) - n m_1 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (21)$$

Setzen wir ferner zur Abkürzung:

$$\frac{p_1 (a_1^2 - n_1) + p m_1}{(a_2^2 - \omega^2)\,(a_1^2 - n_1)} - \frac{p\,(a_2^2 - n_1) + p m_1}{(a_1^2 - \omega^2)\,(a_2^2 - n_1)} = h$$

Bringt man diese Brüche auf einerlei Nenner, so findet man nach einigen Reduktionen:

$$h = (a_1^2 - a_2^2)\,\frac{p_1 (a_1^2 - n_1)(a_2^2 - n_1) - p\, m_1 (n_1 - \omega^2)}{(a_1^2 - \omega^2)(a_2^2 - \omega^2)(a_1^2 - n_1)(a_2^2 - n_1)}$$

Mit Berücksichtigung der Ausdrücke (7) findet man aber:

$$(a_1^2 - n_1)(a_2^2 - n_1) = - n\, m_1$$

$$(a_1^2 - \omega^2)(a_2^2 - \omega^2) = (\omega^2 - m)(\omega^2 - n_1) - n\, m_1$$

Daher wird:

$$h = \frac{(a_2^2 - a_1^2)}{n}\,\frac{- p(\omega^2 - n_1) + p_1 n}{n m_1 - (\omega^2 - m)(\omega^2 - n_1)} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (22)$$

Vermittelst der Werthe, welche die Ausdrücke (21) und (22) für k und h darbieten, wird der Werth von ζ, Gleichung (19):

$$\zeta = \left\{ \begin{array}{l} - \dfrac{1}{2}\,\dfrac{n\, q_1 (P + P_1)}{n m_1 - (4\omega^2 - m)(4\omega^2 - n_1)} \sin. 2(\alpha_0 - \omega t) \\[2ex] - \dfrac{p_1 n - p(\omega^2 - n_1)}{n m_1 - (\omega^2 - m)(\omega^2 - n_1)} \left[P \sin. (\alpha_0 - \omega t) + P_1 \cos. (\alpha_0 - \omega t) \right] \\[2ex] + \mathfrak{G} \sin. a_1 t + \mathfrak{H} \cos. a_1 t + \mathfrak{J} \sin. a_2 t + \mathfrak{K} \cos. a_2 t \end{array} \right\} \quad \ldots \quad (23)$$

Der Ausdruck (20) für φ kann geschrieben werden wie folgt:

$$\varphi = \frac{m_1 n}{a_2^2 - a_1^2} \left\{ \begin{array}{l} \dfrac{1}{2} q_1 (P + P_1) \sin. 2(\alpha_0 - \omega t) \left[- \dfrac{1}{(a_1^2 - n_1)(a_1^2 - 4\omega^2)} + \dfrac{1}{(a_2^2 - n_1)(a_2^2 - 4\omega^2)} \right] \\[3ex] + \left[P \sin. (\alpha_0 - \omega t) + P_1 \cos. (\alpha_0 - \omega t) \right] \left\{ \dfrac{p_1 + \dfrac{p\, m_1}{a_1^2 - n_1}}{(a_2^2 - \omega^2)(a_2^2 - n_1)} - \dfrac{p_1 + \dfrac{p\, m_1}{a_2^2 - n_1}}{(a_1^2 - \omega^2)(a_1^2 - n_1)} \right\} \end{array} \right\} \quad (24)$$

$$- \frac{m_1}{a_1^2 - n_1} (\mathfrak{G} \sin. a_1 t + \mathfrak{H} \cos. a_1 t) - \frac{m_1}{a_2^2 - n_1} (\mathfrak{J} \sin. a_2 t + \mathfrak{K} \cos. a_2 t)$$

Setzen wir zur Abkürzung.

$$- \frac{1}{(a_1^2 - n_1)(a_1^2 - 4\omega^2)} + \frac{1}{(a_2^2 - n_1)(a_2^2 - 4\omega^2)} = h_1$$

Bringt man diese Brüche auf gleiche Nenner, so findet man nach einigen Reduktionen:

$$h_1 = (a_1^2 - a_2^2) \frac{a_1^2 + a_2^2 - 4\omega^2 - n_1}{(a_1^2 - n_1)(a_2^2 - n_1)(a_1^2 - 4\omega^2)(a_2^2 - 4\omega^2)}$$

Es ist aber vermöge der Ausdrücke (7)

$$\left.\begin{aligned} a_1^2 + a_2^2 = m + n_1 \qquad (a_1^2 - n_1)(a_2^2 - n) = -n\,m_1 \\ (a_1^2 - 4\omega^2)(a_2^2 - 4\omega^2) = (4\omega^2 - m)(4\omega^2 - n_1) - n\,m_1 \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (25)$$

Daher wird:

$$h_1 = \frac{a_2^2 - a_1^2}{n\,m_1} \; \frac{4\omega^2 - m}{n\,m_1 - (4\omega^2 - m)(4\omega^2 - n_1)} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (26)$$

Setzen wir endlich zur Abkürzung:

$$\frac{p_1 + \dfrac{p\,m_1}{a_1^2 - n_1}}{(a_2^2 - \omega^2)(a_2^2 - n_1)} - \frac{p_1 + \dfrac{p\,m_1}{a_2^2 - n_1}}{(a_1^2 - \omega^2)(a_1^2 - n_1)} = k_1$$

Bringt man diese Brüche auf einerlei Nenner, so findet man, aber erst nach mehreren Reduktionen:

$$k_1 = (a_2^2 - a_1^2) \frac{-p\,m_1 - p_1\,(a_1^2 + a_2^2 - \omega^2 - n_1)}{(a_1^2 - \omega^2)(a_2^2 - \omega^2)(a_1^2 - n_1)(a_2^2 - n_1)}$$

Dieser Ausdruck wird wegen der Werthe (25)

$$k_1 = \frac{a_2^2 - a_1^2}{n\,m_1} \; \frac{-p\,m_1 + p_1\,(\omega^2 - m)}{n m_1 - (\omega^2 - m)(\omega^2 - n_1)} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (27)$$

Vermittelst der Werthe, welche (25) und (27) für h_1 und k_1 darbieten, wird der Ausdruck (24) für φ:

$$\varphi = \left\{ \begin{array}{l} + \frac{1}{2} \frac{q_1 (P + P_1)(4\omega^2 - m)}{n m_1 - (4\omega^2 - m)(4\omega^2 - n_1)} \sin. 2(\alpha_0 - \omega t) \\ \\ + \quad \frac{-p m_1 + p_1 (\omega^2 - m)}{n m_1 - (\omega^2 - m)(\omega^2 - n_1)} \left[P \sin. (\alpha_0 - \omega t) + P_1 \cos. (\alpha_0 - \omega t) \right] \\ \\ - \quad \frac{m_1}{a_1^2 - n_1} \left[\mathfrak{G} \sin. a_1 t + \mathfrak{H} \cos. a_1 t \right] - \frac{m_1}{a_2^2 - n_1} \left[\mathfrak{J} \sin. a_2 t + \mathfrak{K} \cos\ a_2 t \right] \end{array} \right\} \quad . \quad . \quad (28)$$

Die Ausdrücke (23) und (28) für ζ und φ stimmen mit denjenigen überein, welche wir Seite 162 gefunden haben. Die Methode der Variation der Constanten hat uns also zu denselben Resultaten geführt, wie das zuerst befolgte Integrationsverfahren, welches, streng genommen, nur ein Versuchen war.

BLB BADISCHE LANDESBIBLIOTHEK
Baden-Württemberg