Die Gesetze des Lokomotiv-Baues

Redtenbacher, Ferdinand

Mannheim, 1855

Das Gaukeln oder das Wanken, Wogen und Nicken

urn:nbn:de:bsz:31-266507

Das Gaukeln

oder

das Wanken, Wogen und Nicken.

Die Kräfte, welche das Gaukeln verursachen.

Das Wanken, Wogen und Nicken oder die gaukelnde Bewegung des auf den Federn liegenden Baues wird durch die Kräfte verursacht, welche auf dieses Massensystem einwirken und sich nicht das Gleichgewicht halten. Diese Kräfte sind folgende:

1) das Gewicht des auf den Federn ruhenden Baues;
2) die Elasticitätskräfte der Federn;
3) die Pressungen der Gleitstücke gegen die Führungslineale;
4) der Widerstand des durch die Lokomotive fortzuziehenden Trains;
5) die Pressungen des Dampfes gegen die Deckelflächen der Dampfcylinder;
6) die Pressungen der Triebaxe gegen die Axengabeln.

Wenn eine Lokomotive ruhig auf der Bahn steht, wird das Gewicht des auf den Federn liegenden Baues durch die Elastizitätskräfte der Federn getragen, und jede derselben befindet sich dabei in einem mehr oder weniger deformirten Zustande. So wie aber in dem auf den Federn liegenden Bau eine gaukelnde Bewegung veranlasst wird, werden die Federn bald mehr, bald weniger deformirt, und wirken dann mit veränderlichen Intensitäten auf den Bau ein, so dass in demsellben die einmal hervorgerufene gaukelnde Bewegung fortdauernd erhalten wird.

Die Schubstangen bilden mit den Kolbenstangen Winkel, die mit den Kurbelstellungen veränderlich sind; dies hat zur Folge, dass die Gleitstücke gegen die Führungslineale beim Vorwärtsfahren nach aufwärts, beim Rückwärtsfahren nach abwärts Pressungen ausüben, deren Angriffspunkte und Intensitäten veränderlich sind.

Am hinteren Ende des Rahmenbaues wirkt der Widerstand, den der fortzuschaffende Wagenzug verursacht. Der Angriffspunkt dieses Widerstandes liegt tiefer als der Schwerpunkt des auf den Federn liegenden Baues, und die Intensität desselben ist, streng genommen, wegen der nicht ganz gleichförmigen Bewegung der Lokomotive etwas veränderlich.

Die mit dem Rahmenbau fest verbundenen Dampfcylinder werden durch den Druck des Dampfes gegen die Deckelflächen der Cylinder bald vorwärts, bald rückwärts getrieben. Laufen beide Kolben vorwärts, so werden die Cylinder durch den Dampfdruck zurück getrieben. Laufen beide Kolben nach rückwärts, so werden die Cylinder nach vorwärts getrieben. Laufen die Kolben nach entgegengesetzter Richtung, so wird einer von den Cylindern nach vorwärts, der andere nach rückwärts getrieben.

Durch den Druck des Dampfes gegen die Kolben wird die Axe der Triebräder mit veränderlicher Kraft bald vorwärts, bald rückwärts getrieben. Die Achsenbüchsen drücken desshalb bald stärker, bald schwächer gegen die Axengabeln.

Durch das veränderliche Spiel dieser Kräfte wird das Wanken, Wogen und Nicken hervorgebracht. Das Wanken entsteht, weil diese Kräfte in Bezug auf eine durch den Schwerpunkt des Baues gehende Queraxe nicht im Gleichgewichte sind. Das Wogen wird veranlasst, weil die Summe der vertikal aufwärts wirkenden Kräfte veränderlich ist, während das vertical abwärts wirkende Gewicht des Baues einen constanten Werth hat. Das Nicken wird hervorgerufen, weil die Kräfte in Bezug auf eine durch den Schwerpunkt des Baues gehende Längenaxe nicht im Gleichgewichte sind.

Die Bestimmung dieser störenden Bewegungen ist der Gegenstand der folgenden Untersuchung, die dabei vorkommenden Rechnungen sind zwar weitläufig, stehen aber in keinem Missverhältnisse mit den Resultaten, welche sie uns liefern.

Druck der Gleitstücke gegen die Führungslineale.

Es sei, Tab. XII, Fig. 44,

r der Halbmesser einer Maschinenkurbel;
L die Länge einer Schubstange;
α der Winkel, den in irgend einem Augenblick der Bewegung eine Kurbel mit der Bewegungsrichtung des Kolbens bildet;
λ der Winkel, den gleichzeitig die Schubstange mit der Kolbenstange oder mit der Bewegungsrichtung des Kolbens bildet;
P die Kraft, mit welcher der Kolben treibend einwirkt;
S der in der Schubstange wirkende Widerstand;
N die Kraft, mit welcher das Gleitstück nach aufwärts getrieben wird, wenn die Bewegung nach vorwärts erfolgt.

Dies vorausgesetzt, ist zunächst

$$r \sin. \alpha = L \sin. \lambda$$

demnach

$$\sin. \lambda = \left(\frac{r}{L}\right) \sin. \alpha \qquad \text{tang}\, \lambda = \frac{\left(\frac{r}{L}\right) \sin. \alpha}{\sqrt{1 - \left(\frac{r}{L}\right)^2 \sin.^2 \alpha}}$$

Es ist aber ferner $S \cos. \lambda = P$, $S \sin. \lambda = N$, demnach

$$N = P\, \text{tang.}\, \lambda = P \frac{\left(\frac{r}{L}\right) \sin. \alpha}{\sqrt{1 - \left(\frac{r}{L}\right)^2 \sin.^2 \alpha}} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots (1)$$

Das Verhältniss $\left(\frac{r}{L}\right)$ ist bei Lokomotiven immer höchstens $\frac{1}{6}$, der Werth von $\left(\frac{r}{L}\right)^2 \sin.^2 \alpha$ beträgt also im Maximum $\frac{1}{36}$, kann also gegen die Einheit vernachlässigt werden, dann wird aber

$$N = P \frac{r}{L} \sin. \alpha \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots (2)$$

Bezeichnen wir für die zweite Maschine die Kraft, mit welcher ihr Kolben treibend wirkt, mit P und den Druck des Gleitstückes gegen das Führungslineal mit N_1, so ist, da die Kurbeln der beiden Maschinen einen rechten Winkel bilden,

$$N_1 = P_1 \frac{r}{L} \sin. \left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = P_1 \frac{r}{L} \cos. \alpha \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (3)$$

Es folgt sowohl aus der Betrachtung der Figur, sowie auch aus den Werthen von N und N_1, dass diese Pressungen der Gleitstücke gegen die Führungslineale stets nach aufwärts gerichtet bleiben, so lange die Bewegung der Kurbel nach der Richtung des Pfeiles erfolgt, denn das Zeichen von P stimmt stets mit dem Zeichen von $\sin. \alpha$, und das Zeichen von P_1 stimmt stets mit dem Zeichen von $\cos. \alpha$ überein. Erfolgt dagegen die Bewegung der Kurbel nach einer Richtung, die der des Pfeiles in der Figur entgegengesetzt ist, so fallen die Zeichen von P und $\sin. \alpha$, so wie auch von P_1 und $\cos. \alpha$ entgegengesetzt aus, die Werthe von N und N_1 werden also dann beständig negativ oder die Pressungen der Gleitstücke gegen die Führungslineale sind, beim Rückwärtsfahren einer Lokomotive, deren Cylinder vor der Triebaxe liegen, nach abwärts gerichtet.

Dass diese Pressungen spürbare Wirkungen hervorbringen können, sieht man am besten durch ihre numerischen Werthe.

Es sei z. B. für eine Personenzuglokomotive der Durchmesser eines Dampfcylinders $= 0{\cdot}4$ Meter, die Spannung des Dampfes hinter den Kolben auf 1 Quadratmeter bezogen, 50000 Kilogramm, der schädliche Widerstand vor den Kolben 12500 Kilogramm, das Verhältniss $\frac{r}{L} = 6$, so sind die grössten Werthe von N und N_1

$$\frac{\overline{0{\cdot}4}^2 \times 3{\cdot}14}{4} (50000 - 12500) \frac{1}{6} = 785 \text{ Kilogramm.}$$

Allgemeine Gleichungen zur Bestimmung der gaukelnden Bewegung.

Die Bewegungen eines starren Massensystems werden bekanntlich durch 6 Gleichungen bestimmt. Drei derselben bestimmen die Bewegung des Schwerpunktes, drei andere die Drehungen des Systems um drei der Richtung nach auf einander senkrecht stehende, durch den Schwerpunkt gehende Axen.

Um die Bewegung des Schwerpunktes des auf den Federn liegenden Baues zu bestimmen, nehmen wir ein die fortschreitende Bewegung der Lokomotive begleitendes Axensystem $O\xi$ $O\upsilon$ $O\zeta$ an. Die Axe $O\xi$ legen wir in die Axe des Geleises $O\upsilon$ quer über das Geleise. $O\zeta$ steht mithin vertikal.

Nennen wir ξ υ ζ die Coordinaten des Schwerpunktes des auf den Federn liegenden Baues in Bezug auf dieses fortschreitende Axensystem, ΣX ΣY ΣZ die algebraische Summe der Kräfte, welche in einem beliebigen Zeitmoment der Bewegung parallel mit $O\xi$ $O\upsilon$ $O\zeta$ auf das Massensystem einwirken, M die totale Masse des auf den Federn liegenden Baues $\left(\text{Masse} = \frac{\text{Gewicht}}{2 \times 9{\cdot}808}\right)$, so sind die Gleichungen der Bewegung des Schwerpunktes:

$$\left.\begin{aligned} \frac{d^2 \xi}{dt^2} &= \frac{1}{2} \frac{\Sigma X}{M} \\ \frac{d^2 \upsilon}{dt^2} &= \frac{1}{2} \frac{\Sigma Y}{M} \\ \frac{d^2 \zeta}{dt^2} &= \frac{1}{2} \frac{\Sigma Z}{M} \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

Um die drehenden Bewegungen des Massensystems zu bestimmen, legen wir durch den Schwerpunkt desselben ein Axensystem $O x_1$ $O y_1$ $O z_1$ und zwar so, dass $O x_1$ mit der Axe des Lokomotivkessels parallel ist, $O y_1$ senkrecht auf $O x_1$ und parallel mit der Ebene des Lokomotivrahmens ist, $O z_1$ auf der Ebene des Lokomotivrahmens senkrecht steht.

