Über die zusammengehörigen Konvergenzradien von Potenzreihen mehrerer Veränderlicher

Faber, Georg

1905

urn:nbn:de:bsz:31-270584

ÜBER DIE ZUSAMMENGEHÖRIGEN KONVERGENZRADIEN VON POTENZREIHEN MEHRERER VERÄNDERLICHER.

HABILITATIONSSCHRIFT

ZUR ERLANGUNG DER VENIA LEGENDI FÜR MATHEMATIK
DER GROSSH. TECHNISCHEN HOCHSCHULE FRIDERICIANA
ZU KARLSRUHE

VORGELEGT VON

DR. PHIL. GEORG FABER.

DRUCK VON B. G. TEUBNER IN LEIPZIG 1905.

ÜBER DIE ZUSAMMENGEHÖRIGEN KONVERGENZRADIEN VON POTENZREIHEN MEHRERER VERÄNDERLICHER.

HABILITATIONSSCHRIFT

ZUR ERLANGUNG DER VENIA LEGENDI FÜR MATHEMATIK
DER GROSSH. TECHNISCHEN HOCHSCHULE FRIDERICIANA
ZU KARLSRUHE

VORGELEGT VON

DR. PHIL. GEORG FABER.

DRUCK VON B. G. TEUBNER IN LEIPZIG 1905.

REFERENT: HERR PROFESSOR DR. A. KRAZER.
KORREFERENT: HERR HOFRAT PROFESSOR DR. L. WEDEKIND.

SONDERABDRUCK AUS DEM 61. BANDE DER MATHEMATISCHEN ANNALEN.

n positive Zahlen $r_1, r_2, \cdots, r_n$ nennt man bekanntlich *zusammengehörige* (oder *assoziierte*) *Konvergenzradien* einer Potenzreihe

$$(1)\qquad \mathfrak{P}(x_1, x_2, \cdots, x_n) = \sum_0^\infty{}^{\nu_1 \nu_2, \cdots, \nu_n} a_{\nu_1, \nu_2, \cdots, \nu_n} x_1^{\nu_1} x_2^{\nu_2} \cdots x_n^{\nu_n},$$

wenn $\mathfrak{P}(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ für

$$(2)\qquad |x_1| < r_1,\ |x_2| < r_2, \cdots, |x_n| < r_n$$

absolut konvergiert, während *absolute Divergenz* stattfindet, sobald

$$(3)\qquad |x_1| > r_1,\ |x_2| > r_2, \cdots, |x_n| > r_n$$

angenommen wird.

Denkt man sich im Falle $n = 2$ in einem rechtwinkligen Koordinatensysteme die Punkte $x = r_1$, $y = r_2$, deren Koordinaten zusammengehörige Konvergenzradien sind, markiert, so erfüllen sie eine Kurve

$$(4)\qquad \varphi(x, y) = 0.$$

Die Stetigkeit derselben bewiesen zuerst die Herren A. Meyer und E. Phragmén, neuerdings Herr F. Hartogs*), der daraus weitere interessante Folgerungen zog. Von einer anderen Begründung dieses Stetigkeitssatzes ausgehend, beweise ich im folgenden außerdem, daß die erwähnte Kurve in jedem Punkte einen vorwärts und einen rückwärts genommenen *Differentialquotienten* besitzt, die voneinander verschieden

*) Meyer, Stockholm. Ved. Ak. Förh. Öfv. 40 (1883), Nr. 9, p. 15. — Phragmén, ebenda Nr. 10, p. 17. — Hartogs, Beiträge zur elementaren Theorie der Potenzreihen und der eindeutigen analytischen Funktionen zweier Veränderlichen. Münchner Inauguraldissert. Lpz. 1904. p. 8–11. — Während der Korrektur der vorliegenden Arbeit machte mich Herr Blumenthal in liebenswürdiger Weise darauf aufmerksam, daß ein Teil der darin enthaltenen Resultate (im wesentlichen auch der Hauptsatz von p. 292) schon von Herrn Fabry (C. R. 1902, Bd. 134, p. 1190—1192) auf andere Weise gefunden wurden; daselbst spricht Herr Fabry auch den p. 316 ff. erwähnten, später von Herrn Hartogs wiedergefundenen und bewiesenen Satz aus.

sein können (dann hat die Kurve $\varphi(x, y) = 0$ in dem betrachteten Punkte eine Ecke, die übrigens zugleich Häufungsstelle unendlich vieler benachbarter Ecken sein kann).

Aus der bloßen Kenntnis einer Tangente t im Punkte r_1, r_2 läßt sich dann in der xy-Ebene ein zweidimensionales Gebiet definieren, außerhalb dessen kein Punkt der Kurve $\varphi(x, y) = 0$ liegen kann; dieses Kontinuum wird begrenzt von den beiden Koordinatenachsen und derjenigen Kurve der Form $x^{\vartheta_1} y^{\vartheta_2} = \text{const.}$, welche im Punkte r_1, r_2 die Tangente t hat. Die so gefundene Beschränkung im Verlaufe der Kurven $\varphi(x, y) = 0$ läßt sich auch in der Weise ausdrücken, daß diese Kurven Lösungen einer *Differentialungleichung* zweiter Ordnung sind. Umgekehrt zeigt sich, daß zu jeder Kurve $\psi(x, y) = 0$, welche der betreffenden Differentialungleichung genügt, unendlich viele Potenzreihen $\mathfrak{P}(x_1, x_2)$ gehören, für welche $\psi(x, y) = 0$ Kurve der assoziierten Konvergenzradien ist, d. h. genügen die Werte $x = r_1$, $y = r_2$ der Gleichung $\psi(x, y) = 0$, so ist r_1, r_2 ein Paar zusammengehöriger Konvergenzradien von $\mathfrak{P}(x_1, x_2)$ und umgekehrt.

Im ersten Paragraphen der vorliegenden Arbeit führe ich die Beweise der soeben erwähnten Sätze aus; dieselben *lassen sich* sämtlich unter Beibehaltung des eingeschlagenen Beweisganges *auf Funktionen beliebig vieler Veränderlicher ausdehnen.* Bei der vorliegenden Untersuchung kann der Fall $n = 3$ als Typus des allgemeinen gelten; einerseits nämlich bietet der Fall $n = 3$ gegenüber demjenigen $n = 2$ einiges neu Hinzukommende, das einer besonderen Erläuterung bedarf (s. § 2); andererseits aber dürfte dann der Weg zu weiteren Verallgemeinerungen genügend vorgezeichnet sein.

Die folgenden reihentheoretischen Entwicklungen liefern zugleich einen Beitrag zu der noch wenig geklärten Frage über den Verlauf der Singularitäten einer Funktion mehrerer Veränderlicher; einige diesbezügliche Folgerungen werden am Ende der Arbeit (s. § 3) gezogen.

§ 1.

Es sei r_1, r_2 irgend ein Paar zusammengehöriger Konvergenzradien der Potenzreihe

$$\mathfrak{P}(x_1, x_2) = \sum_0^\infty {}^{\mu\nu}\, a_{\mu\nu} x_1^\mu x_2^\nu; \tag{5}$$

die Annahme, daß eine der Zahlen r_1 oder r_2 gleich Null sei, ist für das Folgende ohne Bedeutung und wird daher ausgeschlossen; die *oberen* Grenzen der Zahlen r_1 und r_2 sollen mit R_1 und R_2 bezeichnet werden und nach Herrn Hartogs*) die *Maximalradien* (der x_1- bzw. x_2-Ebene) heißen.

*) a. a. O., p. 14.

Zwischen r_1 und r_2 besteht bekanntlich*) die charakteristische Beziehung:

$$\overline{\lim_{\mu+\nu=\infty}} \sqrt[\mu+\nu]{|a_{\mu\nu}|\, r_1^{\mu} r_2^{\nu}} = 1. \tag{6}$$

Für das Folgende kommt es vor allem darauf an, jene $a_{\mu\nu}$ auszusondern, die für das Zustandekommen dieses oberen Limes ausschlaggebend sind. Ist ϑ_1 irgend eine Zahl zwischen Null und 1 (mit Einschluß dieser Grenzen) und wird ein für alle Mal $1 - \vartheta_1 = \vartheta_2$ gesetzt, so sind, falls man die Reihe betrachtet, welche aus $\mathfrak{P}(x_1, x_2)$ entsteht, wenn man alle $a_{\mu\nu}$ gleich Null setzt mit Ausnahme derjenigen, deren Indizes der Ungleichung

$$\begin{aligned} &\vartheta_1 - \varrho \leqq \frac{\mu}{\mu+\nu} \leqq \vartheta_1 + \varrho \quad \text{und also auch der Ungleichung} \\ &\vartheta_2 - \varrho \leqq \frac{\nu}{\mu+\nu} \leqq \vartheta_2 + \varrho \end{aligned} \tag{7}$$

genügen, folgende zwei Fälle denkbar:

I. Fall: Es bleibt, wie klein auch die positive Zahl ϱ sei, für die übriggebliebenen $a_{\mu\nu}$ die Beziehung $\overline{\lim\limits_{\mu+\nu=\infty}} \sqrt[\mu+\nu]{|a_{\mu\nu}|\, r_1^{\mu} r_2^{\nu}} = 1$ bestehen. In diesem Falle nenne ich die Zahlen ϑ_1, ϑ_2 zu den Konvergenzradien r_1, r_2 oder auch zum Punkte $x = r_1, y = r_2$ *gehörig* und umgekehrt diesen Punkt von den Zahlen ϑ_1, ϑ_2 *abhängig*.

II. Fall: Wenn die $a_{\mu\nu}$ durch die obigen Ungleichungen (7) beschränkt sind, so ist für ein gewisses $\varrho = \varrho_0$ und um so mehr für alle kleineren ϱ:

$$\overline{\lim_{\mu+\nu=\infty}} \sqrt[\mu+\nu]{|a_{\mu\nu}|\, r_1^{\mu} r_2^{\nu}} < 1, \text{ also auch } < 1 - \eta, \tag{8}$$

wo $\eta > 0$ ist. Es heißen dann die Zahlen ϑ_1, ϑ_2 *nicht* zum Punkte r_1, r_2 *gehörig* und letzterer von ϑ_1, ϑ_2 *unabhängig*.

Zunächst ist klar, daß zu jedem Punkte r_1, r_2 — unter r_1, r_2 immer zusammengehörige Konvergenzradien verstanden — mindestens *ein* Zahlenpaar ϑ_1, ϑ_2 gehört; denn wegen (6) läßt sich aus den $a_{\mu\nu}$ eine unendliche Folge so auswählen, daß für die ausgewählten $a_{\mu\nu}$

$$\overline{\lim_{\mu+\nu=\infty}} \sqrt[\mu+\nu]{|a_{\mu\nu}|\, r_1^{\mu} r_2^{\nu}} = 1 \text{ ist;}$$

bildet man nun für alle diese $a_{\mu\nu}$ die Zahlen $\Theta_1 = \frac{\mu}{\mu+\nu}$ und $\Theta_2 = \frac{\nu}{\mu+\nu}$ und ist ϑ_1, ϑ_2 eine Häufungsstelle der Θ_1, Θ_2, so ist ϑ_1, ϑ_2 ein zum Punkte r_1, r_2 gehöriges Zahlenpaar.

*) Lemoine, Bull. des Sc. Math. 20 (1896), p. 286—292.

Dies vorausgesetzt, betrachte ich die sog. W-Kurve:

$$x^{\vartheta_1} y^{\vartheta_2} = r_1^{\vartheta_1} r_2^{\vartheta_2}, \tag{9}$$

soweit sie in dem Quadranten verläuft, in welchem x und y beide positiv sind; ist $\vartheta_1 = 0$ oder $\vartheta_2 = 0$, so hat man es mit einer Parallelen zur x- bzw. y-Achse zu tun; im übrigen sind die hier zu betrachtenden W-Kurven überall (nach oben) konkav und haben die Koordinatenachsen zu Asymptoten. Ein Punkt $x = s_1$, $y = s_2$ heißt oberhalb der W-Kurve $x^{\vartheta_1} y^{\vartheta_2} = C$ gelegen, wenn $s_1^{\vartheta_1} s_2^{\vartheta_2} > C$ ist. Es besteht dann folgender

Hauptsatz: *Liegt der Punkt $x = s_1$, $y = s_2$ oberhalb der Kurve $x^{\vartheta_1} y^{\vartheta_2} = r_1^{\vartheta_1} r_2^{\vartheta_2}$ und gehört das Zahlenpaar ϑ_1, ϑ_2 zum Punkte r_1, r_2, so kann s_1, s_2 kein Paar zusammengehöriger Konvergenzradien sein.*

Denn es ist nach Voraussetzung $\left(\frac{s_1}{r_1}\right)^{\vartheta_1} \cdot \left(\frac{s_2}{r_2}\right)^{\vartheta_2} > 1$, also auch, wenn $\varrho_0 > 0$ genügend klein gewählt wird, wegen der Stetigkeit der Exponentialfunktion

$$\left.\begin{aligned} \left(\frac{s_1}{r_1}\right)^{\vartheta_1 \pm \varrho} \left(\frac{s_2}{r_2}\right)^{\vartheta_2 \mp \varrho} &> 1, \text{ also auch} \\ &> 1 + \eta' \end{aligned}\right\} \text{ für } \varrho \leqq \varrho_0, \tag{10}$$

demnach

$$\begin{aligned} \overline{\lim_{\mu+\nu=\infty}} \sqrt[\mu+\nu]{|a_{\mu\nu}|\, s_1^\mu s_2^\nu} &= \overline{\lim_{\mu+\nu=\infty}} \sqrt[\mu+\nu]{|a_{\mu\nu}|\, r_1^\mu r_2^\nu} \cdot \left(\frac{s_1}{r_1}\right)^{\frac{\mu}{\mu+\nu}} \cdot \left(\frac{s_2}{r_2}\right)^{\frac{\nu}{\mu+\nu}} \\ &> 1 + \eta', \end{aligned} \tag{11}$$

da ja, wenn die μ, ν durch die Ungleichungen:

$$\left.\begin{aligned} \vartheta_1 - \varrho \leqq \frac{\mu}{\mu+\nu} \leqq \vartheta_1 + \varrho \\ \vartheta_2 - \varrho \leqq \frac{\nu}{\mu+\nu} \leqq \vartheta_2 + \varrho \end{aligned}\right\} \qquad (\varrho \leqq \varrho_0) \tag{7}$$

beschränkt werden, einerseits $\overline{\lim_{\mu+\nu=\infty}} \sqrt[\mu+\nu]{|a_{\mu\nu}|\, r_1^\mu r_2^\nu} = 1$ bleibt, andererseits nach (10) $\left(\frac{s_1}{r_1}\right)^{\frac{\mu}{\mu+\nu}} \cdot \left(\frac{s_2}{r_2}\right)^{\frac{\nu}{\mu+\nu}} > 1 + \eta'$ ist; weil aber $\overline{\lim_{\mu+\nu=\infty}} \sqrt[\mu+\nu]{|a_{\mu\nu}|\, s_1^\mu s_2^\nu} > 1$ ausfällt, können s_1, s_2 keine zusammengehörigen Konvergenzradien sein, und die Potenzreihe $\mathfrak{P}(x_1, x_2)$ *divergiert absolut* für $|x_1| = s_1$, $|x_2| = s_2$.

Gehören zum Punkte r_1, r_2 mehrere Zahlenpaare ϑ_1, ϑ_2 also auch mehrere W-Kurven, so kann s_1, s_2 *kein* Paar zusammengehöriger Konvergenzradien sein, wenn der Punkt s_1, s_2 oberhalb auch nur *einer* dieser Kurven liegt. Aus den, eventuell unendlich vielen, zum Punkte r_1, r_2 gehörigen W-Kurven lassen sich dann zwei, die *extremen* W-Kurven, auswählen, die für die Ausschließung dasselbe leisten wie die Gesamtheit.

Um dieselben aufzufinden und dann weitere Schlüsse zu ziehen, beachte man zunächst den folgenden

I. Hilfssatz: *Gehört das Zahlenpaar ϑ_1, ϑ_2 nicht zum Punkte r_1, r_2, so gibt es eine positive Zahl σ_0 derart, daß auch die sämtlichen Paare $\vartheta_1 \pm \sigma$, $\vartheta_2 \mp \sigma$ nicht zu r_1, r_2 gehören, solange $\sigma < \sigma_0$ ist.*

Mit anderen Worten: Die Menge der zu einem Punkte r_1, r_2 gehörigen Zahlenpaare ϑ_1, ϑ_2 ist abgeschlossen, d. h. sie enthält ihre Häufungsstellen.

Haben η und $\varrho < \varrho_0$ die gleiche Bedeutung wie in (7) und (8), so genügt es $\sigma_0 = \frac{\varrho_0}{2}$ zu wählen, denn dann ist nach (8):

$$(12) \qquad \lim_{\mu+\nu=\infty} \sqrt[\mu+\nu]{|a_{\mu\nu}|\, r_1^\mu r_2^\nu} < 1 - \eta,$$

wenn μ und ν den Ungleichungen

$$(13) \qquad \begin{aligned} (\vartheta_1 \pm \sigma) - \varrho' &\leqq \frac{\mu}{\mu+\nu} \leqq (\vartheta_1 \pm \sigma) + \varrho' \\ (\vartheta_2 \mp \sigma) - \varrho' &\leqq \frac{\nu}{\mu+\nu} \leqq (\vartheta_2 \mp \sigma) + \varrho' \end{aligned}$$

für $\sigma \leqq \frac{\varrho_0}{2}$ und $\varrho' \leqq \frac{\varrho_0}{2}$ genügen.

