Die Gesetze des Lokomotiv-Baues

Redtenbacher, Ferdinand

Mannheim, 1855

Das Zucken und Schlingern

urn:nbn:de:bsz:31-266507

vollständig aufgehoben werden, denn die Federn müssen vorhanden sein, weil sonst die von den Unebenheiten der Bahn entstehenden Stösse zu hart wären, und die Pressungen der Gleitstücke gegen die Leitlineale können auch nicht aufgehoben werden; diese störenden Bewegungen können jedoch durch eine zweckmässige Bauart der Lokomotive so weit gemässigt werden, dass sie nicht mehr gefährlich werden. Durch welche Constructionsweise dieses möglich wird, wird sich in der Folge zeigen.

7) *Das Nicken.* (Drehung um eine durch den Schwerpunkt des Baues gehende Queraxe). Jene vertikal aufwärts wirkenden Pressungen der Federn und der Gleitstücke sind aber auch in Bezug auf eine durch den Schwerpunkt des Baues gehende horizontale Queraxe nicht im Gleichgewicht, müssen also periodische Drehungen um diese Axe, demnach ein abwechselndes Heben und Senken der Enden des auf den Federn liegenden Baues hervorbringen. Jedesmal, wenn das vordere Ende des Wagenbaues aufwärts schwingt, ist der Druck der Vorderräder gegen die Bahn schwach, und wenn in einem solchen Moment durch eine Unebenheit der Bahn die Vorderräder in die Höhe gestossen werden, kann es geschehen, dass ihre Berührung mit der Bahn aufhört und dass sie aus dem Geleise gelenkt werden. Es ist also auch diese Störung hinsichtlich des Ausgleisens sehr bedenklich, und soll daher so weit als möglich geschwächt werden, was wiederum nur durch eine geeignete Bauart der Lokomotive geschehen kann.

Die aus dem Wogen, Wanken und Nicken sich zusammensetzende Bewegung kann man das Gaukeln nennen.

Den mittleren Fortlauf der Lokomotive und die periodische Bewegung des Schwerpunktes haben wir bereits in dem vorhergehenden Abschnitte behandelt; die übrigen der genannten Bewegungen werden wir in diesem Abschnitt erschöpfend untersuchen.

Das Zucken und Schlingern.

Bewegungen einer frei hängenden Lokomotive.

Wenn man eine nicht balanzirte Lokomotive mit vier langen Ketten, welche den Rahmen an seinen vier Ecken fassen, aufhängt, so dass sie frei in der Luft schwebt, und sich wie ein Pendel, in horizontalem Sinne, nach jeder Richtung bewegen kann, hierauf den Kessel heizt, und den Dampf auf die Maschine wirken lässt, so gerathen nicht nur die Kolben, die Schubstangen, die Kurbelaxen und sämmtliche Triebräder in Bewegung, sondern es entsteht auch in dem Rahmenbau und den damit verbundenen Theilen (Kessel, Dampfcylinder etc.) eine aus zwei Schwingungen zusammengesetzte Bewegung, aus einer Schwingung in der Richtung der Längenaxe der Lokomotive und aus einer drehenden Schwingung um eine Vertikalaxe. Die Ursachen, welche diese beiden Schwingungen in einer frei hängenden Lokomotive veranlassen, sind auch vorhanden, wenn die Lokomotive nicht aufgehängt, sondern auf die Bahn gestellt ist und auf derselben fortläuft, und sie sind es, welche dann die Erscheinungen verursachen, die wir Zucken und Schlingern genannt haben.

Eine genaue Kenntniss der schwingenden Bewegungen einer frei hängenden Lokomotive ist in zweifacher Hinsicht von praktischem Werth, denn zunächst lernen wir dadurch die Bewegungen kennen, welche eine auf der Bahn fortlaufende Lokomotive, vermöge ihres inneren Baues, zu machen strebt und theilweise auch wirklich macht; denn eine Lokomotive, die frei hängend Längen-Oscillationen und drehende Schwingungen zeigt, wird, wenn man sie auf die Bahn stellt und durch Dampf forttreibt, vermöge der Ursache, welche die Längenschwingungen veranlasst, mit periodischer Geschwindigkeit fortrollen, und vermöge der Ursache, welche die drehenden Schwingungen erzeugt, ihre Bewegungsrichtung zwischen dem Geleise bald nach der einen, bald nach der andern Seite zu ändern suchen und die Energie, mit welcher sie dies zu thun strebt, wird aus der Kraft beurtheilt werden können, mit welcher die drehenden Schwingungen im frei hängenden Zustand erfolgen. Den Hauptvortheil, den wir aus dem Studium der Bewegungen einer frei hängenden Lokomotive ziehen können, besteht aber darin, dass wir dadurch die Mittel kennen lernen, durch welche diese Schwingungen ganz aufgehoben werden können, und diese Mittel sind zugleich diejenigen, welche das Zucken und Schlingern einer auf der Bahn laufenden Lokomotive ganz aufheben, denn eine Lokomotive, die im aufgehängten Zustand keinerlei Schwingungen zeigt, kann, wenn sie auf die Bahn gestellt und fortgetrieben wird, kein Bestreben zu einer Geschwindigkeits- oder Richtungsänderung der Bewegung äussern. Die Mittel, welche die Schwingungen der frei hängenden Lokomotive beseitigen, sind also zugleich die Mittel, durch welche das Zucken und Schlingern aufgehoben werden kann.

Das Zucken.

Längenschwingungen einer frei hängenden Lokomotive.

Diese Schwingungen kann man durch verschiedene Methoden berechnen. Eine Methode bietet der Grundsatz der Erhaltung des Schwerpunktes dar, und nach dieser wollen wir die Berechnung durchführen.

Eine frei hängende, durch die innere Kraft des Dampfes in Bewegung gebrachte Lokomotive kann als ein Massensystem angesehen werden, auf welches keine nach horizontaler Richtung zielende äussere Kräfte einwirken, da nun die inneren Kräfte eines solchen Systems den Ort seines Schwerpunktes nicht zu verrücken vermögen, so müssen die Bewegungen sämmtlicher Massen so vor sich gehen, dass der dem Massensystem in jedem Augenblick entsprechende ideale Schwerpunkt stets an dem gleichen Ort bleibt. Hieraus folgt, dass der Rahmenbau zurückweichen muss, wenn beide Kolben vorwärts gehen, und vorwärts schwingen wird, wenn beide Kolben zurückgehen etc., dass mithin Längenoscillationen des Rahmenbaues eintreten müssen. Es sei nun Tab. XI, Fig. 43 der Grundriss, Tab. XII., Fig. 44 der Aufriss der Lokomotive in einem Augenblick der Bewegung, in welchem die Mittellinie Ax_1 des Rahmens mit einer durch den idealen Schwerpunkt B des Ganzen Systems gezogenen fixen geraden Linie O x einen Winkel φ bildet, der vermöge der drehenden Schwingungen einen veränderlichen Werth hat, in welchem Augenblick ferner die Kurbeln der rechtseitigen und linkseitigen Maschine mit einer Horizontalebene, beziehungsweise die Winkel α und $\frac{\pi}{2}-\alpha$ bilden. O sei ein in der Linie B x willkührlich angenommener fixer Punkt, A der Mittelpunkt der Kurbelaxe, C der Schwerpunkt aller Theile der Lokomotive, mit Ausnahme der Kolben, Kolbenstangen, Schubstangen und der Kurbelkörper.

Nennen wir:

$\overline{OB} = a$ die Entfernung des idealen Schwerpunktes des totalen Massensystems von dem fixen Punkt O;

$\overline{AC} = b$ die Entfernung des Schwerpunktes aller in C vereinigt gedachten Massen vom Mittelpunkt der Kurbelaxe;

$\overline{AB} = \xi$ die Entfernung des Mittelpunktes der Kurbelaxe von dem idealen Schwerpunkt B des totalen Massensystems in dem Augenblick, in welchem die Winkel α und φ gelten;

$\left.\begin{array}{l} AP_1 = x_1 \\ MP_1 = y_1 \end{array}\right\}$ die Coordinaten eines beliebigen Punktes M der Lokomotive in Bezug auf die Linie Ax_1;

$\left.\begin{array}{l} OP = x \\ MP = y \end{array}\right\}$ die Coordinaten des Punktes M in Bezug auf die Linie OBx;

G das Gewicht der vollständigen Lokomotive sammt Wassergehalt des Kessels;

q das Gewicht eines Kurbelkörpers sammt Kurbelwarze;

ϱ die Entfernung des Schwerpunktes von q von der Kurbelaxe;

S die Summe der Gewichte eines Kolbens einer Kolbenstange sammt Kreuzkopf und einer Schubstange;

L die Länge einer Kolbenstange;

r den Halbmesser einer Kurbel;

s die Entfernung des Schwerpunktes einer Masse S vom Mittelpunkt des Kurbelzapfens, wenn Kurbel, Schubstange und Kolbenstange in eine geraden Linie fallen,

so ist zunächst:

$$\left.\begin{array}{l} x = a + (x_1 - \xi) \cos.\varphi - y_1 \sin.\varphi \\ y = \quad (x_1 - \xi) \sin.\varphi + y_1 \cos.\varphi \end{array}\right\} \quad \ldots \ldots \ldots \quad (1)$$

Nennt man m das Gewicht des im Punkt M befindlichen Massentheilchens der Lokomotive, so hat man zur Bestimmung des Ortes des idealen Schwerpunktes B die Beziehung;

$$\Sigma m x = a \Sigma m \quad \ldots \ldots \ldots \quad (2)$$

wobei Σ das Summenzeichen ist, welches auf sämmtliche Massenpunkte der totalen Lokomotive auszudehnen ist.

Setzt man für x den Werth, welchen die erste der Gleichungen (1) darbietet, so wird:

$$\Sigma m \left[a + (x_1 - \xi) \cos.\varphi - y_1 \sin.\varphi\right] = a \Sigma m \quad \ldots \ldots \ldots \quad (3)$$

oder weil $\Sigma m a = a \Sigma m$ ist:

$$\Sigma m \left[(x_1 - \xi) \cos.\varphi - y_1 \sin.\varphi\right] = 0 \quad \ldots \ldots \ldots \quad (4)$$

In diesem Ausdruck darf man $\sin.\varphi$ und $\cos.\varphi$ vor das Summenzeichen setzen, weil der Winkel φ für alle Massenpunkte der Lokomotive den gleichen Werth hat, man erhält daher statt dieser Gleichung (4) die folgende:

$$\cos.\varphi\,(\Sigma m x_1 - \Sigma m \xi) - \sin.\varphi\,\Sigma m y_1 = 0 \quad \ldots \ldots \ldots \quad (5)$$

Nun ist aber $\Sigma m y_1 = 0$, indem jedem Punkt, welcher sich linker Hand von der Mittellinie Ax_1 befindet, ein zweiter Punkt rechter Hand entspricht, für welchen y_1 eben so gross, aber negativ ist. Dann ist ferner $\Sigma m \xi = \xi\,\Sigma m = \xi G$. Die Gleichung (5) wird daher, weil $\cos.\varphi$ nicht Null ist:

$$\Sigma m x_1 = \xi G \quad \ldots \ldots \ldots \quad (6)$$

wobei Σ wie früher auf sämmtliche Massenpunkte der ganzen Lokomotive auszudehnen ist.

