

Badische Landesbibliothek Karlsruhe

Digitale Sammlung der Badischen Landesbibliothek Karlsruhe

**Ableitung der verschiedenen Formen der ebenen Kurven
dritter Ordnung durch Projektion und Klassifikation
derselben**

Die Kurven vom Geschlechte eins ohne Oval

Kölmel, Friedrich

Baden-Baden, 1904

[urn:nbn:de:bsz:31-272339](https://nbn-resolving.org/urn:nbn:de:bsz:31-272339)

OZB

820, Beil.

1903/04

02 B 820, Beil. 1903/04

Ableitung der verschiedenen Formen der ebenen Kurven dritter
Ordnung durch Projektion und Klassifikation derselben. III.

(Die Kurven vom Geschlechte eins ohne Oval.)

Von
+
Friedrich Kölmel.

Beilage zum Programm der Oberrealschule mit Realgymnasium Baden
für das Schuljahr 1903/04.

Baden - Baden.
Ernst Kölblin, Hof-Buchdruckerei.
1904.

1947 B 4580 a

OZB 820, Beil. ^{1903/04} 1903/04



20

Ableitung der verschiedenen Formen der ebenen Kurven dritter Ordnung aus den divergierenden Parabeln und Klassifikation der gefundenen Typen. III. Teil.

Der erste Teil dieser Untersuchungen ist als Beilage zum Programm des Realprogymnasiums Ettenheim 1894 (im folgenden als „Beilage I“ zitiert), der zweite zum Programm des Realprogymnasiums Mosbach 1895 („Beilage II“) erschienen. Zur Orientierung sei aus diesen Abhandlungen kurz folgendes mitgeteilt:

1. Die divergierenden Parabeln¹⁾ sind durch die Gleichung:

$$y^2 z = (x^2 - \beta^2 z^2) (x - \alpha z) \text{ oder} \\ f \equiv 3 x^3 - 3 \alpha x^2 z - 3 \beta^2 x z^2 + 3 \alpha \beta^2 z^3 - 3 y^2 z = 0$$

dargestellt, wobei x, y rechtwinklige Punktkoordinaten, $z = 0$ die Gleichung der unendlich fernen Geraden ist. Für f sind im Anschluß an Salmon-Fiedler's höhere ebene Kurven die Invarianten²⁾ $S, T, R = T^2 + 6 \cdot 4 S^3$ und $J = \frac{S^3}{T^2}$, die Hesse'sche Form H und die beiden Cayley'schen Kontravarianten $\Sigma (P)$ und $T (Q)$ berechnet, ebenso die 3 Kontravarianten Γ , die die Σ -formen zu denjenigen drei Grundformen sind, für welche f die Hesse'sche Form ist.

Zur Ergänzung sei noch zugefügt: Die Reziprokalform F von f ist

$$F \equiv 12 \alpha \beta^2 u^6 + 12 \beta^2 (\alpha^2 - \beta^2)^2 v^6 + 12 \beta^2 u^5 w - 12 \alpha (\alpha^2 - 9 \beta^2) v^4 w^2 \\ + 3 \beta^2 (12 \alpha^2 + \beta^2) u^4 v^2 - 81 v^2 w^4 - 12 \alpha u^4 w^2 + 12 \alpha \beta^2 (3 \alpha^2 + 5 \beta^2) u^2 v^4 \\ - 12 u^3 w^3 + 12 \beta^2 (5 \alpha^2 + 3 \beta^2) u v^4 w^2 + 132 \alpha \beta^2 u^3 v^2 w - 108 \alpha u v^2 w^3 \\ - 6 (4 \alpha^2 - 15 \beta^2) u^2 v^2 w^2.$$

Die nach Clebsch und Gordan³⁾ bezeichneten Formen Π, P, Φ, Ω' sind:

$$\begin{aligned} \Pi &= 12 (4 S T - 3 T \Sigma) \\ P &= 12 (T T + 48 S^2 \Sigma) \\ \Phi &= 12 (3 R F - 2 T T^2 - 192 S^2 \Sigma T + 72 S T \Sigma^2) \end{aligned}$$

$$\Omega' = \begin{vmatrix} \frac{\delta \Pi}{\delta u} & \frac{\delta P}{\delta u} & \frac{\delta \Phi}{\delta u} \\ \frac{\delta \Pi}{\delta v} & \frac{\delta P}{\delta v} & \frac{\delta \Phi}{\delta v} \\ \frac{\delta \Pi}{\delta w} & \frac{\delta P}{\delta w} & \frac{\delta \Phi}{\delta w} \end{vmatrix}$$

¹⁾ Divergierende Parabeln sind die Kurven dritter Ordnung, für welche die unendlich ferne Gerade Wendetangente ist.

²⁾ Ich habe bereits in Beilage I betont, daß die Klassifikation der Kurven dritter Ordnung von der Theorie der ternären kubischen Formen unzertrennlich ist.

³⁾ Vgl. Math. Ann. Bd. 4 und Clebsch-Lindemann's Vorlesungen über Geometrie. I. Bd. Abteilung 5.

2. Mit Rücksicht auf die besonderen Werte von S , T , R , J ergibt sich folgende Einteilung¹⁾ der divergierenden Parabeln.

I. Hauptgruppe.²⁾ $R > 0$. Die Parabel ist ein unpaarer Zug mit 3 reellen Wendepunkten.

I. Gruppe: $S < 0$.

I. Untergruppe: $T < 0$.

II. Untergruppe: $T > 0$.

Übergang: $T = 0$. Imaginär.

II. Gruppe: $S > 0$.

I. Untergruppe: $T < 0$.

II. Untergruppe: $T > 0$.

Übergang: $T = 0$.

Den Übergang von Gruppe I zu Gruppe II bildet die Familie, für die $S = 0$; sie zerfällt in 2 Grundformen, die durch $T < 0$ bzw. $T > 0$ charakterisiert sind.

II. Hauptgruppe. $R < 0$. Die Parabel besteht aus einem unpaaren Zug mit 3 reellen Wendepunkten und einem Oval.

I. Gruppe: $S > 0$. Imaginär.

II. Gruppe: $S < 0$.

I. Untergruppe: $T > 0$.

II. Untergruppe: $T < 0$.

Übergang: $T = 0$.

Den Übergang von Gruppe I zu Gruppe II bildet die imaginäre Kurve, für die $S = 0$.