Wenn also $\overline{\vartheta}_1$ die obere und $\underline{\vartheta}_1$ die untere Grenze der zum Punkte r_1, r_2 gehörigen Zahlen ϑ_1, und $\overline{\vartheta}_2 = 1 - \underline{\vartheta}_1$, $\underline{\vartheta}_2 = 1 - \overline{\vartheta}_1$ die entsprechend für die Zahlen ϑ_2 gebildeten Größen sind, so sind auch die Paare $\overline{\vartheta}_1, \underline{\vartheta}_2$ und $\underline{\vartheta}_1, \overline{\vartheta}_2$ zum Punkte r_1, r_2 gehörig.

Die durch r_1, r_2 gehenden *extremen* W-Kurven sind nun die folgenden:

$$(13) \qquad \begin{aligned} x^{\overline{\vartheta}_1} y^{\underline{\vartheta}_2} &= r_1^{\overline{\vartheta}_1} r_2^{\underline{\vartheta}_2} \\ x^{\underline{\vartheta}_1} y^{\overline{\vartheta}_2} &= r_1^{\underline{\vartheta}_1} r_2^{\overline{\vartheta}_2}, \end{aligned}$$

und zwar gibt die erste für $x > r_1$, die zweite für $x < r_1$ das genaueste Resultat, wenn man durch den Hauptsatz möglichst viele Punkte s_1, s_2 ausschließen will.

Die übrigen zum Punkte r_1, r_2 gehörigen W-Kurven verlaufen sämtlich ganz *zwischen* diesen beiden. Es ergibt sich dies daraus, daß sich, wie leicht ersichtlich, zwei W-Kurven höchstens in *einem* Punkte (des allein in Betracht kommenden Quadranten) schneiden können und daß die W-Kurven um so rascher der X- (bzw. Y-)Achse asymptotisch zustreben, je größer (bzw. je kleiner) das Verhältnis $\frac{\vartheta_1}{\vartheta_2}$ ist.

Ist insbesondere $\overline{\vartheta}_1 = 1$, also $\underline{\vartheta}_2 = 0$, so artet die eine zum Punkt r_1, r_2 gehörige extreme W-Kurve in die Gerade $x = r_1$ aus und nach dem Hauptsatze gibt es dann kein Paar zusammengehöriger Konvergenzradien r_1', r_2', wo $r_1' > r_1$ wäre; r_1 ist somit *Maximalradius;* dagegen ist

$$\lim_{\mu+\nu=\infty} \sqrt[\mu+\nu]{|a_{\mu\nu}| r_1^\mu r_2'^\nu} = 1 \tag{14}$$

für jedes zwischen 0 und r_2 gelegene r_2'; da nämlich

$$\lim_{\mu+\nu=\infty} \sqrt[\mu+\nu]{|a_{\mu\nu}| r_1^\mu r_2^\nu} = 1$$

und $r_2' < r_2$ vorausgesetzt ist, kann der Grenzwert (14) *nicht größer* als 1 sein; es genügt daher zu zeigen, daß er auch *nicht kleiner* als 1 ist; wenn nun (wegen $\underline{\vartheta_2} = 0$)

$$\frac{\nu}{\mu+\nu} < \varepsilon \tag{15}$$

vorausgesetzt wird, so ist für ein bestimmtes endliches r_2'

$$1 - \varepsilon' < \left(\frac{r_2'}{r_2}\right)^{\frac{\nu}{\mu+\nu}} < 1$$

und es bleibt also $\lim\limits_{\mu+\nu=\infty} \sqrt[\mu+\nu]{|a_{\mu\nu}| r_1^\mu r_2'^\nu} = \lim\limits_{\mu+\nu=\infty} \sqrt[\mu+\nu]{|a_{\mu\nu}| r_1^\mu r_2^\nu} \left(\frac{r_2'}{r_2}\right)^{\frac{\nu}{\mu+\nu}}$ in den Grenzen $1 - \varepsilon'$ und 1; da wegen der Stetigkeit der Exponentialfunktion ε' mit ε beliebig klein wird, so ergibt sich die Richtigkeit der Behauptung (14).

Das Bestehen der Beziehung (14) besagt, daß sämtliche Punkte r_1, r_2', wo $0 < r_2' < r_2$, mithin das zwischen den Geraden $y = 0$ und $y = r_2$ gelegene Stück der Geraden $x = r_1$ zur Kurve $\varphi(x, y) = 0$ zu rechnen ist.

In analoger Weise ist eventuell das zwischen den Geraden $x = 0$ und $x = r_1$ gelegene Stück der Geraden $y = r_2$ der Kurve $\varphi(x, y) = 0$ zuzuzählen, wenn nämlich zum Punkte $x = r_1$, $y = r_2$ und also zu jedem Punkte $x < r_1$, $y = r_2$ das Zahlenpaar 0, 1 gehört.

Es ist auch denkbar, daß die ganze Kurve $\varphi(x, y) = 0$ lediglich aus der Geraden $x = R_1$ besteht; dies ist dann der Fall, wenn für jedes $\varepsilon > 0$ und für die durch die Bedingung $\frac{\nu}{\mu+\nu} < \varepsilon$ beschränkten $a_{\mu\nu}$ sowie für irgend einen endlichen Wert von r_2 die Beziehung gilt:

$$\lim_{\mu+\nu=\infty} \sqrt[\mu+\nu]{|a_{\mu\nu}| R_1^\mu r_2^\nu} = 1,$$

während $\mathfrak{P}(x_1, x_2)$ nach Anschluß jener $a_{\mu\nu}$ für $|x_1| < R_1$ und jeden endlichen Wert von x_2 absolut konvergiert. Beispiel:

$$\mathfrak{P}(x_1, x_2) = \frac{1}{R_1 - x_1} + G(x_1, x_2),$$

wo $G(x_1, x_2)$ eine ganze transzendente Funktion von x_1, x_2 ist. (Dagegen ist nach dem Hauptsatze *nicht möglich*, daß die Kurve $\varphi(x,y) = 0$, ohne in eine Parallele zur y-Achse auszuarten, ganz im Gebiete $x > \varepsilon > 0$ verlaufe, da die nicht ausartenden W-Kurven die Y-Achse zur Asymptote haben.)

Ist r_1 *nicht Maximalradius* und daher vom Paare $(1, 0)$ unabhängig, so gibt es nur *einen* zu r_1 assoziierten Konvergenzradius r_2. Wären nämlich r_1, r_2' und r_1, r_2'' zusammengehörige Konvergenzradien, $r_2'' > r_2'$ und r_1, r_2' vom Paare $\vartheta_1 (< 1)$, $\vartheta_2 (> 0)$ abhängig, so wäre, wenn wieder die Ungleichungen (7) in Kraft treten, einerseits

$$\lim_{\mu+\nu=\infty} \sqrt[\mu+\nu]{|a_{\mu\nu}| r_1^\mu r_2'^\nu} = 1, \quad \text{andererseits} \tag{16}$$

$$\begin{aligned} \lim_{\mu+\nu=\infty} \sqrt[\mu+\nu]{|a_{\mu\nu}| r_1^\mu r_2''^\nu} &= \lim_{\mu+\nu=\infty} \sqrt[\mu+\nu]{|a_{\mu\nu}| r_1^\mu r_2'^\nu} \cdot \left(\frac{r_2''}{r_2'}\right)^{\frac{\nu}{\mu+\nu}} \\ &> \lim_{\mu+\nu=\infty} \sqrt[\mu+\nu]{|a_{\mu\nu}| r_1^\mu r_2'^\nu} \cdot \left(\frac{r_2''}{r_2'}\right)^{\vartheta_2-\varrho}; \end{aligned} \tag{17}$$

$\left(\frac{r_2''}{r_2'}\right)^{\vartheta_2-\varrho}$ ist aber größer als 1, wenn $\varrho < \vartheta_2$ gewählt ist, so daß wegen (16) $\lim\limits_{\mu+\nu=\infty} \sqrt[\mu+\nu]{|a_{\mu\nu}| r_1^\mu r_2''^\nu} > 1$ ausfällt, was mit der Annahme, daß r_1, r_2'' zusammengehörige Konvergenzradien sind, unverträglich ist.

Im Intervalle $0 < x < R_1$ gestattet daher die Funktion $\varphi(x, y) = 0$ die *eindeutige Auflösung* $y = \psi(x)$, durch welche der zweite Konvergenzradius als Funktion des ersten dargestellt wird. $\psi(x)$ nimmt, wie unmittelbar ersichtlich, mit wachsendem x monoton ab; es existieren daher die Grenzwerte $\psi(r_1 + 0)$ und $\psi(r_1 - 0)$; um die Übereinstimmung derselben mit $\psi(r_1)$ und damit die *Stetigkeit* von $\psi(x)$ nachzuweisen, ist es zweckmäßig, folgenden für den Nachweis der Differenzierbarkeit von $\psi(x)$ ebenfalls nötigen II. Hilfssatz einzufügen, der dem ersten analog gebildet ist.

II. Hilfssatz: *Ist der Punkt* r_1, r_2 *unabhängig vom Zahlenpaare* ϑ_1, ϑ_2, *so gilt das gleiche für sämtliche Punkte einer gewissen Umgebung des Punktes* r_1, r_2.

Nach Voraussetzung besteht Ungleichung (8), sobald die μ, ν durch (7) beschränkt sind. p_1 und p_2 sollen nun in solcher Nähe von r_1 und r_2 gedacht werden, daß *erstens* für p_1 sowohl als für p_2 der Wert Null ausgeschlossen ist, *zweitens* $\frac{p_1}{r_1}$ und $\frac{p_2}{r_2}$ so nahe an 1 liegen, als nötig ist zum Bestehen folgender Ungleichung für $\varrho \leqq \varrho_0$:

$$\left(\frac{p_1}{r_1}\right)^{\vartheta_1 \pm \varrho} \cdot \left(\frac{p_2}{r_2}\right)^{\vartheta_2 \mp \varrho} < 1 + \eta, \tag{18}$$

wo ϱ_0 und η die gleichen Zahlen sind wie in (7), (8).

Dieser Bedingung kann wegen der für alle in Betracht kommenden Exponenten gleichmäßigen Stetigkeit der Potenz in der Nähe des Wertes 1 der Basis immer genügt werden; dann ist aber, wenn wieder die μ, ν durch (7) beschränkt sind:

$$\begin{aligned}
&\overline{\lim_{\mu+\nu=\infty}} \sqrt[\mu+\nu]{|a_{\mu\nu}|\, p_1^\mu p_2^\nu} = \overline{\lim_{\mu+\nu=\infty}} \sqrt[\mu+\nu]{|a_{\mu\nu}|\, r_1^\mu r_2^\nu}\, \left(\frac{p_1}{r_1}\right)^{\frac{\mu}{\mu+\nu}} \cdot \left(\frac{p_2}{r_2}\right)^{\frac{\nu}{\mu+\nu}} \\
(19)\qquad &< \overline{\lim_{\mu+\nu=\infty}} \sqrt[\mu+\nu]{|a_{\mu\nu}|\, r_1^\mu r_2^\nu}\, (1+\eta) \qquad \text{(nach (18))} \\
&< 1-\eta^2. \qquad \text{(nach (8))}
\end{aligned}$$

Diese Ungleichung besagt im Verein mit (7), daß p_1, p_2 von den Zahlen ϑ_1, ϑ_2 unabhängig ist.

Zusatz: Aus dem Beweise folgt sofort, daß unter den gemachten Voraussetzungen der Punkt p_1, p_2 auch von keinem der Zahlenpaare $\vartheta_1 \pm \varrho$, $\vartheta_2 \mp \varrho$, wo $\varrho < \varrho_0$, abhängen kann (wie sich auch aus dem I. Hilfssatze ergibt).

Wäre nun $0 < r_1 < R_1$ und $\psi(r_1 - 0) - \psi(r_1)$ eine von Null verschiedene und darum, wegen der Monotonie von $\psi(x)$, eine positive Größe, so müßte das zu r_1, r_2 gehörige extreme Zahlenpaar $\overline{\vartheta}_1 = 1$, $\overline{\vartheta}_2 = 0$ sein; anderenfalls lägen nämlich wegen der Stetigkeit der nicht ausartenden W-Kurven Punkte $r_1 - \varepsilon$, $\psi(r_1 - \varepsilon)$ für beliebig kleines ε oberhalb sämtlicher zum Punkte r_1, r_2 gehörigen W-Kurven, was nach dem Hauptsatze unmöglich ist. Durch das zugehörige Zahlenpaar 1, 0 ist aber r_1 als Maximalradius R_1 charakterisiert.

Ähnlich ergibt sich $\psi(r_1 + 0) = \psi(r_1)$, wenn $0 < r_1 < R_1$ ist. Wäre nämlich $\psi(r_1 + 0) < \psi(r_1)$, so müßten zu Punkten $r + \varepsilon$, $\psi(r_1 + \varepsilon)$ Zahlen $\underline{\vartheta_1}$ gehören, deren oberer Limes für $\varepsilon = 0$ von 1 nicht verschieden sein könnte, weil sonst der Punkt r_1, r_2 oberhalb von zu Punkten $r_1 + \varepsilon$, $\psi(r_1 + \varepsilon)$ gehörigen W-Kurven zu liegen käme. Aber aus der Annahme, daß jener obere Limes gleich 1 sei, würde auf Grund des II. Hilfssatzes folgen, daß zum Punkte r_1, r_2 selber das Paar (1, 0) gehörte, daß also r_1 Maximalradius wäre.

Genau so zeigt man, daß der erste Konvergenzradius eine stetige Funktion des zweiten ist, solange dieser $< R_2$ bleibt.

Um nunmehr die *Differenzierbarkeit* der Funktion $y = \psi(x)$ in dem eingangs bezeichneten Umfange nachzuweisen, bezeichne man den Wert irgend eines und jedes beliebigen der zum Punkte x, y gehörigen Zahlenpaare ϑ_1, ϑ_2 in seiner Abhängigkeit von diesem Punkte mit $\vartheta_1(x)$, $\vartheta_2(x)$ und die eindeutig definierten Maximal- und Minimalwerte der eventuell unendlich vieldeutigen Funktionen $\vartheta_1(x), \vartheta_2(x)$ mit $\overline{\vartheta_1(x)}$, $\underline{\vartheta_1(x)}$, $\overline{\vartheta_2(x)}$,

$\underline{\vartheta_2}(x)$, so ergibt sich, daß jede Häufungsstelle von Werten $\vartheta_1(x \pm \varepsilon)$, wenn ε der Null zustrebt, einen Wert $\vartheta_1(x)$ liefert; die gegenteilige Annahme würde nämlich sofort einen Widerspruch mit dem Zusatze zu dem II. Hilfssatze ergeben; es ist also insbesondere

$$\text{(20)} \qquad \begin{aligned} &\underline{\vartheta_1(x)} \leqq \overline{\underline{\lim}}_{\varepsilon=0}\, \vartheta_1(x \pm \varepsilon) \leqq \overline{\vartheta_1(x)} \qquad \text{und auch} \\ &\underline{\vartheta_2(x)} \leqq \overline{\underline{\lim}}_{\varepsilon=0}\, \vartheta_2(x \pm \varepsilon) \leqq \overline{\vartheta_2(x)} \end{aligned}$$

Diese Beziehung genügt für das unmittelbar Folgende; eine präzisere wird später abgeleitet werden.

Ich zeige nun, *daß die Kurve* $\varphi(x, y) = 0$ *in jedem Punkte* x, y *von den beiden zugehörigen extremen W-Kurven berührt wird;* d. h. es ist

$$\text{(21)} \qquad \left(\frac{dy}{dx}\right)_+ = -\frac{\overline{\vartheta_1(x)} \cdot y}{\underline{\vartheta_2(x)} \cdot x}, \quad \left(\frac{dy}{dx}\right)_- = -\frac{\underline{\vartheta_1(x)} \cdot y}{\overline{\vartheta_2(x)} \cdot x}.$$

Demnach fallen diese Tangenten dann und nur dann zusammen, wenn zum Punkte (x, y) nur *ein* Zahlenpaar ϑ_1, ϑ_2 gehört.