Bezeichnet man für einen Augenblick durch $\Sigma_1\ \Sigma_2\ \Sigma_3$ diejenigen Theile der ganzen Summe $\Sigma m x_1$, welche sich auf die Gewichte $G - 2q - 2S\ \ 2q$ und $2S$ beziehen, so ist, wenn man die Hin- und Herbewegung der Steuerungstheile unberücksichtiget lässt:

$$\Sigma m x_1 = \Sigma_1 + \Sigma_2 + \Sigma_3 \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (7)$$

Est ist aber $\Sigma_1 = (G - 2q - 2S)\, b$:

$$\Sigma_2 = q\,\varrho \cos.\alpha + q\,\varrho \sin.\alpha = q\,\varrho\,(\cos.\alpha + \sin.\alpha)$$

Ferner, wenn man die Winkel vernachlässigt, welche die Schubstangen mit den Kolbenstangen bilden:

$$\Sigma_3 = S\,(r \cos.\alpha + s) + S\,(r \sin.\alpha + s)$$

$$\Sigma_3 = S\left[r\,(\cos.\alpha + \sin.\alpha) + 2\,s\right]$$

Man hat demnach:

$$\Sigma m x_1 = b\,(G - 2q - 2S) + q\,\varrho\,(\cos.\alpha + \sin.\alpha) + S\,\left[r\,(\cos.\alpha + \sin.\alpha) + 2\,s\right]$$

oder:

$$\Sigma m x_1 = (G - 2q - 2S)\,b + 2\,S\,s + (q\,\varrho + S\,r)\,(\cos.\alpha + \sin.\alpha)$$

Führt man diesen Werth von $\Sigma m x_1$ in die Gleichung (6) ein und sucht dann den Werth von ξ, so findet man:

$$\xi = \frac{(G - 2g - 2S)\,b + 2\,S\,s}{G} + \frac{q\,\varrho + S\,r}{G}\,(\cos.\alpha + \sin.\alpha) \quad \ldots \ldots \quad (8)$$

Der Werth von ξ ist, wie man sieht, mit dem Winkel α periodisch veränderlich, d. h die Kurbelaxe der Lokomotive, der Rahmenbau und alle mit demselben starr verbundenen Körper bewegen sich daher bei jeder Umdrehung der Triebräder vorwärts und rückwärts, oder die Lokomotive macht periodische Längenschwingungen. Von $\alpha = 0$ bis $\alpha = 45^\circ$ nimmt die Summe $\cos.\alpha + \sin.\alpha$ und nimmt folglich auch der Werth von ξ fortwährend zu, der Rahmen bewegt sich also in dieser Zeit rückwärts. Von $\alpha = 45^\circ$ bis $\alpha = 180 + 45^\circ$ nimmt der Werth von $\sin.\alpha + \cos.\alpha$ und nimmt folglich auch ξ fortwährend ab, und in dieser Zeit bewegt sich der Rahmen vorwärts.

Der gösste Werth von ξ, nämlich der dem Winkel 45° entsprechende ist:

$$\frac{(G - 2q - 2S)\,b + 2\,S\,s}{G} + \frac{q\,\varrho + S\,r}{G}\,(\sin.45^\circ + \cos.45^\circ) =$$

$$\frac{(G - 2q - 2S)\,b + 2\,S\,s}{G} + \frac{q\,\varrho + S\,r}{G}\,\sqrt{2}$$

Der kleinste Werth von ξ, nämlich der dem Winkel $180 - 45$ entsprechende ist:

$$\frac{(G - 2q - 2S)\,b + 2\,S\,s}{G} + \frac{q\,\varrho + S\,r}{G}\,\left[\sin.(180 + 45^\circ) + \cos.(180 + 45^\circ)\right] =$$

$$\frac{(G - 2q - 2S)\,b + 2\,S\,s}{G} - \frac{q\,\varrho + S\,r}{G}\,\sqrt{2}$$

Die ganze Verschiebung des Rahmens während jeder Umdrehung der Triebräder ist demnach (die Differenz aus dem grössten und kleinsten Werth von ξ):

$$\frac{q\varrho + S r}{G}\, 2\sqrt{2}$$

Sie ist, wie man sieht, ganz unabhängig, sowohl von der Geschwindigkeit, so wie auch von dem Gesetze, nach welchem die drehende Bewegung der Triebaxe erfolgt, und richtet sich vorzugsweise nur nach dem Verhältniss $\frac{S}{G}$ zwischen den hin- und hergehenden Massen und der ganzen Masse der Lokomotive. Da dieses Verhältniss jederzeit einen sehr kleinen Werth hat, so beträgt diese Verschiebung allerdings nicht viel, allein wenn eine Lokomotive auf der Bahn im schnellen Lauf ist, wobei die Triebräder in einer Sekunde circa 3 Umdrehungen machen, kommen in jeder Sekunde 3 solche Schüttlungen vor, sie treten also dann mit sehr grosser Heftigkeit auf.

Für eine Personenlokomotive kann man nehmen:

$$G = 24000 \text{ Kilg.} \qquad q = 60 \text{ Kilg.} \qquad S = 224 \text{ Kilg.}$$

$$r = 0{\cdot}23 \text{ Meter} \qquad \varrho = 0{\cdot}18 \text{ Meter.}$$

und dann wird:

$$\frac{q\varrho + S r}{G}\, 2\sqrt{2} = 0{,}007 \text{ Meter.}$$

Das Zucken beträgt also hier nur 7 Millimeter, allein wenn man sich vorstellt, dass diese grosse Masse in jeder Sekunde 3 mal und jedesmal um 7 Millimeter geschüttelt wird, so wird man wohl erkennen, dass dies eine sehr heftige Bewegung sein müsse, die zunächst auf die Verbindung aller Theile der Maschine merklich nachtheilig wirken kann, dann aber noch ein abzuckendes Anziehen der Lokomotive zur Folge haben muss.

Beträchtlicher als in obigem Falle wird die Zuckung oder Schüttlung bei Maschinen mit gekuppelten Rädern, wegen der Masse der Kupplungsstangen, die ebenfalls in S eingerechnet werden müssen, vorausgesetzt, dass die Bewegungsrichtung der Kupplungsstangen mit jener der Schubstangen übereinstimmt, wie dies bei gekuppelten Maschinen mit aussen liegenden Cylindern der Fall ist. Bei Maschinen mit innen liegenden Cylindern ist es dagegen möglich, dass die äusseren Kupplungsstangen die Schüttlung vermindern, dies ist nämlich der Fall, wenn die äusseren Kurbeln der Kupplungsstangen gegen die inneren Maschinenkurbeln um 180° verstellt sind.

Bei Güterlokomotiven mit äusseren Cylindern und äusseren Schub- und Kupplungsstangen ist es, um die Schüttlung zu schwächen, gut, diese Stangen alle gerade nur so stark zu halten, als es für die Sicherheit durchaus nothwendig ist.

Bei nicht gekuppelten Maschinen ist es aber hinsichtlich der Schüttlung ganz gleichgültig, ob die Cylinder innen oder aussen liegen, weil diese Lage der Cylinder in diesem Falle auf das Gewicht der Schubstange und überhaupt auf das Gewicht der hin- und hergehenden Massen beinahe keinen Einfluss hat.

Es ist schon oben erwähnt worden, dass das Zucken wesentlich nur von dem Verhältniss $\frac{S}{G}$ abhängt; so lange dieses Verhältniss seinen Werth nicht ändert, ist es also in Betreff des Zuckens ganz gleichgültig, wie die Maschine sonst gebaut ist, ob sie äussere oder innere Cylinder hat, ob die Triebräder vor oder hinter der Feuerbüchse angebracht sind und wie überhaupt die Radstellung beschaffen ist. Auch ist es gleichgültig, ob die Spurweite gross oder klein ist, ob äussere oder innere Rahmen genommen werden, ob der Schwerpunkt des Baues weiter vorn oder weiter zurück liegt, ob er hoch oder tief liegt u. s. w., mit einem Wort: das Zucken schreibt über den Bau der Locomotive nichts vor, ausgenommen ein möglichst geringes Gewicht der hin- und hergehenden Masse; und selbst auch von dieser Anforderung kann man sich vollständig befreien, wenn man balanzirende Massen anbringt, welche, wie wir sogleich sehen werden, das Zucken vollständig beseitigen.

Aufhebung der Längenschwingungen oder des Zuckens durch Massen.

Es gibt zwei Mittel, durch welche das Zucken ganz aufgehoben werden kann, nämlich durch Anbringung entweder von hin- und hergehenden oder von rotirenden Massen. Das Mittel der rotirenden Massen kann bei allen Arten von Lokomotiven leicht angewendet werden, jenes der hin- und hergehenden Massen jedoch nur bei Locomotiven mit innen liegenden Cylindern und mit gekuppelten Rädern. Macht man nämlich bei einer solchen Maschine das Gewicht der auf einer Seite der Lokomotive befindlichen Kupplungsstangen gleich $\frac{\varrho q + r S}{r}$, die äusseren Kurbeln der Kupplungsstangen so lang als die inneren Kurbeln und stellt sie den innern Kurbeln diametral gegenüber, so ist klar, dass dann die Schüttlung ganz aufgehoben wird, denn bei einer solchen Einrichtung ändert der den sämmtlichen hin- und hergehenden Massen entsprechende Schwerpunkt seine Lage gegen die Rahmen nicht, es ist also kein Grund vorhanden, wesshalb der Schwerpunkt des Rahmenbaues seinen Ort verändern sollte. Eine solche Lokomotive wird also im aufgehängten Zustand keine Längenschwingungen machen, und wenn sie auf der Bahn läuft, kein Zucken zeigen.

Wir wollen nun sehen, ob und auf welche Weise die Längenschwingungen an frei hängenden Lokomotiven durch Anbringung von rotirenden Massen aufgehoben werden können.

Wir versehen jedes dieser Räder mit Gewichten von gleicher Grösse (Fig. 44). Es sei Q eines dieser Gewichte, ϱ_2 die Entfernung des Schwerpunktes dieser Gewichte von der geometrischen Axe der Kurbelwelle, $180^0 - \gamma^0$ und $180^0 + \gamma^0$ die Winkel, welche die nach den Schwerpunkten gehenden Radien mit den Richtungen der Kurbeln bilden.

Wir berechnen zunächst die Längenschwingungen der Lokomotive, wenn sie mit diesen Gewichten versehen ist.

Es gilt auch hier wiederum wie bei der nicht balanzirten Lokomotive die Gleichung (6) Seite 113, nämlich

$$\Sigma m x_1 = \Sigma G \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (9)$$

allein das Summenzeichen muss hier auch auf die Balanzirgewichte Q ausgedehnt werden.

Derjenige Theil der Summe $\Sigma m x_1$ welcher sich auf die Balanzirgewichte bezieht, ist offenbar

$$-\varrho_2 Q \cos.(\alpha - \gamma) - \varrho_2 Q \cos.(90 - \alpha - \gamma) = -\varrho_2 Q \left[\cos.(\alpha - \gamma) + \sin.(\alpha + \gamma)\right]$$

Die Theile der Summe $\Sigma m x_1$ welche sich auf die übrigen Massen der Lokomotive beziehen, sind hier wie bei der nicht balanzirten Lokomotive

$$(G - 2q - 2S) b + 2Ss + (q\varrho + rS)(\sin.\alpha + \cos.\alpha)$$

und somit erhalten wir:

$$G \xi = (G - 2q - 2S) b + 2Ss + (q \varrho + rS.)(\sin. \alpha + \cos. \alpha) - \varrho_1 Q [\cos. (\alpha - \gamma) + \sin. (\alpha + \gamma)]$$

oder auch weil

$$\cos. (\alpha - \gamma) + \sin. (\alpha + \gamma) = (\sin \alpha + \cos. \alpha)(\sin \gamma + \cos \gamma).$$

$$G \xi = (G - 2q - 2S) b + 2Ss + [q \varrho + rS - \varrho_1 Q (\sin. \gamma + \cos. \gamma)][\sin. \alpha + \cos. \alpha]$$

Hieraus folgt;

$$\xi = \frac{(G - 2q - 2S) b + 2Ss}{G} + \frac{q \varrho + rS - \varrho_1 Q (\sin. \gamma + \cos. \gamma)}{G} (\sin. \alpha + \cos. \alpha) \quad . \; . \; . \quad (10)$$

Wenn keine Längenschwingungen stattfinden sollen, so muss ξ denselben Werth haben für jeden Werth von α; dies ist aber nur möglich, wenn

$$q \varrho + rS - Q \varrho_1 (\sin. \gamma + \cos. \gamma) = 0$$

oder wenn

$$\sin. \gamma + \cos \gamma = \frac{\varrho q + rS}{Q \varrho_1} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (11)$$

Da diese Gleichung drei unbestimmte Grössen, nämlich γ Q und ϱ_1 enthält, so können die Längenschwingungen durch sehr verschiedene Balanzirungsgewichte aufgehoben werden. Wenn ϱ_1 und γ angenommen wird, findet man Q, wenn Q und ϱ_1 so angenommen wird, dass $\frac{\varrho q + rS}{Q \varrho_1} =< 1.414$ ausfällt, findet man ein entsprechendes γ.