Den Übergang von der Iten zur IIten Hauptgruppe bildet die Familie, für welche $R = 0$.

Es sind die Kurven vom Geschlechte 0. Die Familie zerfällt in 3 Grundformen: $T < 0$; $T = 0$; $T > 0$.

Jede Untergruppe zerfällt in so viele **Grundformen**, als die absolute Invariante J Werte annehmen kann. Jede solche Grundform umfaßt also diejenigen Parabeln, die durch Kollineation ineinander übergeführt werden können. Indem wir diese als Typen derselben Art auffassen, tritt die Grundform als Individuum auf. (Eine deutliche Übersicht über die Mannigfaltigkeit und die Übergänge der aufgestellten Abteilungen gibt die von mir in Beilage I Fig. XIV angegebene Fläche dritter Ordnung.)

3. Wir erhalten auf diese Weise unendlich viele Grundformen, von denen jede durch den Wert von J und das Zeichen von T gekennzeichnet ist. Die Aufzählung und Zeichnung aller derselben wäre eine unausführbare Arbeit, noch mehr die Angabe aller daraus durch Kollineation ableitbaren Typen. Wir lassen deshalb neben die rein analytische Betrachtung die Rücksicht auf die äußere Form treten und sehen in diesem Sinne die Grundformen einer Untergruppe als gleichwertig an, so daß von jeder derselben nur eine in Betracht

¹⁾ Unterdessen hat Herr H. Wiener (Die Einteilung der ebenen Kurven und Kegel dritter Ordnung in 13 Gattungen. Halle a. S. 1901) auf Grund anderer Betrachtungen, indem er die Moebius'sche Einteilung vervollständigte, eine Einteilung der Kurven dritter Ordnung in 13 Gattungen gegeben, „die“, wie er mir mitteilte, „in engem Zusammenhange mit meiner früheren Einteilung steht“. Von 5 Kegeln dritter Ordnung sind von mir schon 1885 Modelle hergestellt worden; dieselben befinden sich in der Sammlung des mathematischen Instituts der Universität Tübingen.

²⁾ Bezüglich der Begriffe Hauptgruppe, Gruppe etc. und der Beschreibung und Darstellung der betreffenden Parabeln vgl. Beilage I.

kommt und sich mit den Uebergangsformen im ganzen nur 13 Gattungen von Parabeln ergeben, wie sie in Beilage I in Fig. I bis XIII dargestellt sind. Aus einer Grundform werden dann durch perspektive Kollineation die verschiedenen Typen abgeleitet, für welche als Unterscheidungsmerkmal in erster Linie die Lage der Kurve gegen die unendlich ferne Gerade maßgebend ist. Da nun die unendlich ferne Gerade der abgeleiteten Kurve aus der ersten Fluchtlinie f der Ebene der Parabel hervorgeht, so kommt die Aufgabe der Diskussion der Typen zunächst darauf hinaus, alle möglichen Lagen einer Geraden f gegen die Parabel zu diskutieren. An sich ist die Zahl der Lagen unbeschränkt, man muß also auch hier nach gewissen Grundsätzen eine Auswahl treffen. Für die in Beilage I gegebene Diskussion der Kurven mit Oval, für die $T > 0$, und die in Beilage II enthaltene Aufzählung der Typen vom Geschlechte 0 waren nachstehende Gesichtspunkte maßgebend, die auch im folgenden beibehalten sind: Als unterscheidend gilt zunächst die Realität bzw. Koinzidenz der Schnittpunkte der f mit der P_3 ¹⁾ und die Art der Schnittpunkte (gewöhnliche oder singuläre Punkte). Dazu tritt dann die Lage der Satellite²⁾ von f und der reellen Wendegeraden differenzierend ein; daraus ergeben sich Zahl und Art der Asymptoten der abgeleiteten C_3 und deren Lage zur Satellite der unendlich fernen Geraden und zu den reellen Wendegeraden. Endlich wird der Schnitt der Asymptoten untereinander und mit der C_3 berücksichtigt. Im einzelnen verweise ich auf das Folgende. Die so erhaltenen Typen sind in Bezug auf ihre Mannigfaltigkeit von dreierlei Art: a) Typen, deren es nur eine endliche Anzahl gibt, b) solche, deren es eine einfache unendliche Menge gibt, und c) solche, deren es doppelt unendlich viele gibt. Ist $u x + v y + w z = 0$ die Gleichung³⁾ der ersten Fluchtlinie f , so sind die Typen der Art a) durch 3 homogene Gleichungen in u, v, w bestimmt, die der Art b) sind durch eine Gleichung bestimmt, und die der Art c) sind durch Ungleichungen definiert. Zur Übersicht über die erhaltenen Typen habe ich wieder die u, v, w der f in einer „Reziprokalebene“ (R. E.) als Punktkoordinaten interpretiert, so daß jeder Lage von f ein Punkt der R. E. und, da aus jeder Lage von f sich eine C_3 ergibt, jedem Punkte der R. E. eine C_3 entspricht. Den Typen der drei Arten a), b), c) entsprechen in der R. E. bzw. einzelne Punkte, Linien und Flächenstücke, so daß also hier die Mannigfaltigkeit und die Übergänge sehr deutlich ins Auge fallen.

Diskussion der C_3 ohne Oval.

Die Aufgabe der vorliegenden Arbeit besteht darin, die Typen der C_3 für welche $R > 0$, aufzustellen. Ausführlicher behandelt werden die Typen, für welche $S < 0, T < 0$; bezüglich der Typen, die aus den andern Grundformen hervorgehen, müssen wir uns mit einem vergleichenden Hinweis auf die entsprechenden Typen dieser Grundform und einer Darstellung der R. E. begnügen. Es seien folgende Bezeichnungen und Abkürzungen vorausgeschickt: a = Verbindungsgerade der drei reellen Wendepunkte = Äquator⁴⁾. b_1, b_2, b_3 ⁴⁾ seien die drei reellen Wendegeraden, die je durch einen reellen und 2 imaginäre Wendepunkte gehen.

¹⁾ f bedeutet im Folgenden stets die erste Fluchtlinie, P_3 die gegebene divergierende Parabel, C_3 die abgeleitete Kurve dritter Ordnung.

