

**Badische Landesbibliothek Karlsruhe**

**Digitale Sammlung der Badischen Landesbibliothek Karlsruhe**

**Über den Gültigkeitsbereich der Stokeschen  
Widerstandsformel**

**Noether, Fritz**

**Leipzig, 1912**

[urn:nbn:de:bsz:31-272814](https://nbn-resolving.org/urn:nbn:de:bsz:31-272814)

II, 64

Noether, Fritz  
(1912)

(T. H. 2074)

ÜBER  
STOKES

IN ERLAN  
MATHEMAT  
NISCHEN

# ÜBER DEN GÜLTIGKEITSBEREICH DER STOKESSCHEN WIDERSTANDSFÖRMEL

HABILITATIONSSCHRIFT

ZUR ERLANGUNG DER VENIA LEGENDI FÜR MECHANIK UND  
MATHEMATIK AN DER GROSSHERZOGLICH BADISCHEN TECH-  
NISCHEN HOCHSCHULE FRIDERICIANA ZU KARLSRUHE I. B.

IM JULI 1911 VORGELEGT

VON

DR. PHIL. FRITZ NOETHER

ASSISTENT FÜR THEORETISCHE MECHANIK

---

DRUCK VON B. G. TEUBNER IN LEIPZIG 1912

Faint, illegible text, likely bleed-through from the reverse side of the page.

ÜBER  
STOKES

ERLAN  
MATHEMAT  
NISCHEN

D

# ÜBER DEN GÜLTIGKEITSBEREICH DER STOKESSCHEN WIDERSTANDSFORMEL

HABILITATIONSSCHRIFT

ZUR ERLANGUNG DER VENIA LEGENDI FÜR MECHANIK UND  
MATHEMATIK AN DER GROSSHERZOGLICH BADISCHEN TECH-  
NISCHEN HOCHSCHULE FRIDERICIANA ZU KARLSRUHE I. B.

IM JULI 1911 VORGELEGT

VON

**DR. PHIL. FRITZ NOETHER**

ASSISTENT FÜR THEORETISCHE MECHANIK

1947. S. 135

---

DRUCK VON B. G. TEUBNER IN LEIPZIG 1912

Bibl. Techn. Hochschule  
Archiv der Hochschulschriften

Referent: Geh. Hofrat Prof. Dr. K. HEUN  
Korreferent: Geh. Hofrat Prof. Dr. P. STÄCKEL



Sonderabdruck aus dem 62. Bande der »Zeitschrift für Mathematik und Physik«  
Verlag von B. G. Teubner in Leipzig und Berlin

### Einleitung.

Der Widerstand, den ein in einer Flüssigkeit bewegter Körper findet, oder der Gesamtdruck, den strömende Flüssigkeit auf einen ruhenden Körper ausübt, hängt von der Spannungsverteilung in der Flüssigkeit längs der Körperoberfläche ab. Von der hydrodynamischen Potentialtheorie wird gerade diese Spannungsverteilung nicht richtig dargestellt, im Zusammenhang damit, daß die Theorie der Bedingung des Haftens der Flüssigkeit an der Körperoberfläche, die den beobachteten Strömungserscheinungen annähernd Ausdruck gibt, nicht genügen kann. Sie versagt daher bei der Berechnung des gesuchten Widerstandes, während die von Navier und Stokes begründete Theorie der Flüssigkeiten mit innerer Reibung auch der Haftbedingung gerecht wird. Die wesentliche Schwierigkeit aber für die strenge Behandlung des Problems mit Hilfe der Navier-Stokesschen Differentialgleichungen ist der quadratische Charakter dieser Gleichungen, der ihre vollständige Auswertung vorläufig kaum erwarten läßt. Nur von zwei extremen Seiten her wurde bisher der Versuch gemacht, sie zur Behandlung der vorliegenden Fragen anzugreifen. (Die Untersuchungen von Helmholtz über Wirbelbewegungen kommen in diesem Zusammenhang nicht in Betracht, da seine Voraussetzung von Unstetigkeitsflächen in der Strömung nicht den Bedingungen reibender Flüssigkeiten entspricht und auch bei verschwindender Reibung zu instabilen Strömungsformen führt.<sup>1)</sup>)

Stokes<sup>2)</sup> behandelt den Fall einer Flüssigkeit von sehr großer Zähigkeit oder geringer Dichte, für die die inneren Widerstände so groß gegenüber den Trägheitskräften sind, daß letztere vernachlässigt

1) Helmholtz: Über diskontinuierliche Flüssigkeitsbewegungen, Ges. Werke, Bd. 1, S. 152. Vgl. auch Th. v. Kármán: Über den Mechanismus des Flüssigkeitswiderstands, Gött. Nachr., 1911, S. 509 u. 1912, S. 547.

2) Stokes: On the Effect of the Internal Friction ..., Camb. Trans. S. [8] 9 (1851); Papers, vol. III, p. 1.



werden können; oder, was auf das Gleiche hinauskommt, den Fall, daß die Trägheit wegen der Kleinheit der Geschwindigkeit, oder der Kleinheit der eingetauchten Körper und der dadurch bedingten geringen Geschwindigkeitsunterschiede vernachlässigt werden kann. In diesen Fällen werden die erwähnten Differentialgleichungen linear; das Stokessche Resultat für den Fall der Bewegung einer Kugel ist die bekannte Formel für den Widerstand:

$$W = 6\pi\mu Ua,$$

wo  $U$  die Geschwindigkeit der Kugel,  $a$  ihren Radius und  $\mu$  den Koeffizienten der inneren Reibung bedeutet.

Von der entgegengesetzten Richtung her, dem Falle kleiner Reibung, wo die Trägheit ein ausschlaggebender Faktor ist, hat zuerst L. Prandtl die Aufgabe angegriffen<sup>1)</sup>, durch Untersuchung der Grenzschichten d. h. der Schichten in der nächsten Nähe der Oberfläche, in denen die an der Oberfläche haftende Strömung sehr rasch zu der äußeren Geschwindigkeit ansteigt. Diese Untersuchungen führen zwar zur Erklärung der „Ablösung“ der Strömung und der Wirbelbildung hinter dem Körper, sie vermögen aber nicht die Strömung auf der Rückseite hinreichend zu berechnen, um zu einem Widerstandsgesetz zu führen. Die wesentliche Schwierigkeit liegt hier darin, daß die Flüssigkeitsbewegung auch bei beliebig verkleinerter Reibung nicht in die reibungsfreie Potentialbewegung übergeht, eben wegen der oben erwähnten Unterschiede in den Randbedingungen der Potentialströmung und der wirklichen wirbelnden Strömungen. Dadurch wird es erforderlich, entweder als erste Annäherung eine von der wirklichen Bewegung wesentlich abweichende Strömung zugrunde zu legen, oder aber die nur experimentell ermittelte Strömung in einiger Entfernung von der Oberfläche zu benutzen.

Wollte man diese Untersuchungen zu einem mathematisch exakten Näherungsverfahren ausbilden so müßte man, ausgehend von einer Potentialbewegung, die die Differentialgleichungen streng befriedigt, aber nicht die Randbedingungen, eine Lösung suchen, die die richtigen Randbedingungen sukzessive annähert. Leichter scheint aber der entgegengesetzte Weg zu sein: Ausgehend von der Stokesschen Bewegung, die zwar die Randbedingungen streng befriedigt, aber nicht die Differentialgleichungen, eine Annäherung an die Differentialgleichungen zu suchen. Dazu soll die folgende Untersuchung einen Beitrag liefern.

1) Über Flüssigkeitsbewegung bei sehr kleiner Reibung, Verh. d. int. Math. Kongresses, Heidelberg 1904; s. a. die Göttinger Dissertationen: H. Blasius: Grenzschichten in Flüssigkeiten . . . , 1904 (Ztschr. f. Math. u. Physik, Bd. 55); E. Boltze: Grenzschichten an Rotationskörpern . . . , 1908; K. Hiemenz: Die Grenzschicht an einem . . . Kreiszyylinder, 1911 (Dinglers Polytechn. Journal, Bd. 326).

Zu dieser Problemstellung hat noch ein anderer Gesichtspunkt geführt, die Frage nach dem Gültigkeitsbereich der genannten Stokes'schen Formel, die für grundlegende Untersuchungen der modernen Physik eine wesentliche Rolle spielt, nämlich für die Bestimmungen des hypothetischen Elementarquantums der Elektrizität, der Elektronenladung, bezw. die Prüfung, ob ein solches Elementarquantum überhaupt existiert.<sup>1)</sup> Während für die Untersuchung des Gültigkeitsbereichs der Stokes'schen Formel nach der Seite kleiner Dimensionen der bewegten Körper hin die kinetische Gastheorie in Frage kommt, bezieht sich die vorliegende hydrodynamische Untersuchung, die auch bereits experimentell in Angriff genommen worden ist<sup>2)</sup>, auf den Gültigkeitsbereich nach der Seite wachsender Dimensionen hin. Wie schon Rayleigh<sup>3)</sup> auf Grund einer einfachen Dimensionsbetrachtung bemerkt hat, hängt die Gültigkeit der Stokes'schen Formel wesentlich nur von der Kleinheit der unbenannten „Reynoldsschen“ Zahl ab:

$$S = \frac{\sigma a U}{\mu},$$

wo  $\sigma$  die Dichte der Flüssigkeit bezeichnet. Daher wird eine Annäherung an die Stokes'sche Bewegung eine Entwicklung der Integrale der hydrodynamischen Differentialgleichungen nach Potenzen dieser Größe sein müssen. Zu dieser Entwicklung ist das Folgende nur ein erster Schritt, indem wir das erste zur Stokes'schen Bewegung hinzutretende Glied explizit aufstellen.

Diese Aufgabe wurde früher schon von Whitehead in Angriff genommen<sup>4)</sup>, doch scheiterte sein Versuch an Schwierigkeiten, die in der Natur der Stokes'schen Vernachlässigungen liegen, wie B. W. Oseen in Verbindung mit einer neuen Begründung der Stokes'schen Widerstandsformel hervorgehoben hat.<sup>5)</sup> Obwohl im allgemeinen unter der Voraussetzung kleiner Werte der Reynoldsschen Zahl die Stokes'sche Vernachlässigung der Trägheitsglieder berechtigt ist, so trifft dies nicht mehr zu in sehr großer Entfernung von der Kugel, wo immer einzelne dieser Glieder groß werden gegen die berücksichtigten. Diese hat Oseen von vornherein mit beachtet und gelangt so zu einer Strömung, die in großen Entfernungen zwar wesentlich von der Stokes'schen ab-

1) Zusammenstellung bei F. Ehrenhaft: Phys. Ztschr. 11 (1910), S. 940 f.

2) Allen: Phil. Mag. 5, 50 (1900), p. 323, 519. Zeleny u. Mc. Keehan: Phys. Ztschr. 11 (1910), S. 78.

3) Phil. Mag. (4) 46 (1893) p. 354 f. (Papers VI, p. 78 f.).

4) Quarterly Journal of Mathematics 23 (1889) p. 78, 143.

5) Über die Stokes'sche Formel . . . , Arkiv för Matematik, Astronomi och Fysik, Bd. 6 (1910), Nr. 29. (Beim Erscheinen dieser Abhandlung war das Manuskript der vorliegenden Arbeit im Wesentlichen fertiggestellt.)

weicht, in der Nähe der Kugel aber durch diese bei kleiner Reynoldsscher Zahl appoximiert wird und daher auch zur selben Widerstandsformel führt. Der von Stokes begangene Fehler erweist sich also für seinen Zweck als belanglos, dagegen macht er sich geltend bei dem von Whitehead eingeschlagenen Wege der weiteren Entwicklung, indem es sich als unmöglich erweist, diese eindeutig zu bestimmen.

Doch läßt sich die Stokessche Ableitung auch auf einem anderen als dem von Oseen eingeschlagenen Wege rechtfertigen, und dieses Verfahren scheint leichter zu der geforderten weiteren Annäherung zu führen. Wir betrachten nicht wie Stokes eine Parallelströmung, in der die Kugel ruht, sondern eine Strömung, die durch eine in großer Entfernung von der Kugel befindliche Quelle und eine auf der entgegengesetzten Seite in gleicher Entfernung befindliche Senke hervorgerufen wird, eine Strömung, die sich ja in der Nähe der Kugel nicht wesentlich von einer Parallelströmung unterscheidet, wenn die Entfernung der Quelle hinreichend groß ist gegenüber dem Kugelradius. In unendlicher Entfernung aber ist diese Strömung wesentlich von der Parallelströmung verschieden, und dadurch wird es ermöglicht, daß die bei der Stokesschen Bewegung gekennzeichneten Schwierigkeiten hier nicht auftreten. Es gelingt so in der Tat, eine eindeutige Lösung für die Differentialgleichungen und Randbedingungen der ersten Näherung zu finden.

Mit der Frage nach dem Gültigkeitsbereich der Stokesschen Formel hängt die andere zusammen, bei welcher unteren Geschwindigkeitsgrenze die bei großen Geschwindigkeiten stets beobachtete Rückströmung und Wirbelbildung auf der Rückseite des Körpers eintritt. Unsere erste Näherung gibt allerdings auch hier eine vorläufige Antwort, doch bleibt, da diese Grenze schon aus dem Gebiete sehr kleiner Reynoldsscher Zahl herausfällt, noch abzuwarten, wie durch die weitere Entwicklung diese Grenze beeinflußt wird.

Die folgende Untersuchung gründet sich auf die Annahme stationärer Bewegung einer inkompressiblen Flüssigkeit. Es müßte allerdings von vornherein in Zweifel gezogen werden, ob eine solche über den ganzen unendlichen Raum ausgedehnte Bewegung mit den hydrodynamischen Differentialgleichungen und Randbedingungen überhaupt verträglich ist, ob nicht etwa jede Bewegung von periodisch wechselnden Wirbelungen begleitet ist. In der Tat würden die genannten Schwierigkeiten auch dann fortfallen, wenn wir die zugrunde gelegte stationäre Bewegung durch eine periodische Bewegung, äquivalent einem Pendeln der Kugel, ersetzten, aber die mathematischen Komplikationen würden sich dann schon wesentlich erhöhen. Doch hat C. W. Oseen in der genannten

und einer weiteren Arbeit<sup>1)</sup> den Existenzbeweis für die stationäre Lösung eines verwandten Problems durchgeführt und sein Ansatz dürfte wohl auch zu dem hier geforderten Existenzbeweis führen. Die im Folgenden untersuchte Bewegung stellt aber nur eine Näherungsbewegung in dem Sinne dar, daß in ihren Bedingungsgleichungen die vernachlässigten Glieder sicher klein sind neben den berücksichtigten.