Wenn es sich nur um die Aufhebung der Längenschwingungen handelte, könnte man $\gamma = 0$ oder $\gamma = 180°$ nehmen und dann fände man $Q \varrho_1 = \varrho q + rS$, allein es handelt sich auch um die Beseitigung der drehenden Schwingungen, und dies erfordert, wie wir sehen werden, abermals eine gewisse Beziehung zwischen Q ϱ_1 und γ, es ist daher vorläufig angemessener, für γ keinen speziellen Werth anzunehmen, sondern abzuwarten, welche Bedingung die Aufhebung der drehenden Schwingungen vorschreibt.

Longitudinalschwingung einer aufgehängten Lokomotive der allgemeinsten Art.

Wir wollen nun die Längenschwingungen einer Lokomotive bestimmen, die folgende allgemeine Einrichtungen hat. 1) Die Entfernung eines Dampfcylindermittels vom Mittel $A x_1$ der Maschine sei e; 2) die Maschine sei aussen mit Kupplungsstangen versehen; 3) die Räder seien mit Balanzirungsmassen versehen. Es sei (Tab. XII. Fig. 44 und Fig. 45.):

e die Entfernung des Mittels eines Cylinders vom Mittel $A x_1$ der Lokomotive;
r der Halbmesser einer Maschinenkurbel;
S das Gewicht eines Kolbens, einer Kolbenstange und einer Schubstange;
q das Gewicht der Körper, die eine Maschinenkurbel bilden;

ϱ die Entfernung des Schwerpunktes eines Gewichts q von der geometrischen Axe der Kurbelwelle;

e_1 die Entfernung des Mittels einer Kupplungsstange vom Mittel A_x der Lokomotive.

S_1 das Gewicht einer Kupplungsstange;

r_1 der Halbmesser einer Kupplungsstangenkurbel;

$\left.\begin{matrix} s \\ s_1 \end{matrix}\right\}$ Die Entfernungen der Schwerpunkte der Massen S und S_1 von den Kurbelzapfen;

90° Winkel, den die Richtungen der Kupplungskurbeln gegeneinander bilden;

β Winkel, unter welchem die rechtseitige Kupplungskurbel gegen die rechtseitige Maschinenkurbel geneigt ist;

q_1 Gewicht einer Kurbel der Kupplungsstange;

ϱ_1 Entfernung des Schwerpunktes eines Gewichts q_1 von der geometrischen Axe der Kurbelwelle;

Q Gewicht einer Balanzirungsmasse;

ϱ_2 Entfernung des Schwerpunktes eines Gewichts Q von der geometrischen Drehungsaxe der Kurbelwelle;

e_2 Entfernung des Schwerpunktes eines Gewichts Q von der durch A_{x_1} gelegten Verticalebene;

γ Winkel, den die Richtungen von ϱ mit den Verlängerungen von r bilden; (Fig. 44.)

Es besteht auch hier wiederum die Gleichung (6), nämlich:

$$\Sigma m x_1 = \xi G.$$

Die Glieder von $\Sigma m x_1$, welche die einzelnen Körper der ganzen Lokomotive liefern, sind hier folgende:

Die Glieder, welche entsprechen den Massen	sind
$G - 2q - 2S - 2q_1 - 2S_1 - 2Q$	$b\left[G - 2q - 2S - 2q_1 - 2S_1 - 2Q\right]$
$2q$	$q\varrho(\cos.\alpha + \sin.\alpha)$
$2S$	$S\left[r(\cos.\alpha + \sin.\alpha) + 2s\right]$
$2q_1$	$q_1\varrho_1\left[\cos.(\alpha+\beta) + \sin.(\alpha+\beta)\right]$
$2S_1$	$S\left\{r_1\left[\cos(\alpha+\beta) + \sin.(\alpha+\beta)\right] + 2s_1\right\}$
$2Q$	$-Q\varrho_2\left\{\sin.(\alpha+\gamma) + \cos.(\alpha-\gamma)\right\}$

wir erhalten daher für ξ folgenden Werth

$$\xi = \frac{b(G - 2q - 2S - 2q_1 - 2S_1 - 2Q) + 2Ss + 2S_1 s_1}{G} +$$

$$\frac{q\varrho + Sr - \varrho_2 Q(\sin.\gamma + \cos.\gamma)}{G}(\sin.\alpha + \cos.\alpha) +$$

$$\frac{(q_1\varrho_1 + S_1 r_1)}{G}\cos.\beta(\sin.\alpha + \cos.\alpha) + \frac{(q_1\varrho_1 + S_1 r_1)}{G}\sin.\beta(\cos.\alpha - \sin.\alpha)$$

Wenn die Längenschwingung nicht eintreten soll, muss ξ für jeden Werth von α den gleichen Werth haben, und dies ist nur dann der Fall, wenn β entweder 0 oder 180° ist und wenn dann ferner:

$$q\varrho + S r - \varrho_2 Q (\sin. \gamma + \cos. \gamma) + (q_1 \varrho_1 + S_1 r_1) \cos. \beta = 0$$

oder weil $\cos. 0^\circ = +1, \cos. 180^\circ = -1$ ist, so wird diese Bedingungsgleichung

$$q\varrho + S r - \varrho_2 Q (\sin. \gamma + \cos. \gamma) \pm (q_1 \varrho_1 + S_1 r_1) = 0 \quad \ldots \ldots \ldots \quad (12)$$

wobei das obere Zeichen gilt, wenn die auf einer Seite der Linie $A x_1$ befindlichen Kurbeln parallel gestellt sind und das untere Zeichen, wenn diese Kurbeln diametral gegenüber stehen.

Das Schlingern.

Drehende Schwingungen einer frei hängenden Maschine.

Eine aufgehängte Lokomotive ist als ein System von Massen zu betrachten, welches in horizontalem Sinne nach jeder Richtung frei beweglich ist, und das von keinen äusseren Horizontalkräften affizirt wird. In einem solchen System halten sich alle inneren Horizontalkräfte das Gleichgewicht, und wenn sich die Massen des Systems gegen einander bewegen, so muss diess in einer solchen Weise geschehen, dass die sämmtlichen den Beschleunigungen der Massentheilchen entsprechenden Kräfte die Bedingungen des Gleichgewichts erfüllen, es muss daher die Summe der statischen Momente dieser Kräfte in Bezug auf eine durch den idealen Schwerpunkt des Systems gehende Vertikalaxe gleich Null sein.

Um das hier mit Worten Gesagte analytisch auszudrücken, wählen wir die gleichen Bezeichnungen, die zur Untersuchung der Längenschwingungen gedient haben, und werden im Verlauf der Rechnung nur noch einige Bezeichnungen hinzufügen.

Die beschleunigenden Kräfte eines im Punkt M befindlichen Massentheilchens, dessen Gewicht m ist, sind:

$$\frac{m}{g} \frac{d^2 x}{dt^2} \qquad \frac{m}{g} \frac{d^2 y}{dt^2}$$

Diese Kräfte äussern ein Bestreben, die ganze Lokomotive um eine durch den idealen Schwerpunkt B gehende Vertikalaxe zu drehen, und diesem Bestreben entspricht ein Moment von der Grösse:

$$\frac{m}{g} \frac{d^2 y}{dt^2} x - \frac{m}{g} \frac{d^2 x}{dt^2} y$$

Die Summe der Momente aller beschleunigenden Kräfte sämmtlicher Massentheilchen ist demnach:

$$\Sigma \frac{m}{g} \left(\frac{d^2 y}{dt^2} x - \frac{d^2 x}{dt^2} y \right)$$

wobei das Summenzeichen Σ auf sämmtliche Massentheilchen, aus welchem die Lokomotive besteht, auszudehnen ist.

Diese Summe muss aber für die, im frei hängenden Zustand durch den inneren Dampfdruck bewegte Lokomotive gleich Null sein. Man hat daher zur Berechnung der drehenden Schwingung der Lokomotive die Gleichung:

$$\Sigma\, m \left(\frac{d^2 y}{dt^2}\, x - \frac{d^2 x}{dt^2}\, y\right) = 0$$

Aus dieser Gleichung folgt durch Integration:

$$\Sigma\, m \left(x\, \frac{dy}{dt} - y\, \frac{dx}{dt}\right) = \text{Const.}$$

Wenn die Lokomotive in dem Augenblick, wenn die Einwirkung des Dampfes auf die Kolben beginnt, keine Geschwindigkeit hat, so ist in demselben für jeden Punkt der Lokomotive $\frac{dx}{dt}$ und $\frac{dy}{dt}$ gleich Null. Unter dieser Voraussetzung verschwindet die Constante, und die Gleichung der Bewegung wird:

$$\Sigma\, m \left(x\, \frac{dy}{dt} - y\, \frac{dx}{dt}\right) = 0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

Nun ist schon Seite (113) gefunden worden:

$$\left.\begin{aligned} x &= a + (x_1 - \xi) \cos. \varphi - y_1 \sin. \varphi \\ y &= \qquad (x_1 - \xi) \sin. \varphi + y_1 \cos. \varphi \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (2)$$

Durch Differenziation findet man hieraus:

$$\frac{dx}{dt} = -(x_1 - \xi) \sin. \varphi \frac{d\varphi}{dt} + \cos. \varphi \left(\frac{dx_1}{dt} - \frac{d\xi}{dt}\right) - y_1 \cos. \varphi \frac{d\varphi}{dt} - \sin. \varphi \frac{dy_1}{dt}$$

$$\frac{dy}{dt} = \quad (x_1 - \xi) \cos. \varphi \frac{d\varphi}{dt} + \sin. \varphi \left(\frac{dx_1}{dt} - \frac{d\xi}{dt}\right) - y_1 \sin. \varphi \frac{d\varphi}{dt} + \cos. \varphi \frac{dy_1}{dt}$$

Allein weil die Entfernung jedes Punktes von der Mittellinie $B x_1$ der Lokomotive während ihrer Bewegung unverändert bleibt, so ist für jeden Punkt der Lokomotive $\frac{dy_1}{dt} = 0$, demnach:

$$\left.\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= -\left[(x_1 - \xi) \sin. \varphi + y_1 \cos. \varphi\right] \frac{d\varphi}{dt} + \cos. \varphi \left(\frac{dx_1}{dt} - \frac{d\xi}{dt}\right) \\ \frac{dy}{dt} &= \quad \left[(x_1 - \xi) \cos. \varphi - y_1 \sin. \varphi\right] \frac{d\varphi}{dt} + \sin. \varphi \left(\frac{dx_1}{dt} - \frac{d\xi}{dt}\right) \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (3)$$

Durch Combination der Gleichungen (2) und (3) findet man nach einigen Reduktionen:

$$x \frac{dy}{dt} - y \frac{dx}{dt} = \left\{(x_1 - \xi)^2 + y_1^2 + a\left[(x_1 - \xi) \cos. \varphi - y_1 \sin. \varphi\right]\right\} \frac{d\varphi}{dt} + (a \sin. \varphi - y_1) \left(\frac{dx_1}{dt} - \frac{d\xi}{dt}\right)$$

Substituirt man diesen Werth in (1) so wird derselbe:

$$\left.\begin{array}{r} 0 = \frac{d\varphi}{dt} \Sigma m \left[(x_1 - \xi)^2 + y_1^2\right] + a \,.\, \frac{d\left[\sin.\varphi\, \Sigma m (x_1 - \xi)\right]}{dt} - \Sigma m\, y_1 \frac{dx_1}{dt}. \\ - a \sin.\varphi \frac{d\varphi}{dt} \Sigma m\, y_1 \\ + \frac{d\xi}{dt} \Sigma m\, y_1 \end{array}\right\} \quad . \; . \quad (4)$$

die zwei letzten Glieder dieses Ausdrucks sind aber wegzulassen, denn beinahe jedem Massenpunkt, welcher sich auf einer Seite der Axe $B x_1$ der Lokomotive in einer grossen Entfernung y_1 befindet, entspricht auf der anderen Seite ein eben so grosser Massenpunkt, für welchen y_1 eben so gross aber negativ ist, es heben sich also in der Summe $\Sigma m y_1$ die Glieder paarweise auf. Eine Ausnahme hievon machen nur die dem Gewichte nach unbedeutenden Bestandtheile, welche nur auf einer Seite der Lokomotive vorkommen.