Es ist klar, dass diese drei Axen entweder ganz genau, oder doch sehr nahe mit den Hauptaxen der Trägheitsmomente zusammenfallen.

Nennt man nun:

A B C die Trägheitsmomente (als Massen ausgedrückt) des auf den Federn liegenden Baues in Bezug auf die Axen $O x_1$ $O y_1$ $O x_1$;

x_1 y_1 z_1 die Winkelgeschwindigkeiten, mit welchen sich das System in einem bestimmten Zeitaugenblick t um die drei Axen $O x_1$ $O y_1$ $O z_1$ dreht;

X_1 Y_1 Z_1 die Summe der statischen Momente der zur Zeit t wirksamen Kräfte in Bezug auf die Axen $O x_1$ $O y_1$ $O z_1$;

$d x_1$ $d y_1$ $d z_1$ die Aenderungen dieser Winkelgeschwindigkeiten in dem auf t folgenden Zeitelement dt, so sind bekanntlich die Gleichungen der drehenden Bewegung:

$$\left.\begin{aligned} C\frac{d z_1}{dt} + (B - A)\, x_1\, y_1 &= \frac{1}{2}\, Z_1 \\ B\frac{d y_1}{dt} + (A - C)\, x_1\, z_1 &= \frac{1}{2}\, Y_1 \\ A\frac{d x_1}{dt} + (C - B)\, y_1\, z_1 &= \frac{1}{2}\, X_1 \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (2)$$

Die Kräfte ΣX ΣY ΣZ, so wie auch die Momente X_1 Y_1 Z_1 haben in unserem Falle nicht constante Werthe, sondern sind periodische Funkti onen der Zeit. Die Bestimmung der gaukelnden Bewegung hängt also von der Integration eines sehr complizirten Systems von sechs Gleichungen ab, und es ist vorauszusehen, dass insbesondere die Integration der drei Gleichungen (2) nicht gelingen wird, denn die Werthe von x_1 y_1 z_1 werden selbst in dem günstigsten Falle, wenn X_1 Y_1 Z_1 verschwinden, durch ellyptische Funktionen ausgedrückt.

Glücklicherweise sind aber alle einzelnen Bewegungen, aus welchen das Gaukeln zusammengesetzt ist, sehr klein, denn die Federn sind sehr starr und müssen es sein, damit diese gaukelnde Bewegung nicht zu stark auftreten kann. Wegen dieser Kleinheit der drehenden Schwingungen können in den Gleichungen (2) der Glieder $(B - A)\, x_1\, y_1$ $(A - C)\, x_1\, z_1$ $(C - B)\, y_1\, z_1$ gegen $C\frac{d z_1}{dt}$ $A\frac{d y_1}{dt}$ $A\frac{d x_1}{dt}$ vernachlässigt werden, wodurch die drei Gleichungen (2) eine wesentlich einfachere Form erhalten.

Ferner aber dürfen wir drei von den sechs Gleichungen (1) und (2) ganz weglassen. Die erste der Gleichungen (1) kann weggelassen werden, weil sie sich auf die horizontale Fortbewegung des Schwerpunktes bezieht, die wir schon früher behandelt haben. Die zweite der Gleichungen (1) kann weggelassen werden, weil parallel mit der Richtung der Axe $O y_1$ keine Kräfte wirken. Die erste der Gleichungen (2) kann endlich weggelassen werden, weil die früher genannten, das Wanken, Wogen und Nicken veranlassenden Kräfte keine Drehung um eine Vertikalaxe erregen. Da wir also die erste und zweite der Gleichungen (1) und die erste der Gleichungen (2) weglassen, und in der zweiten und dritten der Gleichungen (2) die Glieder $(A - C)\, x_1\, z_1$ $(C - B)\, y_1\, z_1$ vernachlässigen dürfen, so reduzirt sich unser Problem auf die Integration der folgenden drei Gleichungen:

$$\left.\begin{aligned} \frac{d^2\zeta}{dt^2} &= \frac{1}{2}\,\frac{\Sigma Z}{M} \\ B\frac{d y_1}{dt} &= \frac{1}{2}\,Y_1 \\ A\frac{d x_1}{dt} &= \frac{1}{2}\,X_1 \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (3)$$

Ausmittlung der Werthe von $\Sigma Z\ Y_1\ X_1$.

Um das Verständniss der folgenden Untersuchung zu erleichtern, wollen wir derselben eine Lokomotive von ganz bestimmter und bekannter Bauart zu Grund legen. Wir wählen eine Stephenson'sche Personenzuglokomotive mit inneren Cylindern, innerem Rahmen und mit sechs nicht gekuppelten Rädern (Tab. XIII, Fig. 51, 52, 53, 54).

Der Erfahrung zufolge dürfen wir annehmen, dass die zum Zusammendrücken einer Feder erforderliche Kraft der Zusammendrückung proportional sei. Die Richtigkeit dieses Satzes werden wir in der Folge auch theoretisch nachweisen; er gilt jedoch nur für nicht zu starke Zusammendrückungen. Die Zahl, mit welcher man die Zusammendrückung einer Feder multipliziren muss, um die zusammendrückende Kraft zu erhalten, wollen wir den Starrheits-Coeffizienten der Feder heissen. Ist also f der Starrheits-Coeffizient einer Feder, x ihre Zusammendrückung, so ist $f\,x$ die zusammendrückende Kraft.

Nennen wir nun, Tab. XIII, Fig. 51 bis Fig. 54,

G das Gewicht des auf den Federn liegenden Baues, mit Einschluss des im Kessel enthaltenen Wassers;

$\varDelta_1$ den Horizontalabstand des Schwerpunktes des auf den Federn liegenden Baues von der hinteren Laufaxe;

$\varDelta_2$ den Horizontalabstand dieses Schwerpunktes von der mittleren Triebaxe:

$\varDelta_3$ den Horizontalabstand dieses Schwerpunktes von der vorderen Laufaxe;

$2\,\varepsilon$ die Entfernung der Federn an einer Seite der Lokomotive von den Federn der andern Seite;

$f_1\ f_2\ f_3\ f_4\ f_5\ f_6$ die Starrheits-Coeffizienten der in den Punkten 1 2 3 4 5 6 (Fig. 54) wirkenden Federn;

$\zeta_1\ \zeta_2 \ldots \zeta_6$ die Zusammendrückungen dieser Federn durch das Gewicht des Baues, wenn derselbe ruhig auf den Federn liegt und die Lokomotive ruhig auf der Bahn steht;

Dies vorausgesetzt, sind $f_1\,\zeta_1\quad f_2\,\zeta_2\quad \ldots \quad f_6\,\zeta_6$ die Kräfte, mit welchen die Federn nach vertikaler Richtung auf den Bau aufwärts wirken, wenn die Lokomotive in vollkommen ruhigem Zustand auf der Bahn steht. Für den Gleichgewichtszustand der Federn im ruhenden Zustand des Baues bestehen demnach folgende Beziehungen:

$$\left.\begin{aligned} G &= f_1\,\zeta_1 + f_2\,\zeta_2 + \ldots\ldots + f_6\,\zeta_6 \\ \varDelta_1\,(f_1\,\zeta_1 + f_4\,\zeta_4) + \varDelta_2\,(f_2\,\zeta_2 + f_5\,\zeta_5) &= \varDelta_3\,(f_3\,\zeta_3 + f_6\,\zeta_6) \\ f_1\,\zeta_1 + f_2\,\zeta_2 + f_3\,\zeta_3 &= f_4\,\zeta_4 + f_5\,\zeta_5 + f_6\,\zeta_6 \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (4)$$

Wir wollen diese Gleichung zunächst benützen um die Bedingungen ausfindig zu machen, bei deren Erfüllung alle Federn durch den auf denselben ruhig liegenden Bau um gleich viel zusammengedrückt werden, wollen aber voraussetzen, dass die auf eine und dieselbe Axe einwirkenden Federn gleich starr sind, dass also $f_1 = f_4 \quad f_2 = f_5 \quad f_3 = f_6$

und $\zeta_1 = \zeta_2 = \zeta_3 \; . \; . \; . \; . \; \zeta_6 = z$ sei, wobei z die in allen Federn entstehende Zusammendrückung bedeutet. In diesem Falle werden die zwei ersten der Gleichungen (4)

$$\left.\begin{array}{l} G = 2\,z\,(\mathfrak{f}_1 + \mathfrak{f}_2 + \mathfrak{f}_3) \\ 0 = \varDelta_1\,\mathfrak{f}_1 + \varDelta_2\,\mathfrak{f}_2 - \varDelta_3\,\mathfrak{f}_3 \end{array}\right| \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (5)$$

und die dritte dieser Gleichungen wird identisch erfüllt.

Dies sind also die Bedingungen, bei deren Erfüllung alle Federn durch die Last des Baues um gleich viel zusammengepresst werden, vorausgesetzt, dass die auf eine Axe wirkenden Federn gleich starr sind. Wir werden in der Folge veranlasst sein, auf diese Bedingungen (5) zurückzukommen.