### § 1. Die allgemeinen hydrodynamischen Differentialbeziehungen und die Stokessche Strömung.

Es bezeichne  $u, v, w$  die Geschwindigkeitskomponenten einer Strömung, an der Stelle  $x, y, z$  nach den Achsen der  $x, y, z$  gemessen.  $\sigma$  sei die Dichte,  $\mu$  die Viskositätskonstante,  $p$  der Druck der Flüssigkeit. Dann lauten die Navier-Stokesschen Differentialgleichungen für inkompressible stationäre Strömung:

$$(1) \quad \begin{cases} \sigma \left( u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} \right) + \frac{\partial p}{\partial x} - \mu \Delta u = 0 \\ \sigma \left( u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial z} \right) + \frac{\partial p}{\partial y} - \mu \Delta v = 0 \\ \sigma \left( u \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial y} + w \frac{\partial w}{\partial z} \right) + \frac{\partial p}{\partial z} - \mu \Delta w = 0 \end{cases}$$

$$(2) \quad \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0$$

wo

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} = \Delta$$

gesetzt ist.

Dazu treten noch die Randbedingungen, die für den zu untersuchenden Fall einer ruhenden Kugel in Parallelströmung so lauten: An der Kugeloberfläche soll  $u = v = w = 0$  sein, während im Unendlichen in jeder Richtung  $u = U, v = 0, w = 0$  verlangt wird.

Die Inkompressibilitätsbedingung (2) pflegt man in allen Fällen, in denen eine ausgezeichnete Richtung, hier die  $x$ -Richtung, vorhanden ist, in die keine Wirbelkomponente der Strömung fällt, identisch zu erfüllen durch den Ansatz:

$$(3) \quad u = -\frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2}; \quad v = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y}; \quad w = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial z}.$$

Wenn die Strömung außerdem Achsensymmetrie um die  $X$ -Achse hat, ferner angenommen wird, daß die Stromlinien überall in den durch die

1) Über die Stokessche Formel . . . , II; Arkiv för Matematik, Astronomi och Fysik, Bd. 7, Nr. 1 (1911).

X-Achse hindurchgehenden Ebenen liegen, so kann die Funktion  $\varphi$  ohne Einschränkung der Allgemeinheit als Funktion von  $x$  und

$$r = \sqrt{y^2 + z^2}$$

angesetzt werden. Bezeichnet nun  $q$  die in die Richtung des Radius  $r$  fallende Geschwindigkeitskomponente, so gehen die Gleichungen (3) über in:

$$u = - \left( \frac{\partial^2 \varphi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial r} \right) = - \frac{1}{r} \frac{\partial \left( r \frac{\partial \varphi}{\partial r} \right)}{\partial r}$$

$$q = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial r} = \frac{1}{r} \frac{\partial \left( r \frac{\partial \varphi}{\partial r} \right)}{\partial x}.$$

Die Funktion

$$(4) \quad r \frac{\partial \varphi}{\partial r} = \psi$$

gewinnt also durch die genannten Einschränkungen der Strömungsform die Bedeutung der Stokesschen Stromfunktion<sup>1)</sup>, durch die sich die Geschwindigkeitskomponenten bekanntlich so ausdrücken:

$$(5) \quad u = - \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial r}; \quad q = \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial x}.$$

Aus dieser Ableitung folgen zwischen den Funktionen  $\varphi$  und  $\psi$  sogleich die weiteren Beziehungen:

$$(6) \quad r \left( \frac{\partial q}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial r} \right) = r \frac{\partial \Delta \varphi}{\partial r} = \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2} - \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial r} = D(\psi).$$

Der so definierte Differentialprozeß  $D$  spielt in mancher Hinsicht für die Funktion  $\psi$  die gleiche Rolle, wie der Differentialprozeß  $\Delta$  für die Funktion  $\varphi$ , sein Verschwinden würde die Wirbelfreiheit der Strömung zum Ausdruck bringen. Genau in der gleichen Weise, wie die Gl. (6) aus der Gl. (4) gewonnen wurde, läßt sich nun auch noch weiter schließen:

$$(7) \quad r \frac{\partial \Delta \Delta \varphi}{\partial r} = DD\psi,$$

wo nun  $\Delta \Delta$  und  $DD$  die Wiederholung des Prozesses  $\Delta$  bzw.  $D$  bedeutet. Wir werden uns im folgenden nicht auf die Benützung einer der Funktionen  $\varphi$  oder  $\psi$  beschränken, sondern je nach dem vorliegenden Zweck die geeignetere Wahl treffen. Der Übergang von der einen zur anderen Funktion ist stets mittels der Gl. (4), (6), (7) leicht auszuführen.

Aus den Gl. (1) haben wir zunächst den Druck  $p$  zu eliminieren, da er in die Randbedingungen nicht eingeht, sondern erst nachträglich

1) Stokes: Camb. Trans. 7. 1842 (Papers, vol. I, p. 1). S. a. Lamb, Hydrodynamik, § 94.

mittels der Gl. (1) aus den gefundenen Geschwindigkeitswerten berechnet wird. Aus (1) entstehen zunächst die folgenden Gleichungen:

$$(1) \quad \begin{cases} \sigma \left( u \frac{\partial u}{\partial x} + q \frac{\partial u}{\partial r} \right) + \frac{\partial p}{\partial x} - \mu \Delta u = 0 \\ \sigma \left( u \frac{\partial q}{\partial x} + q \frac{\partial q}{\partial r} \right) + \frac{\partial p}{\partial r} - \mu \left( \frac{y}{r} \Delta v + \frac{z}{r} \Delta w \right) = 0 \end{cases}$$

oder mittels der Gl. (3)

$$\begin{aligned} \sigma \left( u \frac{\partial u}{\partial x} + q \frac{\partial u}{\partial r} \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left( p - \mu \frac{\partial \Delta \varphi}{\partial x} \right) + \mu \Delta \Delta \varphi &= 0 \\ \sigma \left( u \frac{\partial q}{\partial x} + q \frac{\partial q}{\partial r} \right) + \frac{\partial}{\partial r} \left( p - \mu \frac{\partial \Delta \varphi}{\partial x} \right) &= 0. \end{aligned}$$

Die Elimination von  $p$  ergibt somit:

$$\begin{aligned} \sigma \left[ u \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial u}{\partial r} - \frac{\partial q}{\partial x} \right) + q \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{\partial u}{\partial r} - \frac{\partial q}{\partial x} \right) \right. \\ \left. + \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial q}{\partial r} \right) \left( \frac{\partial u}{\partial r} - \frac{\partial q}{\partial x} \right) \right] + \mu \frac{\partial \Delta \Delta \varphi}{\partial r} = 0. \end{aligned}$$

Hier ist nun die Einführung der Stromfunktion  $\psi$  mittels der Gl. (4), (5), (6), (7) am zweckmäßigsten, wir erhalten so aus der vorangehenden Gleichung durch Multiplikation mit  $r$  und mittels geringer Vereinfachungen die folgende für die Funktion  $\psi$ :

$$(8) \quad DD(\psi) = \frac{\sigma}{\mu} \frac{1}{r} \left( \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial D\psi}{\partial r} - \frac{\partial \psi}{\partial r} \frac{\partial D\psi}{\partial x} - \frac{2}{r} \frac{\partial \psi}{\partial x} D\psi \right).$$

Zur Gl. (8) treten noch die Randbedingungen, welche ausdrücken, daß im Unendlichen (im Falle der Parallelströmung) überall

$$(8a) \quad -\frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial r} = U \quad \text{und} \quad \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial x} = 0$$

sei, daß ferner für die Kugel  $R = \sqrt{x^2 + r^2} = a$ :

$$\frac{\partial \psi}{\partial x} = \frac{\partial \psi}{\partial r} = 0$$

sei. Da die Funktion  $\psi$  nur bis auf eine additive Konstante bestimmbar ist, so kann diese so gewählt werden, daß die letzteren Bedingungen übergehen in

$$(8b) \quad \psi = \frac{\partial \psi}{\partial R} = 0$$

für  $R = a$ , wobei  $\psi$  als Funktion des Radius  $R$  und des Polarwinkels  $\vartheta = \arctg \frac{r}{x}$  gedacht ist.

Unter den in der Einleitung genannten Voraussetzungen für die Stokessche Bewegung kann nun in (8) die rechte Seite, deren Glieder quadratisch in  $\psi$  sind, neben den linearen Gliedern der linken Seite

vernachlässigt werden, und es ergibt sich die Grundgleichung für die Stokessche Bewegung:

$$(9) \quad DD(\psi_0) = 0,$$

wozu noch die an sich linearen Randbedingungen unverändert hinzutreten. Die Erfüllung dieser Bedingungen lautet

$$(10) \quad \psi_0 = \frac{U}{4} r^2 \left( -2 + 3 \frac{a}{R} - \frac{a^3}{R^3} \right) = -\frac{U}{4} \sin^2 \vartheta (R - a)^2 \frac{2R + a}{R},$$

wo der Definition nach

$$x = R \cos \vartheta$$

$$r = R \sin \vartheta$$

gesetzt wurde.

Diese Gleichungen, in Verbindung mit den Ausdrücken für die Spannungskomponenten<sup>1)</sup> in einer strömenden zähen Flüssigkeit, führen zu der in der Einleitung genannten Stokesschen Widerstandsformel für die Kugel.

## § 2. Berücksichtigung der quadratischen Glieder der Differentialgleichung (8) in erster Näherung.

Um die quadratischen Glieder der Gl. (8) in erster Annäherung zu berücksichtigen, setzen wir

$$\psi = \psi_0 + \psi_1,$$

wo  $\psi_0$  der in Gl. (10) angegebene Ausdruck sei und  $\psi_1$  von der Ordnung  $S\psi_0$  vorausgesetzt wird, unter  $S$  die Reynoldssche Zahl  $\frac{\sigma a U}{\mu}$  verstanden. Die Vernachlässigung aller Glieder der Differentialgleichung (9), die den Faktor  $S^2$ , bzw.  $\frac{\sigma}{\mu} S$  enthalten, führt dann, unter Berücksichtigung, daß  $DD(\psi_0) = 0$ , zu der folgenden:

$$(11) \quad DD(\psi_1) = \frac{\sigma}{\mu} \frac{1}{r} \left( \frac{\partial \psi_0}{\partial x} \frac{\partial D\psi_0}{\partial r} - \frac{\partial \psi_0}{\partial r} \frac{\partial D\psi_0}{\partial x} - \frac{2}{r} \frac{\partial \psi_0}{\partial x} D\psi_0 \right),$$

die auf der rechten Seite nur bekannte Größen enthält. Dazu kommen die Randbedingungen, daß für  $R = a$

$$\psi_1 = \frac{\partial \psi_1}{\partial R} = 0$$

und im Unendlichen

$$\frac{1}{r} \frac{\partial \psi_1}{\partial x} = \frac{1}{r} \frac{\partial \psi_1}{\partial r} = 0 \text{ sei.}$$

1) Saint-Venant: Comptes Rendus 17 (1843) p. 1240. Stokes: Camb. Trans. 8 (1845) p. 287 (Papers, vol. I, p. 75). S. a. Lamb: Hydrodynamik, § 314.

Die Gleichung (11) ist durch Einsetzen aus (10) und der hieraus folgenden Gleichung:

$$(12) \quad D\psi_0 = -\frac{3}{2} a U \frac{\sin^2 \vartheta}{R} = -\frac{3}{2} a U \frac{r^2}{R^3}$$

auszuführen. Es ergibt sich (vgl. die Ausrechnung im Anhang 1)

$$(13) \quad DD(\psi_1) = \frac{9}{4} \frac{\sigma}{\mu} U^2 \sin^2 \vartheta \cos \vartheta \left( \frac{2a}{R^2} - \frac{3a^2}{R^3} + \frac{a^4}{R^5} \right).$$

Bevor wir zur Behandlung dieser Gleichung gehen, sind einige Vorbemerkungen nötig über die Lösungen der Gleichungen

$$D\psi = 0 \text{ und } D\psi = F,$$

auf die wesentlich die sukzessiven Annäherungen der exakten Differentialgleichungen zurückzuführen sind.<sup>1)</sup>

Aus den im § 1 aufgestellten Beziehungen zwischen den Funktionen  $\varphi$  und  $\psi$  folgt, daß man aus jeder Lösung  $\varphi$  der Gleichung  $\Delta\varphi = 0$  durch den Prozeß  $\psi = r \frac{\partial \varphi}{\partial r}$  eine Lösung der Gleichung  $D\psi = 0$  erhält, und ebenso aus der Lösung der Gleichung  $\Delta\varphi = f$  die Lösung der Gleichung  $D\psi = r \frac{\partial f}{\partial r} = F$ . Nun läßt sich bekanntlich die Gleichung  $\Delta\varphi = 0$  durch eine Summe von homogenen Funktionen des Ortes  $x, y, z$  (bzw.  $x, r$ ), die räumlichen Kugelfunktionen, allgemein integrieren, die im vorliegenden Fall der Rotationssymmetrie um die X-Achse in die zonalen<sup>2)</sup> Kugelfunktionen übergehen. Es folgt also, daß sich in gleicher Weise die Gleichung  $D\psi = 0$  durch eine Summe von homogenen Funktionen der Koordinaten  $x, r$  integrieren läßt, die sich aus den Kugelfunktionen in einfacher Weise ableiten.

Weiter läßt sich die allgemeine Lösung der Gleichung  $\Delta\varphi = f$  durch Entwicklung von  $f$  in eine Reihe von homogenen Funktionen finden, deren jede das Produkt aus einer Kugelfunktion und einer Potenz des Radius  $R$  ist, und zwar einer zonalen Kugelfunktion, wenn  $f$  Achsensymmetrie in bezug auf die X-Achse hat. Die Lösung  $\varphi$  kann dann in gleicher Weise entwickelt werden, wobei jedem homogenen Bestandteil von  $f$  ein gleicher in  $\varphi$ , und zwar von einem um 2 höheren Grade, entspricht. Aus dem Zusammenhang zwischen den Funktionen  $\varphi$  und  $\psi$  folgt, daß die Lösung der Gleichung  $D\psi = r \frac{\partial f}{\partial r} = F$  sich in analoger Weise darstellen läßt, wobei an Stelle der Kugelfunktionen die homogenen Lösungen der Gleichung  $D\psi = 0$  treten.