Mit $\overline{\left(\frac{dy}{dx}\right)}_+$ und $\underline{\left(\frac{dy}{dx}\right)}_+$ werden, wie üblich, der obere und untere vordere Differentialquotient bezeichnet; dann gilt jedenfalls, da ja nach dem Hauptsatze oberhalb jeder zu (x, y) gehöriger W-Kurve keine Punkte von $\varphi(x, y) = 0$ liegen dürfen:

$$\text{(22)} \qquad \underline{\left(\frac{dy}{dx}\right)}_+ \leqq \overline{\left(\frac{dy}{dx}\right)}_+ \leqq \frac{-\overline{\vartheta_1(x)} \cdot y}{\underline{\vartheta_2(x)} \cdot x},$$

und es ist zu zeigen, daß für einen beliebigen Punkt $x = r_1$, $y = r_2$ hier überall das Gleichheitszeichen gilt, daß also die Annahme

$$\underline{\left(\frac{dy}{dx}\right)}_{+\,\substack{x=r_1 \\ y=r_2}} < \frac{-\overline{\vartheta_1(r_1)} \cdot r_2}{\underline{\vartheta_2(r_1)} \cdot r_1}$$

auf einen Widerspruch führt. Der Fall $\overline{\vartheta}_1 = 1$, $\underline{\vartheta}_2 = 0$, $r_1 = R_1$ kann von vornherein als erledigt gelten; denn dann ist den drei in (22) auftretenden Größen der Wert $-\infty$ beizulegen; es ist also im folgenden überall $\underline{\vartheta}_2 > 0$, $r_1 < R_1$ zu denken. Dann würde aber die Annahme

$$\underline{\left(\frac{dy}{dx}\right)}_{+\,\substack{x=r_1 \\ y=r_2}} < \frac{-\overline{\vartheta_1(r_1)}\, r_2}{\underline{\vartheta_2(r_1)} \cdot r_1}$$

besagen, daß es auf der Kurve $\varphi(x, y) = 0$ unendlich viele Punkte

$(r_1+\varepsilon,\ r_2-\varepsilon\cdot a(\varepsilon))$ gibt, für welche die *positive* Zahl ε der Null zustrebt, während stets

$$a(\varepsilon) > \frac{\overline{\vartheta_1(r_1)}\cdot r_2}{\underline{\vartheta_2(r_1)}\cdot r_1}\ (>0) \tag{23}$$

bleibt. Dabei muß wegen der bewiesenen Stetigkeit der Kurve $y=\psi(x)$ an der Stelle r_1, r_2:

$$\lim_{\varepsilon=0} \varepsilon\cdot a(\varepsilon) = 0 \tag{24}$$

sein. Nun kann nach dem Hauptsatze der Punkt r_1, r_2 nicht oberhalb einer Kurve $x^{\vartheta_1(r_1+\varepsilon)}\cdot y^{\vartheta_2(r_1+\varepsilon)} = (r_1+\varepsilon)^{\vartheta_1(r_1+\varepsilon)}(r_2-\varepsilon\cdot a(\varepsilon))^{\vartheta_2(r_1+\varepsilon)}$ liegen; es ist also

$$\begin{gathered}(r_1+\varepsilon)^{\vartheta_1(r_1+\varepsilon)}\cdot(r_2-\varepsilon\cdot a(\varepsilon))^{\vartheta_2(r_1+\varepsilon)} \geqq r_1^{\vartheta_1(r_1+\varepsilon)}\, r_2^{\vartheta_2(r_1+\varepsilon)} \quad \text{oder}\\ \left(1+\frac{\varepsilon}{r_1}\right)^{\vartheta_1(r_1+\varepsilon)}\cdot\left(1-\frac{\varepsilon\cdot a(\varepsilon)}{r_2}\right)^{\vartheta_2(r_1+\varepsilon)} \geqq 1\end{gathered} \tag{25}$$

oder wenn man die beiden Faktoren nach der binomischen Reihe entwickelt:

$$\frac{\varepsilon\vartheta_1(r_1+\varepsilon)}{r_1} - \frac{\varepsilon\cdot a(\varepsilon)\cdot\vartheta_2(r_1+\varepsilon)}{r_2} + [\varepsilon^2] + [(\varepsilon\cdot a(\varepsilon))^2] \geqq 0. \tag{26}$$

Die mit $[\varepsilon^2]$ und $[(\varepsilon\cdot a(\varepsilon))^2]$ bezeichneten Restglieder können wegen der für alle in Betracht kommenden (beliebig kleinen) Werte von ε gleichmäßigen Konvergenz der binomischen Reihe auf das Vorzeichen der linken Seite von (26) nur dann einen Einfluß haben, wenn

$$\underline{\lim_{\varepsilon=0}}\left(\frac{\vartheta_1(r_1+\varepsilon)}{r_1} - \frac{a(\varepsilon)\,\vartheta_2(r_1+\varepsilon)}{r_2}\right) = 0$$

ist; anderenfalls besagt (26), daß für $\varepsilon<\varepsilon'$:

$$\frac{\varepsilon\vartheta_1(r_1+\varepsilon)}{r_1} - \frac{\varepsilon\cdot a(\varepsilon)\vartheta_2(r_1+\varepsilon)}{r_2} \geqq 0$$

ist, wobei die linke Seite noch durch die positive Zahl ε dividiert werden darf; es ist also in jedem Falle

$$\overline{\lim_{\varepsilon=0}}\ \frac{\vartheta_1(r_1+\varepsilon)}{r_1} - \frac{a(\varepsilon)\,\vartheta_2(r_1+\varepsilon)}{r_2} \geqq 0 \tag{27}$$

und wegen (20) um so mehr

$$\overline{\lim_{\varepsilon=0}}\ \frac{\overline{\vartheta_1(r_1)}}{r_1} - \frac{a(\varepsilon)\,\underline{\vartheta_2(r_1)}}{r_2} \geqq 0, \tag{28}$$

d. h.

$$\underline{\lim_{\varepsilon=0}}\ a(\varepsilon) \leqq \frac{\overline{\vartheta_1(r_1)}\cdot r_2}{\underline{\vartheta_2(r_1)}\cdot r_1}, \tag{29}$$

was in Widerspruch steht mit (23).

Damit ist bewiesen, daß für jeden Punkt x, y der Kurve $\varphi(x, y) = 0$

$$(30) \qquad \left(\frac{dy}{dx}\right)_+ = -\frac{\overline{\vartheta_1(x)} \cdot y}{\underline{\vartheta_2(x)} \cdot x}$$

ist; genau so zeigt man, was übrigens auch aus (30) direkt durch Vertauschen der Buchstaben x und y folgt, daß

$$(31) \qquad \left(\frac{dy}{dx}\right)_- = -\frac{\underline{\vartheta_1(x)} \cdot y}{\overline{\vartheta_2(x)} \cdot x}$$

ist.

Um weitere Schlüsse über die Funktionen $\vartheta_1(x)$ und $\vartheta_2(x)$ und damit über die Tangenten von $\varphi(x, y) = 0$ zu ziehen, beachte man den folgenden

III. Hilfssatz: *Sind x', y' und x'', y'' irgend zwei Punkte von $\varphi(x, y) = 0$ und ist $x'' > x'$, also $y'' \leqq y'$, ist ferner ϑ_1', ϑ_2' irgend ein zum Punkte x', y' und ϑ_1'', ϑ_2'' irgend ein zum Punkte x'', y'' gehöriges Zahlenpaar, so ist*

$$(32) \qquad \vartheta_1'' \geqq \vartheta_1', \quad \text{also} \quad \vartheta_2'' \leqq \vartheta_2'.$$

Nach dem Hauptsatze muß nämlich gleichzeitig

$$(33) \qquad x''^{\vartheta_1'} \cdot y''^{\vartheta_2'} \leqq x'^{\vartheta_1'} \cdot y'^{\vartheta_2'}$$

und

$$(34) \qquad x'^{\vartheta_1''} \cdot y'^{\vartheta_2''} \leqq x''^{\vartheta_1''} \cdot y''^{\vartheta_1''}$$

sein. Durch Division der linken Seite von (33) durch die rechte von (34) und der rechten Seite von (33) durch die linke von (34) ergibt sich:

$$(35) \qquad x''^{\vartheta_1' - \vartheta_2''} \cdot y''^{\vartheta_2' - \vartheta_2''} \leqq x'^{\vartheta_1' - \vartheta_1''} \cdot y'^{\vartheta_2' - \vartheta_2''}.$$

Setzt man $\vartheta_1' - \vartheta_1'' = \zeta$, somit $\vartheta_2' - \vartheta_2'' = -\zeta$, so wird aus (35):

$$(36) \qquad \left(\frac{x''}{x'}\right)^\zeta \leqq \left(\frac{y''}{y'}\right)^\zeta.$$

Da nach Voraussetzung $\frac{x''}{x'} > 1$, dagegen $\frac{y''}{y'} \leqq 1$ ist, so ist (36) nur möglich, wenn ζ negativ oder Null ist, d. h. wenn, wie behauptet, $\vartheta_1'' \geqq \vartheta_1'$ ist.

Die Funktion $\vartheta_1(x)$ nimmt also von einem Minimalwerte $\geqq 0$ bis zu einem Maximalwerte $\leqq 1$ monoton zu.

Nun lasse man x'' sich dem x' unbegrenzt nähern; dann erhält man $\vartheta_1(x+0) \geqq \vartheta_1(x)$ und insbesondere $\vartheta_1(x+0) \geqq \overline{\vartheta_1(x)}$; durch den Zusatz zu Hilfsatz II ist aber hier das Zeichen $>$ ausgeschlossen, so daß sich ergibt:

$$(37) \qquad \begin{aligned} \vartheta_1(x+0) &= \overline{\vartheta_1(x)}, \quad \vartheta_2(x+0) = \underline{\vartheta_2(x)} \quad \text{und zugleich} \\ \vartheta_1(x-0) &= \underline{\vartheta_1(x)}, \quad \vartheta_2(x-0) = \overline{\vartheta_2(x)}. \end{aligned}$$

Auf die Differentialquotienten $\left(\frac{dy}{dx}\right)_+$ und $\left(\frac{dy}{dx}\right)_-$ angewandt, besagen diese Sätze folgendes:

An jeder Vieldeutigkeits- und mithin Unstetigkeitsstelle von $\vartheta_1(x)$ sind die beiden Differentialquotienten voneinander verschieden; dagegen ist stets

$$
(38)\qquad
\begin{aligned}
\left(\frac{d\psi(x-0)}{dx}\right)_+ &= \left(\frac{d\psi(x-0)}{dx}\right)_- = \left(\frac{dy}{dx}\right)_-\\
\left(\frac{d\psi(x+0)}{dx}\right)_+ &= \left(\frac{d\psi(x+0)}{dx}\right)_- = \left(\frac{dy}{dx}\right)_+ .
\end{aligned}
$$

Der Gesamtbetrag der Unstetigkeiten von $\vartheta_1(x)$ ist $\leqq 1$; daraus folgt, daß auch der Gesamtbetrag der Unstetigkeiten eines der beiden Differentialquotienten in jedem endlichen Intervalle (x', x'') ein endlicher ist; dagegen kann derselbe mit wachsendem x'' jede endliche Grenze überschreiten, da dann das in den Nennern von (21) befindliche $\vartheta_2(x)$ möglicherweise der Null zustrebt.

Weil nach Hilfssatz III: $\dfrac{-\vartheta_1(x)}{\vartheta_2(x)} = \dfrac{x}{y}\left(\dfrac{dy}{dx}\right)_+$ mit wachsendem x abnimmt, so hat man für jedes $h > 0$:

$$
(39)\qquad \frac{x+h}{\psi(x+h)}\cdot\left(\frac{d\psi(x+h)}{dx}\right)_+ - \frac{x}{\psi(x)}\cdot\left(\frac{d\psi(x)}{dx}\right)_+ \leqq 0,
$$

oder auch

$$
(39')\qquad \frac{1}{h}\left(\frac{x+h}{\psi(x+h)}\cdot\left(\frac{d\psi(x+h)}{dx}\right)_+ - \frac{x}{\psi(x)}\left(\frac{d\psi(x+h)}{dx}\right)_+\right) +
+ \frac{1}{h}\left(\frac{x}{\psi(x)}\cdot\left(\frac{d\psi(x+h)}{dx}\right)_+ - \frac{x}{\psi(x)}\left(\frac{d\psi(x)}{dx}\right)_+\right) \leqq 0
$$

und für $\lim h = 0$ $\left(\text{mit Benutzung von (38): } \left(\dfrac{d\psi(x+0)}{dx}\right)_+ = \left(\dfrac{d\psi(x)}{dx}\right)_+\right)$:

$$
(40)\qquad \left(\frac{d\dfrac{x}{y}}{dx}\right)_+\cdot\left(\frac{dy}{dx}\right)_+ + \frac{x}{y}\varlimsup_{h=0}\frac{\left(\dfrac{d\psi(x+h)}{dx}\right)_+ - \left(\dfrac{d\psi(x)}{dx}\right)_+}{h} \leqq 0,
$$

endlich, wenn man für $\varlimsup\limits_{h=0}\dfrac{\left(\dfrac{d\psi(x+h)}{dx}\right)_+ - \left(\dfrac{d\psi(x)}{dx}\right)_+}{h}$ kürzer $\overline{\left(\dfrac{d^2(y)}{dx^2}\right)}_+$ schreibt:

$$
(41)\qquad \overline{\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)}_+ \leqq \frac{1}{y}\left(\frac{dy}{dx}\right)_+^2 - \frac{1}{x}\left(\frac{dy}{dx}\right)_+ .
$$

Dieser Differentialungleichung genügen also sämtliche Kurven assoziierter Konvergenzradien und zwar, wegen der monotonen Abnahme von $y = \psi(x)$, mit nirgends positivem $\left(\dfrac{dy}{dx}\right)_+$; doch ist es nicht nötig, die Bedingung $\left(\dfrac{dy}{dx}\right)_+ \leqq 0$ eigens hinzuzunehmen; es wird sich nämlich später ergeben, daß diese Ungleichung, wenn sie als Anfangsbedingung für *einen* Punkt x', y' erfüllt ist, für alle Punkte x'', y'', wo $x'' > x'$ ist, vermöge (41) von selber besteht.

Auf Grund dessen, daß (41) eine notwendige Bedingung für die Kurven $\varphi(x, y) = 0$ ist, erkennt man, daß unzählig viele monoton abnehmende, stetige und differenzierbare, ja durchweg analytische Kurven unmöglich die gegenseitige Abhängigkeit zweier Konvergenzradien darstellen können.

Beispiel: Für die Funktion $y = e^{\frac{a}{x^n}} - 1$, wo a und n beliebige positive Zahlen bedeuten sollen, erhält man:

$$\frac{d^2 y}{dx^2} - \frac{1}{y}\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + \frac{1}{x}\frac{dy}{dx} =$$

$$= \frac{e^{\frac{a}{x^n}}}{x^{2n+2}}[a^2 n^2 + an(n+1)x^n] - \frac{a^2 n^2 e^{\frac{2a}{x^n}}}{\left(e^{\frac{a}{x^n}} - 1\right)x^{2n+2}} - \frac{an\, e^{\frac{a}{x^n}}}{x^{n+2}}$$

und hieraus, indem man nach einigen Vereinfachungen statt des für alle $x > 0$ *positiven* Ausdrucks $\dfrac{an \cdot e^{\frac{a}{x^n}}}{\left(e^{\frac{a}{x^n}} - 1\right)x^{n+2}}$ kurz k schreibt:

$$k \cdot \left(-\frac{a}{x^n} + e^{\frac{a}{x^n}} - 1\right) = k \cdot \left[\frac{1}{2!}\left(\frac{a}{x^n}\right)^2 + \frac{1}{3!}\left(\frac{a}{x^n}\right)^3 + \cdots\right]$$
$$> 0,$$

während diese rechte Seite für Kurven zusammengehöriger Konvergenzradien nach (41) stets $\leqq 0$ ausfällt. Ein noch einfacheres Beispiel ist $y = \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}$.

Im Grunde ist die Differentialungleichung (41) nichts anderes als eine durch den Beweis der Stetigkeit und Differenzierbarkeit vervollständigte Umschreibung des Hauptsatzes; ich zeige nämlich, daß irgend eine mit den als notwendig erkannten Stetigkeitseigenschaften ausgestattete Kurve $\Phi(x, y) = 0$, welche Lösung von (41) ist, unterhalb jeder sie in irgend einem Punkte berührenden W-Kurve verläuft (oder mit dieser W-Kurve ganz oder stückweise zusammenfällt), ferner, daß diese Eigenschaft der Kurven $\Phi(x, y) = 0$ auch hinreichend ist, um die $\Phi(x, y) = 0$ als Kurven zusammengehöriger Konvergenzradien zu kennzeichnen, so daß also auch *durch die zunächst nur als notwendig bestehend erkannte Differentialungleichung* (41) *die betreffenden Kurven vollkommen charakterisiert sind.* (Deshalb ist auch die genau wie (41) abzuleitende Differentialungleichung, in der nur die vorwärts genommenen Differentialquotienten durch die rückwärts genommenen zu ersetzen sind, eine Folge von (41).)

Es sei also nun eine im Gebiete $0 < x < R_1$ stetige, mit nach rechts stetigen vorwärts genommenen Differentialquotienten $\left(\frac{dy}{dx}\right)_+$ versehene und der Differentialungleichung (41) genügende Kurve $\Phi(x,y)=0$ oder $y=\Psi(x)$ vorgelegt; es soll gezeigt werden, daß diese Kurve nirgends oberhalb einer W-Kurve verläuft, mit der sie einen Punkt (x,y) und den zugehörigen Differentialquotienten $\left(\frac{dy}{dx}\right)_+$ gemein hat.