Durch Weglassung der zwei letzten Glieder wird die Gleichung der Bewegung

$$0 = \frac{d\varphi}{dt} \Sigma m \left[(x_1 - \xi^2) + y_1^2\right] + a \; \frac{d.\left[\sin.\varphi\, \Sigma m (x_1 - \xi)\right]}{dt} - \Sigma m\, y_1 \frac{dx_1}{dt} \quad . \; . \; . \quad (5)$$

Allein es ist $\Sigma m x_1 = \xi\, \Sigma m = \Sigma m\, \xi$, demnach $\Sigma m (x_1 - \xi) = 0$, daher erhalten wir statt (5) folgende Gleichung

$$0 = \frac{d\varphi}{dt} \Sigma m \left[(x_1 - \xi)^2 + y_1^2\right] - \Sigma m\, y_1 \frac{dx_1}{dt} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (6)$$

Es ist aber

$$\Sigma m \left[(x_1 - \xi)^2 + y_1^2\right] = \Sigma m (x_1^2 + y_1^2) + \xi^2 \Sigma m - 2\, \xi\, \Sigma m\, x_1$$

oder weil $\Sigma m x_1 = \xi\, \Sigma m$ und $\Sigma m = G$ ist:

$$\Sigma m \left[(x_1 - \xi)^2 + y_1^2\right] = \Sigma m (x_1^2 + y_1^2) - \xi^2 G\,.$$

daher wird die Gleichung (6) der Bewegung

$$0 = \left[\Sigma m (x_1^2 + y_1^2) - \xi^2 G\right] \frac{d\varphi}{dt} - \Sigma m\, y_1 \frac{dx_1}{dt} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (7)$$

Die hier angedeuteten Summen müssen nun für alle Theile der Lokomotive berechnet werden. Bezeichnen wir zur Abkürzung der Sprache durch $\mathfrak{R}$, $\mathfrak{K}$ und $\mathfrak{S}$ diejenigen Theile der totalen Summe $\frac{d\varphi}{dt} \Sigma m (x_1^2 + y_1^2) - \Sigma m\, y_1 \frac{dx_1}{dt}$, welche die Massen $G - 2q - 2S$, $2q$, $2S$ liefern, so können wir die Gleichung (7) der Bewegung auch schreiben

$$0 = \mathfrak{R} + \mathfrak{K} + \mathfrak{S} - \xi^2 G \frac{d\varphi}{dt} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (8)$$

$\mathfrak{N}$ bezieht sich auf alle Theile der Lokomotive mit Ausnahme der Kolben, der Schubstangen und Gleitstücke, der Kolbenstangen und der Kurbelkörper (derjenigen Massen, die über die Rundung der Axe hinausragen). Die Hin- und Herbewegung der Steuerungstheile und einiger Pumpentheile können wir vernachlässigen. Da $m(x_1^2 + y_1^2)$ das Trägheitsmoment eines Massentheilchens in Bezug auf eine durch den Mittelpunkt A der Kurbel gehende Verticalaxe ausdrückt und $\frac{dx_1}{dt}$ für jeden Punkt, auf welchen $\mathfrak{N}$ bezogen werden muss, verschwindet, so reducirt sich der Werth von $\mathfrak{N}$ auf das Produkt aus $\frac{d\varphi}{dt}$ in das Trägheitsmoment aller zu $\mathfrak{N}$ gehörigen Massen in Bezug auf die durch A gehende Vertikalaxe. Dieses Trägheitsmoment, als Gewicht ausgedrückt, wollen wir durch $(G - 2q - 2S)k^2$ ausdrücken, dann haben wir

$$\mathfrak{N} = (G - 2q - 2S)\, k^2 \frac{d\varphi}{dt} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (9)$$

$\mathfrak{K}$ bezieht sich auf die beiden Kurbelkörper.

Der mathematisch genaue Werth von $\mathfrak{K}$ ist äuserst zusammengesetzt, jedoch von keinem erheblichen Einfluss, denn die Kurbelmassen sind im Vergleich zu den übrigen Massen sehr klein; wir dürfen uns daher mit einem Annäherungswerthe begnügen und einen solchen erhalten wir, wenn wir $\mathfrak{K}$ so berechnen, als wäre die Masse jeder Kurbel in ihrem Schwerpunkt vereinigt. Unter dieser Voraussetzung ist

für die Masse

der Vorderkurbel	der Hinterkurbel
$x_1 = \varrho \cos. \alpha$	$x_1 = \varrho \sin. \alpha$
$y_1 = -e$	$y_1 = +e$
$\frac{dx_1}{dt} = -\varrho \sin. \alpha \frac{d\alpha}{dt}$	$\frac{dx_1}{dt} = \varrho \cos. \alpha \frac{d\alpha}{dt}$

demnach wird

$$\mathfrak{K} = \left[q(\varrho^2 \cos.^2 \alpha + e^2) + q(\varrho^2 \sin.^2 \alpha + e^2)\right] \frac{d\varphi}{dt} - q e \varrho \sin. \alpha \frac{d\alpha}{dt}$$
$$- q e \varrho \cos. \alpha \frac{d\alpha}{dt}$$

oder

$$\mathfrak{K} = q(\varrho^2 + 2e^2) \frac{d\varphi}{dt} - q e \varrho (\sin. \alpha + \cos. \alpha) \frac{d\alpha}{dt} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (10)$$

wobei $2e$ die Entfernung der Axen der beiden Dampfcylinder bezeichnet.

$\mathfrak{S}$ fällt ebenfalls äusserst zusammengesetzt aus, wenn man seinen Werth mathematisch genau bestimmen will, wir wollen uns also auch hier mit einer Annäherung begnügen, die wir dadurch erhalten, dass wir uns denken, es sei die Masse einer Schubstange, einer Kolbenstange und eines Kolbens längs einer geraden Linie L gleichmässig vertheilt, deren Länge so gross ist, als der Abstand des Kolbens von der Kurbelwarze bei ausgestreckter Stellung der Schubstange. Auch wollen wir die Neigungen der Schubstangen gegen die Kolbenstangen unberücksichtigt lassen.

Nehmen wir in den Linien L zwei Punkte an, die von ihren Kurbeln um u entfernt sind, so ist

für den Punkt der Vorderkurbel	für den Punkt der Hinterkurbel.
$x_1 = r\cos.\alpha + u$	$x_1 = r\sin.\alpha + u$
$y_1 = -e$	$y_1 = +e$
$\frac{dx_1}{dt} = -r\sin.\alpha\frac{d\alpha}{dt}$	$\frac{dx_1}{dt} = r\cos.\alpha\frac{d\alpha}{dt}$

Nennen wir λ die ganze Länge einer Linie L, so ist auf jede Längeneinheit ein Gewicht $\frac{S}{\lambda}$ zu vertheilen, und auf ein unendlich kleines Stückchen du der Länge ein Gewicht $\frac{S}{\lambda}du$. Diese beiden Gewichtstheilchen liefern zusammen in der Summe $\mathfrak{S}$ folgenden Betrag:

$$\left\{\left[(r\cos.\alpha+u)^2+e^2\right]\frac{S}{\lambda}du+\left[(r\sin.\alpha+u)^2+e^2\right]\frac{S}{\lambda}du\right\}\frac{d\varphi}{dt}-e\,r\sin.\alpha\frac{d\alpha}{dt}\,\frac{S}{\lambda}du-e\,r\cos.\alpha\frac{d\alpha}{dt}\,\frac{S}{\lambda}du$$

oder

$$\left[r^2+2e^2+2u^2+2ru\,(\cos.\alpha+\sin.\alpha)\right]\frac{S}{\lambda}du\frac{d\varphi}{dt}-e\,r\,(\sin.\alpha+\cos.\alpha)\,\frac{d\alpha}{dt}\,\frac{S}{\lambda}du$$

Die Summe $\mathfrak{S}$ wird nun gefunden, wenn man diesen letzten Ausdruck von $u=o$ bis $u=\lambda$ integrirt, und man findet

$$\mathfrak{S}=\left[(r^2+2e^2)\,S+\frac{2}{3}\,S\lambda^2+\lambda r S(\cos.\alpha+\sin.\alpha)\right]\frac{d\varphi}{dt}-e\,r\,S\,(\sin.\alpha+\cos.\alpha)\,\frac{d\alpha}{dt}\quad\cdot\quad\cdot\quad(11)$$

Wenn wir nun die für $\mathfrak{R}$, $\mathfrak{K}$ und $\mathfrak{S}$ erhaltenen Werthe in der Gleichung (8) einführen, so ergibt sich:

$$0=(G-2q-2S)\,k^2\frac{d\varphi}{dt}+q\,(\varrho^2+2e^2)\,\frac{d\varphi}{dt}-q\,e\,\varrho\,(\sin.\alpha+\cos.\alpha)\,\frac{d\alpha}{dt}$$

$$+\left[(r^2+2e^2)\,S+\frac{2}{3}\,S\lambda^2+\lambda r S(\cos.\alpha+\sin.\alpha)\right]\frac{d\varphi}{dt}-e\,r\,S\,(\sin.\alpha+\cos.\alpha)\,\frac{d\alpha}{dt}-\xi^2 G\,\frac{d\varphi}{dt}$$

oder wenn man die Glieder, welche $\frac{d\varphi}{dt}$ und jene, welche $\frac{d\alpha}{dt}$ als Faktoren enthalten zusammenfasst.