Wir denken uns nun, dass man den Bau aus der Gleichgewichtsposition, die durch die Gleichungen (4) charakterisirt wird, in eine andere Lage bringt, indem man den Bau parallel zu seiner Gleichgewichtslage um ζ hebt; sodann um eine durch den Schwerpunkt gehende Queraxe um einen Winkel φ (Fig 51) so dreht, dass der vordere Theil der Lokomotive höher zu stehen kommt, und endlich um eine durch den Schwerpunkt gehende Längenaxe um einen kleinen Wink el ψ (Fig. 52, 53) so dreht, dass sich die rechte Seite der Lokomotive hebt, die linke aber senkt, so sind dann:

Die Zusammendrückungen der Federn	Die zusammendrückenden Kräfte
$\zeta_1 - \zeta + \varDelta_1\,\varphi + \varepsilon\,\psi$	$\mathfrak{f}_1\,(\zeta_1 - \zeta + \varDelta_1\,\varphi + \varepsilon\,\psi)$
$\zeta_2 - \zeta + \varDelta_2\,\varphi + \varepsilon\,\psi$	$\mathfrak{f}_2\,(\zeta_2 - \zeta + \varDelta_2\,\varphi + \varepsilon\,\psi)$
$\zeta_3 - \zeta - \varDelta_3\,\varphi + \varepsilon\,\psi$	$\mathfrak{f}_3\,(\zeta_3 - \zeta - \varDelta_3\,\varphi + \varepsilon\,\psi)$
$\zeta_4 - \zeta + \varDelta_1\,\varphi - \varepsilon\,\psi$	$\mathfrak{f}_4\,(\zeta_4 - \zeta + \varDelta_1\,\varphi - \varepsilon\,\psi)$
$\zeta_5 - \zeta + \varDelta_2\,\varphi - \varepsilon\,\psi$	$\mathfrak{f}_5\,(\zeta_5 - \zeta + \varDelta_2\,\varphi - \varepsilon\,\psi)$
$\zeta_6 - \zeta - \varDelta_3\,\varphi - \varepsilon\,\psi$	$\mathfrak{f}_6\,(\zeta_6 - \zeta - \varDelta_3\,\varphi - \varepsilon\,\psi)$

und es ist nun:

a) die Summe aller den Rahmenbau aufwärts drückenden Federkräfte

$$\begin{aligned} \mathfrak{f}_1\,\zeta_1 + \mathfrak{f}_2\,\zeta_2 + \mathfrak{f}_3\,\zeta_3 + \mathfrak{f}_4\,\zeta_4 + \mathfrak{f}_5\,\zeta_5 + \mathfrak{f}_6\,\zeta_6 - \zeta\,[\mathfrak{f}_1 + \mathfrak{f}_2 + \mathfrak{f}_3 + \mathfrak{f}_4 + \mathfrak{f}_5 + \mathfrak{f}_6] \\ + \varphi\,[\varDelta_1\,(\mathfrak{f}_1 + \mathfrak{f}_4) + \varDelta_2\,(\mathfrak{f}_2 + \mathfrak{f}_5) - \varDelta_3\,(\mathfrak{f}_3 + \mathfrak{f}_6] \\ + \varepsilon\,\psi\,[\mathfrak{f}_1 + \mathfrak{f}_2 + \mathfrak{f}_3 + \mathfrak{f}_4 + \mathfrak{f}_5 + \mathfrak{f}_6] \end{aligned}$$

b) die algebraische Summe der statischen Momente der Federkräfte in Bezug auf die Queraxe

$$\begin{aligned} &+ \varDelta_3\,[\mathfrak{f}_3\,(\zeta_3 - \zeta - \varDelta_3\,\varphi + \varepsilon\,\psi) + \mathfrak{f}_6\,(\zeta_6 - \zeta - \varDelta_3\,\varphi - \varepsilon\,\psi)] \\ &- \varDelta_2\,[\mathfrak{f}_2\,(\zeta_2 - \zeta + \varDelta_2\,\varphi + \varepsilon\,\psi) + \mathfrak{f}_5\,(\zeta_5 - \zeta + \varDelta_2\,\varphi - \varepsilon\,\psi)] \\ &- \varDelta_1\,[\mathfrak{f}_1\,(\zeta_1 - \zeta + \varDelta_1\,\varphi_1 + \varepsilon\,\psi) + \mathfrak{f}_4\,(\zeta_4 - \zeta + \varDelta_1\,\varphi - \varepsilon\,\psi)] \end{aligned}$$

c) die algebraische Summe der Momente der Federkräfte in Bezug auf die durch den Schwerpunkt gehende Längenaxe

$$e\left\{\begin{array}{l} \mathfrak{f}_4(\zeta_4-\zeta+\Delta_1\varphi-e\psi)+\mathfrak{f}_5(\zeta_5-\zeta+\Delta_2\varphi-e\psi)+\mathfrak{f}_6(\zeta_6-\zeta-\Delta_3\varphi-e\psi) \\ -\mathfrak{f}_1(\zeta_1-\zeta+\Delta_1\varphi+e\psi)-\mathfrak{f}_2(\zeta_2-\zeta+\Delta_2\varphi+e\psi)-\mathfrak{f}_3(\zeta_3-\zeta-\Delta_3\varphi+\zeta\psi) \end{array}\right\}$$

Diese Ausdrücke werden sehr vereinfacht, wenn man berücksichtigt, dass in der Wirklichkeit die auf eine und dieselbe Axe wirkenden Federn gleich starr, und in ruhigem Zustande um gleich viel zusammengepresst sind. Wir können also nehmen

$$\mathfrak{f}_1=\mathfrak{f}_4 \quad \mathfrak{f}_2=\mathfrak{f}_5 \quad \mathfrak{f}_3=\mathfrak{f}_6$$

$$\zeta^1=\zeta_4 \quad \zeta_2=\zeta_5 \quad \zeta_3=\zeta_6$$

Führt man diese Werthe in die obigen Ausdrücke ein und berücksichtigt die Gleichgewichtsbedingungen (4), so erhält man folgende Resultate

a) Summe aller Federkraft

$$G-2\zeta(\mathfrak{f}_1+\mathfrak{f}_2+\mathfrak{f}_3)+2\varphi(\Delta_1\mathfrak{f}_1+\Delta_2\mathfrak{f}_2-\Delta_3\mathfrak{f}_3)$$

b) Summe der Momente in Bezug auf die Queraxe

$$+2\zeta(\Delta_1\mathfrak{f}_1+\Delta_2\mathfrak{f}_2-\Delta_3\mathfrak{f}_3)-2\varphi(\mathfrak{f}_1\Delta_1^2+\mathfrak{f}_2\Delta_2^2+\mathfrak{f}_3\Delta_3^2)$$

c) Summe der Momente in Bezug auf die Längenaxe

$$-2e^2\psi(\mathfrak{f}_1+\mathfrak{f}_2+\mathfrak{f}_3)$$

Somit sind nun die von den Federkräften herrührenden Bestandtheile der Summe ΣZ, Y_1, X_1 berechnet, und wir gehen nun zur Bestimmung derjenigen Glieder über, welche die Pressungen der Gleitstücke gegen die Führungslineale liefern.

Nennen wir

P die Kraft, mit welcher der Kolben der vorderen Maschine getrieben wird.

P_1 die Kraft, mit welcher der Kolben der hinteren Maschine getrieben wird. Diese Kräfte P und P_1 haben zwar gleiche Intensitäten, es ist aber gleichwohl zweckmässiger, sie so in Rechnung zu bringen, als wären sie ungleich;

L die Länge einer Schubstange;

r den Halbmesser einer Kurbel.

e den Horizontalabstand der Axen der beiden Cylinder von der Längenaxe der Lokomotive (Fig. 54);

ω die Winkelgeschwindigkeit der Triebräder;

D den Durchmesser eines Triebrades;

α den Winkel, den die Kurbel der vorderen Maschine mit der Axe des Cylinders in dem Zeitmoment bildet, in welchem die Position des Baues durch die Grössen ζ, φ und ψ bestimmt wird.

$\frac{\pi}{2}-\alpha$ den Winkel, den gleichzeitig die Kurbel der hinteren Maschine mit der Richtung ihres Cylinders bildet. (Fig. 51);

Dies vorausgesetzt, sind, vermöge der Seite (138) gegebenen Erläuterungen, $P\frac{r}{L}\sin.\alpha$ $P_1\frac{r}{L}\cos.\alpha$ die Pressungen der Gleitstücke gegen die oberen Führungslineale, und sind ferner $r\cos.\alpha+L-\Delta_2$, $r\sin.\alpha+L-\Delta_2$ die Horizontalabstände der beiden Gleitstücke von der durch den Schwerpunkt des Baues gehenden Queraxe.

Die Momente dieser Pressungen sind demnach

d) in Bezug auf die durch den Schwerpunkt gehende Oueraxe

$$P \frac{r}{L} \sin.\alpha (r \cos.\alpha + L - \Delta_2) + P_1 \frac{r}{L} \cos.\alpha (r \sin.\alpha + L - \Delta_2)$$

oder

$$\frac{1}{2}(P + P_1)\frac{r}{L} \sin. 2\alpha + (L - \Delta_2)\frac{r}{L}(P \sin.\alpha + P_1 \operatorname{Cos}.\alpha)$$

e) in Bezug auf die durch den Schwerpunkt gehende Längenaxe $O x_1$

$$P \frac{r}{L} \sin.\alpha\, e - P_1 \frac{r}{L} \cos.\alpha\, e$$

oder

$$\frac{r}{L} e (P \sin.\alpha - P_1 \cos.\alpha)$$

endlich ist die Summe der vertikal aufwärts wirkenden Pressungen

f) $$\frac{r}{L}(P \sin.\alpha + P_1 \cos.\alpha)$$

Nun haben wir noch die auf den Rahmenbau einwirkenden Horizontalkräfte zu berücksichtigen.

Heissen wir K den numerischen Werth der Kraft, mit welcher ein Kolben getrieben wird (also die Differenz der Pressungen gegen die beiden Flächen eines Kolbens), so ist, wie schon früher gezeigt wurde, der Widerstand des ganzen Trains $2K\frac{2l}{D\pi}$, wobei l die Länge des Kolbenschubes bezeichnet. Nennen wir h_1 die Höhe des Schwerpunktes des Baues über dem Zusammenhängungspunkt der Lokomotive mit dem Tender, so ist das Moment dieses Zuges in Begug auf die durch den Schwerpunkt gehende Queraxe

g) $$-h_1 \,.\, 2K\frac{2l}{D\pi}$$

Streng genommen ist der Zug in der Zusammenhängung der Lokomotive mit dem Tender nicht constant gleich dem mittleren Widerstand des Trains, sondern bei einem etwas unruhigen Lauf der Lokomotive periodisch veränderlich.

Wenn die Kurbeln der beiden Maschinen die in Fig. (51) dargestellte Stellung haben, wird, beim Vorwärtslaufen der Lokomotive, der vordere Kolben vorwärts, der Kolben der hinteren Maschine dagegen rückwärts getrieben; wird demnach der Cylinder der vorderen Maschine mit einer Kraft P zurück, der Cylinder der hinteren Maschine mit einer Kraft P_1 nach vorwärts getrieben. Nennen wir h die Höhe des Schwerpunktes über der Axe des Triebrades, so ist

h) $$h(P_1 - P)$$

das Moment in Bezug auf die durch den Schwerpunkt gehende Queraxe.