Zu diesem Zwecke ist vor allem aus der nach Voraussetzung für $y=\Psi(x)$ bestehenden Differentialungleichung (41) oder aus der damit gleichwertigen Ungleichung (40), indem man die p. 300 gemachten Schlüsse rückwärts verfolgt, die Ungleichung (39) abzuleiten für

$$0 < x < x+h < R_1 - h' < R_1$$

(überall ist dabei ψ durch Ψ ersetzt zu denken). Ist ε eine gegebene positive Zahl, so folgt aus (40) unmittelbar nur die folgende Ungleichung:

$$\begin{aligned}(42)\qquad &\frac{1}{\alpha}\left(\frac{\xi+\alpha}{\Psi(\xi+\alpha)}\cdot\left(\frac{d\Psi(\xi+\alpha)}{d\xi}\right)_+ - \frac{\xi}{\Psi(\xi)}\left(\frac{d\Psi(\xi+\alpha)}{d\xi}\right)_+\right)+\\ &+\frac{1}{\alpha}\left(\frac{\xi}{\Psi(\xi)}\left(\frac{d\Psi(\xi+\alpha)}{d\xi}\right)_+ - \frac{\xi}{\Psi(\xi)}\left(\frac{d\Psi(\xi)}{d\xi}\right)_+\right)\leqq\varepsilon,\end{aligned}$$

oder

$$(43)\qquad \frac{\xi+\alpha}{\Psi(\xi+\alpha)}\left(\frac{d\Psi(\xi+\alpha)}{d\xi}\right)_+ - \frac{\xi}{\Psi(\xi)}\left(\frac{d\Psi(\xi)}{d(\xi)}\right)_+ \leqq \alpha\varepsilon$$

für *jeden* Wert ξ des Intervalls $0<\xi<R_1-h'$ und für solche Werte α, die *kleiner* bleiben als eine bestimmte Zahl α_ξ. Es läßt sich dann nach dem bekannten Verfahren, durch welches man auch aus der Stetigkeit einer Funktion in jedem Punkte eines Intervalls die gleichmäßige Stetigkeit derselben in dem Intervalle erschließt, zeigen, daß die Werte α_ξ für alle oben genannten ξ über einer endlichen Grenze $\bar{\alpha}$ bleiben. Teilt man daher das Intervall von x bis $x+h$ in n gleiche Teilintervalle:

$$x x_1,\, x_1 x_2,\, \cdots,\, x_{n-1}x_n \qquad (x_n = x+h),$$

von der Art, daß die Ausdehnung $\frac{h}{n}$ jedes dieser Intervalle $<\bar{\alpha}$ ist, so gelten die Ungleichungen:

$$(44)\qquad \begin{aligned}&\frac{x_1}{\Psi(x_1)}\cdot\left(\frac{d\Psi(x_1)}{dx}\right)_+ - \frac{x}{\Psi(x)}\cdot\left(\frac{d\Psi(x)}{dx}\right)_+ \leqq \frac{h}{n}\cdot\varepsilon,\\ &\frac{x_2}{\Psi(x_2)}\cdot\left(\frac{d\Psi(x_2)}{dx_2}\right)_+ - \frac{x_1}{\Psi(x_1)}\left(\frac{d\Psi(x_1)}{dx_1}\right)_+ \leqq \frac{h}{n}\cdot\varepsilon,\\ &\quad\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\ &\frac{x_n}{\Psi(x_n)}\cdot\left(\frac{d\Psi(x_n)}{dx_n}\right)_+ - \frac{x_{n-1}}{\Psi(x_{n-1})}\left(\frac{d\Psi(x_{n-1})}{dx_{n-1}}\right)_+ \leqq \frac{h}{n}\cdot\varepsilon,\end{aligned}$$

durch deren Addition man findet:

$$(45)\qquad \frac{x+h}{\Psi(x+h)}\cdot\left(\frac{d\Psi(x+h)}{dx}\right)_+ - \frac{x}{\Psi(x)}\left(\frac{d\Psi(x)}{dx}\right)_+ \leqq h\cdot\varepsilon,$$

und da diese Schlüsse für jedes positive ε gelten:

$$(46)\qquad \frac{x+h}{\Psi(x+h)}\cdot\left(\frac{d\Psi(x+h)}{dx}\right)_+ - \frac{x}{\Psi(x)}\left(\frac{d\Psi(x)}{dx}\right)_+ \leq 0\,.$$

Damit ist bewiesen, daß $\frac{x}{y}\left(\frac{dy}{dx}\right)_+$ monoton abnimmt, wenn y eine Lösung der Differentialungleichung (41) ist; ist also der Differentialquotient $\left(\frac{dy}{dx}\right)_+$ für $x=x'$ negativ, so bleibt er es auch für größere Werte von x, und die Funktion $y=\Psi(x)$ nimmt von dem bezeichneten Punkte an monoton ab.

Nun *definiere* man die Funktionen $\overline{\vartheta_1(x)}$ und $\underline{\vartheta_2(x)}$ durch die folgenden Gleichungen:

$$(47)\qquad \text{a)}\quad \frac{x}{y}\left(\frac{dy}{dx}\right)_+ = -\frac{\overline{\vartheta_1(x)}}{\underline{\vartheta_2(x)}},\qquad \text{b)}\quad \underline{\vartheta_2(x)} = 1-\overline{\vartheta_1(x)};$$

im Punkte x', y' wird dann die Kurve $y=\Psi(x)$ von der W-Kurve

$$x^{\overline{\vartheta_1(x')}}\, y^{\underline{\vartheta_2(x')}} = x'^{\overline{\vartheta_1(x')}}\, y'^{\underline{\vartheta_2(x')}}$$

berührt. Nach dem soeben Bewiesenen nimmt $\overline{\vartheta_1(x)}$ monoton zu, $\underline{\vartheta_2(x)}$ monoton ab; ist daher x'', y'' ein von x', y' verschiedener Punkt der Kurve $y=\Psi(x)$ und etwa $x''>x'$, so erhält man aus (47a) durch Integration zwischen den Grenzen (x', y') und (x'', y''):

$$(48)\qquad \begin{aligned} &\int\limits_{y'}^{y''}\frac{dy}{y} \leq -\frac{\overline{\vartheta_1(x')}}{\underline{\vartheta_2(x')}}\int\limits_{x'}^{x''}\frac{dx}{x} \quad \text{und}\\ &\int\limits_{y'}^{y''}\frac{dy}{y} \geq -\frac{\overline{\vartheta_1(x'')}}{\underline{\vartheta_2(x'')}}\int\limits_{x'}^{x''}\frac{dx}{x} \end{aligned}$$

und nach Ausführung der Integration und leicht ersichtlicher Umformung

$$(49)\qquad \begin{aligned} &x''^{\overline{\vartheta_1(x')}}\cdot y''^{\underline{\vartheta_2(x')}} \leq x'^{\overline{\vartheta_1(x')}}\cdot y'^{\underline{\vartheta_2(x')}} \quad \text{sowie}\\ &x'^{\overline{\vartheta_1(x'')}}\cdot y'^{\underline{\vartheta_2(x'')}} \leq x''^{\overline{\vartheta_1(x'')}}\cdot y''^{\underline{\vartheta_2(x'')}}, \end{aligned}$$

d. h. von den beiden beliebigen Punkten (x', y') und (x'', y'') liegt, wie zu beweisen war, keiner oberhalb der im andern Punkte die Kurve $y=\Psi(x)$ berührenden W-Kurve.

Schließlich ist jetzt noch zu zeigen, *daß es unendlich viele Potenzreihen $\mathfrak{P}(x_1, x_2)$ gibt, für welche die vorgelegte Kurve $\Phi(x, y)=0$ oder $y=\Psi(x)$ die gegenseitige Abhängigkeit der beiden Konvergenzradien darstellt, sofern nur $y=\Psi(x)$ die folgenden für die mit $y=\psi(x)$ bezeichneten Kurven zusammengehöriger Konvergenzradien als notwendig erkannten Eigenschaften besitzt:*

$y = \Psi(x)$ ist positiv, stetig und monoton abnehmend im Gebiete $0 < x < R_1$, besitzt daselbst überall eine nach vorwärts genommene Tangente und verläuft nirgends oberhalb irgend einer W-Kurve, mit der $y = \Psi(x)$ einen Punkt samt vorwärts genommener Tangente gemein hat. An Stelle der letzteren Eigenschaft kann auch die Erfüllung der Differentialungleichung (41) verlangt werden. Ist für $x = R_1$ die Stetigkeit unterbrochen, so ist die Kurve $\Phi(x, y) = 0$ bis zur X-Achse durch die Gerade $x = R_1$ fortgesetzt zu denken.

Der einfachste sich dem folgenden nicht ganz einfügende Spezialfall, in welchem die Kurve $\Phi(x, y) = 0$ eine W-Kurve $x^{\vartheta_1} \cdot y^{\vartheta_2} = c$ ist, möge vorausbehandelt werden; man denke sich dann die Zahlen ϑ_1, ϑ_2, ob sie nun selber rational sind oder nicht, als Grenzwerte von Folgen rationaler Zahlen mit wachsenden Nennern:

$$\vartheta_1 = \lim_{\mu+\nu=\infty} \frac{\mu}{\mu+\nu}, \quad \vartheta_2 = \lim_{\mu+\nu=\infty} \frac{\nu}{\mu+\nu} \tag{50}$$

(wo μ und ν ganze Zahlen sind) und setze $a_{\mu\nu} = 0$, wenn $\mu + \nu$ *nicht* als Nenner in (50) auftritt, sonst aber $a_{\mu\nu} = \frac{1}{c^{\mu+\nu}}$, wo c die Konstante der vorgelegten W-Kurve ist. Wenn dann $x = r_1$, $y = r_2$ irgend ein Punkt der letzteren ist, so ist auch r_1, r_2 ein Paar assoziierter Konvergenzradien der Potenzreihe $\mathfrak{P}(x_1, x_2) = \sum_0^\infty{}^{\mu\nu} a_{\mu\nu} x_1^\mu x_2^\nu$; es existiert nämlich der eigentliche Grenzwert:

$$\lim_{\mu+\nu=\infty} \sqrt[\mu+\nu]{a_{\mu\nu} r_1^\mu r_2^\nu} = \frac{1}{c} \lim_{\mu+\nu=\infty} r_1^{\frac{\mu}{\mu+\nu}} r_2^{\frac{\nu}{\mu+\nu}} \tag{51}$$

$$= \frac{1}{c} \cdot r_1^{\lim \frac{\mu}{\mu+\nu}} \cdot r_2^{\lim \frac{\nu}{\mu+\nu}} \text{ (wegen der Stetigkeit der Exponentialfunktion)}$$

$$= \frac{r_1^{\vartheta_1} r_2^{\vartheta_2}}{c} = 1,$$

wodurch r_1, r_2 als Paar zusammengehöriger Konvergenzradien der Potenzreihe $\mathfrak{P}(x_1, x_2)$ charakterisiert ist.

Zur Vorbereitung des Beweises für den allgemeinen Fall denke man sich die rationalen Zahlen zwischen Null und R_1 (mit Ausschluß dieser Grenzen) nach einem beliebigen Abzählungsverfahren in eine Reihe: $x_1, x_2, x_3, \ldots$ gebracht und jeder Zahl x_i durch $y = \Psi(x)$ eine Zahl y_i sowie durch $\left(\frac{x}{y}\frac{dy}{dx}\right)_{+\,\substack{x=x_i\\y=y_i}} = -\frac{\vartheta_1^{(i)}}{\vartheta_2^{(i)}}$, $\vartheta_2^{(i)} = 1 - \vartheta_1^{(i)}$ ein Zahlenpaar $\vartheta_1^{(i)}, \vartheta_2^{(i)}$ zugeordnet. Die obere Grenze aller $\vartheta_1^{(i)}$ werde mit $\overline{\vartheta}_1$, die untere mit $\underline{\vartheta}_1$

bezeichnet; da die Annahme, daß $y = \Psi(x)$ eine W-Kurve ist, schon erledigt ist, darf $\underline{\underline{\vartheta}}_1$ kleiner als $\overline{\overline{\vartheta}}_1$ gedacht werden; es ist also

$$(52)\qquad \begin{aligned} &0 \leqq \underline{\underline{\vartheta}}_1 < \overline{\overline{\vartheta}}_1 \leqq 1 \quad \text{und analog} \\ &0 \leqq \underline{\underline{\vartheta}}_2 < \overline{\overline{\vartheta}}_2 \leqq 1. \end{aligned}$$

Das Zahlenpaar $\vartheta_1^{(1)}, \vartheta_2^{(1)}$ gehört außer zum Punkte $x = x_1$, $y = y_1$ möglicherweise noch zu mehreren oder unendlich vielen anderen Punkten $x_k, y_k; x_l, y_l; \cdots$; allen diesen Punkten werden in einer μ, ν-Ebene diejenigen Gitterpunkte zugeordnet, deren (ganzzahlige) Koordinaten μ, ν den folgenden Ungleichungen genügen:

$$(53)\qquad \left|\vartheta_1^{(1)} - \frac{\mu}{\mu+\nu}\right| < \frac{1}{\mu+\nu}; \quad \left|\vartheta_2^{(1)} - \frac{\nu}{\mu+\nu}\right| < \frac{1}{\mu+\nu}$$

mit der folgenden (zum Teil nur durch die Anordnung des Beweises bedingten) Beschränkung:

Wenn $\vartheta_1^{(1)}$ in der durch die Ungleichung

$$(54)\qquad \vartheta_1^{(1)} - \underline{\underline{\vartheta}}_1 < \varepsilon$$

vorgeschriebenen Nähe von $\underline{\underline{\vartheta}}_1$ liegt, wo $\varepsilon > 0$, aber $< \frac{\overline{\overline{\vartheta}}_1 - \underline{\underline{\vartheta}}_1}{2}$ anzunehmen ist, soll $\vartheta_1^{(1)} - \frac{\mu}{\mu+\nu}$ außerdem positiv oder Null sein, so daß (53) übergeht in

$$(55)\qquad 0 < \vartheta_1^{(1)} - \frac{\mu}{\mu+\nu} < \frac{1}{\mu+\nu}; \quad 0 \leqq \frac{\nu}{\mu+\nu} - \vartheta_2^{(1)} < \frac{1}{\mu+\nu};$$

entsprechend soll, wenn $\vartheta_1^{(1)}$ der Ungleichung

$$(56)\qquad \overline{\overline{\vartheta}}_1 - \vartheta_1^{(1)} < \varepsilon$$

genügt,

$$(57)\qquad 0 \leqq \frac{\mu}{\mu+\nu} - \vartheta_1^{(1)} < \frac{1}{\mu+\nu}; \quad 0 < \vartheta_2^{(1)} - \frac{\nu}{\mu+\nu} < \frac{1}{\mu+\nu}$$

sein.

Daß jedenfalls der Zahl $\vartheta_1^{(1)}$ unendlich viele Gitterpunkte zugeordnet werden, ist klar; wenn man $\mu + \nu$ auf die Nenner der Kettenbruchentwicklung von $\vartheta_1^{(1)}$ beschränkt, kann man $\frac{1}{\mu+\nu}$ auf den rechten Seiten von (53), (55), (57) sogar durch $\frac{1}{(\mu+\nu)^2}$ ersetzen.

Die gemachte Festsetzung läßt sich — abgesehen von einem unwesentlichen Unterschiede — auch so formulieren: Auf den Geraden $\mu + \nu = 1$, $\mu + \nu = 2, \cdots$ werden jedesmal diejenigen Gitterpunkte der Zahl $\vartheta_1^{(1)}$ zugeordnet, die von der Geraden $\vartheta_2^{(1)}\mu - \vartheta_1^{(1)}\nu = 0$ die geringste Entfernung haben, wozu unter gewissen Voraussetzungen [(54), (56)] noch die Bedingung kommt, daß die zu wählenden Gitterpunkte nicht links bezw. rechts der angegebenen Geraden liegen.

Die der Zahl $\vartheta_1^{(1)}$ zugeordneten unendlich vielen Gitterpunkte lassen sich nun (in im übrigen noch beliebiger Weise) so auf die Punkte $x_1, x_k, x_l, \cdots$, für die $\vartheta_1^{(1)} = \vartheta_1^{(k)} = \vartheta_1^{(l)}$ ist, verteilen, daß jedem dieser Punkte, z. B. x_k, noch unendlich viele Gitterpunkte μ_k, ν_k zugeordnet sind; jetzt bilde man die Größen $a_{\mu\nu}$ mit diesen μ_k, ν_k als Indizes und setze

$$a_{\mu_k \nu_k} = \frac{1}{x_k^{\mu_k} \cdot y_k^{\nu_k}}. \tag{58}$$

Befindet sich der Punkt x_2 nicht unter den $x_k, x_l, \cdots$, ist demselben also ein Zahlenpaar $\vartheta_1^{(2)}, \vartheta_2^{(2)}$ zugeordnet, das von $\vartheta_1^{(1)}, \vartheta_2^{(1)}$ verschieden ist, so lassen sich ihm von den noch nicht benutzten μ, ν unendlich viele durch analoge Ungleichungen wie (53) bezw. (55), (57) zuweisen.

Der Fortgang des Verfahrens ist klar; jeder rationalen Zahl x_s zwischen 0 und R_1 sind unendlich viele Koeffizienten

$$a_{\mu\nu} = \frac{1}{x_s^{\mu} y_s^{\nu}} \tag{59}$$

zugeordnet, deren Indizes μ_s, ν_s die Ungleichungen

$$\left|\vartheta_1^{(s)} - \frac{\mu_s}{\mu_s + \nu_s}\right| < \frac{1}{\mu_s + \nu_s}; \quad \left|\vartheta_2^{(s)} - \frac{\nu_s}{\mu_s + \nu_s}\right| < \frac{1}{\mu_s + \nu_s} \tag{60}$$

befriedigen, die im Falle: $\vartheta_1^{(s)} - \vartheta_1 < \varepsilon$ durch

$$0 \leqq \vartheta_1^{(s)} - \frac{\mu_s}{\mu_s + \nu_s} < \frac{1}{\mu_s + \nu_s}; \quad 0 \leqq \frac{\nu_s}{\mu_s + \nu_s} - \vartheta_2^{(s)} < \frac{1}{\mu_s + \nu_s} \tag{61}$$

und im Falle: $\vartheta_1 - \vartheta_1^{(s)} < \varepsilon$ durch

$$0 \leqq \frac{\mu_s}{\mu_s + \nu_s} - \vartheta_1^{(s)} < \frac{1}{\mu_s + \nu_s}; \quad 0 < \vartheta_2^{(s)} - \frac{\nu_s}{\mu_s + \nu_s} < \frac{1}{\mu_s + \nu_s} \tag{62}$$

zu ersetzen sind.