$$0=\left\{-\xi^2G+(G-2q-2S)\,k^2+q\,(\varrho^2+2e^2)+S\left[(r^2+2e^2)+\frac{2}{3}\,\lambda^2+\lambda r\,(\sin.\alpha+\cos.\alpha)\right]\right\}\frac{d\varphi}{dt}$$

$$-(q\varrho+rS)\,e\,(\sin.\alpha+\cos.\alpha)\,\frac{d\alpha}{dt}$$

oder endlich wenn man für ε seinen Werth setzt, den wir früher in der Untersuchung über die Längenschwingung gefunden haben, und welchen die Gleichung (8) Seite 114 darbietet

$$0 = \left\{ \begin{array}{l} -\left[\frac{(G-2q-2S)b+2Ss}{G} + \frac{q\varrho+Sr}{G}(\sin.\alpha+\cos.\alpha)\right]^2 G \\ +(G-2q-2S)k^2+q(r^2+2c^2) \\ +S\left[(r^2+2c^2)+\frac{2}{3}\lambda^2+\lambda r(\sin.\alpha+\cos.\alpha)\right] \end{array} \right\} \frac{d\varphi}{dt} \quad \ldots\ldots \quad (12)$$

$$-(q\varrho+rS)e(\sin.\alpha+\cos.\alpha)\frac{d\alpha}{dt}$$

Setzt man zur Abkürzung

$$\left. \begin{array}{l} (G-2q-2S)k^2+q(\varrho^2+2e^2)+S(r^2+2e^2+\frac{2}{3}\lambda^2)-\frac{\left[(G-2q-2S)b+2Ss\right]^2}{G} = \mathfrak{A} \\ -2\frac{\left[(G-2q-2S)b+2Ss\right]\left[q\varrho+Sr\right]}{G}+S\lambda r = \mathfrak{B} \\ -\frac{(q\varrho+Sr)^2}{G} = \mathfrak{C} \\ -(q\varrho+rS)e = \mathfrak{D} \end{array} \right\} \quad \ldots \quad (13)$$

und lässt in der Gleichung (12) dt weg, so folgt aus derselben

$$d\varphi = -\frac{\mathfrak{D}(\sin.\alpha+\cos.\alpha)\,d\alpha}{\mathfrak{A}+\mathfrak{B}(\sin.\alpha+\cos.\alpha)+\mathfrak{C}(\sin.\alpha+\cos.\alpha)^2}.$$

Das Integrale dieser Gleichung würde das Gesetz der drehenden Schwingung bestimmen. Es lässt sich in der That durchführen, allein das Ergebniss ist ein so ausserordentlich complizirtes, dass es wohl angemessen ist, sich mit einer Annäherung zu begnügen. Berücksichtigt man die Kleinheit der Massen q und S gegen die ungeheure Masse G, so ist klar, dass man keinen merklichen Fehler begehen wird, wenn man in den Ausdrücken für $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$ nur diejenigen Glieder beibehält, welche G als Faktor enthalten, dann wird aber

$$\mathfrak{A} = G(k^2-b^2) \qquad \mathfrak{B} = -2b(q\varrho+Sr)+S\lambda r \qquad \mathfrak{C} = 0$$

$$\mathfrak{D} = -(q\varrho+rS)e$$

und dann wird die Gleichung für $d\varphi$

$$d\varphi = -\frac{(q\varrho+rS)e(\sin.\alpha+\cos.\alpha)\,d\alpha}{G(k^2-b^2)+\left[-2b(q\varrho+Sr)+S\lambda r\right]\left[\sin.\alpha+\cos.\alpha\right]} \quad \ldots\ldots \quad (14)$$

allein hier ist das zweite Glied des Nenners gegen das erste eine verschwindend kleine Grösse, indem jederzeit k gegen b sehr gross ist: dieses zweite Glied darf also auch vernachlässigt werden und dann wird

$$d\varphi = -\frac{(q\varrho+rS)e(\sin.\alpha+\cos.\alpha)\,d\varphi}{G(k^2-b^2)} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (15)$$

Hieraus folgt nun durch Integration:

$$\varphi = + \frac{(q\varrho + Sr)e}{G(k^2 - b^2)}(\cos.\alpha - \sin.\alpha) + \text{Const.} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (16)$$

Für die grössten und kleinsten Werthe von φ muss $\frac{d\varphi}{d\alpha} = 0$ sein, also vermöge (15).

$$\sin.\alpha + \cos.\alpha = 0$$

Dies ist der Fall, wenn $\alpha = 180 - 45$ und $\alpha = 360 - 45^\circ$. Diese grössten und kleinsten Werthe des Winkels φ sind demnach:

$$-\frac{(q\varrho + Sr)e}{G(k^2 - b^2)} 2\sqrt{\frac{1}{2}} + \text{Const.}$$

$$+\frac{(q\varrho + Sr)e}{G(k^2 - b^2)} 2\sqrt{\frac{1}{2}} + \text{Const.}$$

Der totale Schwingungswinkel ist demnach (in Theilen des Halbmessers ausgerückt):

$$\frac{(q\varrho + Sr)e}{G(k^2 - b^2)} 4\sqrt{\frac{1}{2}} = 2{\cdot}828\,\frac{(q\varrho + Sr)e}{G(k^2 - b^2)} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (17)$$

In dem Moment, wenn durch die Einwirkung des Dampfes die Bewegung der Lokomotive beginnt, haben die Kurbeln eine gewisse Stellung, hat also α einen gewissen Werth, den wir mit α_0 bezeichnen wollen. Für den Beginn der Bewegung ist demnach wegen (16)

$$0 = \frac{(q\varrho + Sr)e}{G(k^2 - b^2)}(\cos.\alpha_0 - \sin.\alpha_0) + \text{Const.}$$

Zieht man diesen Ausdruk von (16) ab, so erhält man:

$$\varphi = \frac{q\varrho + Sr}{G(k^2 - b_2)}\, e \left\{ \left[\cos.\alpha - \cos.\alpha_0\right] - \left[\sin.\alpha - \sin.\alpha_0\right] \right\}$$

oder:

$$\varphi = -\frac{q\varrho + Sr}{G(k^2 - b^2)}\, e\, 2\sin.\frac{\alpha - \alpha_0}{2}\left[\sin.\frac{\alpha + \alpha_0}{2} + \cos.\frac{(\alpha + \alpha_0)}{2}\right]$$

Hieraus sieht man zunächst, dass die Lokomotive jedesmal in ihre initiale Stellung (für welche $\varphi = 0$ ist) zurückkehrt, wenn die Kurbeln in ihre initiale Stellung (für welche $\alpha = \alpha_0$ ist) zurückehren.

Da, wie wir gesehen haben, die extremsten Werthe von φ um gleich viel von dem Werth der Integrationsconstanten abweichen, so bedeutet dieselbe den mittleren Werth des Winkels φ. Es ist aber:

$$\text{Const.} = -\frac{(q\varrho + Sr)e}{G(k^2 - b^2)}(\cos.\alpha_0 - \sin.\alpha_0)$$

Diese mittlere Schwingungsposition der Lokomotive richtet sich demnach nach dem Winkel α_0, d. h. nach der anfänglichen Stellung der Kurbeln.

Setzt man in die Gleichung (16) $\alpha = 45^\circ$, oder $\alpha = 180 + 45^\circ$, so wird für den einen, wie für den andern dieser Werthe φ gleich Constant. Die von der anfänglichen Stellung der Kurbeln abhängige mittlere Position der Lokomotive tritt also jedesmal ein, wenn während der Bewegung $\alpha = 45^\circ$, oder $\alpha = 180 + 45^\circ$ geworden ist. Wäre anfänglich $\alpha_0 = 45^\circ$ oder $\alpha_0 = 180 + 45^\circ$, so würde $\text{const.} = 0$. In diesem Falle wird also die mittlere Schwingungsposition der Lokomotive mit ihrer initialen Position zusammentreffen.

Bezeichnen wir den mittleren Werth von φ mit φ_m, setzen also $\varphi_m = \text{const.}$, so wird:

$$\varphi = \frac{q\,\varrho + S\,r}{G\,(k^2 - b^2)}\, e\,(\cos.\,\alpha - \sin.\,\alpha) + \varphi_m$$

oder:

$$\varphi - \varphi_m = \frac{q\,\varrho + S\,r}{G\,(k^2 - b^2)}\, e\,(\cos.\,\alpha - \sin.\,\alpha)$$

Der Ausdruck rechter Hand des Gleichheitszeichens bestimmt also die Schwingung der Lokomotive gegen ihre mittlere Position.

Wenn wir nun die Bewegung der Lokomotive von einem Augenblick an, in welchem $\alpha = 45^\circ$ ist, durch eine ganze Umdrehung verfolgen, so ist der Vorgang folgender:

In dem Augenblick, von welchem an wir die Bewegung der Lokomotive verfolgen, befindet sich dieselbe in ihrer mittleren Position, d. h. in derjenigen Position, in welche sie jedesmal zurückkehrt, wenn $\alpha = 45$, oder $180 + 45^\circ$ wird. Während α über 45° hinaus bis zu $180 - 45^\circ$ wächst, nimmt der Winkel φ fortwährend ab, schwingt also die Lokomotive für einen auf derselben stehenden und vorwärts schauenden Beobachter nach rechts hin, und wenn $\varphi = 180 - 45^\circ$ geworden ist, ist sie nach rechts hin am weitesten von ihrer mittleren Position abgewichen. Von $\alpha = 180 - 45$ bis $\alpha = 360 - 45^\circ$ schwingt die Lokomotive nach links und gelangt dabei, wenn $\alpha = 180 + 45^\circ$ ist, in ihre mittlere Schwingungsposition. Von $\alpha = 360 - 45$ bis $\alpha = 360 + 45^\circ$ schwingt sie wiederum nach links zurück und erreicht zuletzt ihre mittlere Position. Der Betrag des ganzen Schwingungswinkels ist:

$$\frac{(q\,\varrho + S\,r)\,e}{G\,(k^2 - b^2)}\, 2\sqrt{2}$$

ist also gross: 1) wenn die Gewichte der Kurbeln und die hin- und hergehende Masse gross sind; 2) wenn die Abstände ϱ, r und e, d. h. wenn der Kurbelhalbmesser und der Abstand der Maschine gross ist; 3) wenn das Trägheitsmoment des Kesselbaues etc. klein ist.

Dieser Schwingungswinkel ist aber unabhängig: 1) von der Kraft, mit welcher der Dampf auf den Kolben wirkt; 2) von der Geschwindigkeit der rotirenden Bewegung der Kurbelaxe und von dem Gesetz, nach welchem diese Drehung erfolgt; 3) von der Radstellung, denn $G\,(k^2 - b^2)$ ist das Trägheitsmoment des Rahmenbaues in Bezug auf eine durch seinen Schwerpunkt gehende Vertikalaxe, ist also von der Radstellung unabhängig; 4) von der Spurweite.

Drehende Schwingungen einer aufgehängten nicht balanzirten Lokomotive mit inneren Cylindern und mit äusseren Kupplungsstangen.

Wenn wir uns mit dem Annäherungsgrad begnügen, durch welchen wir bei der Untersuchung über die Schwingungen einer nicht gekuppelten Maschine die Gleichung (16) gefunden haben, so fällt es nicht schwer, die analoge Gleichung für eine Maschine mit gekuppelten Rädern aufzustellen.

Wir behalten die bis jetzt gewählten Bezeichnungen bei und nennen ferner noch r_1 den Halbmesser einer Kurbel der Kupplungsstange, S_1 das Gewicht der Kupplungsstange, q_1 das Gewicht einer Kupplungskurbel, d. h. desjenigen Körpers, der über die runde Nabe des Rades hinausragt, ϱ_1 die Entfernung des Schwerpunktes einer Kupplungskurbel von der geometrischen Drehungsaxe der Kurbelwelle, e_1 die Entfernung der zu beiden Seiten der Lokomotive befindlichen Kupplungsstange von der Axe $A\,x_1$. Wir nehmen an, dass die Richtungen der äussern Kurbeln den Richtungen der innern Kurbeln diametral entgegengesetzt angebracht sind.