1) Ausführliche Theorie dieser Funktionen bei Sampson: London Phil. Trans. Bd. 182 (1891), S. 449f.

2) Bezeichnung nach Thomson und Tait, Nat. Phil.



Für diese erhalten wir aus der Reihe der zonalen Kugelfunktionen  $\varphi$  die folgende Reihe:

$\varphi$	$\psi = r \frac{\partial \varphi}{\partial r}$
$P_0(\vartheta) = 1$	0
$RP_1(\vartheta) = x$	0
$R^2 P_2(\vartheta) = \frac{1}{2}(3x^2 - R^2)$	$-r^2 = -R^2 \sin^2 \vartheta$
$R^3 P_3(\vartheta) = \frac{1}{2}(5x^3 - 3xR^2)$	$-3xr^2 = -3R^3 \sin^2 \vartheta \cos \vartheta$
usw.	usw.
$R^{-1}P_0(\vartheta) = R^{-1}$	$-r^2 R^{-3} = -R^{-1} \sin^2 \vartheta$
$R^{-2}P_1(\vartheta) = xR^{-3}$	$-3xr^2 R^{-5} = -3R^{-2} \sin^2 \vartheta \cos \vartheta$
usw.	usw.

Um die Differentialgleichungen für die so definierten homogenen Funktionen  $\psi$  aufzustellen, setzen wir allgemein

$$\psi = B(\vartheta) \cdot \Psi(R)$$

und erhalten zunächst:

$$(14) \quad D\psi = \frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial \vartheta^2} - \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial r} = B \frac{d^2 \Psi}{dR^2} + \frac{\Psi}{R^2} \left( \frac{d^2 B}{d\vartheta^2} - \text{ctg } \vartheta \frac{dB}{d\vartheta} \right).$$

Durch den speziellen Ansatz

$$\Psi = R^m$$

folgt dann aus  $D\psi = 0$  die Differentialgleichung für  $B$ :

$$(15) \quad \frac{d^2 B}{d\vartheta^2} - \text{ctg } \vartheta \frac{dB}{d\vartheta} + m(m-1)B = 0.$$

Hiernach besteht, wie auch schon aus der obigen Reihe ersichtlich ist, die Beziehung:

$$B_m = B_{-m+1}.$$

Ferner zeigt die Reihe, daß es zu jedem Grade  $m$  eine Lösung  $B_m$  von (13) gibt, die eine ganze rationale Funktion von  $\cos \vartheta$  ist. Eine ganz analoge Untersuchung wie die bei den Kugelfunktionen übliche würde zeigen, daß (ausgenommen im Falle  $m = 1$  bzw.  $m = 0^1$ ) je nur diese einzige rationale Funktion  $B_m$  zu jedem Index  $m$  existiert. Die Reihe dieser Funktionen lautet, unter geeigneter Festsetzung ihrer numerischen Faktoren, die noch später erfolgen wird:

$$\begin{aligned} B_1 &= B_0 = 1 \quad (\text{und } \cos \vartheta) \\ B_2 &= B_{-1} = -\frac{1}{2} \sin^2 \vartheta \\ B_3 &= B_{-2} = -\sin^2 \vartheta \cos \vartheta \\ B_4 &= B_{-3} = -\frac{3}{8} \sin^2 \vartheta (5 \cos^2 \vartheta - 1) \\ B_5 &= B_{-4} = -\frac{1}{2} \sin^2 \vartheta \cos \vartheta (7 \cos^2 \vartheta - 3) \\ &\text{usw.} \end{aligned}$$

1) Für diese Fälle werden die Lösungen aus der Gl. (15) leicht direkt erhalten.

Um nun die Gleichung

$$D\psi = F(x, r^2)$$

zu integrieren, denken wir uns  $F$  in eine Reihe von homogenen Funktionen

$$k_{mn} R^n B_m(\vartheta)$$

entwickelt. Für die im Folgenden in Betracht kommenden Fälle ist das immer möglich. Die Lösung selbst wird dann eine Reihe

$$\psi = \sum \psi_{mn},$$

deren einzelnes Glied der Differentialgleichung

$$D(\psi_{mn}) = k_{mn} R^n B_m(\vartheta)$$

genügen muß. Für  $\psi_{mn}$  setzen wir hier

$$(16) \quad \psi_{mn} = \Psi_{mn}(R) B_m(\vartheta)$$

und erhalten mittels (14) und (15) die Gleichung:

$$\frac{d^2 \Psi_{mn}}{dR^2} - m(m-1) \frac{\Psi_{mn}}{R^2} = k_{mn} R^n,$$

deren vollständige Lösung im allgemeinen lautet:

$$(17) \quad \Psi_{mn} = \frac{k_{mn} R^{n+2}}{(n-m+2)(n+m+1)} + c_1 R^n + c_2 R^{-m+1}.$$

Eine Ausnahme bilden ersichtlich die Fälle

$$n = m - 2 \text{ und } n = -m - 1,$$

für die die entsprechende Formel lautet:

$$(17) \quad \Psi_{mn} = \frac{k_{mn} R^{n+2} \log R}{2n+3} + c_1 R^n + c_2 R^{-m+1},$$

unter  $c_1, c_2$  wie oben willkürliche Konstanten verstanden.

Die Differentialgleichungen der Hydrodynamik, die für eine achsensymmetrische Strömung nach Elimination des Druckes in der nicht-linearen partiellen Differentialgleichung (8) zusammengefaßt sind, lassen sich allgemein durch sukzessive Lösung von linearen Näherungsgleichungen auf Grund der vorhergehenden Formeln integrieren. Denn jede der sukzessiven Näherungsgleichungen erhält ganz analog wie die oben abgeleitete Gl. (13) für die erste Näherung die Form

$$DD(\psi_i) = F_i(x, r^2),$$

ist also äquivalent mit dem System von linearen Gleichungen zweiter Ordnung:

$$D(E_i) = F_i(x, r^2)$$

$$D(\psi_i) = E_i(x, r^2).$$

Während diese formale Integration keine prinzipielle Schwierigkeit hat, zeigen sich aber, wie schon in der Einleitung hervorgehoben wurde, wesentliche Hindernisse, die Randbedingungen zu erfüllen, wenn das Strömungsgebiet unendliche Ausdehnung hat, und zwar tritt diese Schwierigkeit schon bei der nun folgenden Integration der ersten Näherungsgleichung (13) auf.

Wenden wir auf diese die obigen Bezeichnungen an, so lautet sie:

$$(13a) \quad D(E_1) = -\frac{9}{4} \frac{\sigma}{\mu} U^2 B_3(\vartheta) \left( \frac{2a}{R^2} - \frac{3a^2}{R^3} + \frac{a^4}{R^5} \right)$$

$$(13b) \quad D(\psi_1) = E_1.$$

Ein Integral von (13a) ist auf Grund der Gleichungen (16) und (17):

$$E_1 = -\frac{9}{4} \frac{\sigma}{\mu} U^2 B_3(\vartheta) \left( -\frac{a}{3} + \frac{3}{4} \frac{a^2}{R} + \frac{a^4}{6R^3} \right).$$

Sodann ein partikuläres Integral von (13b), das mit  $\psi_1'$  bezeichnet sei:

$$(18) \quad \psi_1' = -\frac{9}{4} \frac{\sigma}{\mu} U^2 B_3(\vartheta) \left( \frac{aR^2}{12} - \frac{a^2R}{8} - \frac{a^4}{24R} \right).$$

Das allgemeine Integral der Gleichungen (8a) und (8b) setzt sich zusammen aus diesem partikulären Integral (18) und dem allgemeinen Integral der Gleichung  $DD\psi = 0$ , das sich auf Grund obiger Vorbemerkungen ergibt zu

$$(19) \quad -\frac{9}{4} \frac{\sigma}{\mu} U^2 \sum_1^{\infty} B_m(\vartheta) (c_{m1} R^{-m+1} + c_{m2} R^{-m+3} + c_{m3} R^m + c_{m4} R^{m+2}).$$

Die unendlich vielen Konstanten  $c$  des Ausdruckes (19) sind nun geeignet zu bestimmen, damit die Randbedingungen

$$\frac{1}{r} \frac{\partial \psi_1}{\partial r} = \frac{1}{r} \frac{\partial \psi_1}{\partial x} = 0 \text{ für } R = \infty$$

$$\text{und} \quad \psi_1 = \frac{\partial \psi_1}{\partial R} = 0 \text{ für } R = a$$

durch die Kombination der Ausdrücke (18) und (19) erfüllt werden. Da nun die Funktionen  $B_m$  je Funktionen  $m$ -ter Ordnung von  $\cos \vartheta$  sind, wie aus ihrer Ableitung allgemein hervorgeht, da also keine linearen Beziehungen in dem System der Funktionen  $B_m$  bestehen können, da andererseits die aufgestellten Randbedingungen unabhängig vom Winkel  $\vartheta$  sind, so müssen die Randbedingungen in der Kombination der Ausdrücke (18) und (19) identisch je durch die Faktoren der Funktionen  $B_m$  erfüllt werden.

Zur Erfüllung der für  $R = \infty$  gültigen Bedingungen ist es erforderlich, daß sämtliche Glieder der Funktion  $\psi_1$  von niedrigerer Ord-

nung in  $R$  als der zweiten sind. Dieser Forderung widerspricht aber das erste Glied des Ausdrucks  $\psi'$  in (18):

$$\frac{3}{16} \frac{\sigma}{\mu} U^2 B_3 (\vartheta) a R^2$$

und dieses Glied kann, weil der Faktor von  $B_3$ , aus (18) und (19) zusammengenommen, für sich die Bedingungen befriedigen muß, auch nicht durch irgend welche anderen Glieder der Summe (19) kompensiert werden.

Dies ist der Widerspruch, auf den bereits Whitehead auf anderem Wege geführt wurde. Seine Vermutung, daß deshalb das allgemeine hydrodynamische Problem überhaupt keine stetigen Lösungen zulasse, sondern daß Diskontinuitätsflächen im Sinne der Helmholtzschen Wirbeltheorie vorhanden seien, ist aber nicht begründet. Die Schwierigkeit erklärt sich daraus, daß die Stokessche Bewegung im Unendlichen keine Annäherung an die wirkliche Bewegung mehr darstellt, sondern Glieder vernachlässigt, die größer als die berücksichtigten sind. Eine unmittelbare Folge davon ist es, daß unser Ausdruck  $E_1 = D\psi_1$  von höherer Ordnung in  $R$  und daher im Unendlichen größer als  $D\psi_0$  wird.

Da ohne die Berücksichtigung der im Unendlichen geltenden Grenzbedingungen aber die eindeutige Bestimmung der Funktion  $\psi$  nicht ausführbar ist, so bleibt auch die Stromverteilung in der Nähe der Kugel, von der insbesondere der Widerstand abhängt, noch völlig unbestimmt. Doch wird es uns auf dem in der Einleitung angegebenen Wege gelingen, *eine andere Bewegung eindeutig zu bestimmen, für die die oben gesuchte Bewegung als eine in der Nähe der Kugel und in endlicher Entfernung von ihr gültige Annäherung angesehen werden kann.* So ist es dann möglich, die noch unbestimmten Konstanten in der Funktion  $\psi_1$  ebenfalls zu bestimmen, unabhängig davon, daß die gewonnene Formel für  $\psi_1$  im Unendlichen aufhört, Gültigkeit zu haben.

Da diese Untersuchung (§ 5 und 6) größeren Raum einnimmt, so geben wir hier zunächst nur ihr Resultat an. Dieses ist, daß in dem Ausdruck (19) die sämtlichen Faktoren der Funktionen  $B_m$ , mit Ausnahme desjenigen von  $B_3$ , verschwinden, und daß in dem Faktor von  $B_3$  die Konstanten  $c_{33}$  und  $c_{34}$  ebenfalls verschwinden. Zur Bestimmung der übrig bleibenden Konstanten  $c_{31}$  und  $c_{32}$  reichen die Randbedingungen an der Kugeloberfläche  $R = a$  aus.

Aus  $\psi_1 = \frac{\partial \psi_1}{\partial R} = 0$  für  $R = a$  folgt:

$$-\frac{a^3}{12} + c_{31} a^{-2} + c_{32} = 0$$

$$\frac{a^2}{12} - 2c_{31} a^{-3} = 0.$$

$$\text{Also} \quad c_{31} = \frac{a^5}{24}; \quad c_{32} = -\frac{a^3}{24}$$

$$(20) \quad \text{und } \psi_1 = -\frac{9}{4} \frac{\sigma}{\mu} U^2 B_3(\vartheta) \left( \frac{aR^2}{12} - \frac{a^2R}{8} - \frac{a^3}{24} - \frac{a^4}{24R} + \frac{a^5}{24R^2} \right) \\ = \frac{3}{32} S U \sin^2 \vartheta \cos \vartheta \frac{(R-a)^2 (2R^2 + aR + a^2)}{R^2}.$$

Nehmen wir das Glied  $\psi_0$  aus Gl. (10) hinzu, so erhalten wir endlich als erste Annäherung:

$$(21) \quad \psi_0 + \psi_1 = -\frac{U}{4} \sin^2 \vartheta \frac{(R-a)^2}{R^2} \left[ R(2R+a) \right. \\ \left. - \frac{3}{8} S \cos \vartheta (2R^2 + aR + a^2) \right].$$

Aus Gleichung (21) ist ohne weiteres ersichtlich, daß der Einfluß des ersten Näherungsgliedes  $\psi_1$  nur von dem numerischen Wert der Reynoldsschen Zahl  $S = \frac{\sigma U a}{\mu}$  abhängen kann.