Ist der Gitterpunkt μ, ν keiner der rationalen Zahlen x_i zugeordnet, so werde $a_{\mu\nu} = 0$ gesetzt.

Dies vorausgeschickt, bilde ich die Potenzreihe

$$\mathfrak{P}(x_1, x_2) = \sum_0^{\infty}{}^{\mu\nu} a_{\mu\nu} x_1^{\mu} x_2^{\nu} \tag{63}$$

und behaupte, daß die vorgelegte Kurve $\Phi(x, y) = 0$ Kurve der zusammengehörigen Konvergenzradien für diese Reihe ist; nur wenn $\Phi(x, y) = 0$ teilweise aus der Geraden $x = R_1$ besteht, ist zu der rechten Seite von (63) noch die Reihe $\sum_0^{\infty}{}^{\mu}\left(\frac{x_1}{R_1}\right)^{\mu} = \frac{R_1}{R_1 - x_1}$ oder irgend eine andere Potenzreihe von x_1 mit dem Konvergenzradius R_1 zu addieren.

Wegen der *vorausgesetzten* Stetigkeit von $y = \Psi(x)$ und wegen der *bewiesenen* Stetigkeit von $y = \psi(x)$ ist jede der beiden Kurven durch unendlich viele Punkte x, y, deren x-Koordinaten eine überall dichte Menge bilden, völlig bestimmt; es genügt daher die Übereinstimmung der beiden für die zuvor benutzten Punkte x_i, y_i (wo die x_i rational sind) nachzuweisen.

x_i, y_i sind aber zusammengehörige Konvergenzradien, wenn

(64) $$\overline{\lim_{\mu+\nu=\infty}} \sqrt[\mu+\nu]{|a_{\mu\nu}|\, x_i^\mu y_i^\nu} = 1$$

ist.

Für unendlich viele Indizes μ, ν ist $a_{\mu\nu} = \frac{1}{x_i^\mu \cdot y_i^\nu}$, also $\sqrt[\mu+\nu]{|a_{\mu\nu}|\, x_i^\mu y_i^\nu} = 1$, daher bleibt nur zu zeigen, daß der obere Limes (64) *nicht größer* als 1 ist. Es ist aber, wenn man aus (59) $a_{\mu\nu}$ durch $\frac{1}{x_s^\mu\, y_s^\nu}$, wobei s jede ganze Zahl sein kann, ersetzt und auf Grund von (60) bezw. (61), (62) $\vartheta_1^{(s)} + \frac{\varepsilon_{\mu\nu}}{\mu+\nu}$, $\vartheta_2^{(s)} - \frac{\varepsilon_{\mu\nu}}{\mu+\nu}$ an Stelle von $\frac{\mu}{\mu+\nu}$, $\frac{\nu}{\mu+\nu}$ schreibt, wo $\varepsilon_{\mu\nu}$ eine positive oder negative Zahl mit einem absoluten Betrage < 1 ist:

(65) $$\sqrt[\mu+\nu]{a_{\mu\nu} x_i^\mu y_i^\nu} = \left(\frac{x_i}{x_s}\right)^{\frac{\mu}{\mu+\nu}} \cdot \left(\frac{y_i}{y_s}\right)^{\frac{\nu}{\mu+\nu}}$$
$$= \left(\frac{x_i}{x_s}\right)^{\vartheta_1^{(s)}} \cdot \left(\frac{y_i}{y_s}\right)^{\vartheta_2^{(s)}} \cdot \left(\frac{x_i}{x_s}\right)^{\frac{\varepsilon_{\mu\nu}}{\mu+\nu}} \cdot \left(\frac{y_i}{y_s}\right)^{-\frac{\varepsilon_{\mu\nu}}{\mu+\nu}}.$$

Das Produkt der ersten beiden Faktoren bleibt stets $\leqq 1$, da nach Voraussetzung der Punkt x_i, y_i nicht oberhalb der W-Kurve

$$x^{\vartheta_1^{(s)}} \cdot y^{\vartheta_2^{(s)}} = x_s^{\vartheta_1^{(s)}} \cdot y_s^{\vartheta_2^{(s)}}$$

liegen darf. Solange jede der Zahlen x_s, y_s größer als Null und unter einer endlichen Schranke bleibt, strebt das Produkt der beiden letzten Faktoren, weil $\lim\limits_{\mu+\nu=\infty} \frac{\varepsilon_{\mu\nu}}{\mu+\nu} = 0$ ist, der Zahl 1 zu; es bleibt nur die Frage nach dem Verhalten dieser Faktoren offen für solche Zahlen x_s, y_s, die für $\lim \mu + \nu = \infty$ den Grenzwert 0 oder ∞ besitzen. Da aber nach dem p. 295 Bemerkten das Unendlichwerden einer Koordinate das Verschwinden der anderen nach sich zieht, so sind nur mehr die beiden Möglichkeiten $\lim\limits_{\mu+\nu=\infty} x_s = 0$ und $\lim\limits_{\mu+\nu=\infty} y_s = 0$ ins Auge zu fassen und wegen der vollkommenen Symmetrie in den beiden Variabeln genügt es, die beiden letzten Faktoren von (65) für solche Werte von x_s weiter zu betrachten, die kleiner als x_i sind und der Null zustreben. Dann ist auch $y_s \geq y_i$ und also

(66) $$\frac{x_i}{x_s} \cdot \frac{y_s}{y_i} > 1.$$

Zu den hier allein in Betracht kommenden hinreichend kleinen Werten von x_s gehören Zahlenpaare $\vartheta_1^{(s)}, \vartheta_2^{(s)}$, die den Ungleichungen genügen:

(67) $$\vartheta_1^{(s)} - \underline{\vartheta}_1 < \varepsilon; \quad \overline{\overline{\vartheta}}_2 - \vartheta_2^{(s)} < \varepsilon;$$

(denn $\lim_{x_s=0} \vartheta_1^{(s)} = \vartheta_1$ wegen der bewiesenen monotonen Zunahme von $\vartheta_1(x)$ vgl. p. 299). Die zugehörigen Zahlen $\varepsilon_{\mu\nu}$ sind daher wegen (62) durchweg negativ oder Null und das Produkt der beiden letzten Faktoren auf der rechten Seite von (66): $\left(\frac{x_i}{x_s} \cdot \frac{y_s}{y_i}\right)^{\frac{\varepsilon_{\mu\nu}}{\mu+\nu}}$ ist immer kleiner als 1, höchstens gleich 1 (vgl. (66)).

Die Identität der Kurven $\Phi(x, y) = 0$, die stetige und nach vorwärts stetig differenzierbare Lösungen der Differentialungleichung (41) sind, mit den Kurven zusammengehöriger Konvergenzradien $\varphi(x, y) = 0$ ist damit bewiesen.

§ 2.

Die folgenden sich auf den Fall von n Variabeln beziehenden, aber nur für $n = 3$ ausgesprochenen Resultate werden, soweit sie sich auf gleiche Weise wie im Falle $n = 2$ beweisen lassen, ohne Beweis angegeben; auch wird von geometrischen Vorstellungen ausgiebiger Gebrauch gemacht, doch nur von solchen, die sich ohne Schwierigkeit in die Sprache der Analysis übersetzen lassen, wenn auch diese Übertragung nicht immer bis ins einzelne durchgeführt wird.

Ist eine Potenzreihe dreier Veränderlicher

$$(1) \qquad \mathfrak{P}(x_1, x_2, x_3) = \sum_0^\infty {}_{\mu\nu\varrho}\, a_{\mu\nu\varrho} x_1^\mu x_2^\nu x_3^\varrho$$

vorgelegt, so sind zusammengehörige Konvergenzradien r_1, r_2, r_3 durch die Beziehung

$$(2) \qquad \overline{\lim_{\mu+\nu+\varrho=\infty}} \sqrt[\mu+\nu+\varrho]{|a_{\mu\nu\varrho}| r_1^\mu r_2^\nu r_3^\varrho} = 1$$

charakterisiert. Die Gesamtheit der Punkte $x = r_1$, $y = r_2$, $z = r_3$ möge als Fläche $\varphi(x, y, z) = 0$ oder $z = \psi(x, y)$ bezeichnet werden; zu jedem Punkte $P = (r_1, r_2, r_3)$ derselben werden analog wie p. 291 die zugehörigen Zahlen $\vartheta_1, \vartheta_2, \vartheta_3$ definiert, zwischen denen die Identität

$$(3) \qquad \vartheta_1 + \vartheta_2 + \vartheta_3 = 1$$

besteht, und die W-Flächen $x^{\vartheta_1} y^{\vartheta_2} z^{\vartheta_3} = r_1^{\vartheta_1} r_2^{\vartheta_2} r_3^{\vartheta_3}$ gebildet; der Punkt P heißt dann von jedem der zugehörigen Zahlentripel abhängig. Es empfiehlt sich $\vartheta_1, \vartheta_2, \vartheta_3$ als homogene Dreieckskoordinaten zu deuten und zwar als nach dem Innern des Dreiecks positiv gerechnete Abstände von den Seiten eines gleichseitigen Dreiecks mit der Seitenlänge $\frac{2\sqrt{3}}{3}$. Für die vorliegende Untersuchung kommen nur positive Werte von $\vartheta_1, \vartheta_2, \vartheta_3$ in Betracht; die Punkte mit diesen Koordinaten erfüllen nach den gemachten Festsetzungen das Innere und die Begrenzung des Koordinatendreiecks. Auf die Ableitung der vielen projektiven Eigenschaften der W-Flächen, die sich aus dieser Darstellung ergeben, gehe ich nicht ein, da dieselben den Zielen dieser Arbeit zu fern liegen und zum größten Teil bekannt sein dürften.

Die zu einem Punkte r_1, r_2, r_3 *gehörigen Zahlentripel bilden eine endliche oder eine abgeschlossen unendliche Punktmenge*, was man genau so erschließt, wie p. 293 geschehen (I. Hilfssatz).

Auch gilt in gleicher Weise wie bei zwei Veränderlichen der Satz (II. Hilfssatz):

Gehört das Tripel $\vartheta_1, \vartheta_2, \vartheta_3$ *nicht* zum Punkte r_1, r_2, r_3, so ist auch eine gewisse Umgebung dieses Punktes von $\vartheta_1, \vartheta_2, \vartheta_3$ *unabhängig*.

Schließlich besteht auch jetzt wieder der Hauptsatz:

Kein Punkt von $\varphi(x, y, z) = 0$ *kann oberhalb irgend einer zu einem anderen Punkt gehörigen W-Fläche liegen.*

Aus dem Bisherigen folgt dann, daß in der Umgebung irgend eines Punktes r_1, r_2, r_3 jeder der drei Konvergenzradien eine stetige Funktion der beiden anderen ist, wenn nur keine Koordinate der zu r_1, r_2, r_3 gehörigen Punkte $\vartheta_1, \vartheta_2, \vartheta_3$ den Wert Null hat, d. h. wenn kein zu r_1, r_2, r_3 gehöriger Punkt $\vartheta_1, \vartheta_2, \vartheta_3$ auf der Begrenzung des Koordinatendreiecks liegt. Ist dagegen beispielsweise $\vartheta_3 = 0$ $(\vartheta_1 + \vartheta_2 = 1)$, so liegt die vom Punkt r_1, r_2, r_3 auf die xy-Ebene gefällte Senkrechte bis zu ihrem Schnittpunkt mit dieser Ebene ganz auf der Fläche $\varphi(x, y, z) = 0$; ist auch noch $\vartheta_2 = 0$ $(\vartheta_1 = 1, \vartheta_1, \vartheta_2, \vartheta_3$ ein Eckpunkt des Koordinatendreiecks), so gehört der Fläche der zusammengehörigen Konvergenzradien das ganze in der Ebene $x = r_1$ gelegene von den Schnittgeraden mit den Ebenen $y = 0$, $y = r_2$, $z = 0$, $z = r_3$ begrenzte Rechteck an.

Während die Übertragung der Stetigkeitseigenschaften der Kurven $\varphi(x, y) = 0$ eine fast unmittelbare war, findet das gleiche bei den Tangentialeigenschaften nicht mehr statt. Die Fortschreitungsrichtungen von einem Punkte der Kurve $\varphi(x, y) = 0$ aus wurden durch die beiden zugehörigen *extremen*, d. h. mit den Maximal- und Minimalwerten von ϑ_1, ϑ_2 gebildeten W-Kurven angezeigt. Wenn also nunmehr zu einem Punkte P der Fläche $\varphi(x, y, z) = 0$ mehr als eine W-Fläche gehört, so handelt es sich um die Frage: *Welche von diesen W-Flächen sind als extreme zu bezeichnen?*

Gehört zum Punkte P nur *ein* Zahlentripel $\vartheta_1, \vartheta_2, \vartheta_3$, so leuchtet auf Grund ähnlicher Schlüsse, wie sie p. 297ff. gemacht wurden, ein, daß die Fläche $\varphi(x, y, z) = 0$ im Punkte r_1, r_2, r_3 die nämliche Tangentialebene besitzt wie die W-Fläche:

$$x^{\vartheta_1} \cdot y^{\vartheta_2} \cdot z^{\vartheta_3} = r_1^{\vartheta_1} \cdot r_2^{\vartheta_2} \cdot r_3^{\vartheta_3}, \tag{4}$$

nämlich die Ebene

(5) $$\frac{\vartheta_1}{r_1}(x-r_1)+\frac{\vartheta_2}{r_2}(y-r_2)+\frac{\vartheta_3}{r_3}(z-r_3)=0.$$

Dieser durch r_1, r_2, r_3 gehenden Ebene soll ebenso gut wie der W-Fläche (4) in der ϑ-Ebene der Punkt $\vartheta_1, \vartheta_2, \vartheta_2$ zugeordnet werden; ebenso werde jede andere den Punkt P enthaltende Ebene durch Vermittelung der W-Fläche, deren Tangentialebene sie ist, durch einen Punkt der ϑ-Ebene repräsentiert. Diese gegenseitige Zuordnung ist eine projektive; einer Punktreihe der ϑ-Ebene entspricht ein dazu projektives Ebenenbüschel, dessen Achse durch den Punkt r_1, r_2, r_3 hindurchgeht. Den in der vorliegenden Untersuchung allein eine Rolle spielenden Punkten im Innern des Koordinatendreiecks entsprechen solche Ebenen, welche die x-, y- und z-Achse in Punkten mit nur positiven Koordinaten schneiden.

Gehören zum Punkte r_1, r_2, r_3 *zwei* W-Flächen, so hat die Fläche $\varphi(x, y, z)=0$ in P eine Kante und wird von den beiden W-Flächen berührt. Die letzteren durchsetzen einander längs einer sich ins Unendliche erstreckenden Kurve, und es kann von jeder der beiden W-Flächen das Stück als nicht existierend betrachtet werden, das ganz oberhalb der anderen verläuft.

Durch die gemeinsame Schnittkurve der zwei W-Flächen

(6) $$x^{\vartheta_1^{(1)}}\cdot y^{\vartheta_2^{(1)}}\cdot z^{\vartheta_3^{(1)}}=r_1^{\vartheta_1^{(1)}}\cdot r_2^{\vartheta_2^{(1)}}\cdot r_3^{\vartheta_3^{(1)}}$$

und

(7) $$x^{\vartheta_1^{(2)}}\cdot y^{\vartheta_2^{(2)}}\cdot z^{\vartheta_3^{(2)}}=r_1^{\vartheta_1^{(2)}}\cdot r_2^{\vartheta_2^{(2)}}\cdot r_3^{\vartheta_3^{(2)}}$$

gehen noch unzählig viele andere W-Flächen, deren Exponenten $\vartheta_1^{(3)}, \vartheta_2^{(3)}, \vartheta_3^{(3)}$ bestimmt sind durch

(8) $$\vartheta_i^{(3)}=\frac{\vartheta_i^{(1)}+\lambda\vartheta_i^{(2)}}{1+\lambda}\quad(i=1,2,3;\ -\infty<\lambda<+\infty).$$

Man zeigt dies, indem man die Gleichung (6) in die Potenz mit dem Exponenten $\frac{1}{1+\lambda}$, die Gleichung (7) in die Potenz mit dem Exponenten $\frac{\lambda}{1+\lambda}$ erhebt und dann die beiden Gleichungen multipliziert.

Die durch (8) definierten Punkte $\vartheta_1^{(3)}, \vartheta_2^{(3)}, \vartheta_3^{(3)}$ erfüllen die durch $\vartheta_1^{(1)}, \vartheta_2^{(1)}, \vartheta_3^{(1)}$ und $\vartheta_1^{(2)}, \vartheta_2^{(2)}, \vartheta_3^{(2)}$ gehende Gerade; den Schnittpunkten der letzteren mit den Seiten des Koordinatendreiecks entsprechen in Zylinder ausartende W-Flächen, deren senkrechte ebene Schnitte W-Kurven sind. Eine dritte zum Punkte r_1, r_2, r_3 gehörige W-Fläche, deren repräsentierender Punkt auf der endlichen Strecke zwischen $\vartheta_1^{(1)}, \vartheta_2^{(1)}, \vartheta_3^{(1)}$ und $\vartheta_1^{(2)}, \vartheta_2^{(2)}, \vartheta_3^{(2)}$ liegt, verläuft auch stets (von der gemeinsamen Schnittkurve abgesehen) *zwischen* den W-Flächen (6) und (7), d. h. oberhalb der einen und unterhalb der anderen, wie aus der Stetigkeit der benutzten projektiven Beziehung folgt, kann also *keine extreme* sein.