²⁾ Die Tangenten in den Schnittpunkten von f mit der P_3 treffen diese in 3 Punkten, die wiederum auf einer Geraden liegen, die die Satellite von f heißt

³⁾ Über die analytische Darstellung der Kollineation vgl. Beilage I p. 7.

⁴⁾ Die Koordinaten der a und b sind entweder aus dem Produkt der 12 Wendegeraden

$$27 H^4 + 18 S H^2 f^4 - T H f^3 - S^2 f^4 = 0$$

zu finden, oder als Koordinaten der dreifachen Geraden von Ω' (u, v, w) = 0. Die Koordinaten von a seien: $u_0, 0, w_0$, die von b_3 seien: $u_3, 0, b_3$. 2

Die Schnittpunkte von zwei imaginären Wendetangenten zweier Wendepunkte auf derselben b seien: S_1, S_2, S_3 . Der Schnittpunkt einer reellen harmonischen Geraden mit der P_3 heiße ein Scheitel derselben.

s = Satellite der unendlich fernen Geraden.

w = Wendeasymptote; sie ist stets identisch mit der zweiten Fluchtlinie f_1 , d. h. der Geraden, in welche die unendlich ferne Wendetangente der P_3 durch die Kollineation übergeht.

f = erste Fluchtlinie, d. h. die Gerade, die durch die Kollineation in die unendlich ferne Gerade übergeht.

A = Schnittpunkt zweier (einfachen) reellen oder imaginären Asymptoten.

R. E. α = Feld oder Linie oder Punkt α in der Reziprokalebene.¹⁾

C_3 , für welche $S < 0, T < 0$.

Die Gleichung der Parabel kann stets in der Form

$$y^2 z = (x^2 + z^2) (x + \alpha z)$$

geschrieben werden, wobei $\alpha > +\sqrt{3}$. Fig. I stellt die R. E. dar.

A. Typen, die man erhält, wenn f durch einen Wendepunkt geht.²⁾

Da bei diesen Typen ein Wendepunkt stets unendlich fern ist, so gibt es in der Richtung dieses unendlich fernen Wendepunktes ein Bündel von parallelen Sekanten, deren Sehnenstrecke durch die harmonische Gerade des unendlich fernen Wendepunktes halbiert wird. Zu diesem Parallelstrahlenbündel gehören a und eine b , die (etwa vorhandene) Wendeasymptote f_1 und die Satellite s . Die beiden anderen Asymptoten schneiden sich auf der harmonischen Geraden des unendlich fernen Wendepunktes. Die zweite Fluchtlinie f_1 wird Wendeasymptote w . In der R. E. entsprechen diesen Typen die Punkte auf den Rückkehrtangenten von F . Die Gesamtheit der f dieser Art bildet eine einfach unendliche Mannigfaltigkeit, nämlich die drei Strahlenbündel, deren Mittelpunkte die drei reellen Wendepunkte sind. Jeder der drei reellen Wendepunkte führt zu einem System A) solcher Typen. Für die Konstruktion ist es am einfachsten den unendlich fernen Wendepunkt W_3 zum Ausgang zu nehmen. Für die Koordinaten u, v, w von f besteht die Gleichung:

$$\Omega^2(u, v, w) = 0.$$

I. f schneidet die P_3 in drei getrennten reellen Punkten. $F(u, v, w) < 0$.

Die C_3 besteht aus drei Zweigen mit drei reellen Asymptoten, von denen eine Wendeasymptote $w \equiv f_1$ ist, die beiden anderen gewöhnliche (einfache).

1. Typus.³⁾ f schneidet Γ nur in imaginären, das Oval von Σ in 2 reellen Punkten und wird durch die Tangente an das Oval der Σ von a getrennt (f liegt zwischen

¹⁾ Die Figuren I bis VII sind schematisch gezeichnet. Wiederholt vorkommende Typen sind nur an einzelnen Stellen eingetragen, je nach dem vorhandenen Raume.

²⁾ Ich habe hier eine etwas andere Einteilung gewählt als in Beilage I.

³⁾ In den Zeichnungen sind die P_3, f, f_1, x (Kollineationsaxe) schwach, die C_3 stark ausgezogen. Die Asymptoten sind mittelstark gehalten, während s gestrichelt, a und b strichpunktiert sind. C ist das Kollineationszentrum.

der Tangente an P_3 und der nächstliegenden Tangente an das Oval von Σ . $\Sigma(u, v, w) > 0$, $\Gamma(u, v, w) > 0$; $u w_0 - u_0 w < 0$. Der eine Zweig der C_3 hat keinen Wendepunkt (einfacher Zweig), die beiden anderen haben je einen Wendepunkt im Endlichen. Reihenfolge der charakteristischen Linien und Punkte¹⁾: a, s, w, b_3 . (s schneidet die beiden Züge mit je einem Wendepunkt und trifft die gewöhnlichen Asymptoten vor der w .) Der einfache Zug liegt vor einer Ecke des Asymptotendreiecks. Fig. 1. R. E. 1.

Unterabteilungen.

α) A von w durch b_3 getrennt. R. E. 1. α .

a) S_3 ist von w durch s getrennt. R. E. a.

b) S_3 liegt im Unendlichen. R. E. b.

c) S_3 ist von w durch A getrennt (liegt auf der konkaven Seite des einfachen Zuges). R. E. c.

β) A liegt auf b_3 . R. E. β .

γ) A zwischen b_3 und w . R. E. γ . (Hierzu Figur.)

δ) f geht durch die zwei Schnittpunkte des Ovals von Σ mit der P_3 . Die einfachen Asymptoten der C_3 berühren das Oval von H .

2. Typus. f berührt das Oval von Σ und liegt zwischen der Tangente an P_3 und dem Äquator. $\Sigma(u, v, w) = 0$.²⁾ Die drei Asymptoten der C_3 gehen durch einen Punkt auf H , wo w die H berührt. (A auf w .) Ch. L. und P: a, s, w mit A, b_3 . Zweige wie bei 1. R. E. 2. Fig. 2.

3. Typus. f schneidet das Oval von Σ in zwei imaginären Punkten und liegt zwischen der Tangente in 2) und dem Äquator. $\Sigma(u, v, w) < 0$. Ch. L. und P: b_3, w, A, s, a . s trifft nur Verlängerungen der Seiten des Asymptotendreiecks vor einer Ecke. Der einfache Zweig liegt vor der w . Fig. 3. R. E. 3.