### § 3. Diskussion der ersten Annäherung.

Die Gleichung (21) läßt vorläufige Schlüsse auf die Strömungsform ziehen, die unter dem Einfluß der Trägheit eintreten wird. Die tangentielle Geschwindigkeitskomponente,

$$v_\vartheta = u \sin \vartheta - q \cos \vartheta \\ = -\frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial r} r - \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial x} x = -\frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial R}$$

verschwindet den Randbedingungen entsprechend für die Kugeloberfläche  $R = a$ . Ihr Anstieg senkrecht zur Oberfläche

$$\left( \frac{\partial v_\vartheta}{\partial R} \right)_{R=a}$$

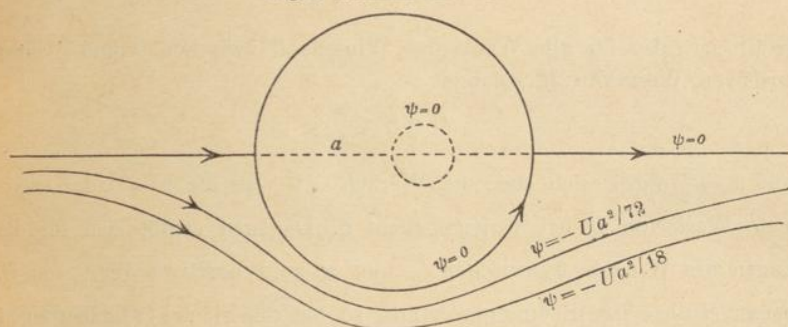
dagegen hat einen endlichen Wert und gibt ein Bild für die Strömungsverteilung in der Nähe der Kugel. Man erhält mit Rücksicht auf das Verschwinden von  $\frac{\partial \psi}{\partial R}$  für  $R = a$ :

$$\left( \frac{\partial v_\vartheta}{\partial R} \right)_{R=a} = -\frac{1}{\sin \vartheta} \frac{\partial}{\partial R} \left( \frac{1}{R} \frac{\partial \psi}{\partial R} \right)_{R=a} = -\frac{1}{R \sin \vartheta} \frac{\partial^2 \psi}{\partial R^2} \Big|_{R=a} \\ = \frac{U}{2} \sin \vartheta \frac{R(2R+a) - \frac{3}{8} S \cos \vartheta (2R^2 + aR + a^2)}{R^3} \Big|_{R=a} \\ (22) \quad = \frac{3}{2} \frac{U}{a} \sin \vartheta \left( 1 - \frac{S}{2} \cos \vartheta \right).$$

Hiernach ist der Geschwindigkeitsanstieg, der bei der Stokesschen Bewegung auf der Vorder- und Rückseite der Kugel gleich war (da  $\sin \vartheta =$

$\sin(\pi - \vartheta)$ ), durch das Hinzutreten des ersten Näherungsgliedes  $\frac{S}{2} \cos \vartheta$  unsymmetrisch geworden. Auf der der Strömung entgegenstehenden Vorderseite der Kugel ( $\frac{\pi}{2} \leq \vartheta < \pi, \cos \vartheta < 0$ ) ist der zusätzliche Geschwindigkeitsanstieg gleichgerichtet mit dem ursprünglichen für  $S=0$ , die Geschwindigkeit ist daher auf der Vorderseite erhöht gegen die der Stokesschen Bewegung. Auf der Rückseite der Kugel dagegen ( $0 \leq \vartheta < \frac{\pi}{2}, \cos \vartheta > 0$ ) ist der zusätzliche Geschwindigkeitsanstieg dem ursprünglichen entgegengerichtet und der Gesamtanstieg ist daher hier verzögert gegen den der Stokesschen Bewegung (s. Fig. 1). Dieses Geschwindigkeitsbild erinnert offenbar schon an die wirklich unter dem Ein-

Fig. 1. Stromlinie für  $S=1$ .



fluß der Trägheit stattfindende Strömung: Wenig beeinflusste Strömung bis nahe an die Vorderseite der Kugel heran; „Totwasser“, bzw. ein Gebiet wirbelnder Bewegung hinter der Kugel. Gehen wir einen Schritt weiter und lassen  $S$  in der Formel (22), ohne Rücksicht auf die noch unerledigte Konvergenzfrage, genügend groß werden. Sobald  $S > 2$  geworden ist, überwiegt für kleine Werte von  $\vartheta$  (wenn also  $\cos \vartheta$  nahe an 1 liegt) die rückströmende Zusatzbewegung über die ursprüngliche Vorwärtsbewegung, es tritt im Ganzen Rückwärtsströmung auf der Rückseite der Kugel ein, eine Bewegungsform, die der unter gewöhnlichen Verhältnissen (d. h. bei großen Werten der Reynoldsschen Zahl  $S$ ) beobachteten qualitativ ähnlich ist.

Der vollständige Ausdruck der Stromfunktion (Gl. 21) gibt näheren Aufschluß über die Strömung in der Nähe der Kugel. Die Rotationsflächen  $\psi = \text{const}$ , die „Stromflächen“, enthalten bekanntlich vollständig die Stromlinien, ihr Verlauf ergibt sich qualitativ aus dem Verlauf der Fläche  $\psi = 0$ . Letztere zerfällt in drei Bestandteile:

(1)  $\sin^2 \vartheta = 0$ , d. i. die  $X$ -Achse, die wegen der Rotationssymmetrie selbst Stromlinie sein muß.

(2)  $(R - a)^2 = 0$ , die Kugeloberfläche selbst, die nach den Bedingungen der Aufgabe Stromfläche ist.

(3) Die Fläche:

$$R(2R + a) - \frac{3}{8} S \cos \vartheta (2R^2 + aR + a^2) = 0$$

oder 
$$R(2R + a) = a^2 \frac{\frac{3}{8} S \cos \vartheta}{1 - \frac{3}{8} S \cos \vartheta}.$$

Die letztere Gleichung bestimmt, als quadratische Gleichung für  $R$  aufgefaßt, einen positiven Wert von  $R$ , solange die Bedingung

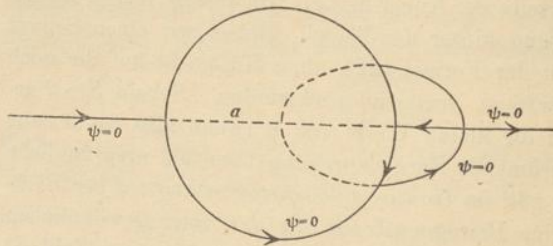
$$0 < \cos \vartheta < \frac{8}{3}$$

erfüllt ist, also für alle Werte des Winkels  $\vartheta$  zwischen 0 und  $\frac{\pi}{2}$  einen positiven Wert von  $R$ , solange

$$0 < S < \frac{8}{3}.$$

Für  $\vartheta = \frac{\pi}{2}$  ergibt sich stets der Wert  $R = 0$  und für  $\vartheta = 0$  der maximale Wert von  $R$  bei vorgegebenem  $S$ . Dagegen ergibt sich für die Lagen des Winkels  $\vartheta$  zwischen  $\frac{\pi}{2}$  und  $\pi$  kein positiver Wert von  $R$ . Wenn  $S$  die obige Bedingung erfüllt, so hat die Fläche (3) daher einen geschlossenen reellen Teil, der ganz im Halbraum positiver  $x$ , d. h. in

Fig. 2. Stromlinie  $\psi = 0$  für  $S = 2, 2$ .



dem Halbraum verläuft, der, im Sinne der Strömung aufgefaßt, die rückwärtige Kugelhälfte enthält (s. Fig. 1 u. 2). Ihr Radiusvektor nimmt von dem Werte  $R = 0$  für  $\vartheta = \frac{\pi}{2}$  ausgehend

stetig zu bis zu dem Maximalwerte bei  $\vartheta = 0$ , der  $R = a$  wird, wenn  $S = 2$  angenommen ist. Solange also  $S < 2$ , so verläuft die Fläche (3) durchaus im Innern der Kugel vom Radius  $a$  und kommt als Stromfläche nicht in Betracht. Wenn aber  $S > 2$  ist, so tritt ein Teil von ihr über die Kugel auf deren Rückseite hinaus und bildet eine reale Stromfläche. Sie trennt von der äußeren Strömung ein Gebiet auf der Rückseite der Kugel ab, in dem wirbelnde Strömung stattfinden muß, der äußeren Strömung gleichgerichtete Bewegung längs der Innenseite der Fläche (3), Rückströmung längs

der Kugeloberfläche, wie wir oben schon für  $S > 2$  aus dem Geschwindigkeitsanstieg schlossen. Man erhält also das Bild des bei größeren Geschwindigkeiten beobachteten Wirbelringes auf der Rückseite der Kugel.

Als untere Grenze für den Eintritt der Wirbelbildung ergibt sich der Wert der Reynoldsschen Zahl  $S = 2$ . Da allerdings diese Grenze über das Gebiet kleiner Reynoldsscher Zahl, der Voraussetzung unserer Näherung, hinausfällt, so bleibt abzuwarten, wie weit die Grenze durch die weitere Entwicklung noch verschoben wird. Es ist noch zu bemerken, daß mit wachsendem  $S$  der Wirbelring sich sehr rasch, besonders für kleine Werte von  $\vartheta$ , vergrößert, doch handelt es sich hier wohl um eine Wirkung der Vernachlässigung höherer Glieder, wie die Fortsetzung der Entwicklung zeigen würde.

#### § 4. Widerstand nach der ersten Annäherung.

Der Gültigkeitsbereich der Stokesschen Widerstandsformel hängt von dem Widerstand ab, den die aus der Stokesschen und der Annäherungsbewegung zusammengesetzte Bewegung ergibt. Es ist indes leicht einzusehen, daß die bisher aufgestellte Näherungsbewegung noch keinen Beitrag zum Widerstand liefert; wir beweisen das an den expliziten Formeln für den Widerstand.

Bezeichnet  $n$  die Normale eines Flächenelements an der Grenze einer inkompressiblen reibenden Flüssigkeit,  $s$  eine beliebige Richtung in diesem Flächenelement, so ist der Ansatz für die Spannungen in diesem Flächenelement, der den Differentialgleichungen (1) zu grunde liegt, der folgende<sup>1)</sup>:

Die Normalspannung (positiv, wenn vom Flächenelement nach der Seite der Flüssigkeit hin gerichtet) ist

$$(23) \quad p_{nn} = -p + 2\mu \frac{\partial v_n}{\partial n},$$

die Tangentialspannung in Richtung  $s$ :

$$(24) \quad p_{ns} = \mu \left( \frac{\partial v_n}{\partial s} + \frac{\partial v_s}{\partial n} \right),$$

wo  $v_n$  und  $v_s$  die Geschwindigkeitskomponenten in den betreffenden Richtungen bedeuten. Die Größen  $v_n$  und  $v_s$  sind hier aus den gefundenen Formeln für die Stromfunktion  $\psi = \psi_0 + \psi_1$  zu entnehmen, während  $p$  bis auf eine belanglose additive Konstante aus den Grundgleichungen (1) bestimmt ist. Wir erhalten aus diesen für die Kugeloberfläche, mit Rücksicht darauf, daß nach den Randbedingungen die Geschwindigkeits-

1) S. Fußnote auf S. 8.



komponenten  $u, v, w$  verschwinden und nach der Gl. (22) der normal gerichtete Geschwindigkeitsgradient endlich ist:

$$\begin{aligned} \frac{1}{R} \frac{\partial p}{\partial \vartheta} &= -\sin \vartheta \frac{\partial p}{\partial x} + \cos \vartheta \frac{\partial p}{\partial r} \\ &= \mu \left[ \sin \vartheta \left( \frac{\partial^2 \Delta \varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \Delta \varphi}{\partial z^2} \right) + \cos \vartheta \frac{\partial^2 \Delta \varphi}{\partial x \partial r} \right] \\ &= \mu \left[ \frac{\sin \vartheta}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial \Delta \varphi}{\partial r} \right) + \frac{\cos \vartheta}{r} \frac{\partial}{\partial x} \left( r \frac{\partial \Delta \varphi}{\partial r} \right) \right] \\ &= \frac{\mu}{r} \frac{\partial D(\psi)}{\partial R} \quad (\text{s. die Gl. (3) u. (6)}) \end{aligned}$$

oder endlich die einfache Formel:

$$(25) \quad \frac{\partial p}{\partial \vartheta} = \frac{\mu}{\sin \vartheta} \frac{\partial D(\psi)}{\partial R}.$$

Der zweite Bestandteil der Normalspannung  $p_{nn}$ ,  $2\mu \frac{\partial v_n}{\partial n}$ , verschwindet an jeder körperlichen Begrenzungsfläche der Flüssigkeit wegen der Randbedingungen und der Inkompressibilitätsbedingung (2), die hier lautet

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial q}{\partial r} + \frac{q}{r} \\ = \frac{\partial v_n}{\partial n} + \frac{\partial v_s}{R \partial \vartheta} - \frac{v_n}{R} + \frac{q}{r} = 0 \end{aligned}$$

und wegen des Verschwindens der Geschwindigkeitskomponenten  $v_n$  und  $q$  längs der ganzen Oberfläche sofort ergibt:

$$\frac{\partial v_n}{\partial n} = 0.$$

Von der Tangentialspannung  $p_{ns}$  (24) verschwindet wegen der Randbedingungen an der Oberfläche das erste Glied, es bleibt also:

$$\begin{aligned} p_{ns} &= \mu \frac{\partial v_s}{\partial n} = \mu \frac{\partial}{\partial R} (-u \sin \vartheta + q \cos \vartheta) \\ &= \mu \frac{\partial}{\partial R} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial r} \sin \vartheta + \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial x} \cos \vartheta \right) \\ &= \mu \frac{\partial}{\partial R} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial R} \right). \end{aligned}$$

Mit Rücksicht auf die Randbedingung  $\psi = \frac{\partial \psi}{\partial R} = 0$  wird endlich:

$$(26) \quad p_{ns} = \frac{\mu}{r} \frac{\partial^2 \psi}{\partial R^2}.$$

Die Kraftkomponente, die in der Strömungsrichtung ( $x$ -Richtung) auf die Zone der Kugeloberfläche

$$d\sigma = 2\pi R^2 \sin \vartheta d\vartheta$$

wirkt, ist

$$dK = (p_{nn} \cos \vartheta - p_{ns} \sin \vartheta) d\sigma,$$

während die entsprechenden Kraftkomponenten in der  $y$ - und  $z$ -Richtung wegen der Rotationssymmetrie verschwinden, und die Gesamtkraft wird somit:

$$(27) \quad K = 2\pi R^2 \int_0^\pi (p_{nn} \cos \vartheta - p_{ns} \sin \vartheta) \sin \vartheta d\vartheta.$$

Aus dieser Ableitung der Widerstandformel ist ersichtlich, daß die von der ursprünglichen Stokesschen Bewegung und die von den sukzessiven Annäherungen herrührenden Anteile am Widerstand sich einfach überlagern, da die schließlich in Betracht kommenden Ausdrücke für den Druck und die Spannungen durch lineare Prozesse aus den Geschwindigkeitskomponenten, bzw. den zugehörigen Stromfunktionen, entstehen. Die aus den Gleichungen (1) resultierenden quadratischen Glieder verschwinden wegen der Randbedingungen an der Kugeloberfläche in der Druckgleichung und daher auch in der Widerstandsformel.