Nun haben wir noch das Moment der Pressungen zu bestimmen, welche die Triebaxe gegen die Axengabeln ausübt. Dabei wollen wir uns aber erlauben, die Umdrehungsgeschwindigkeit der Triebaxe als constant anzunehmen, und die hin- und hergehenden Massen der Schubstangen, Kolbenstangen und Kolben zu vernachlässigen, oder, mit andern Worten, wir wollen die Pressungen der Triebaxe gegen die Axengabeln nach statischen Gesetzen berechnen; der Fehler, den wir dadurch begehen, ist von keinem Belang.

Zerlegt man die Pressungen der Schubstangen gegen die Kurbelzapfen in horizontale und vertikale Kräfte, so sind die ersteren P und P_1, die letzteren dagegen $P \frac{r}{L} \sin.\alpha$, $P_1 \frac{r}{L} \cos.\alpha$.

Wir setzen voraus, dass die Triebräder auf der Bahn nicht glitschen, sondern nur rollen, dann können wir das Radwerk als einen Hebel ansehen, der im Berührungspunkte seinen Drehungspunkt hat. Nennen wir für einen Augenblick $\mathfrak{K}$ den numerischen Werth des Druckes der Triebaxe gegen die Axenhalter, so haben wir zur Bestimmmg desselben die Gleichung

$$\mathfrak{K} \frac{D}{2} = P\left(\frac{D}{2} + r \sin.\alpha\right) - P_1\left(\frac{D}{2} - r \cos.\alpha\right) + P \frac{r}{L} \sin.\alpha \; r \cos.\alpha + P_1 \frac{r}{L} \cos.\alpha \; r \sin.\alpha$$

und hieraus folgt:

$$\mathfrak{K} = P - P_1 + \frac{2r}{D}(P \sin.\alpha + P_1 \cos.\alpha) + \frac{r^2}{LD}(P + P_1) \sin.2\alpha$$

Das Moment dieses Druckes in Bezug auf die durch den Schwerpunkt gehende Queraxe ist:

$$i) \qquad + \mathfrak{K} h = + h\left[P - P_1 + \frac{2r}{D}(P \sin.\alpha + P_1 \cos.\alpha) + \frac{r^2}{LD}(P + P_1) \sin.2\alpha\right]$$

Hiemit sind nun endlich alle Bestandtheile der zu berechnenden Summe bestimmt; wir dürfen jedoch nicht übersehen, dass in der Summe der Vertikalkräfte auch das Gewicht des Baues aufgenommen werden muss. Fassen wir sämmtliche Resultate a b c d e f g h i zusammen und berücksichtigen das Gewicht G des Baues, so finden wir nun:

$$\Sigma Z = -2\zeta(f_1 + f_2 + f_3) + 2\varphi(\Delta_1 f_1 + \Delta_2 f_2 - \Delta_3 f_3) + \frac{r}{L}(P \sin.\alpha + P_1 \cos.\alpha)$$

$$Y_1 = \left\{\begin{array}{l} 2\zeta(\Delta_1 f_1 + \Delta_2 f_2 - \Delta_3 f_3) - 2\varphi(f_1 \Delta_1^2 + f_2 \Delta_2^2 + f_3 \Delta_3^2) \\ + \frac{1}{2}(P + P_1)\frac{r^2}{L} \sin.2\alpha + (L - \Delta_2)\frac{r}{L}(P \sin.\alpha + P_1 \cos.\alpha) \\ - h_1 2K \frac{2l}{D\pi} + h(P_1 - P) + h(P - P_1) \\ + h(P + P_1)\frac{r^2}{DL} \sin.2\alpha + \frac{2r}{D} h(P \sin.\alpha + P_1 \cos.\alpha) \end{array}\right\}$$

$$X_1 = -2\varepsilon^2\psi(f_1 + f_2 + f_3) + \frac{r}{L} e(P \sin.\alpha - P_1 \cos.\alpha)$$

oder auch, wenn man in Y_1 zusammengehörige Glieder vereiniget:

$$\left.\begin{aligned}
\Sigma Z &= -2\zeta(f_1+f_2+f_3)+2\varphi(\Delta_1 f_1+\Delta_2 f_2-\Delta_3 f_3)+\frac{r}{L}(P\sin.\alpha+P_1\cos.\alpha)\\
Y_1 &= -h_1\, 2K\frac{2l}{D\pi}+2\zeta(\Delta_1 f_1+\Delta_2 f_2-\Delta_3 f_3)-2\varphi(f_1\Delta_1^2+f_2\Delta_2^2+f_3\Delta_3^2)\\
&\quad+\frac{1}{2}(P+P_1)\frac{r^2}{L}\left(1+\frac{2h}{D}\right)\sin.2\alpha+\left[(L-\Delta_2)\frac{r}{L}+\frac{2rh}{D}\right](P\sin.\alpha+P_1\cos.\alpha)\\
X_1 &= -2\varepsilon^2\psi(f_1+f_2+f_3)+\frac{r}{L}e(P\sin.\alpha-P_1\cos.\alpha)
\end{aligned}\right\} \quad . \quad (6)$$

Rechnen wir die Zeit t von einem Augenblick des Beharrungszustandes an, in welchem die Kurbel der vorderen Maschine mit der Richtung ihrer Kolbenstange einen Winkel α_0 bildete, so können wir in den Gleichungen (6), die für die Zeit t gelten $\alpha=\alpha_0-\omega t$ setzen. Dies setzt jedoch voraus, dass α_0 gleich oder kleiner als 90° ist, indem die Gleichungen (6) zunächst nur gelten, so lange α zwischen 0 und 90° liegt.

Hiedurch erhalten wir nun:

$$\left.\begin{aligned}
\Sigma Z &= -2\zeta(f_1+f_2+f_3)+2\varphi(\Delta_1 f_1+\Delta_2 f_2-\Delta_3 f_3)+\frac{r}{L}[P\sin.(\alpha_0-\omega t)+P_1\cos.(\alpha_0-\omega t)]\\
Y_1 &= \left\{\begin{aligned}
&-h_1\, 2K\frac{2l}{D\pi}+2\zeta(\Delta_1 f_1+\Delta_2 f_2-\Delta_3 f_3)-2\varphi(f_1\Delta_1^2+f_2\Delta_2^2+f_3\Delta_3^2)\\
&+\frac{1}{2}(P+P_1)\frac{r^2}{L}\left(1+\frac{2h}{D}\right)\sin.2(\alpha_0-\omega t)\\
&+\left[(L-\Delta_2)\frac{r}{L}+\frac{2rh}{D}\right][P\sin.(\alpha_0-\omega t)+P_1\cos.(\alpha_0-\omega t)]
\end{aligned}\right\}\\
X_1 &= -2\varepsilon^2\psi(f_1+f_2+f_3)+\frac{r}{L}e\,[P\sin.(\alpha_0-\omega t)+P_1\cos.\alpha_0-\omega t)]
\end{aligned}\right\} \quad (7)$$

Aus diesen Werthen von ΣZ Y_1 X_1 könnte man bereits sehr viel wichtige Schlüsse ziehen, allein da eine vollständige Kenntniss der Bewegungszustände doch nur durch die Integrale der Bewegungsgleichungen erlangt werden kann, so wollen wir uns hier nicht länger aufhalten, sondern machen sogleich die Vorbereitungen zur Fortsetzung der Untersuchung.

Differenzialgleichungen, welche die gaukelnde Bewegung bestimmen.

Diese Differenzialgleichungen ergeben sich, wenn man in die Gleichungen (3) die so eben für ΣZ Y_1 und X_1 gefundenen Werthe substituirt und ferner noch berichtiget, dass man hat:

$$\frac{dy_1}{dt}=\frac{d^2\varphi}{dt^2} \qquad \frac{dx_1}{dt}=\frac{d^2\psi}{dt^2}$$

Macht man diese Substitution und setzt sodann zur Aabkürzung der Rechnungen:

$$
\left.
\begin{array}{lll}
m = \dfrac{f_1 + f_2 + f_3}{M} & m_1 = \dfrac{\Delta_1 f_1 + \Delta_2 f_2 - \Delta_3 f_3}{B} & m_2 = \dfrac{\varepsilon^2 (f_1 + f_2 + f_3)}{A} \\[2ex]
n = \dfrac{\Delta_1 f_1 + \Delta_2 f_2 - \Delta_3 f_3}{M} & n_1 = \dfrac{\Delta_1^2 f_1 + \Delta_2^2 f_2 + \Delta_3^2 f_3}{B} & \\[2ex]
p = \dfrac{r}{2\,L\,M} & p_1 = (L - \Delta_1) \dfrac{r}{2\,L\,B} + \dfrac{r\,h}{B\,D} & p_2 = \dfrac{r\,e}{2\,A_L} \\[2ex]
c = \dfrac{2\,l\,h_1\,K}{B\,D\,\pi} & q_1 = \dfrac{r^2}{2\,L\,B}\left(1 + \dfrac{2\,h}{D}\right) &
\end{array}
\right\} \quad (8)
$$

so erscheinen die Gleichungen (3) unter nachstehender Form;

$$
\left.
\begin{array}{l}
\dfrac{d^2 \zeta}{dt^2} = - m\,\zeta + n\,\varphi + p\left[P \sin.(\alpha_0 - \omega t) + P_1 \cos.(\alpha_0 - \omega t)\right] \\[2ex]
\dfrac{d^2 \varphi}{dt^2} = - c + m_1\,\zeta - n_1\,\varphi + \dfrac{1}{2}(P + P_1)\,q_1 \sin. 2(\alpha_0 - \omega t) \\[2ex]
\qquad\qquad + p_1\left[P \sin.(\alpha_0 - \omega t) + P_1 \cos.(\alpha_0 - \omega t)\right] \\[2ex]
\dfrac{d^2 \psi}{dt^2} = - m_2\,\psi + p_2\left[P \sin.(\alpha_0 - \omega t) - P_1 \cos.(\alpha_0 - \omega t)\right]
\end{array}
\right\} \quad \ldots\ldots (9)
$$

Setzen wir:

$$
\left.
\begin{array}{l}
\varphi = \varphi_1 + c\,\dfrac{m}{m_1\,n - n_1\,m} \\[2ex]
\zeta = \zeta_1 + c\,\dfrac{n}{m_1\,n - n_1\,m}
\end{array}
\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (10)
$$

so bedeuten φ_1 und ζ_1 zwei neue Variable, die von φ und ζ nur um constante Werthe verschieden sind.