4. Typus. f ist Äquator. $u w_0 - u_0 w = 0$. Die drei Asymptoten der C_3 sind Wendeadasymptoten, s fällt mit der unendlich fernen Geraden zusammen. Ch. L. und P: A, w, b_3 ; $s \equiv a$ im Unendlichen. Die C_3 besteht aus drei einfachen Zügen, die je vor einer Ecke des Asymptotendreiecks liegen. Fig. 4. R. E. 4.

5. Typus. f liegt zwischen dem Äquator und der nächstfolgenden Tangente an das Oval von Σ . $u w_0 - u_0 w > 0$. Die C_3 besteht aus einem Zug mit zwei Wendepunkten im Endlichen und zwei einfachen Zügen ohne Wendepunkte. Ch. L. und P: A, w, b_3, s, a . s trifft den Zug mit zwei Wendepunkten. Die einfachen Züge liegen je vor einer Seite. Fig. 5. R. E. 5.

6. Typus. f berührt das Oval von Σ und ist von der Tangente an P_3 durch den Äquator getrennt. $\Sigma(u, v, w) = 0$; $u w_0 - u_0 w > 0$. Die Asymptoten der C_3 gehen durch einen Punkt auf H , in dem diese von w berührt wird. Zweige wie bei 5. Ch. L. und P: A auf w , sonst wie vorher. Fig. 6. R. E. 6.

NB! Typus 6 unterscheidet sich von Typus 2 durch die andere Art der Züge der C_3 .

7. Typus. f schneidet das Oval von Σ in 2 reellen Punkten und das von Γ in 2 imaginären Punkten (liegt zwischen der Tangente in 6) und der nächstfolgenden

¹⁾ Der Kürze halber von jetzt ab angedeutet durch: Ch. L. und P.

²⁾ Die übrigen Bedingungen bleiben, bis neue erwähnt werden.

Tangente an das Oval von Γ , die nicht auch Tangente von P_3 ist. $\Sigma(u, v, w) > 0$.
Zweige der C_3 wie bei 5. Ch. L. und P: a, s, b_3 , w. Fig. 7. R. E. 7.

Unterabteilungen und besondere Fälle.

α) A zwischen b_3 und w. R. E. 1. α .

a) s trennt a und S_3 .

b) s geht durch S_3 .

c) s durch S_3 von a getrennt.

β) A auf b_3 . R. E. β .

γ) A von w durch b_3 getrennt. R. E. γ .

Außerdem: f geht durch den Schnittpunkt von P_3 und Σ . Vgl. 1.

8. Typus. f berührt das Oval von Γ , aber nicht zugleich P_3 . $\Gamma(u, v, w) = 0$. Die beiden einfachen Asymptoten schneiden sich auf der C_3 , die in diesem Punkte von s berührt wird. Ch. L. und P: a, s mit A, b_3 , w. Fig. 8. R. E. 8.

9. Typus. f schneidet das Oval von Γ in zwei reellen Punkten und wird von der Tangente an P_3 durch a getrennt. $\Gamma(u, v, w) < 0$. Zweige wie bei 7. Ch. L. und P: w, b_3 , s, a. Fig. 9. R. E. 9.

Unterabteilungen und spezielle Fälle.

α) A zwischen a und s. R. E. α .

β) A auf a. R. E. β .

γ) A von s bzw. w durch a getrennt. R. E. γ .

a) a von w durch s getrennt. R. E. a.

b) a fällt mit s zusammen. Die zwei einfachen Asymptoten gehen durch die zwei anderen reellen Wendepunkte und berühren das Oval von Γ . f geht durch die zwei reellen Schnittpunkte von h_1 und h_2 mit P_3 . Die C_3 besitzt in den diesen entsprechenden unendlich fernen Punkten je eine sechspunktig berührende asymptotische Parabel zweiter Ordnung. R. E. b.

c) a zwischen s und w. R. E. c.

Ferner sind erwähnenswert:

δ) f geht durch den Schnittpunkt einer reellen und zweier imaginären harmonischen Geraden. R. E. δ .

ϵ) f geht durch den Schnittpunkt dreier reellen harmonischen Geraden. R. E. ϵ .

ζ) f geht durch zwei Schnittpunkte je einer Wendetangente mit der zugehörigen harmonischen Geraden. R. E. ζ .

η) f geht durch den Schnittpunkt zweier reellen Wendetangenten. R. E. η .

θ) f geht durch den Schnittpunkt von b_1 und b_2 . R. E. θ .

ι) f geht durch zwei Schnittpunkte von je zwei imaginären Wendetangenten. R. E. ι .

II. f berührt die P_3 . $F(u, v, w) = 0$.

10. Typus. f berührt die P_3 im Schnittpunkte derselben mit der harmonischen Geraden von W_3 . Die C_3 besteht aus zwei Zweigen mit je einem Wendepunkt im Endlichen, die sich einerseits der einzigen Asymptote w nähern, andererseits sich parabolisch ins Unendliche erstrecken. $s \equiv w$. Fig. 10. R. E. 10.

11. Typus. f ist Wendetangente. Die C_3 ist P_3 . *noch lange nicht!*

III. f schneidet die P_3 ausser in dem Wendepunkte in zwei imaginären Punkten.

Die C_3 besteht aus einem Zug mit zwei reellen Wendepunkten im Endlichen und hat nur eine reelle Asymptote $w \equiv f_1$, die zwei imaginären Asymptoten schneiden sich in einem reellen Punkte A , dem „Asymptotenpunkte“, ebenso ist s reell, trifft aber außer in W_3 nur in imaginären Punkten.

12. Typus. f schneidet den dreispitzigen Zug von Γ in zwei reellen Punkten (und liegt also zwischen der Wendetangente der P_3 und der Tangente an diesen Teil von Γ). $\Gamma(u, v, w) < 0$. Ch. L. und P: b_3, A, s, a, w . Fig. 12. R. E. 12.

Unterabteilungen.

α) b_3 zwischen C_3 und s . R. E. α .

β) b_3 fällt mit s zusammen. R. E. β .

γ) b_3 von der C_3 durch s getrennt. R. E. γ .