Nun ist ersichtlich, daß der Widerstandsanteil der ersten Näherung ( $\psi_1$ ) verschwindet, und zwar wegen der Symmetrie der Kugel zu ihrer Äquatorfläche  $x = 0$ . Die Geschwindigkeitskomponenten dieser Strömung sind ja

$$\begin{aligned} v_{1n} &= \frac{1}{rR} \frac{\partial \psi_1}{\partial \vartheta} \\ &= \frac{3}{32} SU (2 \cos^2 \vartheta - \sin^2 \vartheta) \frac{(R-a)^2 (2R^2 + aR + a^2)}{R^4} \\ v_{1s} &= -\frac{1}{r} \frac{\partial \psi_1}{\partial R} \\ &= -\frac{3}{32} SU \sin \vartheta \cos \vartheta \frac{\partial}{\partial R} \frac{(R-a)^2 (2R^2 + aR + a^2)}{R^3}. \end{aligned}$$

Hiernach ist auch die Strömung spiegelbildlich symmetrisch zur Äquatorebene  $x = 0$ , sie ist vorwärts gerichtet auf der Vorderseite ( $\frac{\pi}{2} < \vartheta < \pi$ ), rückwärts gerichtet auf der Rückseite, und die auf die Hälften der Kugel von der Flüssigkeit ausgeübten Kräfte heben sich gegenseitig auf. Anders verhält sich in dieser Hinsicht die zweite Näherung, bei ihr ist, wie bei der Stokesschen Strömung selbst, die Bewegung auf der Vorder- und Rückseite symmetrisch und gleichgerichtet, und daher ist im ganzen ein Beitrag zum Widerstand zu erwarten. Die Stokessche Formel wird somit Gültigkeit haben bis auf Zusatzglieder, deren Verhältnis zum ursprünglichen quadratisch in der Reynoldsschen Zahl  $S = \sigma a U / \mu$  ist.

In der Tat gibt die Gl. (25) für den Druck an der Kugeloberfläche:

$$\begin{aligned}\frac{\partial p_1}{\partial \vartheta} &= \frac{3}{16} \frac{\mu S U}{a} \sin \vartheta \cos \vartheta \left( -6 \frac{a^4}{R^4} + 6 \frac{a^3}{R^3} - 9 \frac{a^2}{R^2} \right)_{R=a} \\ &= -\frac{27}{16} \frac{\mu S U}{a} \sin \vartheta \cos \vartheta \\ p_1 &= P_1 + \frac{27}{32} \frac{\mu S U}{a} \cos^2 \vartheta,\end{aligned}$$

wo  $P_1$  den Druck in der Äquatorebene bedeutet. Ferner wird wegen Gl. (26)

$$\begin{aligned}p_{ns} &= \frac{\mu}{a} \frac{3}{16} S U \sin \vartheta \cos \vartheta \left( \frac{2R^2 + aR + a^2}{R^2} \right)_{R=a} \\ &= \frac{3}{4} \frac{\mu S U}{a} \sin \vartheta \cos \vartheta\end{aligned}$$

und endlich

$$K_1 = 2\pi \mu a S U \int_0^\pi \left( -\frac{27}{32} \cos^3 \vartheta - \frac{3}{4} \sin^2 \vartheta \cos \vartheta \right) d\vartheta = 0,$$

wie oben behauptet wurde.

Mit diesem Resultat scheinen Beobachtungen von Zeleny und Mc. Keehan<sup>1)</sup> im Einklang zu stehen, daß sich nämlich der Gültigkeitsbereich der Stokesschen Formel bei genau kugelförmigen Körpern wesentlich größer erwies als bei annähernd kugelförmigen Körpern (Sporen). Während sich bei letzteren schon bei sehr kleinen Werten der Reynoldsschen Zahl ( $S = 10^{-3}$ ) Abweichungen von der Stokesschen Formel zeigten, die bei Vernachlässigung der Trägheitsglieder nicht aus den Abweichungen von der Kugelgestalt zu erklären waren, fanden die Verfasser die Stokessche Formel bei Kugeln streng bestätigt bis zu Werten der Reynoldsschen Zahl, die die Grenze  $S = 0,1$  noch wesentlich überstiegen. In der Tat war ja das Verschwinden des in der Reynoldsschen Zahl linearen Widerstandsanteils lediglich eine Folge der Kugelsymmetrie bezüglich ihrer Äquatorebene. Auch bei geringer Unsymmetrie würde aber ein linearer Bestandteil auftreten, und dieser müßte sich in höherem Maße äußern, als der quadratische Bestandteil bei Kugeln.

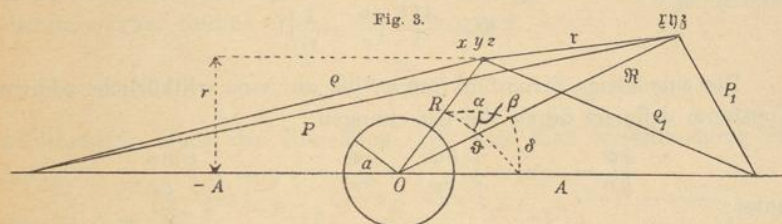
#### § 5. Ersatz der Parallelströmung durch eine inhomogene Strömung (mit Quelle und Senke.)

Es bleibt uns noch übrig, die in § 2, S. 13 angegebene Konstantenbestimmung zu rechtfertigen, die mit den bisherigen Mitteln nicht begründet war, da unsere Näherungslösung im Unendlichen versagte. Zu

1) Phys. Ztschr. 11, 1910, S. 78f.

dem Zwecke betrachten wir folgenden Strömungsvorgang, der im Unendlichen überall verschwindende Geschwindigkeitskomponenten in jeder Richtung hat und sich in der Nähe der Kugel nicht wesentlich von dem früher behandelten unterscheidet:

Die Kugel sei als ruhend angenommen (s. Fig. 3), ihr Mittelpunkt  $O$  befinde sich im Punkte  $x = y = z = 0$ . Der Punkt  $x = -A, y = 0, z = 0$  sei der Mittelpunkt eines endlich ausgedehnten, kugelförmigen Quellengebiets, der Punkt  $x = +A, y = 0, z = 0$  der Mittelpunkt eines ebensolchen Senkengebietes. Im übrigen sei die Strömung überall quellfrei und daher die Gesamtergiebigkeit der Quelle entgegengesetzt gleich der



der Senke. Ferner sei der Radius des Quellengebiets wie des Senkengebietes von vornherein klein gedacht gegen die Entfernung  $A$  und ebenso der Kugelradius  $a$  klein gegen  $A$ .

Um nun zunächst die der Stokesschen Strömung analoge zu erhalten, setzen wir die Bewegung zusammen aus einer Potentialströmung und einer überlagerten, die den Einfluß der Randbedingungen an der Kugel und der Reibung enthält. Auch die Potentialbewegung genügt ja, weil für sie  $D\psi = 0$ , der Grundgleichung (8). Bezeichnet  $e, -e$  die Gesamtergiebigkeit des Quellengebiets, bzw. Senkengebietes, ferner  $\varrho, \varrho_1$  die Abstände von ihren Mittelpunkten, so daß

$$\varrho^2 = (x + A)^2 + r^2$$

$$\varrho_1^2 = (x - A)^2 + r^2,$$

so wird das Geschwindigkeitspotential der zugehörigen Potentialströmung

$$\Phi = \frac{e}{\varrho} - \frac{e}{\varrho_1},$$

$$u = -\frac{\partial \Phi}{\partial x}; \quad v = -\frac{\partial \Phi}{\partial y}; \quad w = -\frac{\partial \Phi}{\partial z}; \quad q = -\frac{\partial \Phi}{\partial r}.$$

Hierbei ist noch vorausgesetzt, daß die Ergiebigkeit der Quelle auf konzentrischen Schichten konstant sei, ebenso der Senke. Um Stetigkeitsbetrachtungen vermeiden zu können, nehmen wir ferner an, daß die Ergiebigkeit im Inneren des Quellgebietes stetig sei und am Rande mit dem ersten und zweiten Differentialquotienten verschwinde.

Für den Kugelmittelpunkt  $x = y = z = 0$  wird

$$u = e \left( \frac{x+A}{e^3} - \frac{x-A}{e_1^3} \right) = \frac{2e}{A^2}.$$

Um möglichste Annäherung und, wenn  $A$  sehr groß wird, Übereinstimmung mit dem früheren Bewegungszustand in der Nähe der Kugel zu erhalten, müssen wir also

$$\frac{2e}{A^2} = U$$

wählen, und erhalten somit außerhalb der Quellgebiete die Potentialdarstellung:

$$\Phi = \frac{A^2 U}{2} \left( \frac{1}{e} - \frac{1}{e_1} \right).$$

Die zugehörige Stromfunktion  $\psi$ , bis auf eine willkürliche additive Konstante definiert durch die Gleichungen:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x} = -u = \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial r}; \quad \frac{\partial \Phi}{\partial r} = -q = -\frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial x},$$

lautet:

$$(28) \quad \psi = \frac{A^2 U}{2} \left( \frac{A+x}{e} + \frac{A-x}{e_1} \right).$$

Wir entwickeln diese Formeln für das Gebiet  $R < A$ . In der bekannten Bezeichnung der Kugelfunktionen wird:

$$\frac{1}{e} = \frac{1}{A} \sum_0^{\infty} \frac{R^n}{A^n} P_n(\pi - \vartheta) = \frac{1}{A} \sum_0^{\infty} (-1)^n \frac{R^n}{A^n} P_n(\vartheta)$$

$$\frac{1}{e_1} = \frac{1}{A} \sum_0^{\infty} \frac{R^n}{A^n} P_n(\vartheta)$$

und daher

$$\frac{A+x}{e} = 1 + \sum_1^{\infty} (-1)^n \frac{R^n}{A^n} (P_n(\vartheta) - \cos \vartheta P_{n-1}(\vartheta))$$

$$\frac{A-x}{e_1} = 1 + \sum_1^{\infty} \frac{R^n}{A^n} (P_n(\vartheta) - \cos \vartheta P_{n-1}(\vartheta)).$$

Da diese beiden Summen, als Stromfunktionen je einer Potentialströmung, der homogenen Gleichung  $D\psi = 0$  genügen<sup>1)</sup>, so muß jedes einzelne Glied dieser Summen ebenfalls dieser Gleichung genügen, es folgt daher durch Vergleich mit den Entwicklungen des § 2 über die Gleichung  $D\psi = 0$ , daß, unter  $\alpha$  einen Zahlenfaktor verstanden,

$$P_n(\vartheta) - \cos \vartheta P_{n-1}(\vartheta) = \alpha B(\vartheta)$$

1) S. z. B. Lamb, Hydrodynamik, § 94.

sein muß. Wir haben die Funktionen  $B_n$  früher (S. 10) eben so normiert, daß  $n = 1$  wird für alle positiven  $n$  (ausgenommen den hier belanglosen Fall  $n = 1$ ). Also erhalten wir für  $\psi$  (Gl. 28) den Ausdruck

$$(28') \quad \psi = U \left( A^2 + \sum_1^{\infty} \frac{R^{2m}}{A^{2m-2}} B_{2m}(\vartheta) \right).$$

Dies die ungestörte Potentialströmung. Um die der Stokesschen Strömung analoge zu erhalten, haben wir diesen Ansatz durch Glieder, die der Gleichung  $DD\psi = 0$  genügen und deren zugehörige Geschwindigkeiten im Unendlichen verschwinden, so zu ergänzen, daß an der Kugeloberfläche vom Radius  $R = a$  die Bedingung

$$\psi = \frac{\partial \psi}{\partial R} = 0$$

erfüllt wird. Nach der Gleichung (19) wird dies erreicht durch den Ansatz:

$$(29) \quad \psi_0 = U \sum_1^{\infty} \frac{R^{2m} + k_{m1} a^{4m-3} R^{-2m+3} + k_{m2} a^{4m-1} R^{-2m+1}}{A^{2m-2}} B_{2m}(\vartheta)$$

wo 
$$k_{m1} = -\frac{4m-1}{2}; \quad k_{m2} = \frac{4m-3}{2}.$$

Betrachten wir nun den Fall, daß die Entfernung  $A$  sehr groß ist gegen den Radius  $a$  und beschränken uns auf die Strömung in der Nähe der Kugel, so können wir in  $\psi_0$  (Gl. 29) alle Glieder, die negative Potenzen von  $A$  enthalten, vernachlässigen, und es bleibt daher nur das zum Index  $m = 1$  gehörige Glied:

$$(29') \quad \begin{aligned} \psi_0 &= U \left( R^2 - \frac{3}{2} a R + \frac{1}{2} \frac{a^3}{R} \right) B_2(\vartheta) \\ &= -\frac{U}{4} \left( 2R^2 - 3aR + \frac{a^3}{R} \right) \sin^2 \vartheta, \end{aligned}$$

also die zur Stokesschen Bewegung gehörige Stromfunktion (10). Wir haben somit eine neue Ableitung dieser Gleichung gewonnen und haben nun nachzuweisen, daß in der Tat in der Grundgleichung (8) die vernachlässigten quadratischen Glieder bei kleiner Reynoldsscher Zahl überall klein sind gegen die berücksichtigten. Dazu müssen wir  $\psi_0$  (Gl. 29) auch in beliebiger Entfernung von der Kugel mittels (28) und (28') summieren, unter der Annahme, daß  $\frac{a}{A}$  zu vernachlässigen sei und erhalten:

$$(29a) \quad \psi_0 = \frac{A^2 U}{2} \left( \frac{A+x}{\varrho} + \frac{A-x}{\varrho_1} \right) + \frac{U}{4} \left( 3aR - \frac{a^3}{R} \right) \sin^2 \vartheta.$$

Die für  $\frac{1}{e}$  und  $\frac{1}{e_1}$  gültige Entwicklung im Gebiet  $R > A$ :

$$\frac{1}{e} = \frac{1}{R} \sum_0^{\infty} (-1)^n \frac{A^n}{R^n} P_n(\vartheta)$$

$$\frac{1}{e_1} = \frac{1}{R} \sum_0^{\infty} \frac{A^n}{R^n} P_n(\vartheta)$$

gibt in großer Entfernung den Näherungsausdruck:

$$\psi_0 = \frac{UA^3 \sin^2 \vartheta}{R} + \frac{U}{4} \left( 3aR - \frac{a^3}{R} \right) \sin^2 \vartheta$$

und ferner ist

$$(12) \quad D\psi_0 = -\frac{2}{3} U \frac{a}{R} \sin^2 \vartheta.$$

Hieraus folgt, daß die rechte Seite der Gleichung (8) in großer Entfernung sich verhält wie der Ausdruck

$$-\frac{27}{4} \frac{\sigma}{\mu} \frac{U^2 a^2}{R^3} \sin^2 \vartheta \cos \vartheta = -\frac{27}{4} S \frac{Ua}{R^3} \sin^2 \vartheta \cos \vartheta,$$

während die einzelnen Bestandteile des (in der Summe verschwindenden) Ausdrucks  $DD(\psi_0)$  auf der linken Seite sich wie

$$\frac{Ua}{R^3}$$

verhalten, also in gleicher Weise verschwinden. Daher ist bei kleiner Reynoldsscher Zahl die gemachte Vernachlässigung im Unendlichen unbedenklich.