Es ist daher erlaubt, ohne daß die extremen W-Flächen des Punktes r_1, r_2, r_3 *verändert würden, dem letzteren, außer den ohnehin zugehörigen Tripeln* $\vartheta_1, \vartheta_2, \vartheta_3$ *auch alle jene Punkte der* ϑ*-Ebene zuzuordnen, die durch geradlinige Verbindung zweier von vornherein zugehöriger oder schon neu zugeordneter Punkte entstehen.* (Im Falle zweier Variabler findet dies sein Analogon darin, daß als zum Punkte r_1, r_2 gehörig alle zwischen $\bar{\vartheta}_1(r_1), \bar{\vartheta}_2(r_1)$ und $\underline{\vartheta}_1(r_1), \underline{\vartheta}_2(r_1)$ gelegenen Wertepaare betrachtet werden dürfen.)

Gehören z. B. zum Punkte r_1, r_2, r_3 *drei* Punkte: $\vartheta_1^{(1)}, \vartheta_2^{(1)}, \vartheta_3^{(1)}$; $\vartheta_1^{(2)}, \vartheta_2^{(2)}, \vartheta_3^{(2)}$; $\vartheta_1^{(3)}, \vartheta_2^{(3)}, \vartheta_3^{(3)}$, welche ein Dreieck bilden, so sind zuerst die Seiten dieses Dreiecks, sodann aber auch alle inneren Punkte hinzuzunehmen.

Um nun den allgemeinen Fall ins Auge zu fassen, denke ich mir die Menge der zu r_1, r_2, r_3 gehörigen Punkte $\vartheta_1, \vartheta_2, \vartheta_3$ (die zunächst irgend eine abgeschlossene Menge sein kann) auf die bezeichnete Weise ergänzt und die so erhaltene *perfekt zusammenhängende* Menge mit M bezeichnet. Ich zeige dann:

Die Menge M *besteht aus dem Innern einer geschlossenen, nirgends konkaven, stetigen, differenzierbaren Kurve* C*, sowie aus den Punkten von* C *selbst.*

Die Punkte von C *sind die Repräsentanten der zum Punkte* r_1, r_2, r_3 *gehörigen extremen W-Flächen oder* — worauf es bei der Untersuchung der Umgebung des Punktes r_1, r_2, r_3 hauptsächlich ankommt — *der Tangentialebenen jener W-Flächen.*

Diese Ebenen bilden einen Kegel, der im Punkte r_1, r_2, r_3 *die Fläche* $\varphi(x, y, z) = 0$ *berührt.*

Schneidet man diesen Kegel durch eine Ebene, welche nicht durch r_1, r_2, r_2 hindurchgeht und, wenn sie parallel zu sich selbst bis zum Punkte r_1, r_2, r_3 verschoben würde, den Kegel in keiner reellen Geraden schneiden würde — eine Ebene, wie die letztere, wird durch einen im Innern von C gelegenen Punkt repräsentirt —, *so entsteht eine Schnittkurve* C'*, die der Kurve* C *dualistisch projektiv ist und daher alle oben erwähnten Eigenschaften derselben besitzt (Stetigkeit, Differenzierbarkeit, Konvexität).*

Um vor allem die behaupteten Eigenschaften der Kurve C nachzuweisen, setze man voraus, daß nicht alle zu r_1, r_2, r_3 gehörigen Zahlentripel eine Gerade erfüllen, da ja diese Möglichkeit schon besprochen ist; es existieren also jedenfalls *drei* zu M gehörige Punkte G, H, K, die ein *Dreieck* bilden, von welchem dann sämtliche Punkte der Menge M zuzuzählen sind. Ein beliebiger innerer Punkt O dieses Dreiecks werde zum Mittelpunkt eines Polarkoordinatensystems r, ϑ gemacht; der Strahl $\vartheta = 0$ kann noch beliebig gewählt werden, ebenso die Richtung der wachsenden ϑ, letztere etwa so, daß der sich drehende Strahl über H und K nach G gelangt. Auf jedem Strahle $\vartheta = \varepsilon$ gibt es einen entferntesten Punkt A_ε der Menge M, dessen Entfernung vom Punkte O durch die Funktion $r(\vartheta)$ dargestellt werde; um die Stetigkeit der Kurve C nachzuweisen, ist nach den bisherigen Festsetzungen nur zu zeigen, daß $\lim\limits_{\varepsilon=0} r(\varepsilon) = r(0)$ oder, anders ausgedrückt, daß $\lim\limits_{\varepsilon=0} A_\varepsilon = A_0$ ist. Es darf dabei noch angenommen werden, daß der Strahl $\vartheta = 0$ nicht durch ein Eck des Dreiecks geht, sondern etwa die Seite GH in einem von G und H verschiedenen Punkte trifft. Andernfalls ließe sich dies durch erlaubte Abänderung (Verkleinerung) des Dreiecks erreichen. Auch darf $\varepsilon > 0$ vorausgesetzt werden, da das Beweisverfahren für $\varepsilon < 0$ das gleiche bleibt.

Wäre dann $\overline{\lim\limits_{\varepsilon=0}}\, r(\varepsilon) > r(0)$, so gäbe es Punkte A_ε, so daß A_0 ganz *innerhalb* des Dreiecks $GA_\varepsilon O$ zu liegen käme; alle Punkte dieses Dreiecks wären aber der Menge M zuzuzählen und der Punkt A_0 wäre entgegen der Voraussetzung nicht der äußerste des Strahles $\vartheta = 0$. Wäre aber $\underline{\lim\limits_{\varepsilon=0}}\, r(\varepsilon) < r(0)$, so gäbe es Punkte A_ε *innerhalb* des Dreiecks A_0HO, die ebenfalls entgegen der Voraussetzung *nicht äußerste* der zugehörigen Strahlen $\vartheta = \varepsilon$ sein könnten.

Um nun auch die Existenz von $\left(\frac{dr}{d\vartheta}\right)_+$ und $\left(\frac{dr}{d\vartheta}\right)_-$ einzusehen, beachte man, daß der Strahl A_0A_ε mit A_0O immer größere Winkel bildet, wenn die positive Zahl ε der Null zustrebt (es folgt dies daraus, daß jeder Punkt des Dreiecks $A_0A_\varepsilon O$ der Menge M angehört); andererseits bleibt der Winkel $A_\varepsilon A_0O$ stets kleiner als π, so daß also der Strahl A_0A_ε einer bestimmten Grenzlage zustrebt, in welcher er die Kurve C berührt. Eine zweite Tangente findet man in gleicher Weise, wenn man von negativen ε ausgeht.

Die beiden Tangenten können *eine* Gerade bilden; wenn nicht, ist die Summe der Winkel, die sie mit A_0O bilden, kleiner als π. Andernfalls nämlich würde die Gerade OA_0 die Seite $A_\varepsilon A_{-\varepsilon}$, eines Dreiecks $A_\varepsilon A_0A_{-\varepsilon}$, in einem Punkte B treffen, der von O eine größere Entfernung als A_0 hätte, woraus wieder folgen würde, daß A_0 nicht der äußerste Punkt des Strahles $\vartheta = 0$ wäre.

Da das Innere *jedes* innerhalb C gelegenen *Dreiecks* der Menge M angehört, so gilt das gleiche von *allen* innerhalb C gelegenen Punkten.

Fallen die beiden Tangenten in einem Punkte A von C nicht zusammen und bilden sie also einen Winkel $< \pi$, so empfiehlt es sich, alle durch A gehenden Geraden, die mit der Menge M nur den Punkt A gemein haben, auch als Tangenten der Kurve C im Punkte A zu betrachten.

Dann sind von jedem Punkte außerhalb C an C zwei Tangenten möglich, welche die Geraden, die C in zwei Punkten schneiden, von jenen trennen, die C gar nicht schneiden.

Die Ausführung des Beweises, daß der erwähnte der Kurve C projektive Kegel mit der Spitze im Punkte r_1, r_1, r_3 die Fläche $\varphi(x, y, z) = 0$ berührt, dürfte nicht angebracht sein, da einerseits dem gleichen Gedankengang, wie er im Falle zweier Veränderlicher eingeschlagen wurde, keine wesentlichen Hindernisse mehr entgegenstehen, andererseits aber die Durchführung desselben ohne weitläufige Entwicklungen nicht möglich ist, die zu den durchsichtigen geometrischen Betrachtungen in keinem Verhältnis stehen.

Die nähere Diskussion des Tangentenkegels gestaltet sich am einfachsten unter Zugrundelegung der oben erwähnten geschlossenen nirgends konkaven stetigen und differenzierbaren Schnittkurve C', die der Kurve C dualistisch projektiv ist. Einer Ecke von C entspricht ein geradliniges Stück von C' und umgekehrt. Den Punkten innerhalb C entsprechen die Geraden, die C' nicht schneiden, den Punkten außerhalb C die Geraden, die mit C' zwei Punkte gemein haben, den Tangenten von jenen Punkten aus an C die Schnittpunkte dieser Geraden mit C'. Ist insbesondere C n^{ter} Ordnung, so ist C' n^{ter} Klasse und umgekehrt.

Nachdem so das Verhalten der Fläche $\varphi(x, y, z) = 0$ in der Umgebung eines beliebigen Punktes klargestellt ist, handelt es sich darum, über den Verlauf dieser Fläche im ganzen einiges zu sagen. Das Wesentliche hierüber ist in der Aussage des Hauptsatzes p. 309 enthalten und es kann sich nur um eine genauere Analyse oder wenigstens um eine Umschreibung desselben handeln, analog der im vorigen Paragraphen bewiesenen Aussage der monotonen Abnahme von $\vartheta_1(x)$. Aus dem Hauptsatze ergibt sich sofort:

Ein innerer Punkt der zum Punkte P gehörigen Menge M kann nicht Element einer zu einem andern Punkte P' von $\varphi(x, y, z) = 0$ gehörigen Menge M' sein.

Von dem Punkte P der Fläche $\varphi(x, y, z) = 0$ geht man zu unendlich benachbarten Punkten P_ε über, indem man um unendlich kleine Stücke auf einer bestimmten Erzeugenden des Tangentialkegels oder — was das gleiche ist — auf der zugehörigen Schnittkurve zweier extremer benachbarter W-Flächen fortschreitet. Diese Schnittkurve ist durch die Tangente t der Kurve C in einem Punkte A repräsentiert. Die Mengen M_ε, welche zu Punkten P_ε gehören, die in der gewählten Richtung dem Punkte P benachbart sind, liegen, wie aus dem soeben erwähnten Satze hervorgeht, auf der andern Seite der Tangente t als C. Rückt der Punkt P_ε gegen P, so konvergieren die zugehörigen Mengen M_ε gegen A (nach dem II. Hilfssatz).

Während im ersten Paragraphen das einfachste und in analytischer Hinsicht auch erschöpfende (wenn auch nicht direkt anschauliche) Bild der gegenseitigen Abhängigkeit der beiden Konvergenzradien durch die beliebige monoton zunehmende Funktion $\vartheta_1(x)$ vermittelt wurde, die völlig genügt zur Bestimmung von $\varphi(x, y) = 0$, wenn von dieser Kurve nur noch ein Punkt gegeben ist, entsprechen dem hier die den einzelnen Punkten von $\varphi(x, y, z) = 0$ zugeordneten nirgends konkaven einander ausschließenden, zum Teil auf Punkte zusammenschrumpfenden Kurven C.

Ob sich trotzdem die gefundenen Stetigkeits- und Tangentialeigenschaften der Flächen $\varphi(x, y, z) = 0$ samt der durch den Hauptsatz ausgedrückten Eigenschaft in ähnlicher einfacher Weise analytisch formulieren lassen, wie es bei den Kurven $\varphi(x, y) = 0$ durch die Differentialungleichung (41) geschah, bleibt ununtersucht.

Jedenfalls aber lassen sich zu jeder Fläche $\Phi(x, y, z) = 0$, welche diese für die Flächen der zusammengehörigen Konvergenzradien als notwendig erkannten Eigenschaften besitzt, auch jetzt wieder unzählig viele Potenzreihen $\mathfrak{P}(x_1, x_2, x_3)$ konstruieren, für welche $\Phi(x, y, z) = 0$ Fläche der zusammengehörigen Konvergenzradien ist. Um dies auszuführen, leite man aus der Kenntnis des Tangentenkegels in jedem Punkte r_1, r_2, r_3 die zugehörige Menge M ab, dann bringe man die Punkte r_1, r_2 der xy-Ebene mit rationalen Koordinaten in eine Reihe mit Ausnahme derer, die von Begrenzungspunkten des Koordinatendreiecks in der ϑ-Ebene abhängen, und ordne jedem dieser Punkte den eindeutig bestimmten zugehörigen Wert von r_3 sowie *einen willkürlichen* Punkt $\vartheta_1, \vartheta_2, \vartheta_3$ der zugehörigen Menge M zu. Der Fortgang des Verfahrens ist dann dem am Ende des vorigen Paragraphen auseinandergesetzten völlig entsprechend.

§ 3.

Nachdem in den beiden vorhergehenden Paragraphen die gegenseitige Abhängigkeit der zusammengehörigen Konvergenzradien klargestellt wurde, besteht nunmehr die Aufgabe, aus den gefundenen reihentheoretischen Sätzen Schlüsse zu ziehen über die Gesetze, die zwischen den Singularitäten von Funktionen mehrerer Veränderlicher bestehen. Alle Ausführungen, die sich in dieser Beziehung machen lassen, sind schließlich eine Folge des folgenden bekannten *Fundamentalsatzes,* den ich, wie alle Aussagen dieses Paragraphen, nur für zwei Veränderliche ausspreche:

Sind r_1, r_2 ein Paar zusammengehöriger Konvergenzradien der Reihe $\mathfrak{P}(x_1, x_2)$, so verhält sich die durch letztere definierte analytische Funktion $F(x_1, x_2)$ regulär im Gebiete $|x_1| < r_1$, $|x_2| < r_2$, hat aber mindestens eine singuläre Stelle $\bar{x}_1, \bar{x}_2$, für welche $|\bar{x}_1| = r_1$, $|\bar{x}| = r_2$ ist.

Es kann sich im folgenden nur darum handeln, auf Grund dieses Satzes, des Prinzips der analytischen Fortsetzung und der Entwicklungen der vorhergehenden Paragraphen sowie unter besonderen Voraussetzungen über die Kurve $\varphi(x, y) = 0$ genauere Beziehungen zwischen den Singularitäten zu finden.

Zuvor aber soll gezeigt werden, daß stets — wie auch die Kurve $\varphi(x, y) = 0$ unter Befriedigung der im ersten Paragraphen als notwendig und hinreichend erkannten Bedingungen gewählt sein mag — *sämtliche* Punkte $x_1 = r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)$, $x_2 = r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)$ singuläre Punkte von $F(x_1, x_2)$ sein können, wofern nur r_1, r_2 irgend zwei zusammengehörige Konvergenzradien und φ_1 sowie φ_2 beliebige reelle Zahlen sind. Die Funktion $F(x_1, x_2)$ gestattet dann überhaupt keine Fortsetzung über einen Punkt der Kreise mit den Radien r_1, r_2 hieraus und wird durch $\mathfrak{P}(x_1, x_2)$ vollständig dargestellt.

Im Interesse der Kürze des Ausdrucks nenne ich in diesem Falle die Kurve $\varphi(x, y) = 0$ eine natürliche Grenze der Funktion $F(x_1 x_2)$.

Um den Nachweis jener Möglichkeit zu führen, beweise ich zunächst folgenden Hilfssatz:

Die nach Diagonalen geordnete und in jeder Diagonale höchstens einen von Null verschiedenen Koeffizienten aufweisende Potenzreihe:

$$(1)\qquad \mathfrak{P}(x_1, x_2) = \sum_0^\infty{}^k a_{n_k} x_1^\mu x_2^\nu, \quad \mu + \nu = n_k$$

hat die zugehörige Kurve $\varphi(x, y) = 0$ zur natürlichen Grenze, wenn

$$(2)\qquad \lim_{k=\infty} \frac{n_{k+1} - n_k}{n_k} \geqq \lambda > 0$$

ist; d. h. also: sind r_1, r_2 zusammengehörige Konvergenzradien und φ_1, φ_2 zwei beliebige reelle Zahlen und wird

$$\bar{x}_1 = r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1), \quad \bar{x}_2 = r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)$$

gesetzt, so ist zu zeigen, daß der Punkt $\bar{x}_1, \bar{x}_2$ singulärer Punkt von $\mathfrak{P}(x_1, x_2)$ ist. Es darf und soll ohne Beschränkung der Allgemeinheit angenommen werden, daß $\bar{x}_1 = 1$, $\bar{x}_2 = 1$ ist; ist dies von vornherein nicht der Fall, so läßt es sich durch die Transformation $\left.\frac{x_1}{\bar{x}_1}\right| x_1$; $\left.\frac{x_2}{\bar{x}_2}\right| x_2$ erreichen; setzt man dann

$$(3)\qquad \begin{aligned} x_1 &= \frac{1}{2}(\xi_1^m + \xi_1^{m+1}) \\ x_2 &= \frac{1}{2}(\xi_2^m + \xi_2^{m+1}), \end{aligned}$$

so entsteht aus $\mathfrak{P}(x_1, x_2)$ eine für $|\xi_1^m + \xi_1^{m+1}| < 2$, $|\xi_2^m + \xi_2^{m+1}| < 2$ reguläre analytische Funktion von ξ_1, ξ_2, die also jedenfalls für $|\xi_1| < 1$, $|\xi_2| < 1$ in eine Potenzreihe

$$(4) \qquad \mathfrak{P}_1(\xi_1, \xi_2) = \sum_0^\infty{}^{\mu\nu} A_{\mu\nu} \xi_1^\mu \xi_2^\nu$$

entwickelt werden kann.