Es ist klar, dass wir in dem vorhergehenden Fall statt der Gleichung (16) folgende erhalten werden:

$$\varphi = \frac{(q\,\varrho + S\,r)\,e}{G\,(k^2 - b^2)}\,(\cos.\,\alpha - \sin.\,\alpha) + \frac{(q_1\,\varrho_1 + S_1\,r_1)\,e_1}{G\,(k^2 - b^2)}\,[\cos.\,(\alpha + \pi) - \sin.\,(\alpha + \pi)] + \text{Const.}$$

oder:

$$\varphi = \frac{(q\,\varrho + S\,r)\,e - (q_1\,\varrho_1 + S_1\,r_1)\,e_1}{G\,(k^2 - b^2)}\,(\cos.\,\alpha - \sin.\,\alpha) + \text{Const.}$$

Man sieht hieraus, dass die Massen der Kupplungsstangen die drehenden Schwingungen zu schwächen, oder sogar ganz aufzuheben im Stande sind, wenn die Kupplungskurbeln den Maschinenkurbeln diametral entgegengesetzt gestellt werden. Diese Drehung verschwindet vollkommen, wenn:

$$(q\,\varrho + S\,r)\,e = (q_1\,\varrho_1 + S_1\,r_1)\,e_1$$

Drehende Bewegung einer frei hängenden nicht balanzirten Maschine mit aussen liegenden Cylindern und Kupplungsstangen.

Eine solche Lokomotive hat keine innern Kurbeln, und die Maschinenkurbeln fallen mit den Kupplungskurbeln zusammen, man erhält demnach:

$$\varphi = \frac{S\,r\,e + (q_1\,\varrho_1 + S_1\,r_1)\,e_1}{G\,(k^2 - b^2)}\,(\cos.\,\alpha - \sin.\,\alpha) + \text{Const.}$$

Hier sind also die Schwingungen wie bei einer ungekuppelten Maschine mit inneren Cylindern.

Gleichung der Kurve, welche der Mittelpunkt A der Kurbelaxe beschreibt, wenn Längenschwingungen und drehende Schwingungen gleichzeitig stattfinden.

Die Gleichungen für φ und ξ, welche die Drehung und die Längenschwingung bestimmen, haben für Lokomotive jeder Art die Form:

$$\xi = m + n\,(\sin.\,\alpha + \cos.\,\alpha)$$

$$\varphi = m_1 + n_1\,(\sin.\,\alpha - \cos.\,\alpha)$$

wobei $m\ m_1\ n\ n_1$ constante, von den Dimensionen und Gewichten abhängige Grössen sind.

Aus diesen Gleichungen folgt:

$$\frac{\xi - m}{n} = \sin.\,\alpha + \cos.\,\alpha$$

$$\frac{\varphi - m_1}{n_1} = \sin.\,\alpha - \cos.\,\alpha$$

Durch Addition und Subtraktion dieser Gleichungen folgt:

$$\sin.\,\alpha = \frac{1}{2}\left[\frac{\xi - m}{n} \quad \frac{\varphi - m_1}{n_1}\right]$$

$$\cos.\,\alpha = \frac{1}{2}\left[\frac{\xi - m}{n} - \frac{\varphi - m_1}{n_1}\right]$$

Nimmt man die Summe der Quadraten dieser Gleichungen, so erhält man:

$$1 = \frac{1}{4}\left[\frac{\xi - m}{n} + \frac{\varphi - m_1}{n_1}\right]^2 + \frac{1}{4}\left[\frac{\xi - m}{n} - \frac{\varphi - m_1}{n_1}\right]^2$$

oder:

$$2 = \left(\frac{\xi - m}{n}\right)^2 + \left(\frac{\varphi - m_1}{n_1}\right)^2$$

Drehende Schwingungen einer aufgehängten mit Centrifugalmassen versehenen Lokomotive der allgemeinsten Art.

Wir haben bereits Seite 117 die Einrichtung einer solchen Lokomotive von allgemeiner Construktion angegeben, und ihre Längenschwingungen untersucht. Nun wollen wir auch ihre drehenden Schwingungen bestimmen. Wir lassen alle Bezeichnungen bestehen, die in jenem Artikel angenommen wurden.

Auch für eine solche Lokomotive von allgemeiner Einrichung besteht die Seite 121 aufgefundene Gleichung der Drehung (7) nämlich:

$$0 = \left[\Sigma\,(x_1^2 + y_1^2) - \xi^2\,G\right]\frac{d\varphi}{dt} - \Sigma\,m\,y_1\,\frac{dx_1}{dt} \quad \ldots \ldots \ldots \quad (18)$$

wobei die Summe auf alle Gewichtstheile der Lokomotive auszudehnen sind:

$\Sigma\,m\,(x_1^2 + y_1^2)$ ist das totale Trägheitsmoment der ganzen Lokomotive in Bezug auf eine durch den Mittelpunkt A der Kurbelaxe gehende Vertikalaxe. Dieses Trägheitsmoment ist wegen jener Bestandtheile, die während der Bewegung der Treibaxe ihre Lage gegen den Rahmenbau verändern, eine periodisch veränderliche Grösse. Allein alle diese gegen den Rahmenbau beweglichen Theile haben im Vergleich zu den übrigen Theilen, die ihre relative Lage gegen einander und gegen die durch A gehende Vertikalaxe nicht ändern, nur einen sehr kleinen Werth. Wir werden daher keinen merklichen Fehler begehen, wenn wir in der Berechnung des Trägheitsmoments $\Sigma\,m\,(x_1^2 + y_1^2)$ die Trägheitsmomente dieser beweglichen Theile ganz vernachlässigen. Nennen wir daher $G\,k^2$ das Trägheitsmoment aller gegen einander nicht beweglichen Theile der Lokomotive in Bezug auf eine durch A gehende Vertikalaxe, so ist annähernd

$$\Sigma\,m\,(x_1^2 + y_1^2) = G\,k^2$$

Den genauen Werth von ξ, welcher der Längenschwingung entspricht, haben wir früher Seite (118) gefunden. Da jedoch die Massen q S q_1 S_1 Q gegen G ungemein klein sind, so ist ξ nur um äusserst wenig von b verschieden, wir dürfen uns daher erlauben, $\xi^2 G = b^2 G$ zu setzen. Dann haben wir:

$$\Sigma m \left(x_1^2 + y_1^2\right) - \xi^2 G = G \left(k^2 - b^2\right) \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (19)$$

Nun handelt es sich noch um die Berechnung der letzten Summe des Ausdrucks (18). Die Glieder, welche die Massen $2q$ $2S$ $2q_1$ $2S_1$ $2Q$ in diese Summe liefern, sind nun folgende:

1) für die Massen $2p$ . . . . $q \, e \, \varrho \, (\sin. \alpha + \cos. \alpha) \frac{d\alpha}{dt}$

2) „ „ „ $2q_1$ . . . . $q_1 \, e_1 \, \varrho_1 \left[\sin. (\alpha + \beta) + \cos. (\alpha + \beta)\right] \frac{d\alpha}{dt}$

3) „ „ „ $2S$ . . . . $S \, e \, r \, (\sin. \alpha + \cos. \alpha) \frac{d\alpha}{dt}$

4) „ „ „ $2S_1$ . . . . $S_1 \, e_1 \, r_1 \left[\sin. (\alpha + \beta) + \cos. (\alpha + \beta)\right] \frac{d\alpha}{dt}$

5) „ „ „ $2Q$ . . . . $- e_2 \, \varrho_2 \, Q \left[\sin. (\alpha - \gamma) + \cos. (\alpha + \gamma)\right] \frac{d\alpha}{dt}$

Die Gleichung der drehenden Bewegung wird demnach:

$$G \left(k^2 - b^2\right) \frac{d\varphi}{dt} = (q \, e \, \varrho + S \, e \, r)(\sin. \alpha + \cos. \alpha) \frac{d\alpha}{dt} + (q_1 \, e_1 \, \varrho_1 + S_1 \, e_1 \, r_1 \left[\sin. (\alpha + \beta) + \cos. (\alpha + \beta)\right] \frac{d\alpha}{dt}$$
$$- e_2 \, \varrho_2 \, Q \left[\sin. (\alpha - \gamma) + \cos. (\alpha + \gamma)\right] \frac{d\alpha}{dt}$$

Es ist aber

$$\sin. (\alpha + \beta) + \cos. (\alpha + \beta) = \cos. \beta \, (\sin. \alpha + \cos. \alpha) - \sin. \beta \, (\sin. \alpha - \cos. \alpha)$$
$$\sin. (\alpha - \gamma) + \cos. (\alpha + \gamma) = (\sin. \alpha + \cos. \alpha)(\cos. \gamma - \sin. \gamma)$$

daher wird obige Gleichung:

$$G \left(k^2 - b^2\right) \frac{d\varphi}{dt} = \left[(q \, \varrho + S \, r) \, e + (q_1 \, \varrho_1 + S_1 \, r_1) \, e_1 \cos. \beta - e_2 \, \varrho_2 \, Q \, (\cos. \gamma - \sin. \gamma)\right] (\sin. \alpha + \cos. \alpha) \frac{d\alpha}{dt}$$
$$- (q_1 \, \varrho_1 + S_1 \, r_1) \, e_1 \sin. \beta \, (\sin. \alpha - \cos. \alpha) \frac{d\alpha}{dt}$$

Lässt man in dieser Gleichung dt weg und integrirt dieselbe in Bezug auf α, so findet man:

$$G \left(k - b^2\right) \varphi = \left[(q \, \varrho + S \, r) \, e + (q_1 \, \varrho_1 + S_1 \, r_1) \, e_1 \cos. \beta - e_2 \, \varrho_2 \, Q \, (\cos. \gamma - \sin. \gamma)\right] (\sin. \alpha - \cos. \alpha)$$
$$+ (q_1 \, \varrho_1 + S_1 \, r_1) \, e_1 \sin. \beta \, (\sin. \alpha + \cos. \alpha) + \text{Const.}$$

Wenn keine drehende Schwingung stattfinden soll, muss φ für jeden Werth von α gleich Null sein.

Diess erfordert aber die Erfüllung folgender Bedingungen:

$$\text{Const.} = 0$$

$$\beta = 0 \text{ oder } = \pi$$

$$(q\,\varrho + S\,r)\,e + (q_1\,\varrho_1 + S_1\,r_1)\,e_1 \cos.\beta - e_2\,\varrho_2\,Q\,(\cos.\gamma - \sin.\gamma) = 0$$

Wenn aber $\beta = 0$ oder $= \pi$ ist, kann die letzte Gleichung auch geschrieben werden wie folgt:

$$(q\,\varrho + S\,r)\,e \pm (q_1\,\varrho_1 + S_1\,r_1)\,e_1 - e_2\,\varrho_2\,Q\,(\cos.\gamma - \sin.\gamma) = 0 \quad \ldots\ldots \quad (20)$$

wobei das obere Zeichen gilt, wenn die äussern und innern Kurbel parallel gestellt sind, das untere Zeichen hingegen, wenn die Kurbeln diametral gegenüber stehen.

Vollständige Aufhebung des Zuckens und Schlingerns durch rotirende Balanzirungs-Massen.

Wir haben Seite (119) gefunden, dass die Längenschwingungen einer Lokomotive verschwinden, wenn

$$(q\,\varrho + S\,r) \pm (q_1\,\varrho_1 + S_1\,r_1) = \varrho_2\,Q\,(\cos.\gamma + \sin.\gamma) \quad \ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

ist; haben ferner oben Gleichung (20) gefunden, dass die drehenden Schwingungen nicht eintreten, wenn

$$(q\,\varrho + S\,r\,e) \pm (q_1\,\varrho_1 + S_1\,r_1)\,e_1 = e_2\,\varrho_2\,Q\,(\cos.\gamma - \sin.\gamma) \quad \ldots\ldots\ldots \quad (2)$$

ist. Bestehen diese Bedingungen gleichzeitig, so wird demnach weder die eine, noch die andere dieser Schwingungen eintreten. Diese Gleichungen können aber gleichzeitig bestehen, weil sie zwei unbestimmte Grössen Q und γ enthalten. Diese lassen sich also so bestimmen, dass keine von den beiden störenden Bewegungen eintritt.