Im ganzen endlichen Raum aber ist die Strömung, die zu  $\psi_0$  gehört, regulär und die vernachlässigten Glieder sind daher endlich und bei kleiner Reynoldsscher Zahl klein neben den berücksichtigten Gliedern. Das Gleiche ist auch noch für die Quellgebiete der Fall; hier gilt allerdings nicht der Ausdruck (28) für die Stromfunktion der ungestörten Potentialbewegung, die in diesen Gebieten ja nicht mehr existiert, es gelten auch nicht die Grundgleichungen (1), die ebenfalls die Voraussetzung der Quellenfreiheit enthielten. Es erübrigt sich aber, für diese Gebiete die Grundgleichungen eigens aufzustellen, da aus den Stetigkeitsannahmen für die Ergiebigkeit der Quelle bzw. Senke folgt, daß die Geschwindigkeiten in diesen Gebieten endlich und stetig bleiben und daher ebenfalls die vernachlässigten quadratischen Glieder in den Grundgleichungen bei kleiner Reynoldsscher Zahl klein gegen die berücksichtigten werden. Überdies zeigt die folgende Entwicklung, daß selbst bei Annahme punktförmiger Quelle und Senke die vernachlässigten Glieder von (8) und ebenfalls die daraus resultierenden Geschwindigkeiten der

ersten Näherung endlich bleiben, obgleich dann die Geschwindigkeiten der zugrunde gelegten Potentialbewegung unendlich sind. Um so mehr sind bei kleinem  $S$  jene Vernachlässigungen berechtigt. Das Gleiche gilt aber dann nicht mehr für die Grundgleichungen (1), die nach der Berechnung der Strömung die Druckverteilung bestimmen, vielmehr werden hier in der Nähe der Quellpunkte die quadratischen Glieder wesentlich, durch die bekanntlich in der Potentialtheorie der Druck berechnet wird.

§ 6. Erste Näherung und Konstantenbestimmung.

Als weitere Annäherung zur Ergänzung der zugrunde gelegten Bewegung fordern wir eine überall, auch im Quellgebiete der Grundbewegung, quellenfreie Strömung mit im Unendlichen verschwindenden Geschwindigkeiten, die die Randbedingungen an der Kugeloberfläche erfüllt und der aus (8) resultierenden Differentialgleichung (11) der ersten Näherung genügt.

Zu ihrer Aufstellung sind die Ausdrücke für  $\psi_0$  und  $D\psi_0$  aus den Gleichungen (29a) und (12) zu verwenden. Es folgt (s. die Ausrechnung in Anhang 2):

$$(30) \quad DD(\psi_1) = \frac{9}{4} \frac{\sigma}{\mu} U^2 \left[ \sin^2 \vartheta \cos \vartheta \left( -3 \frac{a^2}{R^3} + \frac{a^4}{R^5} \right) + a A^2 \frac{r^2}{R^5} \left( \left( \frac{1}{\varrho} - \frac{1}{\varrho_1} \right) - A \left( \frac{A+x}{\varrho^3} - \frac{A-x}{\varrho_1^3} \right) \right) \right].$$

Dieser Ausdruck der rechten Seite gilt zunächst nur für den Raum außerhalb der Quellgebiete, da er aber endlich bleibt bei Ausdehnung bis an die Punkte  $\varrho = 0$  bzw.  $\varrho_1 = 0$  hin<sup>1)</sup>, so können wir hier die Vorstellung punktförmiger Quelle und Senke voraussetzen und seine Gültigkeit daher über den ganzen unendlichen Raum außerhalb der festen Kugel erstrecken.

Die eindeutige Lösung unserer Randwertaufgabe erfordert die Angabe eines Integrals der Gleichung (30), das im Unendlichen die verlangte Eigenschaft hat, daß die zugehörigen Geschwindigkeiten verschwinden und dessen Wert in der Nähe der festen Kugel sich angeben läßt, so daß es durch Zufügung geeigneter Lösungen der Gl.  $DD(\psi) = 0$  möglich wird, die Randbedingungen an der Kugel zu erfüllen. Ein solches Integral in geschlossener Form anzugeben, scheint schwer möglich zu sein, doch folgt aus dem in § 1 erwähnten Zusammenhang der Gleichungen

$$DD(\psi) = F \text{ und } \Delta\Delta(\varphi) = f$$

1) Die Ausdrücke  $\frac{r^2}{\varrho^2}$  und  $\frac{A+x}{\varrho}$  sind endlich.



eine geeignete Integraldarstellung. Mittels dieses Zusammenhanges gewinnen wir aus der Lösung  $\varphi$  der zweiten dieser beiden Gleichungen eine Lösung  $\psi$  der ersten, als

$$\psi = r \frac{\partial \varphi}{\partial r},$$

wenn  $f$  aus der Gleichung

$$(31) \quad F = r \frac{\partial f}{\partial r}$$

bestimmt worden ist.

Wir trennen zunächst  $\psi_1$  in 2 Bestandteile, der erste,  $\psi'$ , soll der Gleichung genügen:

$$DD(\psi') = \frac{9}{4} \frac{\sigma}{\mu} U^2 \sin^2 \vartheta \cos \vartheta \left( -\frac{3a^2}{R^3} + \frac{a^4}{R^5} \right).$$

Als partikuläres Integral dieser Gleichung wählen wir mittels (16) und (17):

$$(32) \quad \psi' = -\frac{9}{32} \frac{\sigma}{\mu} U^2 \sin^2 \vartheta \cos \vartheta \left( a^2 R + \frac{a^4}{3R} \right),$$

das auch als Summand in Gl. (18) auftritt. Der zweite Bestandteil von  $\psi_1$ ,  $\psi''$ , soll der Gleichung:

$$(33) \quad DD(\psi'') = \frac{9}{4} \frac{\sigma}{\mu} U^2 a A^2 \frac{r^2}{R^5} \left[ \left( \frac{1}{e} - \frac{1}{e_1} \right) - A \left( \frac{A+x}{e^3} - \frac{A-x}{e_1^3} \right) \right]$$

genügen, so daß die Summe  $\psi' + \psi''$  der Gleichung (30) genügt.

Bezeichnen wir die rechte Seite der Gl. (33) mit  $F$ , und setzen

$$\psi'' = r \frac{\partial \varphi''}{\partial r}$$

so erhalten wir für  $\varphi''$  die folgende Gleichung.

$$\Delta \Delta(\varphi'') = f,$$

die mit (33) äquivalent ist, wenn wir  $f$  durch Integration der Gl. (31) ermitteln. Es ergibt sich

$$(34) \quad f = \frac{9}{4} \frac{\sigma}{\mu} U^2 a A^2 \cdot \left[ \frac{1}{A^2(A+2x)^2} \left( \frac{e}{R} - \frac{1}{3} \frac{e^3}{R^3} - \frac{2}{3} \right) - \frac{1}{A^2(A-2x)^2} \left( \frac{e_1}{R} - \frac{1}{3} \frac{e_1^3}{R^3} - \frac{2}{3} \right) - \frac{A+x}{A^2(A+2x)^3} \left( 2 \frac{e}{R} - \frac{1}{3} \frac{e^3}{R^3} + \frac{R}{e} - \frac{8}{3} \right) + \frac{A-x}{A^2(A-2x)^3} \left( 2 \frac{e_1}{R} - \frac{1}{3} \frac{e_1^3}{R^3} + \frac{R}{e_1} - \frac{8}{3} \right) \right]$$

(Die Gl. (34) wird aus der rechten Seite von (33) durch elementare Integration der Gl. (31) gewonnen, wenn man beachtet, daß bei festem  $x$ :  $r dr = \rho d\rho$  zu setzen ist, oder es wird durch direkte Differentiation von (34) nach  $r$  das Bestehen der Gl. (31) bestätigt, mit Rücksicht darauf, daß

$$\rho^2 - R^2 = A(A+2x); \quad \rho_1^2 - R^2 = A(A-2x).$$

Als Integrationskonstante ist in (34) eine Funktion von  $x$  so zugefügt, daß  $f$  im Unendlichen in gleicher Weise verschwindet wie  $F$ . Daß auch  $f$  im ganzen Außenraume der Kugel endlich bleibt, ebenso wie  $F$ , wird durch eine Umformung von (34) deutlicher. Es ist:

$$\frac{\varrho}{R} - \frac{1}{3} \frac{\varrho^3}{R^3} - \frac{2}{3} = -\frac{1}{3} \left( \frac{\varrho}{R} - 1 \right)^2 \left( \frac{\varrho}{R} + 2 \right)$$

$$2 \frac{\varrho}{R} - \frac{1}{3} \frac{\varrho^3}{R^3} + \frac{R}{\varrho} - \frac{8}{3} = -\frac{R}{3\varrho} \left( \frac{\varrho}{R} - 1 \right)^3 \left( \frac{\varrho}{R} + 3 \right)$$

und analoge Gleichungen gelten für  $\varrho_1$ . Daher wird:

$$(34a) \quad f = \frac{3}{4} \frac{\sigma}{\mu} U^2 a A^2 \left[ \frac{-(\varrho + 2R)}{R^3(\varrho + R)^2} + \frac{(\varrho_1 + 2R)}{R^3(\varrho_1 + R)^2} \right. \\ \left. + \frac{A(A+x)(\varrho + 3R)}{R^3\varrho(\varrho + R)^3} - \frac{A(A-x)(\varrho_1 + 3R)}{R^3\varrho_1(\varrho_1 + R)^3} \right]$$

ein Ausdruck, der außer im Punkte  $R = 0$  nirgends unendlich wird; vgl. Fußnote S. 25).

In einem beliebigen Raumstück  $T$  ist nun ein Integral der Gleichung (33a) die Funktion:

$$(35) \quad \varphi^*(x, y, z) = \frac{-1}{8\pi} \int_T f(\xi, \eta, \zeta) r \, d\tau,$$

wo  $d\tau$  das Raumelement im Integrationspunkt,  $r$  den Abstand vom Aufpunkt zum Integrationspunkt

$$r = \sqrt{(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2 + (z - \zeta)^2}$$

bedeutet und die den Koordinatenbezeichnungen des Aufpunktes:  $x, y, z; R, \vartheta; \varrho, \varrho_1$  entsprechenden im Integrationspunkt

$$\xi, \eta, \zeta; \Re, \delta; P, P_1$$

seien (s. Fig. 3). Der Beweis der obigen Integraldarstellung folgt aus der Gleichung

$$\Delta r = \frac{2}{r}$$

in Verbindung mit der bekannteren innerhalb  $T$  gültigen Gleichung:

$$\Delta \int f(\xi, \eta, \zeta) \frac{d\tau}{r} = -4\pi f(x, y, z).$$

Aus einem später ersichtlichen Grunde gehen wir von dem Integral (35) noch zu dem folgenden über

$$(35a) \quad J = -\frac{1}{8\pi} \int_T f(\xi, \eta, \zeta) \left[ r - \Re - \left( x \frac{\partial r}{\partial x} \Big|_{(R=0)} + y \frac{\partial r}{\partial y} \Big|_{(R=0)} \right. \right. \\ \left. \left. + z \frac{\partial r}{\partial z} \Big|_{(R=0)} \right) \right] d\tau \\ = -\frac{1}{8\pi} \int_T f(\xi, \eta, \zeta) (r - \Re + R \cos(R \Re)) d\tau,$$

das sich von (35) nur um eine Konstante und ein in den Koordinaten des Aufpunktes,  $x, y, z$ , lineares Glied unterscheidet, während seine zweiten Differentialquotienten von denen von (35) überhaupt nicht verschieden sind. Daher genügt auch  $J$  der Gleichung  $\Delta \Delta J = f(x, y, z)$ .

Als untere Grenze des Integrals (35a) betrachten wir zunächst eine um  $O$  als Mittelpunkt gelegte Kugel vom Radius  $b < a$ ; bevor wir als obere Grenze  $\mathfrak{R} = \infty$  wählen, müssen wir  $f(x, y, z)$  für sehr große Werte des Radius  $\mathfrak{R}$  (d. h.  $\mathfrak{R}$  groß gegen  $A$ , entwickeln, mittels der Formeln:

$$P = \sqrt{\mathfrak{R}^2 + A^2} + 2 A \mathfrak{R} \cos \delta = \mathfrak{R} \left( 1 + \frac{A}{\mathfrak{R}} \cos \delta + \dots \right)$$

$$P_1 = \sqrt{\mathfrak{R}^2 + A^2} - 2 A \mathfrak{R} \cos \delta = \mathfrak{R} \left( 1 - \frac{A}{\mathfrak{R}} \cos \delta + \dots \right)$$

So ist sofort ersichtlich, daß in  $f$  (Gl. 34a, in den Koordinaten des Integrationspunktes geschrieben) die Glieder der höchsten Ordnung ( $\mathfrak{R}^{-4}$ ) sich gegenseitig aufheben und  $f(x, y, z)$  bis auf einen Zahlenfaktor sich verhält wie

$$\frac{\sigma}{\mu} U^2 a A^3 \frac{\cos \delta}{\mathfrak{R}^5},$$

daß also das Integral (35a) auch bei Ausdehnung der oberen Grenze ins Unendliche für endliche Aufpunkte endlich bleibt.