Konvergiert diese Potenzreihe nicht auch für ein Wertepaar ξ_1, ξ_2 absolut, für welches $|\xi_1| > 1$, $|\xi_2| > 1$ ist, so sind folgende 4 Fälle denkbar:

1. $\bar{\xi}_1 = e^{\varphi_1 i}$, $\bar{\xi}_2 = e^{\varphi_2 i}$, wo weder φ_1 noch φ_2 ein Multiplum von 2π ist, ist ein singulärer Punkt von $\mathfrak{P}_1(\xi_1, \xi_2)$. Dann wäre auch der Punkt $\bar{x}_1, \bar{x}_2$, wo $\bar{x}_1 = \frac{1}{2}(\bar{\xi}_1^m + \bar{\xi}_1^{m+1})$, $\bar{x}_2 = \frac{1}{2}(\bar{\xi}_2^m + \bar{\xi}_2^{m+1})$, ein singulärer für $\mathfrak{P}(x_1, x_2)$; dies ist aber nicht möglich, da sich $|\bar{x}_1| < 1$, $|\bar{x}_2| < 1$ ergibt. Mithin kann dieser erste Fall überhaupt nicht eintreten.

2. $\bar{\xi}_1 = 1$, $\bar{\xi}_2 = e^{\varphi_2 i}$ ist singulär (φ_2 kein Multiplum von 2π). Dann hat die Funktion $\mathfrak{P}(x_1, x_2)$ eine singuläre Stelle $\bar{x}_1, \bar{x}_2$, für welche

$$|\bar{x}_1| = 1, \quad |\bar{x}_2| < 1$$

ist; nach einem weiter unten (p. 320) nochmals zu benutzenden und bei der Gelegenheit samt Beweis anzuführenden Satze des Herrn **Hartogs** sind dann sämtliche Punkte $x_1 = 1$, $|x_2| < 1$ und als Häufungsstelle insbesondere auch der Punkt $x_1 = 1$, $x_2 = 1$ singulär.

3. $\bar{\xi}_1 = e^{\varphi_1 i}$ $(\varphi_1 \neq 2k\pi)$, $\bar{\xi}_2 = 1$ ist ein singulärer Punkt von $\mathfrak{P}_1(\xi_1, \xi_2)$; dann schließt man wie unter Nr. 2, daß $x_1 = 1$, $x_2 = 1$ ein singulärer Punkt von $\mathfrak{P}(x_1, x_2)$ ist.

4. $\bar{\xi}_1 = 1$, $\bar{\xi}_2 = 1$ ist singulär; dann ist für $\mathfrak{P}(x_1, x_2)$:

$$\bar{x}_1 = \frac{1}{2}(\bar{\xi}_1^m + \bar{\xi}_1^{m+1}) = 1, \ \bar{x}_2 = \frac{1}{2}(\bar{\xi}_2^m + \bar{\xi}_2^{m+1}) = 1$$

singulär.

Aus der Aufzählung dieser vier Fälle ersieht man folgendes:

Soll der Punkt $x_1 = 1$, $x_2 = 1$ für $\mathfrak{P}(x_1, x_2)$ kein singulärer sein, so muß $\mathfrak{P}_1(\xi_1, \xi_2)$ noch für Werte ξ_1, ξ_2 absolut konvergieren, für welche $|\xi_1| > 1$, $|\xi_2| > 1$ ist; es muß dann also

$$(5) \qquad \overline{\lim_{\mu+\nu=\infty}} \sqrt[\mu+\nu]{|A_{\mu\nu}|} < 1$$

sein.

Gelingt es daher nachzuweisen, daß dieser obere Limes für die aus (1) abgeleitete Reihe $\mathfrak{P}_1(\xi_1, \xi_2)$ *gleich* 1 ist, so ist damit gezeigt, daß $x_1 = 1$, $x_2 = 1$ ein singulärer Punkt von $\mathfrak{P}(x_1, x_2)$ ist und damit zugleich, daß die der Bedingung (2) genügende Reihe (1) die zugehörige Kurve $\varphi(x, y) = 0$ zur natürlichen Grenze hat.

Den Koeffizienten A_{MN} erhält man als Funktion der $a_{\mu\nu}$, indem man $a_{\mu\nu}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{\mu+\nu}(\xi_1^m+\xi_1^{m+1})^\mu(\xi_2^m+\xi_2^{m+1})^\nu$ nach Potenzen von ξ_1 und ξ_2 entwickelt und die Potenzen mit gleichen Exponenten durch Addition vereinigt; man sieht sofort, daß A_{MN} nur von jenen $a_{\mu\nu}$ abhängt, deren Indizes μ, ν den beiden Ungleichungen

(6)
$$\text{a)}\quad \frac{M}{m+1}\leqq\mu\leqq\frac{M}{m}$$
$$\text{b)}\quad \frac{N}{m+1}\leqq\nu\leqq\frac{N}{m}$$

genügen; setzt man wieder $\mu+\nu=n_k$, $a_{\mu\nu}=a_{n_k}$, so folgt aus den beiden Ungleichungen (6) durch Addition

(7)
$$\frac{M+N}{m+1}\leqq n_k\leqq\frac{M+N}{m}.$$

Hängt also A_{MN} von a_{n_k} und $a_{n_{k+1}}$ ab, so ist jedenfalls

(8)
$$n_{k+1}-n_k\leqq\frac{M+N}{m}-\frac{M+N}{m+1}=\frac{M+N}{m(m+1)}$$

und mit Benutzung von (7) erhält man

(8′)
$$\frac{n_{k+1}-n_k}{n_k}\leqq\frac{1}{m}.$$

Wählt man nun $m>\frac{1}{\lambda}$, so stehen die Ungleichungen (2) und (8′) miteinander in Widerspruch; es kann danach A_{MN} höchstens von *einem* Koeffizienten a_{n_k} abhängen und muß somit von der Form $C\cdot a_{n_k}$ sein, wo die positive Konstante C von den a_{n_k} unabhängig ist. $\lim\limits_{\mu+\nu=\infty}\sqrt[\mu+\nu]{|A_{\mu\nu}|}$ hat daher den gleichen Wert, ob man von der Reihe

$$\sum_0^\infty{}^k\, a_{n_k}x^\mu y^\nu\quad(n_k=\mu+\nu)$$

oder von derjenigen ausgeht, in welcher alle a_{n_k} durch ihre absoluten Beträge ersetzt sind; die durch letztere Reihe dargestellte Funktion hat bekanntlich*) sicher die singuläre Stelle $x_1=1$, $x_2=1$, mithin die aus ihr durch die Transformation (3) abgeleitete die singuläre Stelle $\xi_1=1$, $\xi_2=1$; es ist also $\lim\limits_{\mu+\nu=\infty}\sqrt[\mu+\nu]{|A_{\mu\nu}|}=1$ und nicht <1.

Nachdem somit der Hilfssatz**) bewiesen ist, bleibt nur zu zeigen,

*) Biermann, Math. Ann. 48 (1897).

**) Die Kurve $\varphi(x,y)=0$ ist sogar dann schon natürliche Grenze, wenn nur $\lim\limits_{k=\infty}n_{k+1}-n_k=\infty$ ist und in noch allgemeineren Fällen: es läßt sich dies, wenn daß zu jeder möglichen Kurve zusammengehöriger Konvergenzradien $\varphi(x, y) = 0$ (unendlich viele) Potenzreihen $\mathfrak{P}(x_1, x_2) = \sum_0^\infty {}_k\, a_{n_k} x_1^\mu x_2^\nu$ existieren, für die $n_k = \mu + \nu$ und

$$\frac{n_{k+1} - n_k}{n_k} \geq 1 \tag{9}$$

ist (zur Verminderung der Unbestimmtheit ist $\lambda = 1$ gesetzt).

In der $\mu\nu$-Ebene denke man sich die Geraden g_σ mit den Gleichungen $\mu + \nu = 2^\sigma$ ($\sigma = 1, 2, 3, \cdots$) gezogen und bezeichne das von g_σ, $g_{\sigma+1}$ und den Koordinatenachsen begrenzte Trapez mit T_σ. Am Ende des § 1 wurden der dort mit $\vartheta_1^{(1)}$ bezeichneten Zahl unendlich viele Gitterpunkte μ, ν zugeordnet, deren Koordinaten den Ungleichungen (53), bezw. (55), (57) unterworfen wurden. Man erhält immer noch *unendlich viele* zu $\vartheta_1^{(1)}$ gehörige $a_{\mu\nu}$ — und hierauf kommt es allein an — wenn man jene Gitterpunkte noch weiter dadurch beschränkt, daß man verlangt, sie sollen nur in solchen Trapezen T_σ liegen, für die $\sigma \equiv 2 \pmod{4}$ ist, und zwar soll in jedes Trapez höchstens *ein* Gitterpunkt zu liegen kommen. Von den Trapezen T_σ, wo $\sigma \equiv 0 \pmod{4}$ also $\sigma = 4\sigma_1$ ist, weise man den zu $\vartheta_1^{(2)}$ gehörigen Gitterpunkten diejenigen zu, für welche σ_1 ungerade ist, und es darf wieder wie auch im folgenden von jedem Trapez höchstens ein Punkt μ, ν benutzt werden. Der Zahl $\vartheta_1^{(3)}$ werden von den übrig gebliebenen Trapezen diejenigen zugewiesen, für die $\sigma = 8\sigma_2$ und σ_2 ungerade ist, während die mit geradem σ_2 für die $\vartheta_1^{(4)} \vartheta_1^{(5)} \cdots$ zu reservieren sind, und zwar in Fortgang des Verfahrens so, daß jedem $\vartheta_1^{(k)}$ unendlich viele Trapeze zugewiesen sind. Die sodann nach der am Ende des ersten Paragraphen auseinandergesetzten Methode gebildete Potenzreihe $\mathfrak{P}(x_1, x_2)$, für welche die vorgelegte Kurve $\varphi(x,y) = 0$ den Zusammenhang der Konvergenzradien darstellt, hat diese Kurve zur natürlichen Grenze. Denn schreibt man — wie erlaubt ist, da in jeder Diagonale höchstens *ein* Koeffizient vorhanden ist —

$$\mathfrak{P}(x_1, x_2) = \sum_0^\infty {}_k\, a_{n_k} x_1^\mu x_2^\nu \quad (\mu + \nu = n_k),$$

und liegt irgend ein Index n_k zwischen 2^σ und $2^{\sigma+1}$, so ist $n_{k+1} > 2^{\sigma+2}$, weil die Trapeze mit *ungeraden* Indizes ganz ausgelassen wurden, so daß

$$\frac{n_{k+1} - n_k}{n_k} > \frac{2^{\sigma+2} - 2^{\sigma+1}}{2^{\sigma+1}} = 1$$

wird.

---

man von dem bewiesenen Hilfssatze ausgeht, auf dieselbe Weise beweisen, wie ich es Münch. Ber. 34 (1904), p. 63—74 für *eine* Variable getan habe.

Nach dem Hilfssatze ist daher $\varphi(x, y) = 0$ natürliche Grenze von $\mathfrak{P}(x_1, x_2)$.

Wenn $\varphi(x, y) = 0$ natürliche Grenze von $\mathfrak{P}(x_1, x_2)$ und ξ_1, ξ_2 irgend ein Punkt regulären Verhaltens dieser Funktion ist, so erhält man die zu der aus $\mathfrak{P}(x_1, x_2)$ abgeleiteten Potenzreihe $\mathfrak{P}(x_1 - \xi_1, x_2 - \xi_2)$ gehörige Kurve der zusammengehörigen Konvergenzradien als dasjenige Stück von $\varphi(x, y) = 0$, das im Gebiete $x > |\xi_1|$, $y > |\xi_2|$ liegt.

Ist dagegen eine analytische Fortsetzung von $\mathfrak{P}(x_1, x_2)$ möglich und betrachtet man alle Punkte η_1, η_2, für welche $|\eta_1| = |\xi_1|$, $|\eta_2| = |\xi_2|$ ist, so können die Kurven zusammengehöriger Konvergenzradien der aus $\mathfrak{P}(x_1, x_2)$ abgeleiteten Potenzreihen $\mathfrak{P}(x_1 - \eta_1, x_2 - \eta_2)$ nicht durchweg aus dem bezeichneten Stücke der Kurve $\varphi(x, y) = 0$ bestehen, sondern müssen teilweise oberhalb (natürlich nirgends unterhalb) dieses Kurvenstückes verlaufen. Die den unendlich vielen Kombinationen von η_1, η_2 entsprechenden Kurven haben, wie leicht ersichtlich, jenes Stück von $\varphi(x, y) = 0$ zur Enveloppe, so daß das letztere in jedem Punkte von mindestens einer der erwähnten Kurven berührt wird.

Nur im Falle, daß die Kurve $\varphi(x, y) = 0$ ganz oder teilweise aus einer *W*-Kurve besteht, gelingt es mir das vollständige funktionentheoretische Äquivalent dieser geometrischen Tatsache durch folgendes *Theorem* auszudrücken:

Besteht die Kurve $\varphi(x, y) = 0$ für $r_1^{(1)} < x < r_1^{(2)}$, $r_2^{(1)} > y > r_2^{(2)}$ aus der W-Kurve $x^{\vartheta_1} y^{\vartheta_2} = {r_1^{(1)}}^{\vartheta_1} {r_2^{(1)}}^{\vartheta_2} \left(= {r_1^{(2)}}^{\vartheta_1} {r_2^{(2)}}^{\vartheta_2}\right)$ und ist $r_1^{(3)}, r_2^{(3)}$ irgend ein von $r_1^{(1)}, r_2^{(1)}$ und $r_1^{(2)}, r_2^{(2)}$ verschiedener Punkt dieser Kurve und

$$\bar{x}_1 = r_1^{(3)} (\cos \varphi_1 + i \sin \varphi_1), \quad \bar{x}_2 = r_2^{(3)} (\cos \varphi_2 + i \sin \varphi_2)$$

ein (nach dem Fundamentalsatze sicher existierender) singulärer Punkt der durch $\mathfrak{P}(x_1, x_2)$ definierten analytischen Funktion $F(x_1, x_2)$, so sind auch sämtliche $\bar{\bar{x}}_1, \bar{\bar{x}}_2$, die der Ungleichung

(10) $$r_2^{(1)} > |\bar{\bar{x}}_2| > r_2^{(2)}$$

und der Gleichung

(11) $$\bar{\bar{x}}_1 = \frac{\bar{x}_1 \bar{x}_2^{\alpha}}{\bar{\bar{x}}_2^{\alpha}},$$

wo $\frac{\vartheta_1}{\vartheta_2} = \alpha$ gesetzt ist, genügen, singuläre Punkte dieser Funktion.

Für ausartende *W*-Kurven, d. h. für Gerade $x = \text{const.}$ oder $y = \text{const.}$ hat schon Herr Hartogs*) den Satz bewiesen; auf den Hartogsschen Satz ist p. 316 bezug genommen worden und auf ihn wird sich auch der Beweis des soeben ausgesprochenen allgemeineren Satzes stützen; es sei

*) Inauguraldissert. p. 59.

daher gestattet, den Hartogsschen Satz samt einem etwas abgeänderten Beweise hier anzuführen:

Besteht die Kurve $\varphi(x, y) = 0$ zwischen den Geraden $y = 0$ und $y = r_2$ aus der Geraden $x = R_1$ und besitzt $\mathfrak{P}(x_1, x_2)$ die singuläre Stelle $\bar{x}_1, \bar{x}_2$, für welche $|\bar{x}_1| = R_1$, $|\bar{x}_2| < r_2$ ist, so sind auch sämtliche Stellen $\bar{x}_1, \bar{\bar{x}}_2$, für welche $|\bar{\bar{x}}_2| < r_2$, $\bar{x}_1 = \bar{x}_1$ ist, singuläre.

Beweis: In der x-Ebene konstruiere man einen Kreis K_1, der innerhalb des Kreises $|x_1| = R_1$ liegt und letzteren im Punkte $x_1 = \bar{x}_1$ berührt. Ist ξ_1 der Mittelpunkt dieses Kreises, so konvergiert die aus $\mathfrak{P}(x_1, x_2)$ abgeleitete Potenzreihe $\mathfrak{P}_1(x_1 - \xi_1, x_2)$ absolut für

$$|x_1 - \xi_1| < R_1 - |\xi_1|, \quad |x_2| < r_2$$

und divergiert absolut (wegen des singulären Punktes $\bar{x}_1, \bar{x}_2$) für alle x_1, x_2, die den Ungleichungen

$$|x_1 - \xi_1| > R_1 - |\xi_1|, \quad |x_2| > |\bar{x}_2|$$

genügen.