Durch Einführung dieser Werthe von φ und ζ in die Gleichungen (9) nehmen dieselben folgende Form an:

$$
\left.
\begin{array}{l}
\dfrac{d^2 \zeta_1}{dt^2} = - m\,\zeta_1 + n\,\varphi + p\left[P \sin.(\alpha_0 - \omega t) + P_1 \cos.(\alpha_0 - \omega t)\right] \\[2ex]
\dfrac{d^2 \varphi_1}{dt^2} = + m_1\,\zeta_1 - n_1\,\varphi_1 + p_1\left[P \sin.(\alpha_0 - \omega t) + P_1 \cos.(\alpha_0 - \omega t)\right] \\[2ex]
\qquad\qquad + \dfrac{1}{2}(P + P_1)\,q_1 \sin. 2(\alpha_0 - \omega t) \\[2ex]
\dfrac{d^2 \psi}{dt^2} = - m_2\,\psi + p\,e\left[P \sin.(\alpha_0 - \omega t) - P_1 \cos.(\alpha_0 - \omega t)\right]
\end{array}
\right\} \quad \ldots (11)
$$

Diese Gleichungen unterscheiden sich von den Gleichungen (9) dadurch, dass in ihnen kein absolut constantes Glied vorkommt. Integrirt man die Gleichungen (11) und setzt sodann die für ζ_1 und φ_1 sich ergebenden Ausdrücke in (10), so erhält man die zu berechnenden Werthe von φ und ζ.

Es ist in Erinnerung zu bringen, dass diese Gleichungen (9) und (11) zunächst nur gelten, so lange $\alpha_0 - \omega t$ nicht ausserhalb o und $\frac{\pi}{2}$ liegt, d. h. nur für die Zeit gelten, in der die Kurbel der vordern Maschine den Quadranten I, Fig. (51) durchläuft. Die Differenzialgleichungen für die Bewegung der Kurbel durch die übrigen Quadranten erhält man, wenn man in den Gleichungen (11) für P und P_1 diejenigen Werthe setzt, welche in folgendem Schema zusammengestellt sind:

Wenn $\alpha_0 - \omega t$ liegt im Quadranten Fig. (51)	sind die Werthe von		
	P	P_1	$P + P_1$
I.	$+K$	$+K$	$2K$
II.	$+K$	$-K$	0
III.	$-K$	$-K$	$-2K$
IV.	$-K$	$+K$	0

wobei K den numerischen Werth der Kraft bedeutet, mit welcher ein Kolben getrieben wird. Die numerischen Werthe von P und P_1 bleiben nämlich der Voraussetzung gemäss nun gleich k, die Zeichen von P und P_1 ändern sich dagegen in der Art, dass die Produkte $P \sin. (\alpha_0 - \omega t)$ $P_1 \cos. (\alpha_0 - \omega t)$ stets positiv bleiben.

Die dritte der Gleichungen (11) kann unabhängig von den beiden andern integrirt werden, weil sie die beiden andern Variabeln ζ_1 und φ_1 nicht enthält. Die beiden erstern der Gleichungen (11) müssen dagegen gleichzeitig integrirt werden, weil in jeder derselben sowohl ζ_1 als auch φ_1 vorkommt. Mit den Integrationen dieser Gleichungen werden wir uns nun beschäftigen.

Integration der Differenzialgleichung, welche das Wanken bestimmt.

Die wankende Bewegung wird durch die dritte der Gleichungen (10) also durch

$$\frac{d^2 \psi}{dt^2} = -m_2 \psi + p_2 \left[P \sin. (\alpha_0 - \omega t) - P_1 \cos. (\alpha_0 - \omega t)\right] \quad \ldots \ldots \quad (1)$$

bestimmt. Das Integrale dieser Gleichung kann nach der von Lagrange gelehrten Methode der Variation der Constanten integrirt werden. Dieser Weg führt jedoch zu weitläufigen Rechnungen, die man sich ersparen kann, indem die Form disses Integrales errathen werden kann. Es ist nämlich die Vermuthung eine sehr nahe liegende, dass alle einzelnen Schwingungen, aus welchen das Gaukeln besteht, nach ähnlichen Gesetzen erfolgen, wie die Schwingungen der Saiten oder elastischen Körper. Es ist daher wahrscheinlich, dass wir der Gleichung (1) genügen werden, wenn wir setzen

$$\psi = \mathfrak{A} \sin. kt + \mathfrak{B} \cos. kt + \mathfrak{M} \sin. (\alpha_0 - \omega t) + \mathfrak{N} \cos. (\alpha_0 - \omega t) \quad \ldots \ldots \quad (2)$$

Wenn diese Annahme eine richtige ist, so muss die Gleichung (1) durch Einführung dieses Werthes von ψ eine identische werden.

Aus (2) folgt durch zweimaliges Differenziren nach t.

$$\frac{d^2 \psi}{dt^2} = -k^2 (\mathfrak{A} \sin. kt + \mathfrak{B} \cos. kt) - \mathfrak{M} \omega^2 \sin. (\alpha_0 - \omega t) - \mathfrak{N} \omega^2 \cos. (\alpha_0 - \omega t) \quad \ldots \quad (3)$$

Substituirt man diese Werthe von ψ und $\frac{d^2\psi}{dt^2}$ in (1) so findet man:

$$-k^2(\mathfrak{A}\sin. kt + \mathfrak{B}\,\alpha\cos. kt) - \mathfrak{M}\,\omega^2\cos.^2\sin.(\alpha_0 - \omega t) - \mathfrak{N}\,\omega^2\cos.(\alpha_0 - \omega t) =$$

$$-m_2(\mathfrak{A}\sin. kt. + \mathfrak{B}\cos. kt) - \mathfrak{M}\,m_2\sin.(\alpha_0 - \omega t) - \mathfrak{N}\,m_2\cos.(\alpha_0 - \omega t)$$

$$+ p_2 P\sin.(\alpha_0 - \omega t) - p_2 P_1\cos.(\alpha_0 - \omega t)$$

Diese Gleichung wird, wenn ω^2 nicht gleich m_2 ist, eine identische, wenn man setzt

$$k^2 = m_2 \qquad -\mathfrak{M}\,\omega^2 = -\mathfrak{M}\,m_2 + p_2 P \qquad -\mathfrak{N}\,\omega^2 = \mathfrak{N}\,m_2 - p_2 P_1$$

d. h. wenn

$$\left.\begin{aligned} K &= \sqrt{m_2} \\ \mathfrak{M} &= \frac{p_2 P}{m_2 - \omega^2} \\ \mathfrak{N} &= -\frac{p_2 P_1}{m_2 - \omega^2} \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (4)$$

genommen wird.

Setzt man die Werthe in (2), so findet man für das Integrale der Gleichung (1), wenn ω^2 nicht gleich m_2 ist folgenden Ausdruck:

$$\psi = \mathfrak{A}\sin.\sqrt{m_2}\,t + \mathfrak{B}\cos.\sqrt{m_2}\,t + \frac{p_2}{m_2 - \omega^2}\left[P\sin.(\alpha_0 - \omega t) - P_1\cos.(\alpha_0 - \omega t)\right] \quad \ldots \quad (5)$$

in welchem $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ die beiden Constanten des Integrals bezeichnen. Den besonderen Fall, wen $\omega^2 = m_2$ ist, werden wir in der Folge ins Auge fassen.

Die Gleichung (5) zeigt, dass die wankende Bewegung aus vier periodisch wiederkehrenden Schwingungen besteht. Die von ω, P und P_1 unabhängigen Schwingungen $\mathfrak{A}\sin.\sqrt{m_2}\,t$, $\mathfrak{B}\cos.\sqrt{m_2}\,t$, wollen wir Grundschwingungen nennen. Diese bleiben sich gleich, es mag die Lokomotive schnell oder langsam laufen, stark oder schwach getrieben werden. Sie treten allein auf, wenn man die Wirkung des Dampfes auf die Maschine aufhebt, und die Lokomotive nur durch die Trägheit ihrer Massen auf der Bahn fortläuft.

Wenn die Zeit t um $\frac{2\pi}{\sqrt{m_2}}$ wächst, kehrt die Lokomotive in die Lage zurück, in welcher sie sich zur Zeit t befand, $\frac{2\pi}{\sqrt{m_2}}$ ist daher die Zeit T eine Grundschwingung. Setzt man für m_2 seinen Werth, so findet man:

$$T = \frac{2\pi}{\varepsilon}\sqrt{\frac{A}{f_1 + f_2 + f_3}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (6)$$

Diese Zeit fällt klein aus, oder die Grundschwingungen folgen schnell aufeinander, 1) wenn $f_1 + f_2 + f_3$ gross, d. h. wenn die Federn starr sind, 2) wenn A klein, d. h. wenn das Trägheitsmoment des beweglichen Baues in Bezug auf die Längenaxe klein ist, 3) wenn ε gross ist, d. h. wenn die Federn möglichst weit aussen am Baue angebracht sind.