Ferner haben wir das Verhalten der Funktion  $J(x, y, z)$  für Werte von  $R$  zu untersuchen, die wesentlich größer als  $A$  sind. Das Integrationsgebiet teilen wir zu dem Zweck in 3 konzentrische Kugelgebiete:

- 1)  $\mathfrak{R} \geq R$
- 2)  $R > \mathfrak{R} \geq C$
- 3)  $C > \mathfrak{R}$ .

Hier bedeutet  $C$  einen Radius, der so groß gegen  $A$  ist, daß  $f(x, y, z)$  mit gegebener Genauigkeit bis auf einen Zahlenfaktor  $K$  durch den oben angegebenen Näherungsausdruck

$$\frac{\sigma}{\mu} U^2 a A^3 \frac{\cos \delta}{\mathfrak{R}^5}$$

ersetzt werden kann, wenn  $\mathfrak{R} \geq C$ .

Dem ersten Teil des Integrationsgebiets entspricht daher der Anteil:

$$\begin{aligned} J_1 &= -\frac{\sigma}{\mu} U^2 a A^3 \frac{K}{8\pi} \int_{\mathfrak{R}=R}^{\mathfrak{R}=\infty} (r - \mathfrak{R} + R \cos(R \mathfrak{R})) \frac{\cos \delta}{\mathfrak{R}^5} d\tau \\ &= -\frac{\sigma}{\mu} U^2 a A^3 \frac{K}{8\pi} \int_R^{\infty} \frac{d\mathfrak{R}}{\mathfrak{R}^3} \int_0^{2\pi} d\varepsilon \int_0^\pi (r - \mathfrak{R} + R \cos(R \mathfrak{R})) \cos \delta \sin \delta d\delta. \end{aligned}$$

Dieses Integral hat höchstens die Ordnung  $\frac{1}{R}$ . Dem zweiten Teil des Integrationsgebiets entspricht der Anteil:

$$J_2 = -\frac{\sigma}{\mu} U^2 a A^2 \frac{K}{8\pi} \int_0^R \frac{d\Re}{\Re^3} \int_0^{2\pi} d\varepsilon \int_0^\pi (r - \Re + R \cos(R\Re)) \cos \delta \sin \delta d\delta.$$

Setzen wir hier  $\Re = kR$ , so ergibt sich

$$J_2 = -\frac{\sigma}{\mu} U^2 a A^2 \frac{K}{8\pi} \frac{1}{R} \int_0^1 \frac{dk}{k^3} \int_0^{2\pi} d\varepsilon \int_0^\pi \left(\frac{r}{R} - k + \cos(R\Re)\right) \cos \delta \sin \delta d\delta,$$

wobei noch zu setzen ist:

$$\frac{r}{R} = \frac{\sqrt{R^2 + \Re^2 - 2R\Re \cos(R\Re)}}{R} = \sqrt{1 + k^2 - 2k \cos(R\Re)}.$$

Wegen seines Verhaltens an der unteren Grenze  $k_0 = \frac{R}{C}$  wird das 3-fache Integral in  $J_2$  von der Ordnung  $k_0^{-2} = \frac{R^2}{C^2}$  und daher  $J_2$  von der Ordnung  $R$ .

Der dritte Bestandteil von  $J$  wird endlich:

$$J_3 = -\frac{1}{8\pi} \int_0^C \Re^2 d\Re \int_0^{2\pi} d\varepsilon \int_0^\pi (r - \Re + R \cos(R\Re)) f(x, y, z) \sin \delta d\delta$$

und für  $r$  gilt hier die Entwicklung:

$$r = \sqrt{R^2 + \Re^2 - 2R\Re \cos(R\Re)} = R \left(1 - \frac{\Re}{R} \cos(R\Re) + \frac{\Re^2}{R^2} \dots\right).$$

Da  $f$  im dritten Teil des Integrationsgebiets überall endlich, und  $C$  von  $R$  unabhängig ist, wird also:

$$J_3 = \text{endliche Glieder} + R \int_0^C \Re^2 d\Re \int_0^{2\pi} d\varepsilon \int_0^\pi (1 + \cos(R\Re)) f \sin \delta d\delta.$$

Die drei Bestandteile zusammenfassend finden wir also, daß  $J = J_1 + J_2 + J_3$  sich aus endlichen Gliedern und solchen von der Ordnung  $R$  zusammensetzt. Seine zweiten Ableitungen nähern sich daher für großes  $R$  verschwindenden Werten, d. h. die Funktion  $J$  erfüllt im Unendlichen die an die Funktion  $\varphi$  gestellten Bedingungen.

Ferner folgt aus der Endlichkeit von  $f$  im ganzen Integrationsgebiet die dreifache Differenzierbarkeit von  $J$ . Diese besteht auch dann noch, wenn wir die Quelle und Senke punktförmig in den Punkten  $q = 0$  bzw.  $q_1 = 0$  annehmen und dementsprechend den Ausdruck (34a) von  $f$  bis an diese Punkte hin ausdehnen. Also ergeben sich aus  $J$  durch die in den Formeln (3) angegebenen Differentiationen endliche und im Unendlichen verschwindende Geschwindigkeitskomponenten. Somit kann

die gesuchte Funktion  $\varphi''$  angegeben werden als die Summe von  $J$  und so gewählten Lösungen der Gleichung  $\Delta \Delta \varphi = 0$ , daß den Randbedingungen an der Kugel genügt wird.

Zu ihrer Bestimmung muß das Verhalten von  $J$  an der Oberfläche der Kugel bekannt sein, und daher  $J$  entwickelt werden für Aufpunkte in der Nähe der Kugel, unter der Voraussetzung, daß  $a$  sehr klein gegen  $A$  sei. Wir beweisen zunächst, daß dann nur Integrationsgebiete in Betracht kommen, für die auch  $\Re$  klein gegen  $A$  ist. Deshalb können wir für diese Entwicklung von  $J$  den Abstand  $A$  beliebig groß werden lassen und kommen so zu der sehr einfachen, in der Umgebung der Kugel geltenden Darstellung (38) für  $J$ .

Beweis: In den Gebieten, in denen  $\Re$  mit  $A$  vergleichbar oder groß gegen  $A$  ist, wird die eckige Klammer in (34a) (in den Koordinaten des Integrationspunktes geschrieben) überall von der Größenordnung  $\frac{1}{\Re^4}$ . Denn  $P$  und  $P_1$  sind dann mit  $\Re$  vergleichbar oder von kleinerer Ordnung, die Faktoren  $\frac{(\xi + A)}{P}$  und  $\frac{(\xi - A)}{P_1}$  aber bleiben überall endlich (von der Ordnung  $\Re^0$ ). Ferner aber wechselt  $f(\xi, \eta, \zeta)$  sein Vorzeichen, wenn  $\xi$  mit  $-\xi$  (und demnach auch  $P$  mit  $P_1$ ) vertauscht wird, während  $\Re$  unverändert bleibt, so daß  $\cos \delta$  in  $-\cos \delta$  übergeht. Trennen wir daher von dem ganzen Integrationsgebiet unseres Integrals  $J$  (35a) ein Gebiet zwischen den Kreisen  $\Re = b$  und  $\Re = \lambda A$  ab, wo  $\lambda$  einen nicht verschwindenden echten Bruch bedeuten soll, so können wir  $f$  für den Rest ( $\Re \geq \lambda A$ ) in der Form ansetzen:

$$f = \frac{\sigma}{\mu} a U^2 \frac{A^2}{\Re^4} \cos \delta f^*,$$

wo  $f^*$  eine eindeutige Funktion von  $\Re$  und  $\cos^2 \delta$  bedeutet, die in bezug auf  $\Re$  und in bezug auf  $A$  von nullter Ordnung und überall endlich ist. Dieser Bestandteil des Integrals wird dann

$$J_\lambda = -\frac{\sigma a U^2}{8\pi\mu} A^2 \int_{\Re = \lambda A}^{\Re = \infty} \frac{\cos \delta}{\Re^4} f^*(\Re, \cos^2 \delta) (\tau - \Re + R \cos(R\Re)) d\tau.$$

Wir setzen hier den Winkel  $(\Re R) = \alpha$  und entwickeln für Integrationsgebiete  $\Re > R$ :

$$(36) \quad \tau - \Re + R \cos \alpha = \frac{1}{2} \frac{R^2}{\Re} \sin^2 \alpha + \frac{1}{2} \frac{R^3}{\Re^2} \cos \alpha \sin^2 \alpha + \frac{R^4}{\Re^3} \dots$$

Diese Entwicklung nach fallenden Potenzen von  $\Re$  hatten wir im Auge, als wir von dem Integral (35) zum Integral (35a) übergangen. Wir erhalten:

$$(37) \quad J_\lambda = -\frac{\sigma a U^2}{8\pi\mu} A^2 \int_{\Re = \lambda A}^{\Re = \infty} \frac{\cos \delta}{\Re^4} f^*(\Re, \cos^2 \delta) \left( \frac{R^2}{2} \sin^2 \alpha + \frac{R^3}{2\Re} \cos \alpha \sin^2 \alpha + \dots \right) d\tau.$$

Das erste Entwicklungsglied dieses Integrals:

$$-\frac{\sigma a U^2}{16 \pi \mu} A^2 R^2 \int_{\mathfrak{R}=\lambda A}^{\mathfrak{R}=\infty} \frac{\cos \delta}{\mathfrak{R}^5} f^*(\mathfrak{R}, \cos^2 \delta) \sin^2 \alpha d\tau$$

verschwindet identisch, da in je zwei Punkten, die sich in bezug auf den 0-Punkt ( $\mathfrak{R} = 0$ ) diametral gegenüberliegen, der Integrand gleiche Absolutwerte, aber entgegengesetztes Vorzeichen hat.

Dies gilt aber nicht für das zweite und überhaupt alle geraden Entwicklungsglieder, für die der Integrand in diametral gegenüberliegenden Punkten gleiche Werte annimmt. Das zweite Glied lautet ausgeführt:

$$-\frac{\sigma a U^2}{16 \pi \mu} A^2 R^3 \int_{\lambda A}^{\infty} \frac{d\mathfrak{R}}{\mathfrak{R}^4} \int_0^{2\pi} d\varepsilon \int_0^{\pi} \cos \delta \sin \delta \cos \alpha \sin^2 \alpha f^* d\delta.$$

Das hierin enthaltene dreifache Integral wird von der Ordnung

$$\frac{1}{\lambda^3 A^3}$$

und daher der ganze Ausdruck von der Ordnung

$$\frac{\sigma U^2 R^3 a}{\mu A},$$

er ist also neben endlichen Gliedern zu vernachlässigen, weil  $A$  groß gegen  $a$  vorausgesetzt worden ist. Das gilt dann in noch höherem Maße für die höheren Entwicklungsglieder des Integrals (37), da die Entwicklung des Integranden nach steigenden Potenzen von  $\frac{R}{\mathfrak{R}}$  zu einer Entwicklung des Integrals nach steigenden Potenzen von  $\frac{R}{A}$  führt.

Es bleibt uns daher, wie oben behauptet wurde, von dem Integral (35a) nur noch der Bestandteil übrig, der von dem Integrationsgebiet zwischen den Kugeln  $\mathfrak{R} = b$  und  $\mathfrak{R} = \lambda A$  herrührt, und daher läßt es sich nun wesentlich vereinfachen. In diesem Gebiet entwickeln wir  $f(x, y, z)$  nach Potenzen von  $\frac{\mathfrak{R}}{A}$  und erhalten (s. die Ausrechnung in Anhang 3):

$$f(x, y, z) = \frac{\sigma}{\mu} a U^2 \left[ -\frac{3 \cos \delta}{2 \mathfrak{R}^2} + \frac{9 (9 \cos \delta - 5 \cos^3 \delta)}{4 A^2} + \frac{\mathfrak{R}^2}{A^4} \dots \right].$$

Unser Integral wird daher

$$(35b) \quad J'_2 = \frac{-\sigma a U^2}{8 \pi \mu} \int_{\mathfrak{R}=b}^{\mathfrak{R}=\lambda A} \left[ -\frac{3 \cos \delta}{2 \mathfrak{R}^2} + \frac{9}{4 A^2} (9 \cos \delta - 5 \cos^3 \delta) + \frac{\mathfrak{R}^2}{A^4} \dots \right] \cdot [\tau - \mathfrak{R} + R \cos \alpha] d\tau.$$

In der Entwicklung dieses Integrals kommt für das Integrationsgebiet  $b < \mathfrak{R} \leq R$  nur das erste Glied des Integranden,  $-\frac{3 \cos \delta}{2 \mathfrak{R}^2}$ , in Betracht

wegen der Annahme, daß  $\frac{a}{A}$  und  $\frac{R}{A}$  klein seien. Für das Teilgebiet  $\Re > R$  entwickeln wir  $(r - \Re + R \cos \alpha)$  nach (36), und beachten, daß die von den ungeraden Gliedern dieser Entwicklung herrührenden Bestandteile wie oben in  $J_\lambda$ , so auch hier in  $J'_\lambda$  verschwinden, da der Integrand für sie in diametral gegenüberliegenden Punkten entgegengesetzt gleiche Werte annimmt. Von den geraden Gliedern der Entwicklung (36) liefert das erste,  $\cos \alpha \sin^2 \alpha \frac{R^3}{2 \Re^2}$ , den größten Beitrag, nämlich:

$$-\frac{\sigma a U^2}{16 \pi \mu} R^3 \int_{\frac{R}{A}}^{\frac{\lambda A}{\Re}} \frac{d\Re}{\Re^2} \int_0^{2\pi} d\varepsilon \int_0^\pi \left[ -\frac{3}{2} \cos \delta + \frac{9}{4} \frac{\Re^2}{A^2} (9 \cos \delta - 5 \cos^3 \delta) + \frac{\Re^4}{A^4} \dots \right] \cdot \cos \alpha \sin^2 \alpha \sin \delta d\delta.$$

Auch in diesem Integral kommt, wenn  $A$  groß gegen  $a$  und folglich auch groß gegen  $R$  ist, nur das erste Entwicklungsglied in Betracht, während alle übrigen von der Ordnung  $\frac{R}{A}$  klein werden. Von noch höherer Ordnung werden die entsprechenden Glieder klein, die von den höheren Entwicklungsgliedern der Entwicklung (36) (nach fallenden Potenzen von  $\Re$ ) herrühren. Also kommt auch für diese alle nur das erste Glied des Integranden von  $J'_\lambda$ , nämlich das Glied  $-\frac{3 \cos \delta}{2 \Re^2}$  in Betracht.