Dividirt man die Gleichung (2) durch e_2, quadrirt sie hierauf, so wie auch die Gleichung (1) und nimmt die Summe dieser Quadrate, so erhält man eine Gleichung, aus welcher folgt:

$$Q = \frac{q\,\varrho + S\,r}{\varrho_2} \sqrt{\left\{\frac{1}{2}\left[1 + \left(\frac{e}{e_2}\right)^2\right] \pm \left[1 + \frac{e\,e_1}{e_2^2}\right] \frac{q_1\,\varrho_1 + S_1\,r_1}{q\,\varrho + S\,r} + \frac{1}{2}\left[1 + \left(\frac{e_1}{e_2}\right)^2\right]\left[\frac{q_1\,\varrho_1 + S_1\,r_1}{q\,\varrho + S\,r}\right]^2\right\}} \quad (3)$$

Aus den Gleichungen (1) und (2) folgt ferner:

$$\sin.\gamma = \frac{1}{2\,\varrho_2\,Q}\left[(q\,\varrho + S\,r)\left(1 - \frac{e}{e_2}\right) \pm (q_1\,\varrho_1 + S_1\,r_1)\left(1 - \frac{e_1}{e_2}\right)\right] \quad \ldots\ldots \quad (4)$$

$$\cos.\gamma = \frac{1}{2\,\varrho_2\,Q}\left[(q\,\varrho + S\,r)\left(1 + \frac{e}{e_2}\right) \pm (q_1\,\varrho_1 + S_1\,r_1)\left(1 + \frac{e_1}{e_2}\right)\right] \quad \ldots\ldots \quad (5)$$

In diesen Formeln gelten die oberen Zeichen, wenn die Kupplungskurbeln den Treibkurbeln parallel gestellt sind, die unteren Zeichen dagegen, wenn die Kupplungskurbeln den Treibkurbeln diametral gegenüberstehen. Die Gleichung (3) bestimmt die Grösse eines Balanzirungsgewichtes, die Gleichungen (4) und (5) die Position der Gewichte, wenn man nicht nur die numerischen Werthe, sondern auch die Zeichen von $\sin.\gamma$ und $\cos.\gamma$ berücksichtigt. Um jeden Zweifel über die richtige Anbringung der Balanzirungsmassen zu beseitigen, dienen die Figuren 49, 50, Tab. XII. Der in denselben verzeichnete spitze Winkel γ_1 ist derjenige Winkel, dessen Sinus und Cosinus gleich ist dem *numerischen* Werthen von $\sin.\gamma$ und von $\cos.\gamma$. Der schraffirte Kreis stellt das Balanzirungsgewicht am vorderen, der nicht schraffirte Kreis das Balanzirungsgewicht des hinteren Rades vor.

Die Balanzirungsgewichte sind anzubringen, wie folgendes Schema andeutet:

$\sin.\gamma$	$\cos.\gamma$	Figur.
+1	+1	49 a
+1	−1	49 b
−1	−1	50 a
−1	+1	50 b

Man erhält die Tangente des Winkels γ_1, wenn man die Werthe von $\sin.\gamma$ und $\cos.\gamma$ der Gleichungen (3) und (4) durch einander dividirt und nur allein den numerischen Werth des Quotienten nimmt; es ist also $\tang.\gamma_1$ gleich dem numerischen Werthe des Quotienten.

$$\frac{\left(1-\frac{e}{e_2}\right) \pm \frac{q_1 r_1 + S_1 r_1}{q r + S r}\left(1-\frac{e_1}{e_2}\right)}{\left(1+\frac{e}{e_2}\right) \pm \frac{q_1 r_1 + S_1 r_1}{q r + S r}\left(1+\frac{e_1}{e_2}\right)} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (6)$$

Für eine Lokomotive, deren Räder nicht gekuppelt sind, die also überhaupt mit nur 2 Triebrädern versehen ist, ist $S_1 = 0$ $q_1 = 0$ und dann wird:

$$Q = \frac{q\varrho + S r}{\varrho_2}\sqrt{\frac{1}{2}\left[1+\left(\frac{e}{e_2}\right)^2\right]} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (7)$$

$$\sin.\gamma = \frac{q\varrho + S r}{2\varrho_2 Q}\left(1-\frac{e}{e_2}\right) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (8)$$

$$\cos.\gamma = \frac{q\varrho + S r}{2\varrho_2 Q}\left(1+\frac{e}{e_2}\right) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (9)$$

Für innen liegende Cylinder ist $e < e_2$. Fällt also sowohl $\sin.\gamma$ als $\cos.\gamma$ positiv aus, so sind demnach die Gewichte so anzubringen, wie Fig. 49 a zeigt. Für aussen liegende Cylinder ist $e > e_2$. Fällt also $\sin.\gamma$ negativ, $\cos.\gamma$ positiv aus, so sind also die Gewichte anzubringen, wie Fig. 50 b zeigt.

Für Lokomotive mit aussen liegenden Cylindern und mit gekuppelten Rädern fallen die Kupplungskurbeln mit den Triebrädern der Richtung nach zusammen, müssen also in den Gleichungen (3) (4) (5) die oberen Zeichen genommen werden, und da in diesem

17.

Fall $e > e_1 > e_2$ ist, so wird $\sin.\gamma$ negativ; $\cos.\gamma$ dagegen positiv, sind demnach die Gewichte so anzubringen, wie Fig. 50 b zeigt.

Stellen wir die verschiedenen Lokomotive nach der Grösse der Balanzirungsgewichte, welche sie erfordern, zusammen, so erhalten wir folgende Reihe, welche mit derjenigen Construction beginnt, die das kleinste Gewicht verlangt.

	Cylinderlage.	Räder.	Kupplungskurbeln.
A.	innen	nicht gekuppelt	keine
B.	aussen	nicht gekuppelt	keine
C.	innen	gekuppelt	diametral
D.	innen	gekuppelt	parallel
E.	aussen	gekuppelt	zusammenfallend

Wenn bei einer Lokomotive mit innen liegenden Cylindern und mit gekuppelten Rädern die äusseren Kupplungskurbeln den inneren Triebkurbeln diametral gegenüber gestellt sind, muss man in den Ausdrücken für Q, $\sin.\gamma$, $\cos.\gamma$, die unteren Zeichen nehmen; und in diesem Falle hat es das Ansehen, dass der Werth von Q unter gewissen Umständen verschwinden könnte, dass also gar keine Balanzirungsgewichte nothwendig, würden. Wir wollen diese Vermuthung prüfen.

Setzen wir zur Abkürzung $\frac{q_1 \varrho_1 + S_1 r_1}{q \varrho + S r} = k$, so verschwindet Q, wenn ist:

$$\frac{1}{2}\left[1 + \left(\frac{e}{e_2}\right)^2\right] - \left[1 + \frac{e\, e_1}{e_2^2}\right]k + \frac{1}{2}\left[1 + \left(\frac{e_1}{e_2}\right)^2\right]k^2 = 0$$

hieraus folgt:

$$k = \frac{q_1 \varrho_1 + S_1 r_1}{q r + S r} = \frac{1 + \frac{e\, e_1}{e_2^2} \pm \left(\frac{e_1}{e_2} - \frac{e}{e_2}\right)\sqrt{-1}}{1 + \left(\frac{e_1}{e_2}\right)^2}$$

Die Werthe von k, welche den Ausdruck von Q zum Verschwinden bringen, sind demnach, wie man sieht, imaginär, so lange e von e_1 verschieden ist. Allein die Gleichung, aus welcher wir k gesucht haben, gilt nur für Maschinen mit innen liegenden Cylindern, weil es nur bei diesen möglich ist, dass die Kupplungskurbeln den Triebkurbeln diametral gegenüber stehen; es kann also e nicht gleich e_1 genommen werden und folglich ist es nicht möglich, die schwingenden Bewegungen ohne Balanzirungsgewichte aufzuheben.

Direktes Verfahren zur Bestimmung der Balanzirungs-Massen.

Die das Zucken und Schlingern aufhebenden Balanzirungsmassen können auch durch folgendes Verfahren direkt bestimmt werden.

Die Wirkungen, welche die hin- und hergehenden Massen der Kolben, Kolbenstangen, Schubstangen und Kupplungsstangen in horizontalem Sinne hervorbringen, sind beinahe so, wie wenn diese Massen mit den Kurbelzapfen direkt verbunden wären und mit denselben herum rotirten, denn die Horizontalbewegungen dieser Massen stimmen mit den

Horizontalbewegungen der Kurbelzapfen beinahe überein. Wir wollen uns also vorstellen, dass die hin- und hergehenden Massen in den Kurbelzapfen, mit welchen sie in Verbindung stehen, concentrirt würden, so dass sie mit den Kurbelzapfen um die Treibaxe herum rotiren müssten, und nun kommt es darauf an, die Treibräder mit solchen Massen zu versehen, dass ihre Centrifugalkräfte den Centrifugalkräften der mit den Kurbeln verbundenen Massen das Gleichgewicht halten.

Wir legen der Rechnung eine Maschine mit innen liegenden Cylindern und mit gekuppelten Rädern zu Grunde und nehmen an, dass die Kupplungskurbeln mit den Maschinenkurpeln parallel gestellt seien (Fig. 46) und lassen die früher gewählten Bezeichnungen gelten, bezeichnen aber noch durch ω die Winkelgeschwindigkeit der Triebräder.

Nun ist: $\frac{S}{g}\omega^2 r$ die Centrifugalkraft eines Kolbens, einer Kolbenstange und einer Schubstange; $\frac{q}{g}\omega^2 \varrho$ die Centrifugalkraft eines inneren Kurbelkörpers; $\frac{S_1}{g}\omega^2 r_1$ die Centrifugalkraft einer Kupplungsstange; $\frac{q_1}{g}\omega^2 \varrho_1$ die Centrifugalkraft eines äusseren Kurbelkörpers. Es ist klar, dass die Wirkung dieser vier Centrifugalkräfte durch zwei Massen B und b aufgehoben werden kann, wenn man dieselben in einer Entfernung ϱ_2 den Kurbeln gegenüber mit den Triebrädern verbindet. Die Centrifugalkräfte der Massen B und b sind: $\frac{B}{g}\omega^2\varrho_2, \frac{b}{g}\omega^2\varrho_2$. Nach dem Gesetz des Hebels halten sich diese sechs Kräfte das Gleichgewicht, wenn folgenden Bedingungen entsprochen wird:

$$\frac{B}{g}\omega^2\varrho_2 \times 2e_2 = \left(\frac{S}{g}\omega^2 r + \frac{q}{g}\omega^2\varrho\right)(e_2+e) + \left(\frac{S_1}{g}\omega^2 r_1 + \frac{q_1}{g}\omega^2\varrho_1\right)(e_2+e_1)$$

$$\frac{b}{g}\omega^2\varrho_2 \times 2e_2 = \left(\frac{S}{g}\omega^2 r + \frac{q}{g}\omega^2\varrho\right)(e_2-e) - \left(\frac{S_1}{g}\omega^2 r_1 + \frac{q_1}{g}\omega^2\varrho_1\right)(e_1-e_2)$$