Das Glied

$$\frac{p_2}{m_2 - \omega^2}\left[P \sin.(\alpha_0 - \omega t) - P_1 \cos.(\alpha_0 - \omega t)\right]$$

bestimmt die Schwingungen, welche durch die Pressungen der Gleitstücke gegen die Führungslineale veranlasst werden, wenn die Kolben durch Dampf getrieben werden. Diese Schwingungen richten sich genau nach den Kurbelbewegungen, wir wollen sie desshalb Kurbelschwingungen nennen. Die Dauer einer solchen Schwingung, d. h. die Zeit, in welcher die Lokomotive in Folge dieser Schwingungsweise in eine gewisse Lage zurückkehrt, ist $\frac{2\pi}{\omega}$ und stimmt genau mit der Umdrehung der Treibaxe überein Je nachdem also die Lokomotive schnell oder langsam läuft, folgen diese Kurbelschwingungen schnell oder langsam aufeinander. Die grösste Ablenkung von der Ruheposition, welche in Folge dieser Schwingung eintritt, beträgt $\frac{p_2 P}{m_2 - \omega^2}$ oder wenn wir für p_2 und m_2 ihren Werth setzen:

$$\frac{P r e}{2 L A} \frac{1}{\frac{\varepsilon^2 (f_1 + f_2 + f_3)}{A} - \omega^2}$$

oder auch

$$\frac{P r e}{2 L} \frac{1}{\varepsilon^2 (f_1 + f_2 + f_3) - \omega^2 A} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots (7)$$

Das durch die Pressungen der Gleitstücke gegen die Führungslineale verursachte Wanken wird demnach bedenklich 1) wenn P gross ist, d. h. wenn die Maschinen kräftig wirken; 2) wenn e gross ist, d. h. wenn die Horizontaldistanz der Cylinder gross ist; 3) wenn $\frac{r}{L}$ gross ist, d. h. wenn die Schubstangen im Verhältniss zum Kurbelhalbmesser eine geringe Länge haben; 4) wenn ε klein ist, d. h. wenn die Federn eng gestellt sind; 5) wenn $f_1 + f_2 + f_3$ klein ist, d. h. wenn die Federn weich sind; 6) wenn die Geschwindigkeit der Lokomotive demjenigen Werth nahe kommt, für welchen

$$\omega = \varepsilon \sqrt{\frac{f_1 + f_2 + f_3}{A}}$$

wird, d. h. wenn die Umdrehungszeit der Triebaxe mit der Zeit einer Grundschwingung nahe übereinstimmt. Es gibt also für jede Lokomotive eine Winkelgeschwindigkeit der Triebaxe, bei welcher ein heftiges Wanken des beweglichen Baues eintreten muss.

Denkt man sich, dass eine Lokomotive ganz allmälig aus einem langsamen Bewegungszustand in einen extravagant schnellen übergeht, so wird anfänglich nur ein schwaches, dann ein stärkeres, hierauf ein sehr heftiges Wanken eintreten; hat man aber diesen gefährlichen Moment glücklich überstanden, so nimmt das Wanken bei noch weiter zunehmender Geschwindigkeit mehr und mehr ab, und würde bei einer grenzenlosen Geschwindigkeit so verschwinden, dass sich die Lokomotive ganz aufrecht stehend hielte.

Wir können auch die Einwirkungen der Unvollkommenheit der Bahn auf das Wanken der Lokomotive durch Rechnung verfolgen, wenn wir annehmen, dass diese Einwirkungen durch periodisch wiederkehrende Funktionen der Zeit ausgedrückt werden dürfen. Durch die Unebenheiten der Bahn werden die Räder, insbesondere an den Schienen-Verbindungen in die Höhe gestossen, werden ferner die Räder zwischen den Schienen hin und her geschoben. Durch diese Einwirkungen entstehen gewisse Drehungsmomente und wir wollen annehmen, dass dieselben durch

$$\varepsilon\,\mathfrak{B}\,(\sin.\lambda t + \cos.\gamma t) \text{ und } h\,\mathfrak{H}\,(\sin.\mu t + \cos.\mu t)$$

ausgedrückt werden dürfen, wobei 2ε der horizontale Abstand der rechtseitigen Federn von den linkseitigen und h die Höhe des Schwerpunktes des beweglichen Baues über den Axen der Räder bezeichnet. Ferner $\mathfrak{B}$ λ $\mathfrak{H}$ μ gewisse von dem Bau der Bahn und der Räder abhängige Constante sind.

Wir erhalten nun statt der Gleichung (1) die folgende

$$\frac{d^2\psi}{dt^2} = -m_2\psi + p_2[P\sin.(\alpha_0 - \omega t) - P_1\cos.(\alpha_0 - \omega t)] + \frac{\varepsilon\mathfrak{B}}{2A}(\sin.\lambda t + \cos.\lambda t) + \frac{h\mathfrak{H}}{2A}(\sin.\mu t + \cos.\mu t)$$

Vorausgesezt dass m_2 weder gleich ω^2 noch gleich λ^2 und auch nicht gleich μ^2 ist, findet man für das Integrale dieser Gleichung folgenden Ausdruck

$$\left.\begin{aligned}\psi = \mathfrak{A}\sin.\sqrt{m_2}\,t + \mathfrak{B}\cos.\sqrt{m_2}\,t + \frac{p_2}{m_2-\omega^2}[P\sin.(\alpha_0-\omega t) - P_1\cos.(\alpha_0-\omega t)]\\ + \frac{\varepsilon\mathfrak{B}}{2A(m_2-\lambda^2)}(\sin.\lambda t + \cos.\lambda t)\\ + \frac{h\mathfrak{H}}{2A(m_2-\mu^2)}(\sin.\mu t + \cos.\mu t)\end{aligned}\right\} \quad (8)$$

Da sowohl $\sin.\lambda t + \cos.\lambda t$ als auch $\sin.\mu t + \cos.\mu t$ nicht grösser als $\sqrt{2}$ werden kann, so ist die grösste Neigung, die durch das Aufspringen der Räder verursacht werden kann,

$$\sqrt{2}\,\frac{\varepsilon\mathfrak{B}}{2A(m_2-\lambda^2)} = \frac{1}{2}\sqrt{2}\,\frac{\varepsilon\mathfrak{B}}{\varepsilon^2(f_1+f_2+f_3) - \lambda^2 A}$$

und die gröste Neigung, die aus der Hin- uüd Herbewegung der Räder zwischen den Schienen entstehen kann

$$\sqrt{2}\,\frac{h\mathfrak{H}}{2A(m_2-\mu^2)} = \frac{1}{2}\sqrt{2}\,\frac{h\mathfrak{H}}{\varepsilon^2(f_1+f_2+f_3) - \mu A}$$

Hieraus sieht man, dass die Einwirkung der Bahn auf das Wanken der Lokomotive gross ausfällt: 1) wenn sich der Schwerpunkt des beweglichen Baues in einer beträchtlichen Höhe über den Axen der Räder befindet, 2) wenn m_2 nahe gleich λ^2 oder nahe gleich μ^2 wird. Diess ist aber dann der Fall, wenn die Zeit $\frac{2\pi}{\sqrt{m_2}}$ einer Grundschwingung nahe gleich ist der Zeit $\frac{2\pi}{\lambda}$ von einem Radaufsprung bis zum nächsten, oder nahe gleich ist der Zeit $\frac{2\pi}{\mu}$ des Hin- und Herganges der Räder zwischen dem Geleise. Da die störenden Einwirkungen der Bahn vorzugsweise an den Schienenstössen stattfinden, so werden wir der Wahrheit ziemlich nahe kommen, wenn wir diese Zeiten $\frac{2\pi}{\lambda}$ und $\frac{2\pi}{\mu}$ gleich setzen der Zeit, in der die Lokomotive über eine Schienenlänge läuft; diese Zeit ist aber wenn wir die Laufgeschwindigkeit der Lokomotive mit V und die Länge einer Schiene mit S bezeichnen $\frac{S}{V}$. Durch die Einwirkung einer aus gleich langen Schienen bestehenden Bahn kann also das Wanken bedeutend werden, wenn annähernd

$$\frac{S}{V} = \frac{2\pi}{\sqrt{m_2}} = \frac{2\pi}{\varepsilon}\sqrt{\frac{A}{f_1+f_2+f_3}}$$

oder annähernd

$$v = \frac{S \varepsilon}{2 \pi} \sqrt{\frac{f_1 + f_2 + f_3}{A}} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (9)$$

wird. Denkt man sich, dass eine Lokomotive aus einem sehr langsamen Beharrungszustand allmählig in einen extravagant raschen übergeht, so wird die Bahn anfangs nur ein schwaches, dann ein stärkeres, zuletzt aber, wenn die Geschwindigkeit sehr gross geworden ist, nur noch ein äusserst schwaches Wanken verursachen. Es gibt also auch hinsichtlich der Einwirkung der Bahn auf das Wanken eine gefährliche Geschwindigkeit; auch ist aus dem Gesagten klar, dass man sich durch ungleich lange Schienen gegen die Einwirkung der Bahn theilweise schützen könnte.

Gehen wir nun zur Behandlung der Ausnahmsfälle über, in welchen der Ausdruck (9) das Integrale der Differenzialgleichung (8) nicht mehr darstellen kann.

Ausnahmsfälle, in welchen die für das Wanken aufgefundenen Ausdrücke unrichtig sind.

Es gibt drei Fälle, in welchen die Gleichung (9) den wahren Werth von ψ nicht mehr richtig darstellt. Diese Fälle treten ein, wenn m_2 entweder gleich ω^2 oder gleich λ^2 oder endlich gleich μ^2 ist, d. h. wenn die Dauer $\frac{2\pi}{\sqrt{m_2}}$ entweder gleich ist der Umdrehungszeit $\frac{2\pi}{\omega}$ der Triebaxe oder gleich ist einer der Perioden $\frac{2\pi}{\lambda}$ $\frac{2\pi}{\mu}$ der Bahneinwirkungen. Die analytische Praxis lässt vermuthen, dass in einem dieser drei Fälle das wahre Integrale der Gleichung (8) ein mit der Zeit t multiplizirtes Glied enthalten müsse. Prüft man diese Vermuthung, so findet man, dass der Differenzialgleichung (8) in der That durch folgende Ausdrücke entsprochen wird:

1. Wenn $\omega^2 = m_2$ ist:

$$\psi = \mathfrak{A} \sin. \omega t + \mathfrak{B} \cos. \omega t + \frac{p_2}{2\sqrt{m_2}} \left[P \sin. (\alpha_0 - \omega t) + P_1 \cos. (\alpha_0 - \omega t)\right] t$$

$$+ \frac{\varepsilon \mathfrak{B}}{2 A (m_2 - \lambda^2)} (\sin. \lambda t + \cos. \lambda t)$$

$$+ \frac{h \mathfrak{H}}{2 A (m_2 - \mu^2)} (\sin. \mu t + \cos \mu t)$$

2. Wenn $\lambda^2 = m_2$ ist

$$\psi = \mathfrak{A} \sin. \sqrt{m_2}\, t + \mathfrak{B} \cos. \sqrt{m_2}\, t + \frac{p_2}{m_2 - \omega^2} \left[P \sin. (\alpha_0 - \omega t) - P_1 \cos. (\alpha_0 - \omega t)\right]$$

$$+ \frac{\varepsilon \mathfrak{B}}{4 A \sqrt{m_2}} (\sin. \sqrt{m_2}\, t - \cos. \sqrt{m_2}\, t)\, t$$

$$+ \frac{h \mathfrak{H}}{2 A (m_2 - \mu^2)} (\sin. \mu t + \cos. \mu t)$$

Wenn $\mu^2 = m_2$ ist:

$$\psi = \mathfrak{A} \sin. \sqrt{m_2}\, t + \mathfrak{B} \cos. \sqrt{m_2}\, t + \frac{p_2}{m_2 - \omega^2}\left[P \sin. (\alpha_0 - \omega t) - P_1 \cos. (\alpha_0 - \omega t)\right]$$

$$+ \frac{\varepsilon \mathfrak{B}}{2 A (m_2 - \lambda^2)} (\sin. \lambda t + \cos \lambda t)$$

$$+ \frac{h \mathfrak{H}}{4 A \sqrt{m_2}} (\sin. \sqrt{m_2}\, t - \cos. \sqrt{m_2}\, t)\, t$$

Wäre gleichzeitig $\omega^2 = m_2$ und $\lambda^2 = m_2$ oder $\omega^2 = m_2$ und $\mu^2 = m_2$ oder endlich $\lambda^2 = m_2$ und $\mu^2 = m_2$, so würden in dem Ausdruck für ψ zwei mit der Zeit t multiplizirte Glieder vorkommen. Wäre gleichzeitig $m_2 = \omega^2 = \lambda^2 = \mu^2$ so würden in ψ drei mit t multiplizirte Glieder vorkommen.

In allen diesen Fällen wird das Wanken der Lokomotive mit der Zeit immer stärker und stärker, kann demnach mit der Zeit sehr drohend werden. Es ist daher von praktischem Interesse zu erfahren, was zu thun ist, damit in der Wirklichkeit diese gefährlichen Gleichheiten: $\omega^2 = m_2$ $\lambda^2 = m_2$ $\mu^2 = m_2$ nicht eintreten können.

Wenn die gefährliche Gleichheit $\omega^2 = m_2$ nicht eintreten soll, muss die grösste Winkelgeschwindigkeit, die in der Benutzung einer Lokomotive eintreten kann, kleiner sein als $\sqrt{m_2}$. Nennen wir V die grösste Laufgeschwindigkeit, bis zu welcher hin man eine Lokomotive laufen lassen will, D den Durchmesser eines Triebrades, so ist der grösste Werth von $\omega = 2\frac{V}{D}$. Die gefährliche Gleichheit $\omega^2 = m_2$ wird also bei keiner der Geschwindigkeiten, mit welcher man die Lokomotive laufen lassen will, eintreten, wenn

$$2\frac{V}{D} < \sqrt{m_2}$$

oder wenn

$$D > \frac{2V}{\sqrt{m_2}}$$

oder wenn

$$D > 2\frac{V}{\varepsilon}\sqrt{\frac{A}{f_1 + f_2 + f_3}} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (1)$$

Diesem Ausdrucke kann man eine mehr sprechende Form geben. Das Federwerk einer Lokomotive soll, wie wir in der Folge sehen werden, immer so angeordnet werden, dass in unbewegtem Zustande der Lokomotive alle Federn gleich stark zusammengedrückt sind. Dieser Anforderung wird, wie Seite 142, Gleichung (5) erklärt wurde entsprochen, wenn

$$\left.\begin{aligned} f_1 \varDelta_1 + f_2 \varDelta_2 - f_3 \varDelta_3 &= 0 \\ f_1 + f_2 + f_3 &= \frac{G}{2s} \end{aligned}\right\} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (2)$$

$s = z$ gesetzt ist, wobei s die Zusammendrückung jeder Feder bedeutet. Wir wollen annehmen, das Federwerk der Lokomotive entspreche dieser Anforderung.

Um das Trägheitsmoment A des beweglichen Baues in Bezug auf die durch den Schwerpunkt gehende Längenaxe auszudrücken, sei d_1 der Durchmesser eines Cylinders, dessen Gewicht gleich G und dessen Trägheitsmoment (als Masse ausgedrückt) in Bezug auf seine geometrische Axe gleich A ist, so hat man

$$A = \frac{G}{2\,g} \cdot \frac{d_1^2}{8} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots (3)$$

Vermittelst dieses Werthes von A und des Werthes, den die zweite der Bedingungen (2) für $f_1 + f_2 + f_3$ darbietet, wird die Beziehung (1)

$$D > \frac{1}{2} \frac{d_1}{e} \sqrt{\frac{2\,s}{g}} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots (4)$$

Die Zusammendrückung s der Federn durch das Gewicht des beweglihen Baues beträgt gewöhnlich 0·05 Meter, $\frac{d_1}{e}$ ist für die Lokomotive von *Crampton* annähernd gleich 2·5, $g = 9{\cdot}808$. Die grösste, bei Personenschnellzügen vorkommende Geschwindigkeit V kann zu 16 Meter angenommen werden. Mit diesen Daten findet man aus (4)

$$D > 2 \text{ Meter.}$$

Diese numerische Rechnung ist nun allerdings nicht ganz zuverlässig, weil das Verhältniss $\frac{d_1}{e}$ nur nach einer ungefähren Schätzung genommen wurde, aber jedenfalls werden wir durch den Ausdruck (4) belehrt, dass weiche Federn (für welche s gross ist) und eine grosse Fahrgeschwindigkeit V grosse Triebräder erfordern, damit das Wanken nicht zu stark wird.

Untersuchen wir nun ferner, unter welchen Bedingungen die gefährlichen Gleichheiten $\lambda^2 = n_2$ und $\mu^2 = m_2$ vermieden werden können.

Die störenden Einwirkungen der Bahn auf die Bewegung der Lokomotive geschehen vorzugsweise an den Schienenverbindungen; es ist daher der Natur der Sache angemessen, wenn wir die Perioden $\frac{2\pi}{\mu}$ und $\frac{2\pi}{\lambda}$ gleich setzen der Zeit, in welcher die Lokomotive eine Schienenlänge durchläuft. Nennen wir also S eine Schienenlänge, V die Laufgeschwindigkeit der Lokomotive, so ist $\frac{S}{V}$ die Zeit, in der die Lokomotive eine Schienenlänge zurücklegt. Wir setzen daher

$$\frac{2\pi}{\mu} = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{S}{V}$$

oder

$$\lambda = \mu = 2\pi \frac{V}{S} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots (5)$$

Damit nun bei keiner von den Geschwindigkeiten, die in der Wirklichkeit vorkommen, die gefährliche Gleichheit $\lambda^2 = m_2$ eintritt, muss, selbst für den grössten Werth von V, $\lambda < \sqrt{m_2}$ sein. Wir erhalten daher die Bedingung

$$2\pi \frac{V}{S} < e \sqrt{\frac{f_1 + f_2 + f_3}{A}}$$

oder

$$S > 2\,\pi \frac{V}{\varepsilon} \sqrt{\frac{A}{f_1 + f_2 + f_3}}$$

oder endlich wenn wir für A und $f_1 + f_2 + f_3$ die Werthe setzen, welchen die Gleichungen (2) und (3) darbieten

$$S > \frac{\pi}{2} \frac{d_1}{\varepsilon} V \sqrt{\frac{2\,s}{g}} \qquad \text{. . . . . (5)}$$

Weiche Federn (für welche s gross ist), eine grosse Fahrgeschwindigkeit und eine kleine Federdistanz ε erfordern also lange Schienen.

Setzen wir auch hier $\frac{d_1}{\varepsilon} = 2{\cdot}5$, $V = 16$, $s = 0{\cdot}05$, $g = 9{\cdot}81$, so folgt aus (5)

$$S > 6{\cdot}28 \text{ Meter.}$$

Diese Schienenlänge stimmt mit den gegenwärtig üblichen Schienenlängen beinahe überein.

Für den ersten Augenblick wird es wohl Jedermann befremdend finden, dass gewisse, beinahe mässige Fahrgeschwindigkeiten gefährlicher sein können als extravagante Geschwindigkeiten, und ich muss gestehen, dass mir dieses Ergebniss der Analysis anfänglich mit der Natur der Sache so sehr im Widerspruche zu sein schien, dass ich irgend einen Rechnungsfehler begangen zu haben vermuthete. Lange suchte ich vergeblich nach diesem vermeintlichen Fehler, bewerkstelligte die Integration der Differenzialgleichung (1) Seite 148 durch verschiedene Methoden, kam aber immer zu dem gleichen Endresultate. Endlich wurde es mir klar, dass die Rechnung recht habe, dass sich das Ergebniss mit der Natur der Sache sehr wohl vertrage, und dass ähnliche Erscheinungen in sehr vielen Fällen vorkommen. Es ist nämlich nicht schwer einzusehen, dass eine vorhandene periodisch schwingende Bewegung immer heftiger und heftiger werden muss, wenn dieselbe in Zeitintervallen, die der Schwingungsperiode gleich kommen, auf gleiche Weise gestört wird. Wenn z. B. auf ein schwingendes Pendel nach jedem Schwung ein wenn auch nur schwacher Schlag ausgeübt wird, so müssen die Schwingungen zuletzt immer grösser und grösser werden. Oder wenn gegen ein im Wasser schwankendes Schiff Wellenschläge einwirken, die in Zeitintervallen aufeinander folgen, welche der Schwingungszeit des Schiffes gleich sind, so muss nothwendig das Schwanken des Schiffes zuletzt immer stärker und stärker werden. Auch in der Astronomie kommt ein merkwürdiges Beispiel vor, das hier angeführt zu werden verdient.