13. Typus. f berührt den dreispitzigen Zug von Γ . $\Gamma(u, v, w) = 0$. A liegt im Scheitel der C_3 , die in diesem Punkte von s berührt wird. Ch. L. und P: b_3, s mit A, a, w . Fig. 13. R. E. 13.

NB! Dieser Typus bildet die Grenze für den Übergang des A von der konvexen Seite des Scheitels zur konkaven.

14. Typus. f liegt zwischen der in 13) erwähnten Tangente an Γ und der Wendegeraden b_3 . $\Gamma(u, v, w) > 0$. $u w_3 - u_3 w < 0$. Ch. L. und P: b_3, s , Scheitel der C_3, A, a, w . A liegt auf der konkaven Seite des Scheitels und entfernt sich um so mehr vom Scheitel, je näher f an b_3 heranrückt. Fig. 14. R. E. 14.

Spezieller Fall. f ist Verbindungsgerade von zwei Schnittpunkten je dreier harmonischen Geraden, ist aber nicht selbst harmonische Gerade. R. E. β .

15. Typus. f fällt mit b_3 zusammen. $u w_3 - u_3 w = 0$. s fällt mit b_3 ins Unendliche; A ist der Schnittpunkt der zwei imaginären Wendeadasymptoten und hat seine größte Entfernung vom Scheitel erreicht. Fig. 15. R. E. 15.
16. Typus. f liegt zwischen der b_3 und der Tangente an die P_3 . $u w_3 - u_3 w > 0$. Ch. L. und P: Scheitel, A, a, w, s, b_3 . A nähert sich wieder dem Scheitel. Fig. 16. R. E. 16.

B. Typen, die man erhält, wenn f nicht durch einen Wendepunkt geht.

$$\Omega(u, v, w) \begin{matrix} < \\ > \end{matrix} 0.$$

Bei den Typen dieser Abteilung liegen alle drei reellen Wendepunkte im Endlichen. Sie haben mindestens eine reelle gewöhnliche Asymptote. Während bei den C_3 der Abteilung A) die b , die durch den unendlich fernen Wendepunkt geht, eine ausgezeichnete Rolle spielte, treten hier alle drei b gleichberechtigt auf. Ich habe deshalb deren Lage gegen die Asymptoten nicht als charakteristisches Merkmal eines eigenen Typus gelten lassen, dagegen besondere Lagen zur Charakterisierung von Unterabteilungen benützt. Vergl. auch die Zusätze am Ende dieses Kapitels.

Die f dieser Abteilung, also auch die Typen, bilden eine doppelt unendliche Mannig-
keit. Um die Typen aufzustellen, betrachtet man in Analogie zu A) Strahlenbüschel¹⁾ von f ,
deren Zentren nicht Wendepunkte sind. Einem solchen Büschel und den sich daraus ergebenden
 C_3 entspricht in der R. E. eine Punktreihe. Am zweckmäßigsten erweist es sich, das Zentrum
auf der P_3 selbst anzunehmen. Die Gesamtheit dieser Büschel umfaßt dann alle $\infty^2 f$. Die
Typen, die sich aus einem solchen Büschel ergeben, haben alle eine Asymptote gemeinsam,
eben diejenige, die der Tangente der P_3 im Mittelpunkt des Büschels entspricht. Die s bilden
ebenfalls ein Büschel, dessen Zentrum der Schnittpunkt dieser Tangente mit der C_3 ist. In
der R. E. entspricht dem Büschel der f eine Punktreihe, deren Träger eine Tangente der F
ist; dem Büschel der s entspricht die Tangente, die vom Berührungspunkte der vorigen noch
an F geht. Innerhalb eines solchen Büschels sind dann stetige Übergänge möglich. Wir
können dreierlei Büschel von f mit dem Zentrum M auf der P_3 unterscheiden: a) solche, von
deren Zentrum aus zwei reelle Tangenten an das Oval von Σ gehen. Ihnen entsprechen in
der R. E. Tangenten der F , die das Oval von Σ in zwei reellen Punkten schneiden, b) solche,
deren Zentrum ein Schnittpunkt von P_3 mit dem Oval von Σ ist. Ihnen entsprechen in der
R. E. die gemeinsamen Tangenten von F und dem Oval von Σ , c) solche, von deren Zentrum
aus keine reellen Tangenten an das Oval von Σ gehen. Ihnen entsprechen in der R. E.
Tangenten der F , die das Oval von Σ nicht schneiden. Aus der Betrachtung dieser Büschel
ergeben sich dann die folgenden Typen.

I. f schneidet die P_3 in drei getrennten reellen Punkten.

Die C_3 hat drei reelle einfache Asymptoten und besteht aus drei Zweigen: einem
einfachen ohne Wendepunkt, einem mit einem und einem mit zwei Wendepunkten. In der
R. E. entspricht das Feld, von dessen Punkten aus drei reelle Tangenten an die F gehen
(innerhalb des dreispitzigen Zuges).

17. Typus. f schneidet das Oval von F in zwei imaginären, das Oval von Σ in zwei
reellen Punkten und liegt zwischen den Tangenten an die Ovale von Σ und F .
 $\Sigma(u, v, w) > 0$, $F(u, v, w) > 0$. s trifft die Seiten des Asymptotendreiecks nur
in ihren Verlängerungen.²⁾ Der einfache Zug liegt vor einer Ecke. Fig. 17. R. E. 17.

Als besondere Fälle sind zu erwähnen:

- a) A liegt auf einer der drei reellen b .
 β) Einer der Schnittpunkte zweier imaginären Wendetangenten liegt im Unendlichen.
 γ) s geht durch einen der in β) erwähnten Schnittpunkte.

18. Typus. f berührt das Oval von Σ . $\Sigma(u, v, w) = 0$. Die drei Asymptoten der
 C_3 gehen durch einen Punkt auf H . Fig. 18. R. E. 18.
 19. Typus. f schneidet die Ovale von Σ und F nur in imaginären Punkten. (f liegt
zwischen den beiden Tangenten an das Σ -Oval.) $\Sigma(u, v, w) < 0$. Bei der C_3 trifft
 s nur Verlängerungen der Seiten des Asymptotendreiecks; der einfache Zug liegt
vor einer Seite. Fig. 19. R. E. 19.
 20. Typus. f berührt das Oval von F . $F(u, v, w) = 0$. Zwei Asymptoten der C_3
schneiden sich auf dieser; s berührt die C_3 in diesem Schnittpunkte. Fig. 20.³⁾ R. E. 20.