Hieraus folgt:

$$\left.\begin{aligned} B &= \frac{Sr+q\varrho}{\varrho_2}\;\frac{e_2+e}{2e_2} + \frac{S_1 r_1 + q_1\varrho_1}{\varrho_2}\;\frac{e_1+e_2}{2e_2} \\ b &= \frac{Sr+q\varrho}{\varrho_2}\;\frac{e_2-e}{2e_2} - \frac{S_1 r_1 + q_1\varrho_1}{\varrho_2}\;\frac{e_1-e_2}{2e_2} \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots (1)$$

Diese zwei Massen heben aber nur allein die Massenwirkung einer Maschine und einer Kupplungsstange auf. Um aber auch die Massenwirkungen der zweiten (hintern) Maschine und der zweiten Kupplungsstange aufzuheben, müssen die Räder noch mit zwei Massen B und b versehen werden, und diese zwei Massen müssen, die erstere am Hinterrad, die letztere am Vorderrad, den Richtungen der hintern Kurbeln gegenüber angebracht werden. Die Wirkung aller mit den 4 Kurbeln rotirenden Massen kann also aufgehoben werden, wenn man jedes der beiden Triebräder mit zwei Massen B und b versieht. Am Vorderrad (Fig. 47 a) muss die Masse B der vordern Kurbel gegenüber angebracht werden. Am Hinterrad (Fig. 48 a) dagegen muss die Masse B der hintern Kurbel gegenüber, die Masse b der vordern Kurbel gegenüber angebracht werden. Allein den Centrifugalkräften der beiden mit einem Rad zu verbindenden Massen B und b entspricht eine resultirende Kraft, die auch durch eine einzige Masse Q hervorgebracht werden kann. Vorausgesetzt, dass Q ebenfalls in der Entfernung ϱ_2 angebracht wird, hat man nach der Zerlegung der Kräfte (Fig. 47 b):

$$B = Q\cos.\gamma \qquad b = Q\sin.\gamma$$

demnach:

$$\left.\begin{aligned}\text{tang.}\,\gamma &= \frac{b}{B}\\ Q &= \sqrt{b^2+B^2}\end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (2)$$

Substituirt man für b und B die Werthe, welche die Gleichungen (1) darbieten, so findet man nach einigen Reduktionen:

$$\text{tang.}\,\gamma = \frac{\left(1-\frac{e}{e_2}\right)+\frac{S_1 r_1 + q_1 \varrho_1}{S r + q \varrho}\left(1-\frac{e_1}{e_2}\right)}{\left(1+\frac{e}{e_2}\right)+\frac{S_1 r_1 + q_1 \varrho_1}{S r + q \varrho}\left(1+\frac{e_1}{e_2}\right)} \quad \ldots\ldots \quad (3)$$

$$Q = \frac{S r + q \varrho}{\varrho_2}\sqrt{\left\{\frac{1}{2}\left[1+\left(\frac{e}{e_2}\right)^2\right]+\left[1+\frac{e\,e_1}{e_2^2}\right]\frac{S_1 r_1 + q_1 \varrho_1}{S r + q \varrho}+\frac{1}{2}\left[1+\left(\frac{e_1}{e_2}\right)^2\right]\left[\frac{S_1 r_1 + q_1 \varrho_1}{S r + q \varrho}\right]^2\right\}}$$

und dieser Ausdruch stimmt mit den früher Seite 130 gefundenen überein, denn wir haben bei dieser Rechnung paralelle Kurbeln vorausgesetzt, für welche in den früheren Gleichungen die oberen Zeichen gelten.

Pressungen der Triebräder gegen die Bahn, wenn dieselben mit balanzirenden, rotirenden Massen versehen sind.

Die rotirenden Balanzirungsmassen bringen durch ihre Centrifugalkraft einen veränderlichen Druck der Triebräder gegen die Schienen hervor, wodurch unter gewissen Umständen bedenkliche Nachtheile entstehen können.

Nennen wir $\mathfrak{C}$ den Betrag der Centrifugalkraft einer rotirenden Masse, ψ den Winkel, den in irgend einem Augenblick der Bewegung der durch den Schwerpunkt der rotirenden Masse gehende Radius mit einer durch den Mittelpunkt des Rades vertikal abwärts gezogenen Linie bildet, so ist $\mathfrak{C}\cos.\psi$ die Kraft, mit welcher das Rad durch die Wirkung der Centrifugalkraft der rotirenden Masse nach vertikaler Richtung abwärts getrieben wird. Nennen wir ferner $\mathfrak{G}$ das Gewicht der Triebaxe, der Triebräder und der mit denselben verbundenen rotirenden Massen, $\mathfrak{p}$ den Druck, welcher in dem Zeitaugenblick, dem der Winkel ψ entspricht, gegen die Axenbüchse der Räder ausgeübt wird. Endlich $\mathfrak{P}$ den Druck des Triebrades gegen die Bahn, so ist

$$\mathfrak{P} = \frac{1}{2}\mathfrak{G} + \mathfrak{p} + \mathfrak{C}\cos.\psi \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

Wenn die störenden Bewegungen des Wankens, Wogens und Nickens nur in einem schwachen Maase stattfinden, dürfen wir die Pressung $\mathfrak{p}$ als eine constante ansehen, und dann ist der Druck $\mathfrak{P}$ nur allein mit ψ veränderlich.

Der grösste und kleinste Werth dieses Druckes ist $\frac{1}{2}\mathfrak{G}+\mathfrak{p}+\mathfrak{C}$ und $\frac{1}{2}\mathfrak{G}+\mathfrak{p}-\mathfrak{C}$. Der erstere tritt ein, so oft der Schwerpunkt der rotirenden Masse seinen tiefsten, der letztere, so oft der Schwerpunkt der rotirenden Masse seinen höchsten Stand erreicht. Sollte $\frac{1}{2}\mathfrak{G}+\mathfrak{p}-\mathfrak{C}=0$, oder $\mathfrak{C}=\frac{1}{2}\mathfrak{G}+\mathfrak{p}$ werden, so würde der Druck des Rades gegen die Bahn ganz aufhören. Sollte gar $\mathfrak{C}>\frac{1}{2}\mathfrak{G}+\mathfrak{p}$ werden, so würden die Räder jedesmal in die Höhe springen, wenn die Schwerpunkte der rotirenden Massen ihre höchsten Orte erreichen und die beiden Räder würden dann auf der Bahn gleichsam hämmernd fortlaufen.

Nennen wir D den Durchmesser eines Triebrades, $g = 9{\cdot}808$ die Beschleunigung durch die Schwere, V die Fahrgeschwindigkeit der Lokomotive und behalten im Uebrigen die früher gewählten Bezeichnungen bei, so ist:

$$\mathfrak{C} = \frac{Q}{g} V^2 \left(\frac{2\,\varrho_2}{D}\right)^2 \frac{1}{\varrho_2} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (2)$$

In der höchsten Stellung einer rotirenden Masse hört also der Druck des Rades gegen die Bahn ganz auf, wenn:

$$\frac{Q}{g} V^2 \left(\frac{2\,\varrho_2}{D}\right)^2 \frac{1}{\varrho_2} = \frac{1}{2}\mathfrak{G} + \mathfrak{p}$$

ist, oder wenn:

$$V = \sqrt{\left\{\frac{g\,\frac{1}{2}\mathfrak{G} + \mathfrak{p}}{Q} \left(\frac{D}{2\,\varrho_2}\right)^2 \varrho_2\right\}} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (3)$$

Für eine stärkere Personenzuglokomotive dürfen wir annehmen:

$$Q = 50 \qquad \frac{1}{2}\mathfrak{G} + \mathfrak{p} = 4000 \qquad \frac{D}{2\,\varrho_2} = \frac{4}{3} \qquad \varrho_2 = 1 \qquad g = 9{\cdot}808$$

und mit diesen Daten findet man $V = 37$ Meter. Die grösste Geschwindigkeit der Schnellzüge beträgt aber nur circa 16 Meter, ist also nicht halb so gross als diejenige, bei welcher ein Aufspringen der Räder eintreten könnte.

Wir wollen noch die grössten und kleinsten Pressungen der Räder berechnen, wenn eine Geschwindigkeit von 16 Meter eintritt.

Nehmen wir wiederum:

$$Q = 50 \qquad \frac{D}{2\,\varrho_2} = \frac{4}{3} \qquad \varrho_2 = 1 \qquad g = 9{\cdot}808 \qquad \frac{1}{2}\mathfrak{G} + \mathfrak{p} = 4000$$

und $V = 16$, so wird:

$$\frac{1}{2}\mathfrak{G} + \mathfrak{p} \pm \frac{Q}{g} V^2 \left(\frac{2\,\varrho_2}{D}\right)^2 \frac{1}{\varrho} = 4000 \pm 734$$

Das Minimum der Pressung eines Rades gegen die Bahn ist demnach in diesem Falle $4000\,(1 - 0{\cdot}183)$, das Maximum dagegen $4000\,(1 + 0{\cdot}183)$.

Diese grössten und kleinsten Pressungen weichen also nur circa 18% von dem mittleren Werth ab.

Diese Veränderlichkeit des Druckes der Räder gegen die Bahn ist also bei dieser grössten gegenwärtig vorkommenden Geschwindigkeit der Schnellzüge noch nicht bedenklich, denn eine Verminderung des Druckes um 18% kann ein Aufspringen der Räder noch nicht veranlassen, und durch eine Verstärkung dieses Druckes um 18% ist auch nicht zu befürchten, dass die Radumfänge ungleichförmig abgenützt werden könnten.

Vollkommen könnte die Wirkung der hin- und hergehenden Massen der Kolben, Kolbenstangen und Schubstangen nur durch hin- und hergehende Gegenmassen aufgehoben werden; allein die Anbringung derselben ist mit constructiven Schwierigkeiten verbunden, und so lange diese nicht beseitigt werden können, muss man sich schon mit den rotirenden Massen begnügen, und muss sich den veränderlichen Druck der Triebräder gegen die Bahn gefallen lassen.

Der praktische Werth der Massenbalanzirung.

Der praktische Werth der Balanzirung der hin- und hergehenden Massen durch rotirende oder durch hin- und hergehende Massen ist bis jetzt noch nicht richtig gewürdigt worden. Die französischen Ingenieure überschätzen die Sache und sie scheinen der Ansicht zu sein, dass durch eine richtige Balanzirung der Massen die wesentlichsten Uebelstände, mit welchen ein Lokomotivbau behaftet sein kann, aufgehoben wären. Die Engländer schlagen den Werth der Balanzirung zu gering an und kümmern sich um diese Angelegenheit in der Regel schon aus dem Grunde nicht, weil sie von einem „Theoretiker" aufgebracht wurde. Nach meiner Meinung ist eine richtige Balanzirung zu empfehlen, ich bin jedoch weit entfernt, zu glauben, dass damit den wesentlichsten Uebelständen, mit welchen eine Lokomotive behaftet sein kann, abgeholfen würde. Diese Hauptübel liegen nicht im Zucken und Schlingern, sondern sie liegen im Wanken, Wogen und Nicken. Um die beiden ersteren dieser störenden Bewegungen aufzuheben, genügt es, richtig berechnete Balanzirungsgewichte anzuwenden, im Uebrigen ist aber in dieser Hinsicht der Bau der Lokomotive ganz gleichgültig. Um dagegen die drei letzteren störenden Bewegungen möglichst zu schwächen, muss die ganze Disposition der Maschine, des Kessels und der Räder und muss das ganze System der Federung gewissen Bedingungen entsprechen. Die wichtigsten Gesetze des Lokomotivbaues ergeben sich nicht aus dem Studium der zuckenden und schlingernden Bewegung, sondern sie folgen, wie wir in der Folge sehen werden, aus dem Studium der Bewegungen des Wogens, Wankens und Nickens. Dieses Studium ist der Gegenstand der folgenden, etwas weitläufigen Untersuchungen.