La Place hat zuerst gezeigt, dass die Störung, welche in der Bewegung eines Planeten A durch einen Planeten B eintritt, wesentlich von dem Verhältniss der Umlaufszeiten dieser Planeten abhängt, und dass diese Störung fort und fort zunehmen muss, wenn die Umlaufszeit des einen Planeten ein Vielfaches von der Umlaufszeit des anderen Planeten ist.

In der später folgenden Untersuchung über das Nicken und Wogen werden wir ebenfalls der Erscheinung begegnen, dass sich unter gewissen Umständen die störenden Bewegungen immer mehr und mehr anhäufen können, und es ist meine Ueberzeugung, dass darin manche in den Bewegungen der Lokomotive vorkommende Erscheinungen ihren Grund haben, und dass namentlich oftmals Axenbrüche durch Ansammlung von störenden Bewegungen geschehen mögen.

Bedingungen, bei deren Erfüllung die wankenden Bewegungen einer Lokomotive nur in einem schwachen Grade eintreten.

Aus dieser Untersuchung über die wankenden Bewegungen geht hervor, dass diese störenden Bewegungen nur in einem schwachen Grade eintreten werden, wenn folgenden Bedingungen entsprochen wird.

A) Die wankenden Bewegungen, welche die Pressungen der Gleitstücke gegen die Führungslineale verursachen, fallen vermöge des Ausdruckes (7) Seite 150 klein aus:

1. Wenn die Lokomotive nur mit schwacher Kraft getrieben wird, oder nur einen verhältnissmässig kleinen Widerstand zu überwinden hat.
2. Wenn die Schubstangen im Verhältniss zum Kurbelhalbmesser sehr lang sind.
3. Wenn die Cylinder der beiden Maschinen möglichst nah neben einander liegen. Innen liegende Cylinder sind also hinsichtlich des Wankens den aussen liegenden vorzuziehen.
4. Wenn die Federn einen hohen Grad von Starrheit besitzen.
5. Wenn die parallel mit den Axen der Räder gemessene Horizontaldistanz der Federn gross ist. Hinsichtlich des Wankens ist es also besser, wenn die Federn nicht innerhalb, sondern wenn sie ausserhalb der Räder angebracht werden. Auch ist eine grosse Spurweite vortheilhaft.
6. Wenn die beim schnellsten Lauf der Lokomotive eintretende Umdrehungszeit der Triebräder kleiner ist als die Zeit einer Grundschwingung des auf den Federn liegenden Baues.

B) Die wankenden Bewegungen, welche aus den Einwirkungen der Bahn gegen die Räder entstehen, fallen klein aus.

7. Wenn der Schwerpunkt des Baues möglichst tief liegt.
8. Wenn die Federn, nach der Richtung der Triebaxe gemessen, weit auseinander angebracht sind.
9. Wenn die Federn starr sind, in welchem Fall jedoch harte Stösse eintreten, die noch nachtheiliger sind, als schwankende Bewegungen.
10. Wenn die Schienen der Bahn sehr lang sind, so dass die Zeit, welche die Lokomotive braucht, um über eine Schiene zu laufen, beträchtlich grösser ist, als die Zeit einer Grundschwingung des Baues.

Die hinsichtlich des Wankens vortheilhaften Bedingungen sind also, wenn man sie in kurzen Worten zusammenfasst: Mässige Anstrengung der Lokomotive, lange Schubstangen, kleine Kurbelhalbmesser, innen liegende Cylinder, starre aussen liegende Federn, grosse Triebräder, tief liegender Schwerpunkt, lange Bahnschienen, grosse Spurweite.

Diese Untersuchung über das Wanken hat eine reichere Ausbeute geliefert, als das Studium über das Zucken und Schlingern; noch reicher ist die Ausbeute, welche die Untersuchung über das Wogen und Nicken liefert

Bestimmung des hinsichtlich des Wankens vortheilhaftesten Durchmessers der Triebräder.

Der Ausdruck (7) Seite 150, welcher die Grösse des Wankens bestimmt, kann in eine Form gebracht werden, die über den Einfluss des Durchmessers der Triebräder auf das Wanken Aufschluss gibt.

Nennt man w den totalen Widerstand des Trains mit Einschluss des Widerstandes der Lokomotive. D den Durchmesser eines Triebrades. V die Fahrgeschwindigkeit der Lokomotive, so ist

$$Pr = \frac{\pi}{8} D W \qquad \omega = \frac{2V}{D}$$

Vermittelst dieser Werthe wird der Ausdruck (7), wenn man denselben zur Abkürzang mit X bezeichnet und $f_1 + f_2 + f_3 = F_1$ setzt:

$$X = \frac{\pi}{16} W \frac{e}{L} \frac{D^3}{\varepsilon^2 D^2 F_1 - 4 V^2 A} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

Es entsteht nun die Frage, wie gross für eine neu zu erbauende Lokomotive, die mit einer gewissen Geschwindigkeit V zu laufen bestimmt ist, der Durchmesser D genommen werden soll, damit das Wanken X so klein als möglich ausfällt. Der Ausdruck (1) zeigt, dass X verschwindet, wenn $D = o$ ist. Dass aber X sowohl für $D = \infty$ als auch für $D = 2 \frac{V}{\varepsilon} \sqrt{\frac{A}{F_1}}$ unendlich gross ausfällt; es muss also zwischen diesen Werthen von D ein Werth von D liegen, für welchen X ein relatives Minimum wird, d. h. es gibt einen hinsichtlich des Wankens vortheilhaftesten Durchmesser der Triebräder. Wir finden denselben, wenn wir den Differenzialquotienten $\frac{dX}{dD}$ suchen und gleich Null setzen.

Es ist nun

$$\frac{dX}{dD} = \frac{\pi}{16} W \frac{e}{L} \frac{(\varepsilon^2 D^2 F_1 - 4 V^2 A)\, 3 D^2 - 2 D^4 \varepsilon^2 F_1}{(\varepsilon^2 D^2 F_1 - 4 V^2 A)^2}$$

Der Zähler dieses Ausdruckes verschwindet, wenn $D = o$, so wie auch wenn

$$D = \frac{V}{\varepsilon} \sqrt{12 \frac{A}{F_1}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (2)$$

ist, und dies ist der hinsichtlich des Wankens vortheilhafteste Raddurchmesser. Führt man diesen Werth von D in (1) ein, so erhält man

$$X_{\text{min.}} = \frac{3\pi}{32} W \frac{e V}{\varepsilon^2 F_1 L} \sqrt{\frac{12 A}{F_1}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (3)$$

Setzt man in diese Ausdrücke (2) und (3) für A und $F_1 = f_1 + f_2 + f_3$ die Werthe, welche die Gleichungen (2) und (3) Seite 153 und 154 darbieten, so wird:

$$D = V \frac{d_1}{\varepsilon} \sqrt{\frac{3}{2} \frac{s}{g}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (4)$$

$$X_{\text{min.}} = \frac{6\pi}{32} \frac{W}{G} \frac{e V s d_1}{\varepsilon^2 L} \sqrt{\frac{3}{2} \frac{s}{g}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (5)$$

für die Lokomotive von *Crampton* ohne Blindaxe ist annähernd: $s = 0{\cdot}05$, $g = 9{\cdot}81$, $\frac{d_1}{\varepsilon} = 2{\cdot}5$, $\varepsilon = 0.7$, $e = 0{\cdot}9$ Meter, $L = 2{\cdot}2$, $\frac{W}{G} = \frac{1}{20}$. Für diese Werthe findet man:

$$\left.\begin{aligned} D &= 0.22\,V \\ X_{\text{min.}} &= \frac{V}{3750} \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots (6)$$

Dieser Durchmesser ist sehr gross, denn er wird schon für die sehr mässige Fahrgeschwindigkeit von 10 Meter 2·2 Meter. Allein man sieht auch aus dem Werth von X, dass dieses schwächste Wanken verschwindend klein ist.

Wir wollen sehen, wie stark das Wanken wird, wenn der Durchmesser der Triebräder von dem vortheilhaftesten Werth abweicht.

Nehmen wir

$$D = m \frac{V}{\varepsilon} \sqrt{12 \frac{A}{F_1}} = m\,V \frac{d_1}{\varepsilon} \sqrt{\frac{3}{2} \frac{s}{g}} \quad \ldots\ldots\ldots (7)$$

wobei m irgend eine beliebige Zahl bezeichnet. Sezt man $m = 1$, so gibt (7) den vortheilhaftesten Durchmesser.

Der das Wanken messende allgemeine Werth von X wird für diesen Werth von D

$$X = \frac{3\pi}{16} \frac{W e V}{L \varepsilon^2 F_1} \sqrt{12 \frac{A}{F_1}} \frac{m^2}{3 m^2 - 1}$$

oder

$$X = \frac{6\pi}{16} \frac{W}{G} \frac{e V s d_1}{\varepsilon^3 L} \sqrt{\frac{3}{2} \frac{s}{g}} \frac{m^2}{3 m^2 - 1} \quad \ldots\ldots\ldots (8)$$

Setzen wir auch hier $s = 0.05$ $g = 9.81$ $\frac{d_1}{\varepsilon} = 2.5$ $\varepsilon = 0.7$ $e = 0.9$ $L = 2.2$ $\frac{W}{G} = \frac{1}{20}$ so findet man:

$$D = 0.22\,m\,V$$

$$x = \frac{V}{1875} \frac{m^2}{3 m^2 - 1}$$

Für	$m = 1$	0·9	0·8	0·7	0·6	$\frac{1}{\sqrt{3}} = 0.577$
wird	$\frac{D}{V} = 0.22$	0·20	0·176	0·154	0·132	0·127
und	$\frac{m^2}{3 m^2 - 1} = 0.50$	0·51	0·56	0·73	2·7	∞

Hieraus sieht man, dass ein bedenkliches Wanken erst dann eintritt, wenn der Durchmesser des Triebrades derjenigen Grenze ganz nahe kommt, bei welcher die Umdrehungszeit des Rades mit der Zeit einer Grundschwingung zusammen trifft. Für $m = 0.6$ wird $D = 0.132\,V$ und $X = \frac{V}{694}$ und dieser Werth von X wird selbst für eine sehr grosse Geschwindigkeit von $V = 20$ nur $\frac{20}{694} = \frac{1}{34}$ d. h. die Lokomotive wankt dann nur im Winkel von 2° hin und her.