¹⁾ In diesem Sinne ist auch der Ausdruck: „ f liegt zwischen“ zu verstehen.

²⁾ Da in B) keine der b_1, b_2, b_3 ausgezeichnet ist, so sind dieselben weggelassen.

³⁾ In Fig. 20 ist der einfache Zweig der Raumerparnis halber etwas hereingerückt.

Spezieller Fall. f geht durch S_1 oder S_2 oder S_3 .

21. Typus. f schneidet die Ovale von Σ und F in je zwei reellen Punkten. $F(u, v, w) < 0$. s trifft zwei Seiten des Asymptotendreiecks selbst. Fig. 21. R. E. 21.

Besondere Fälle.

- α) a trifft nur Verlängerungen der Seiten des Asymptotendreiecks. R. E. 21. α .
 β) a geht durch A . R. E. 21. β .
 γ) a trifft zwei Seiten des Asymptotendreiecks selbst. R. E. 21. γ .
a) Der Schnittpunkt von a und s liegt außerhalb des Asymptotendreiecks.
b) Der Schnittpunkt von a und s liegt auf einer Asymptote.
c) Der Schnittpunkt von a und s liegt innerhalb des Asymptotendreiecks.

NB! b) und c) treten doppelt auf, wobei je ein anderer Wendepunkt des Zuges mit zwei Wendepunkten in Betracht kommt und ein anderes Feld für den Schnittpunkt eintritt.

Ferner sind zu erwähnen:

- δ) f geht durch den reellen Schnittpunkt von zwei imaginären mit einer reellen harmonischen Geraden von 3 Wendepunkten. R. E. δ .
 ϵ) f geht durch den Schnittpunkt der drei reellen harmonischen Geraden. R. E. ϵ .
 ζ) f geht durch den Schnittpunkt einer Wendetangente mit der zugehörigen harmonischen Geraden. R. E. ζ .
 η) f geht durch den Schnittpunkt zweier reellen Wendetangenten. R. E. η .
 ϑ) f geht durch den Schnittpunkt von b_1 und b_2 , oder b_1 und b_3 , oder b_2 und b_3 . R. E. ϑ .
 ι) f geht durch den Schnittpunkt zweier imaginären Wendetangenten. R. E. ι .

II. f berührt die P_3 . $F(u, v, w) = 0$.

f schneidet dann außerdem noch in einem gewöhnlichen reellen Punkte. Die C_3 hat also eine einfache Asymptote und besteht aus zwei Zweigen, von denen der eine die Asymptote in einem reellen Punkte schneidet; beide nähern sich einerseits hyperbolisch der Asymptote und verlaufen nach der andern Seite parabolisch. s fällt mit der Asymptote zusammen. In der R. E. entspricht die F -Kurve.

22. Typus. Nur ein Typus, der eben beschrieben wurde. Fig. 22. R. E. 22.

III. f schneidet die P_3 in einem reellen und zwei imaginären Punkten. $F(u, v, w) > 0$.

Die C_3 besteht aus einem einzigen Zuge mit drei reellen Wendepunkten im Endlichen und hat eine einfache reelle und zwei imaginäre Asymptoten, die sich in einem reellen Punkte A treffen. s ist ebenfalls reell und trifft die C_3 nur in einem reellen Punkte. In der R. E. entspricht das Feld, von dessen Punkten aus nur eine reelle Tangente an die F geht (außerhalb des dreispitzigen Zuges von F).

23. Typus. f liegt zwischen der Tangente an den dreispitzigen Zug von F und der von Σ . $F(u, v, w) \geq 0$; $\Sigma(u, v, w) \leq 0$. A liegt in dem Felde zwischen der Asymptote und s , in dem kein Teil der C_3 liegt, und das von a geschnitten wird. Fig. 23. R. E. 23.

Besondere Fälle.

- a) Eine b geht durch A .
- β) Eine b geht durch den Schnittpunkt von s mit der Asymptote.
- γ) f geht durch den Schnittpunkt zweier reellen Wendetangenten.
- δ) f geht durch den Schnittpunkt einer Wendetangente mit der zugehörigen harmonischen Geraden.

24. Typus. f ist Tangente an den dreispitzigen Zug von Γ . $\Gamma(u, v, w) = 0$. A liegt auf der C_3 , die in diesem Punkte von s berührt wird. Fig. 24. R. E. 24.

Spezielle Fälle: Wie oben.

25. Typus. f schneidet die P_3 in imaginären, Σ und Γ in reellen Punkten und liegt zwischen den Tangenten an P_3 und den dreispitzigen Zug von Γ oder von Σ .
 $\Gamma(u, v, w) \gtrless 0$; $\Sigma(u, v, w) \gtrless 0$. A liegt in einem Felde zwischen der Asymptote und der C_3 , in dem die s nicht verläuft. Fig. 25. R. E. 25.

Von besonderen Fällen sind dieselben erwähnenswert wie bei 21.

Man kann zunächst folgende drei Unterabteilungen machen:

- a) A liegt in dem Felde zwischen der Asymptote und dem Teil der C_3 mit zwei Wendepunkten. Der Schnittpunkt von s und a liegt dabei auf derselben Seite der Asymptote wie A .
- b) s geht durch den Wendepunkt. Dann haben beide Teile der C_3 nur noch je einen Wendepunkt.
- c) A liegt in dem Felde zwischen der Asymptote und dem Teile der C_3 mit nur einem Wendepunkt. Der Schnittpunkt von s und a ist von A durch die Asymptote getrennt.

26. Typus. f ist Tangente an den dreispitzigen Zug von Σ . $\Sigma(u, v, w) = 0$. A liegt auf der Asymptote. Fig. 26. R. E. 26.

27. Typus. f ist harmonische Gerade eines Wendepunktes. $\Sigma(u, v, w) = 0$; $\Gamma(u, v, w) = 0$. s ist Wendetangente und trifft a auf der Asymptotenpunkte A , der der zu f gehörige Wendepunkt ist. Jede durch den Wendepunkt auf der Asymptote gehende Sehne wird durch diesen halbiert. Fig. 27. R. E. 27.