Die zu $\mathfrak{P}_1(x_1 - \xi_1, x_2)$ gehörige Kurve der zusammengehörigen Konvergenzradien $y = \psi(x)$ erleidet daher an der Stelle $x = R_1 - |\xi_1|$ eine Unstetigkeit, besteht demnach zwischen $y = 0$ und $y = r_2$ aus der Geraden $x = R_1 - |\xi_1|$. Aus dem Fundamentalsatze folgt dann, daß es singuläre Punkte $\bar{\bar{x}}_1, \bar{\bar{x}}_2$ gibt, für welche $|\bar{\bar{x}}_1 - \xi_1| = R_1 - |\xi_1|$ ist, während $|\bar{\bar{x}}_2|$ noch jeden Wert $< r_2$ haben kann; für alle diese singulären Punkte muß aber $\bar{\bar{x}}_1 = \bar{x}_1$ sein, da jeder von $\bar{x}_1$ verschiedene Punkt des Kreises K_1, mit jedem Punkte x_2, dessen absoluter Betrag unterhalb r_2 liegt, zusammengenommen, innerhalb des Konvergenzgebietes der ursprünglichen Reihe $\mathfrak{P}(x_1, x_2)$ liegt. Insbesondere folgt, daß der Punkt $\bar{x}_1, 0$ ein singulärer Punkt ist.

Jede aus $\mathfrak{P}(x_1 - \xi_1)$ abgeleitete Potenzreihe $\mathfrak{P}(x_1 - \xi_1, x_2 - \xi_2)$, wo $|\xi_2| = \frac{r}{2} - \varepsilon$ und $0 < \varepsilon < \frac{r}{2}$ ist, konvergiert absolut für

$$|x_1 - \xi_1| < R_1 - |\xi_1|, \qquad |x_2 - \xi_2| < \frac{r_2}{2} + \varepsilon,$$

divergiert aber absolut (wegen der singulären Stelle $\bar{x}_1, 0$) für alle x_1, x_2, welche den Ungleichungen

$$|x_1 - \xi_1| > R_1 - |\xi_1|, \qquad |x_2 - \xi_2| > \frac{r}{2} - \varepsilon$$

genügen.

Die zu $\mathfrak{P}(x_1 - \xi_1, x_2 - \xi_2)$ gehörige Kurve $y = \psi(x)$ erleidet demnach an der Stelle $x = R_1 - |\xi_1|$ eine Unstetigkeit, was nur möglich ist, wenn sie zum Teil aus der Geraden $x = R_1 - |\xi_1|$ besteht. Wie oben bezüglich des Punktes $\bar{x}_1, 0$ schließt man hier, daß $\bar{x}_1, \xi_2$ ein singulärer Punkt ist, wobei von ξ_2 nur vorausgesetzt wurde, daß es dem absoluten Betrage nach $< \frac{r_2}{2}$ ist. Durch wiederholte Anwendung des gleichen Schlußverfahrens läßt sich diese Voraussetzung nacheinander auf

$$|\mathfrak{x}_2| < \frac{3\,r_2}{4}, \quad |\mathfrak{x}_2| < \frac{7\,r_2}{8}, \ldots, |\mathfrak{x}_2| < \frac{(2^n-1)\,r_2}{2^n}, \ldots$$

endlich auf $|\mathfrak{x}_2| \leqq r_2$ ausdehnen, womit der Hartogssche Satz bewiesen ist.

Es sei nun eine Potenzreihe $\mathfrak{P}(x_1, x_2)$ vorgelegt, für welche die Kurve der zusammengehörigen Konvergenzradien im Gebiete $r_1^{(1)} < x < r_1^{(2)}$, $r_2^{(1)} > y > r_2^{(2)}$ aus der W-Kurve $x^{\vartheta_1} y^{\vartheta_2} = r_1^{(1)^{\vartheta_1}} r_2^{(1)^{\vartheta_2}} \left(= r_1^{(2)^{\vartheta_1}} r_2^{(2)^{\vartheta_2}}\right)$ besteht, und für welche $\bar{x}_1, \bar{x}_2$ ein singulärer Punkt ist, wobei

$$\bar{x}_1 = r_1^{(3)}(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1), \quad \bar{x}_2 = r_2^{(3)}(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)$$

ist und der Punkt $x = r_1^{(3)}$, $y = r_2^{(3)}$ auf dem angegebenen W-Kurvenstücke liegt. Es soll gezeigt werden, daß sämtliche Punkte $\bar{\bar{x}}_1, \bar{\bar{x}}_2$, welche die Ungleichung

$$r_2^{(1)} > |\bar{\bar{x}}_2| > r_2^{(2)}$$

und die Gleichung

$$\bar{\bar{x}}_1 = \frac{\bar{x}_1\, \bar{x}_2{}^{\alpha}}{\bar{\bar{x}}_2{}^{\alpha}}$$

befriedigen $\left(\alpha = \frac{\vartheta_1}{\vartheta_2}\right)$, singuläre Punkte für $\mathfrak{P}(x_1, x_2)$ sind.

Zum Beweise mache ich die Transformation:

$$\begin{aligned} \mathfrak{x}_1 &= x_1 x_2^{\alpha} \\ \mathfrak{x}_2 &= x_2, \end{aligned} \tag{12}$$

welche aufgelöst ergibt:

$$\begin{aligned} x_1 &= \mathfrak{x}_1 \mathfrak{x}_2^{-\alpha} \\ x_2 &= \mathfrak{x}_2. \end{aligned} \tag{13}$$

Danach geht

$$\mathfrak{P}(x_1, x_2) = \sum_0^{\infty}{}^{\mu\nu}\, a_{\mu\nu} x_1^{\mu} x_2^{\nu}$$

über in

$$\mathfrak{S}(\mathfrak{x}_1, \mathfrak{x}_2) = \sum_0^{\infty}{}^{\mu\nu}\, a_{\mu\nu} \mathfrak{x}_1^{\mu} \mathfrak{x}_2^{\nu - \alpha\mu}. \tag{14}$$

Zu der Reihe auf der rechten Seite von (14) gehört in der xy-Ebene ein Gebiet S von der Art, daß (14) für $|\mathfrak{x}_1| = x$, $|\mathfrak{x}_2| = y$ *absolut* konvergiert, wenn x, y in S liegt. Die Begrenzung von S entsteht, wie man sich leicht überzeugt, aus der Kurve $\varphi(x, y) = 0$ durch die Transformation: $xy^{\alpha} \,|\, x, y \,|\, y$. Zur Begrenzung von S gehört daher u. a. das Stück der Geraden $x = r_1^{(1)} r_2^{(1)^{\alpha}} \left(= r_1^{(2)} r_2^{(2)^{\alpha}}\right)$, soweit es zwischen den Geraden $y = r_2^{(2)}$ und $y = r_2^{(1)}$ liegt. Die Funktion $\mathfrak{S}(\mathfrak{x}_1, \mathfrak{x}_2)$ ist — wie sich durch Anwendung des Weierstraßschen Doppelreihensatzes ergibt — regulär (aber wegen der möglicherweise nicht ganzzahligen Potenzen von ξ_2 nicht notwendig eindeutig) im Gebiete: $|\xi_1| < r_1^{(1)} r_2^{(1)\alpha}$, $r_2^{(1)} > |\xi_2| > r_2^{(2)}$. Ferner hat diese Funktion die singulären Stellen $\bar{\xi}_1 = \bar{x}_1 \bar{x}_2^{\alpha}$, $\bar{\xi}_2 = \bar{x}_2$ (wobei zu den möglicherweise verschiedenen und bei irrationalem α sogar unendlich vielen Werten von $\bar{\xi}_1$ jedesmal ein Wert $\bar{\xi}_2$ gehört, der in einem anderen Blatte der über der ξ_2-Ebene ausgebreiteten Riemannschen Fläche der Funktion ξ_2^{α} zu denken ist

Denn es gilt allgemein der Hilfssatz:

Abgesehen von den Null- und Unendlichkeitswerten von $x_1, x_2; \xi_1, \xi_2$ entspricht jedem regulären Punkte x_1, x_2 von $\mathfrak{P}(x_1, x_2)$ ein regulärer Punkt ξ_1, ξ_2 der transformierten Funktion $\mathfrak{S}(\xi_1, \xi_2)$, einem singulären wieder ein singulärer und umgekehrt.

Entsprechen einander nämlich die Wertepaare x_1', x_2' und $\xi_1', \xi_2' (= x_2')$ und ist keine dieser vier Zahlen Null oder ∞, so ist $x_1 - x_1'$ eine in einem gewissen Bereiche konvergente Potenzreihe von $\xi_1 - \xi_1'$, $\xi_2 - \xi_2'$ ohne konstantes Glied, ebenso $\xi_1 - \xi_1' = \mathfrak{P}(x_1 - x_1', x_2 - x_2')$. Läßt sich also an der betrachteten Stelle eine Funktion nach Potenzen von $x_1 - x_1'$, $x_2 - x_2'$ entwickeln, so gestattet die transformierte Funktion eine Entwicklung nach Potenzen von $\xi_1 - \xi_1'$, $\xi_2 - \xi_2'$ und umgekehrt.

Es sei nun ξ_2' eine komplexe Zahl vom absoluten Betrage $\frac{r_2^{(1)} + r_2^{(2)}}{2}$ und es sei ξ_2' außerdem so gewählt, daß die zusammen mit $\bar{\xi}_1 = \bar{x}_1 \bar{x}_2^{\alpha}$ *) einen singulären Punkt von (14) darstellende Zahl $\bar{\xi}_2$ im Innern des Kreises K_2 mit der Gleichung: $|\xi_2 - \xi_2'| = \frac{r_2^{(1)} - r_2^{(2)}}{2}$ liegt. Die Funktion $\mathfrak{S}(\xi_1, \xi_2)$ läßt sich in eine Potenzreihe nach steigenden Potenzen von ξ_1 und $\xi_2 - \xi_2'$ entwickeln; dieselbe konvergiert absolut für $|\xi_1| < r_1^{(1)} r_2^{(1)\alpha} = |\bar{\xi}_1|$, $|\xi_2 - \xi_2'| < \frac{r_2^{(1)} - r_2^{(2)}}{2}$, da nach dem oben Bemerkten die Punkte ξ_1, ξ_2, deren Koordinaten diesen Ungleichungen genügen, sämtlich regulär sind; andrerseits aber ist, wie schon hervorgehoben wurde, $\xi_1 = \bar{\xi}_1$, $\xi_2 = \bar{\xi}_2$ ein singulärer Punkt und für denselben ist $|\bar{\xi}_1| = r_1^{(1)} r_2^{(1)\alpha}$, $|\bar{\xi}_2| < \frac{r_2^{(1)} - r_2^{(2)}}{2}$; daher sind nach dem Hartogsschen Satze sämtliche Punkte $\bar{\xi}_1, \xi_2$ singuläre, wenn nur ξ_2 innerhalb K_2 liegt, wobei von dem Kreise K_2 nur vorauszusetzen war, daß er im Gebiete $r_2^{(1)} > |\xi_2| > r_2^{(2)}$ liegt und den Punkt $\bar{\xi}_2$ in seinem Innern enthält. Irgend ein anderer innerer Punkt von K_2 kann nun an Stelle von $\bar{\xi}_2$ treten, und man findet so fortschließend, indem man

*) Ist α nicht ganzzahlig, so verstehe man unter $\bar{\xi}_1$ irgend einen Wert der rechten Seite.

das ganze Gebiet $r_2^{(1)} > |\xi_2| > r_2^{(2)}$ mit Kreisen überdeckt, daß sämtliche Punkte $\bar{\xi}_1, \xi_2$ singuläre sind, wenn nur ξ_2 in dem bezeichneten Gebiete liegt. Nach dem Hilfssatze (p. 322) sind dann auch alle Punkte $\bar{\bar{x}}_1, \bar{\bar{x}}_2$ singuläre, wenn sie den Beziehungen:

$$r_2^{(1)} > |\bar{\bar{x}}_2| > r_0^{(2)}, \quad \bar{\bar{x}}_1 = \left(\frac{\bar{\xi}_1}{\bar{\bar{x}}_2^\alpha} =\right) \frac{\bar{x}_1 \bar{x}_2^\alpha}{\bar{\bar{x}}_2^\alpha}$$

genügen.

Ist α gleich dem irreduzibelen Bruche $\frac{p}{q}$, so gehören zu jeder Zahl $\bar{\bar{x}}_2$, deren absoluter Betrag zwischen $r_2^{(2)}$ und $r_2^{(1)}$ liegt, mindestens q Zahlen $\bar{\bar{x}}_1$ von gleichem absoluten Betrag, mit denen zusammen $\bar{\bar{x}}_2$ einen singulären Punkt bildet, während in gleicher Weise jeder Zahl $\bar{\bar{x}}_1$, für welche $r_1^{(1)} < |\bar{\bar{x}}_1| < r_1^{(2)}$ ist, p Werte $\bar{\bar{x}}_2$ entsprechen.

Ist aber das Verhältnis $\vartheta_1 : \vartheta_2$ irrational, so entsprechen jeder der obigen Zahlen $\bar{\bar{x}}_2$ unendlich viele $\bar{\bar{x}}_1$, die auf einem Kreise der x_1-Ebene überall dicht liegen, und umgekehrt. Die Reihe $\mathfrak{P}(x_1, x_2)$ ist daher über die Kreise $|x_1| = r_1$, $|x_2| = r_2$ nicht fortsetzbar, wenn der Punkt r_1, r_2 auf dem mehrfach erwähnten W-Kurvenstück liegt. Man hat somit den Satz:

Die Kurve $\varphi(x, y) = 0$ ist stets natürliche Grenze der zugehörigen Potenzreihe $\mathfrak{P}(x_1, x_2)$, soweit sie aus einer W-Kurve $x^{\vartheta_1} y^{\vartheta_2} = \text{const.}$ mit irrationalem Verhältnis $\vartheta_1 : \vartheta_2$ besteht.

Legt man statt einer nach Potenzen von x_1, x_2 eine nach Potenzen gewisser Funktionen von x_1, x_2 fortschreitende Reihe zugrunde, beispielsweise eine Potenzreihe $\mathfrak{P}(x_1 + x_2, x_1^2 - x_2^2)$ und konvergiert diese für

$$|x_1 + x_2| < x, \quad |x_1^2 - x_2^2| < y,$$

aber nicht für größere x, y absolut, solange x, y den folgenden Gleichungen und Ungleichungen genügen:

$$xy^\alpha = r_1^{(1)} {r_2^{(1)}}^\alpha = r_1^{(2)} {r_2^{(2)}}^\alpha; \quad r_1^{(1)} < x < r_1^{(2)}; \quad r_2^{(1)} > y > r_2^{(2)},$$

so gibt es mindestens ein Zahlenpaar $\bar{x}_1, \bar{x}_2$ der Art, daß sämtliche Punkte $\bar{\bar{x}}_1, \bar{\bar{x}}_2$, welche die Relationen

$$r_2^{(1)} > |\bar{\bar{x}}_1^2 - \bar{\bar{x}}_2^2| > r_2^{(2)}; \quad \bar{\bar{x}}_1 + \bar{\bar{x}}_2 = \frac{(\bar{x}_1 + \bar{x}_2)(\bar{x}_1^2 - \bar{x}_2^2)^\alpha}{(\bar{\bar{x}}_1^2 - \bar{\bar{x}}_2^2)^\alpha}$$

erfüllen, singuläre Punkte der durch $\mathfrak{P}(x_1 + x_2, x_1^2 - x_2^2)$ dargestellten analytischen Funktion sind.

Durch die vorhergehenden Untersuchungen ist in *reihentheoretischer* Hinsicht die gegenseitige Abhängigkeit der zusammengehörigen Konvergenzradien völlig klargelegt, womit zugleich sämtliche Kontinua gefunden sind, die als Gebiete absoluter Konvergenz von Potenzreihen möglich sind; dagegen sind die erhaltenen spezielleren *funktionentheoretischen* Resultate von der Art der im vorhergehenden abgeleiteten nur vereinzelt und eine Menge interessanter hier anknüpfender Fragen bleibt noch zu erledigen; z. B.:

Gehören zu jeder *analytischen* Kurve $\varphi(x, y) = 0$ analytische Funktionen $\Phi(x_1, x_2) = 0$, derart daß eine analytische Funktion, deren singuläre Stellen x_1, x_2 der Gleichung $\Phi(x_1, x_2) = 0$ genügen, die Kurve $\varphi(x, y) = 0$ zur Kurve der zusammengehörigen Konvergenzradien hat? In besonderen Fällen ist dies klar: Der Annahme $\varphi(x, y) = x + y - 1$, entsprechen die Funktionen $\Phi(x_1, x_2) = x_1 + x_2 - 1$, $\Phi(x_1, x_2) = x_1 - x_2 - 1$ etc.

Es kann andrerseits vorkommen, daß ein *Stück* einer solchen analytischen Kurve der Kurve $\varphi(x, y) = 0$ angehört, ohne daß der Schluß auf die Existenz einer Singularitätengleichung $\Phi(x_1, x_2) = 0$ für die zugehörige Potenzreihe erlaubt wäre: Unterdrückt man z. B. in der Potenzreihe für $\frac{1}{1-(x_1+x_2)}$ alle Terme $a_{\mu\nu} x_1^\mu x_2^\nu$, für welche $\mu > \nu$ ist, so besteht die Kurve $\varphi(x,y) = 0$ für $0 < x < \frac{1}{2}$ aus der Geraden $x + y = 1$, setzt sich dagegen für $x > \frac{1}{2}$ in der Hyperbel $xy = \frac{1}{4}$ fort. Es fragt sich, ob in diesem Falle die Gerade und die Hyperbel (oder die Gerade allein) natürliche Grenzen sind.

Endlich: Ist die Kurve $\varphi(x, y) = 0$ eine natürliche Grenze, wenn sie *nicht analytisch* ist?

Traunstein und Würzburg, im Oktober und November 1904.