Anmerkung. Die Typen der Abteilung B) enthalten in gewissem Sinne die Typen von A) als spezielle Fälle. Man erhält aus einem Typus von B) einen von A), indem man die Bedingung $\Omega'(u, v, w) = 0$ zufügt. Die Zusammengehörigkeit der entsprechenden Typen von A) und B) zeigt auch die R. E. So z. B. sind 1 und 7 in diesem Sinne Spezialfälle von 17. Es liegt nun die Frage nahe, warum bei A) die Typen 1 und 7 als zwei Fälle unterschieden wurden, während hier nur ein entsprechender Typus 17 aufgeführt wurde. (Ähnlich bei 18, 19 etc.) Die Sache entscheidet sich folgendermaßen: Die Typen in A) entstehen aus einem Büschel von f . Sucht man analog Typen von B), die ebenfalls demselben Büschel von f mit einem Zentrum M auf P_3 entsprechen, so kann man auch hier bei 17 oder 19 mehrere Arten von Typen unterscheiden. Die Trennung liegt dann in denjenigen Typen, die man erhält, wenn f durch einen Wendepunkt geht. (Grenzlage von f .) (Diese gehören der Abteilung A) an.) Bei einem solchen Typus wird eine Asymptote Wendearsymptote w und es werden $a \parallel b \parallel s \parallel w$. Zwei Typen, die aus zwei f entstehen, die durch eine solche Grenzlage von f getrennt sind, unterscheiden sich nun dadurch, daß die Schnittpunkte von a , b , s mit der Asymptote, die in

der Grenzlage von f Wendeadasymptote wird, von der einen Seite der festen Asymptote auf die andere rücken. Diese Unterscheidung hat aber nur Bedeutung innerhalb der durch ein Büschel von f erzeugten C_3 ; auch sind eben nur hier stetige Übergänge gegeben.

Die übrigen Kurven ohne Oval.

Vorbemerkung. Im Folgenden sollen vergleichsweise mit den Typen von $S < 0$, $T < 0$ die Typen aus den andern P_3 ohne Oval aufgezählt und in der R. E. dargestellt werden. Um möglichst kurz sein zu können sei folgende Bezeichnungsart festgesetzt:

- A. bedeutet die Gesamtheit der Typen mit einem unendlich fernen Wendepunkt.
- B. umfaßt die Typen ohne unendlich fernen Wendepunkt.
- I. umfaßt die Typen mit 3 reellen Asymptoten,
- II. die Typen, die die unendlich ferne Gerade berühren, und
- III. die Typen mit einer reellen und zwei imaginären Asymptoten.

Die arabischen Ziffern verweisen auf die Typen bei $S < 0$, $T < 0$, mit denen sie in der Lage der Asymptoten und der Satellite und bei A) in der Lage der Wendegeraden übereinstimmen, abgesehen von den Realitätsverhältnissen.

1. Kurven, für welche $S < 0$, $T > 0$. Es sei

$$\eta^2 \zeta = (\xi^2 + \zeta^2) (\xi + \alpha \zeta)$$

eine P_3 , für welche $S < 0$, $T < 0$. Wendet man auf diese die Transformation

$$\begin{aligned} \xi &= -x \\ \eta &= iy \\ \zeta &= z \end{aligned}$$

an, so erhält man

$$y^2 z = (x^2 + z^2) (x - \alpha z).$$

Diese Gleichung stellt dann eine P_3 dar, für die $S < 0$, $T > 0$. Durch die angegebene Transformation werden die reellen Geraden, die durch den unendlich fernen Wendepunkt der ersten Parabel gehen, wieder in solche übergeführt. Dabei gehen aber Gerade, die die erste Parabel in reellen Punkten schneiden, in solche über, die die zweite in 2 imaginären Punkten schneiden, und umgekehrt; berührende gehen in ebensolche über, insbesondere geht die unendlich ferne Wendetangente wieder in eine solche über. Der Äquator a geht in die Wendegerade b_3 über und umgekehrt. Somit werden die Typen der Abteilung A) der ersten Parabel in ebensolche der zweiten Parabel übergeführt, wobei aber Klasse I in Klasse III, Klasse III in Klasse I und Klasse II wieder in Klasse II übergeht. Die Lage der w, s, a, A, b_3 geht aus der bei dem gleichnumerierte Typus der vorher behandelten P_3 hervor, wenn man b_3 und a vertauscht.¹⁾ Imaginäre Asymptoten gehen in reelle über und umgekehrt. Wir haben also folgende Typen:

- A. I. Typen: 12, 13, 14, 15, 16.
- II. Typen: 10 und 11.
- III. Typen: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9.

B. Dies Entsprechen gilt nicht mehr, wenn f nicht durch einen Wendepunkt geht, da im allgemeinen eine reelle Gerade $u x + v y + w z = 0$ aus einer imaginären $-u \xi + i v \eta + w \zeta = 0$ hervorgeht. Es ergeben sich unter Anwendung der für die arabischen Ziffern festgesetzten Bedeutung folgende Typen:

¹⁾ Dasselbe gilt auch für die Typen der Abteilung A) bei den übrigen C_3 , für welche $T > 0$ ist.

L.B.
Karlsruhe

31

I. Typen: 17, 20, 21.

II. Typus: 22.

III. Typen: 23, 24, 25, 25a, 26, 26a, 27.

Die R. E. ist in Fig. II dargestellt und erläutert alles weitere wohl genügend.

2. $S = 0, T < 0$. R. E. Fig. III.

A. I. Typen: 1, 2 (umfaßt 2, 3, 4, 5, 6 der ersten Art und ist eine C_3 mit 3 durch einen Punkt gehenden reellen Wendea asymptoten), 7, 8, 9.

II. Typen: 10, 11.

III. Typen: 12, 13, 14, 15, 16.

B. I. Typen: 17, 20, 21.

II. Typus 22.

III. Typen: 23, 24, 25, 26, 27.

3. $S = 0, T > 0$. R. E. Fig. IV.

A. I. Typen: 12, 13, 14, 15, 16.

II. Typen: 10 und 11.

III. Typen: 1, 2, 7, 8, 9.

B. I. Typen: 17, 20, 21.

II. Typus 22.

III. Typen: 23, 24, 25a, 26, 27.

4. $S > 0, T < 0$. R. E. Fig. V.

A. I. Typen: 1, 4, 7, 8, 9.

II. Typen: 10, 11.

III. Typen: 12, 13, 14, 15, 16.

B. I. Typen: 17, 20, 21.

II. Typus: 22.

III. Typen: 23, 24, 25, 26, 27.

5. $S > 0, T = 0$. R. E. Fig. VI.

A. I. Typen: 1, 4, 7, 8, 9.

II. Typen: 10, 11.

III. Typen: 12, 13, 14, 15, 16.

B. I. Typen: 17, 20, 21.

II. Typus: 22.

III. Typen: 23, 24, 25, 26, 27.

6. $S > 0, T > 0$. R. E. Fig. VII.

A. I. Typen: 12, 13, 14, 15, 16.

II. Typen: 10, 11.

III. Typen: 1, 4, 7, 8, 9.

B. I. Typen: 17, 20, 21.

II. Typus: 22.

III. Typen: 23, 24, 25, 26, 27.

Baden-Baden, 1904, Ostern.



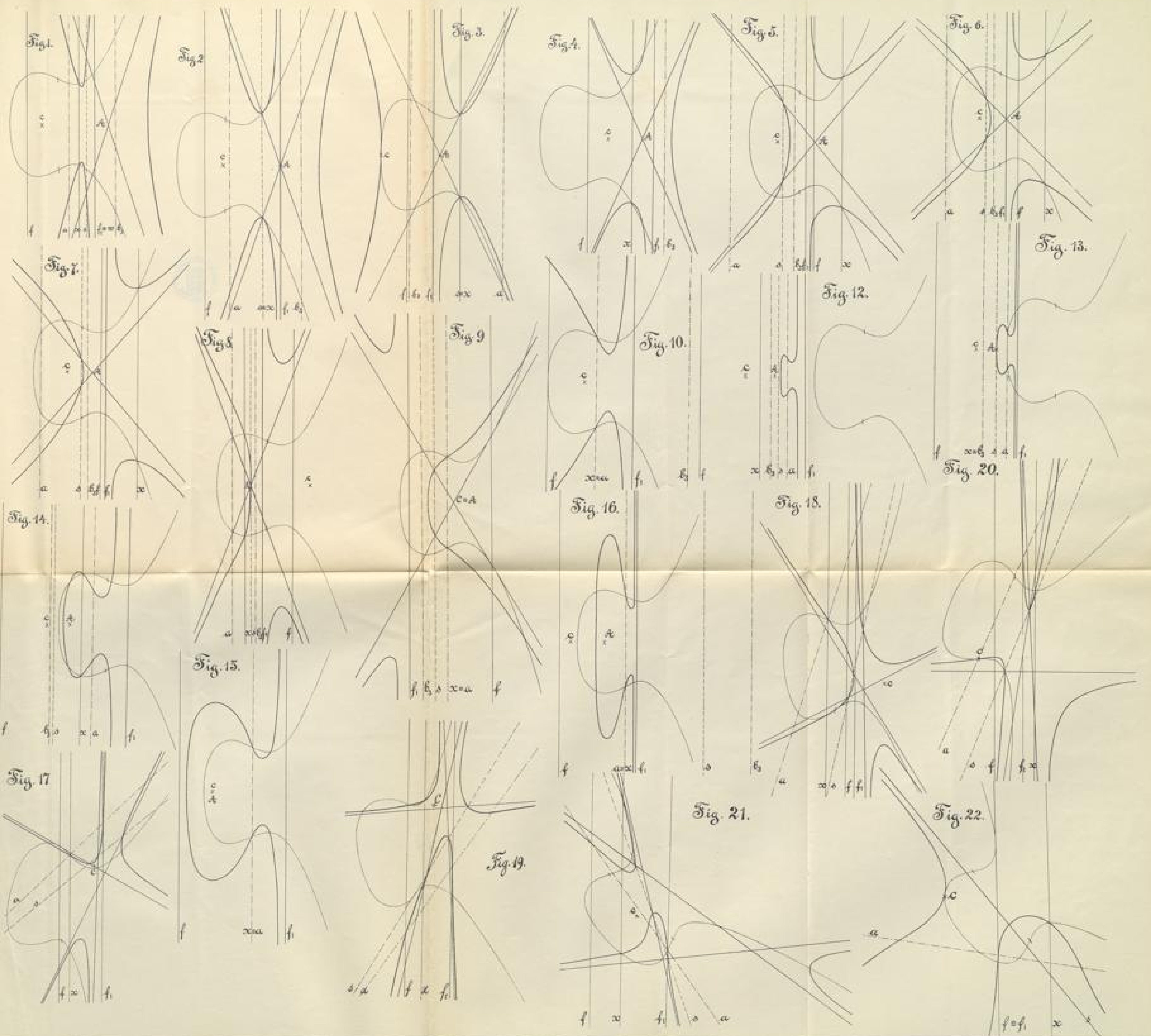




Fig. 23.

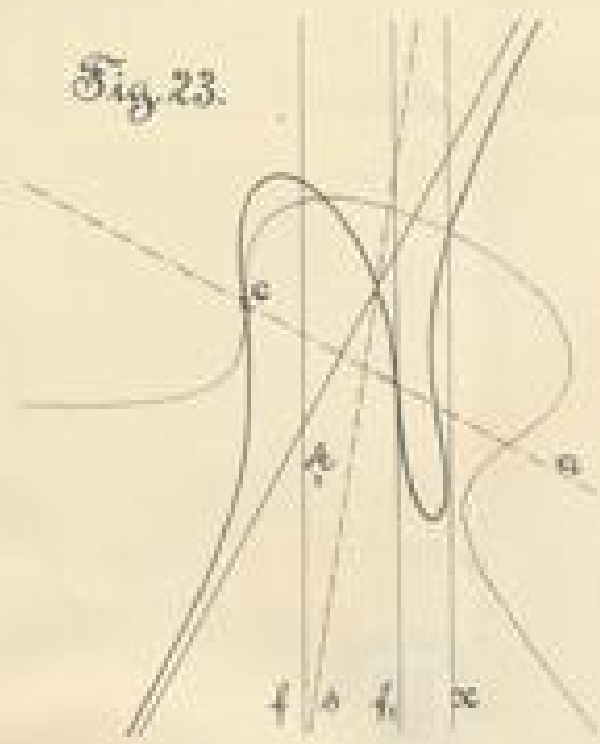


Fig. 24.



Fig. 25.



Fig. 26.



Fig. 27.