Gehen wir also endlich zur Grenze  $A = \infty$  über, so folgt aus dem Obigen zunächst, daß wir  $J$  durch  $J'_\lambda$  (35b) ersetzen können, und daß im Integranden von  $J'_\lambda$  überhaupt nur das erste Glied zu berücksichtigen ist. Die obere Grenze von  $J'_\lambda$  geht ebenfalls in  $\infty$  über, und wir erhalten für  $J$  an Stelle von (35a) die Gleichung

$$(38) \quad J_\infty = \frac{3 \sigma a U^2}{16 \pi \mu} \int_{\Re=b}^{\Re=\infty} \frac{\cos \delta}{\Re^2} (r - \Re + R \cos \alpha) d\tau.$$

Dieses Integral ist in der Tat eine Lösung der Gleichung

$$\Delta \Delta(\varphi'') = -\frac{3 \sigma a U^2}{2 \mu} \frac{x}{R^3},$$

die äquivalent ist mit der Gleichung:

$$DD(\psi'') = \frac{9 \sigma a U^2}{2 \mu} \frac{x r^2}{R^5}.$$

Deren Integral  $\psi'' = r \frac{\partial J_\infty}{\partial r}$  genügt, in Verbindung mit dem Integral  $\psi'$  (Gl. 32), unserer früheren Gleichung (13). Der Unterschied unserer jetzigen gegen die frühere Lösung (18) und (19) ist aber, daß jene unendlich viele unbestimmbare Konstanten enthielt, während das Integral (38) keine Unbestimmtheit enthält.

Die im Integral  $J$  noch willkürlich gelassene untere Grenze  $\mathfrak{R} = b$  können wir, wie aus der Form (38) ersichtlich ist, unbedenklich zu  $b = 0$  annehmen. Zur genauen Berechnung von  $J_\infty$  führen wir jetzt Polarkoordinaten ein:

$\alpha$  bedeutet den  $\sphericalangle (R\mathfrak{R})$ ;

$\beta$  (s. Fig. 3) bezeichne den Winkel der die Radien  $R$  und  $\mathfrak{R}$  enthaltenden Ebene mit der durch  $R$  und die  $X$ -Achse (Rotationsachse) gelegten Ebene. Aus dem sphärischen Dreieck, das die Rotationsachse und die beiden Radien  $R$ ,  $\mathfrak{R}$  bilden, folgt dann:

$$\cos \delta = \cos \vartheta \cos \alpha - \sin \vartheta \sin \alpha \cos \beta.$$

ferner folgt:

$$d\tau = \mathfrak{R}^2 d\mathfrak{R} d\beta \sin \alpha d\alpha.$$

Nach Ausführung der Integration nach  $\beta$  wird daher das Integral (38):

$$(38a) \quad J_\infty = \frac{3 \sigma a U^2}{8 \mu} \cos \vartheta \int_0^\infty d\mathfrak{R} \int_0^\pi \cos \alpha (r - \mathfrak{R} + R \cos \alpha) \sin \alpha d\alpha,$$

wo 
$$r^2 = R^2 + \mathfrak{R}^2 - 2 R \mathfrak{R} \cos \alpha.$$

Für die Berechnung des inneren Integrals bilden wir hieraus:

$$\cos \alpha = \frac{R^2 + \mathfrak{R}^2 - r^2}{2 R \mathfrak{R}}$$

und bei festgehaltenem  $\mathfrak{R}$ :

$$\sin \alpha d\alpha = - d \cos \alpha = \frac{r dr}{R \mathfrak{R}}.$$

Wir müssen nun das Integrationsgebiet wieder in zwei Gebiete trennen:

$$(1) \quad \mathfrak{R} \leq R; \quad (2) \quad \mathfrak{R} > R.$$

(1) Es wird:

$$(a) \quad R \int_0^R d\mathfrak{R} \int_0^\pi \cos^2 \alpha \sin \alpha d\alpha = \frac{2}{3} R^2$$

$$(b) \quad \int_0^R \mathfrak{R} d\mathfrak{R} \int_0^\pi \cos \alpha \sin \alpha d\alpha = 0$$

$$(c) \quad \int_0^R d\mathfrak{R} \int_0^\pi \cos \alpha \sin \alpha r d\alpha = \\ = \frac{1}{2R^2} \int_0^R \frac{d\mathfrak{R}}{\mathfrak{R}^2} \int_{R-\mathfrak{R}}^{R+\mathfrak{R}} (R^2 + \mathfrak{R}^2 - r^2) r^2 dr \\ = \frac{1}{2R^2} \int_0^R \frac{d\mathfrak{R}}{\mathfrak{R}^2} \left( -\frac{4}{3} R^2 \mathfrak{R}^3 + \frac{4}{15} \mathfrak{R}^5 \right) \\ = \frac{1}{2R^2} \left( -\frac{2}{3} R^2 \mathfrak{R}^2 + \frac{1}{15} \mathfrak{R}^4 \right) \Big|_0^R = -\frac{3}{10} R^2.$$



Zusammen erhalten wir also für den ersten Teil des Integrals  $J_\infty$ , der dem Integrationsgebiet  $R \leq \Re$  entspricht:

$$J_i = \frac{1}{4} \frac{\sigma a U^2}{\mu} R^2 \cos \vartheta - \frac{9}{80} \frac{\sigma a U^2}{\mu} R^2 \cos \vartheta = \frac{11}{80} \frac{\sigma a U^2}{\mu} R^2 \cos \vartheta.$$

(2) Von dem Integral

$$\int_R^\infty d\Re \int_0^\pi \cos \alpha \sin \alpha (r - \Re + R \cos \alpha) d\alpha$$

werden die einzelnen Bestandteile unendlich und nur ihre Summe bleibt endlich. Wir führen daher zuerst nur die Integration nach  $\alpha$  aus:

Es ist:

$$(a) \quad R \int_0^\pi \cos^2 \alpha \sin \alpha d\alpha = \frac{2}{3} R,$$

$$(b) \quad \Re \int_0^\pi \cos \alpha \sin \alpha d\alpha = 0,$$

$$(c) \quad \int_0^\pi \cos \alpha \sin \alpha r d\alpha = \int_{\Re-R}^{\Re+R} \frac{(R^2 + \Re^2 - r^2) r^2 dr}{2 R^2 \Re^2}$$

(gegenüber dem entsprechenden Bestandteil von  $J_i$  sind hier die Grenzen verändert). Also

$$\int_0^\pi \cos \alpha \sin \alpha r d\alpha = \frac{1}{2 R^2 \Re^2} \left( \frac{R^2 + \Re^2}{3} r^3 - \frac{r^5}{5} \right) \Big|_{\Re-R}^{\Re+R} = -\frac{2}{3} R + \frac{2}{15} \frac{R^3}{\Re^2}.$$

Daher im ganzen:

$$\int_0^\pi \cos \alpha \sin \alpha (r - \Re + R \cos \alpha) d\alpha = \frac{2}{15} \frac{R^3}{\Re^2}$$

Daher

$$J_a = \frac{3}{8} \frac{\sigma a U^2}{\mu} \cos \vartheta \int_R^\infty \frac{2}{15} \frac{R^3}{\Re^2} d\Re = \frac{1}{20} \frac{\sigma a U^2}{\mu} R^3 \cos \vartheta.$$

Zusammen endlich:

$$J_i + J_a = J_\infty = \frac{3}{16} \frac{\sigma a U^2}{\mu} R^3 \cos \vartheta.$$

Dies ist die gesuchte Näherungsformel für das Integral  $J$ , für Werte von  $R$ , die klein gegen die als sehr groß vorausgesetzte Entfernung  $A$  sind. Setzen wir nach S. 30  $\varphi'' = J$ , so gewinnen wir (nach S. 26) für  $\psi''$  die Näherungsformel:

$$(39) \quad \psi'' = \frac{3}{16} \frac{\sigma a U^2}{\mu} \frac{r^2 x}{R},$$

und in Verbindung mit (32) die Gleichung:

$$\psi' + \psi'' = \frac{3}{16} \frac{\sigma U^2}{\mu} \sin^2 \vartheta \cos \vartheta \left( a R^2 - \frac{3}{2} a^2 R - \frac{a^4}{2 R} \right).$$

Wir sind hiermit zu dem partikulären Integral (18) der Gl. (13) zurückgeführt, das wir so als einen in der Umgebung der Kugel gültigen Näherungsausdruck für ein partikuläres Integral der Gl. (30) erkennen, das im Unendlichen die zu fordernden Randbedingungen erfüllt. Die Zufügung des Gliedes

$$\frac{3}{32} \frac{\sigma}{\mu} U^2 \sin^2 \vartheta \cos \vartheta \left( -a^3 + \frac{a^5}{R^2} \right),$$

das der Gleichung  $DD(\psi) = 0$  genügt, führt also wie auf S. 14 zu dem Näherungsausdruck für die Stromfunktion:

$$(20) \quad \psi_1 = \frac{3}{32} S U \sin^2 \vartheta \cos \vartheta \frac{(R-a)^2 (2R^2 + aR + a^2)}{R^2},$$

der auch die Randbedingungen an der Kugel erfüllt. Er ist eine in der Umgebung der Kugel gültige Näherungsform für die bei großem Werte von  $\frac{A}{a}$  auch in beliebiger Entfernung bestehende Lösung:

$$(40) \quad \psi_1 = \frac{3}{32} S U a^2 \sin^2 \vartheta \cos \vartheta \left( -\frac{3R}{a} - 1 - \frac{a}{R} + \frac{a^2}{R^2} \right) + r \frac{\partial J}{\partial r},$$

in der  $J$  durch (35a) (mit  $b = 0$ ) und (34a) definiert ist und die alle an die Funktion  $\psi_1$  zu stellenden Bedingungen befriedigt. Die weiteren Folgerungen aus der Gl. (20) sind bereits früher gezogen worden.

Auf S. 29 hatten wir gesehen, daß die Funktion  $J$  im Unendlichen von der Ordnung  $R$  unendlich wird, folglich wird nach (40)  $\psi_1$  von gleicher Ordnung unendlich. Daraus folgt, daß  $D\psi_1$  von der Ordnung  $\frac{1}{R}$  verschwindet. Von den gleichen Ordnungen fanden wir auf S. 24  $\psi_0$ , bzw.  $D\psi_0$ . Hieraus folgt, daß die bei der Aufstellung der Gl. (30) vernachlässigten Glieder von Gl. (8) im Unendlichen von gleicher Ordnung in  $R$  wie die berücksichtigten sind und daß daher bei kleiner Reynoldsscher Zahl die Vernachlässigung unbedenklich ist. Wegen der Stetigkeitsannahmen, die wir für die Verteilung der Ergiebigkeit in den Quellgebieten machten, folgt ferner, daß nicht nur alle Geschwindigkeiten der überlagerten Näherungsbewegung, sondern auch die der Grundbewegung in den Quellgebieten endlich bleiben, daß daher die vernachlässigten Glieder der Gl. (8) endlich und bei kleiner Reynoldsscher Zahl klein neben den berücksichtigten sind. Dagegen bedarf die Frage, wie groß die Vernachlässigungen sind, wenn die Quellgebiete punktförmig angenommen werden, noch einer eigenen Untersuchung.

## Anhang 1.

## Berechnung der Gleichung (13) in § 2.

Nach (11) ist:

$$(11) \quad DD\psi_1 = \frac{\sigma}{\mu} \frac{1}{r} \left[ \frac{\partial \psi_0}{\partial x} \frac{\partial D\psi_0}{\partial r} - \frac{\partial \psi_0}{\partial r} \frac{\partial D\psi_0}{\partial x} - \frac{2}{r} \frac{\partial \psi_0}{\partial x} D\psi_0 \right]$$

Da  $x = R \cos \vartheta$ ;  $r = R \sin \vartheta$ , so folgt hieraus:

$$DD\psi_1 = \frac{\sigma}{\mu} \left[ \frac{1}{R^2 \sin^2 \vartheta} \left( \frac{\partial \psi_0}{\partial R} \frac{\partial D\psi_0}{\partial \vartheta} - \frac{\partial \psi_0}{\partial \vartheta} \frac{\partial D\psi_0}{\partial R} \right) - \frac{2}{r^2} \frac{\partial \psi_0}{\partial x} D\psi_0 \right]$$

wobei

$$\psi_0 = \frac{U}{4} \sin^2 \vartheta \left( -2R^2 + 3aR - \frac{a^3}{R} \right) = \frac{U}{4} r^2 \left( -2 + \frac{3a}{R} - \frac{a^3}{R^3} \right).$$

$$D\psi_0 = -\frac{3}{2} U \frac{a}{R} \sin^2 \vartheta = -\frac{3}{2} U \frac{ar^2}{R^3},$$

Also

$$\begin{aligned} & \frac{1}{R^2 \sin^2 \vartheta} \left( \frac{\partial \psi_0}{\partial R} \frac{\partial D\psi_0}{\partial \vartheta} - \frac{\partial \psi_0}{\partial \vartheta} \frac{\partial D\psi_0}{\partial R} \right) = \\ &= \frac{1}{R^2 \sin^2 \vartheta} \left[ \frac{U}{4} \sin^2 \vartheta \left( -4R + 3a + \frac{a^3}{R^2} \right) + \frac{3}{2} U \frac{a}{R^2} \sin^2 \vartheta \right. \\ & \left. - \frac{U}{2} \sin \vartheta \cos \vartheta \left( -2R^2 + 3aR - \frac{a^3}{R} \right) - 3U \frac{a}{R} \sin \vartheta \cos \vartheta \right. \\ & \left. - \frac{3}{4} U^2 \sin^2 \vartheta \cos \vartheta \left( \frac{6a}{R^2} - \frac{6a^3}{R^5} \right) \right] \end{aligned}$$

Ferner:

$$\begin{aligned} -\frac{2}{r^2} D\psi_0 \frac{\partial \psi_0}{\partial x} &= \frac{3Ua}{R^3} \frac{U}{4} r^2 \left( -\frac{3ax}{R^3} + \frac{3a^3x}{R^5} \right) \\ &= \frac{2}{4} U^2 \sin^2 \vartheta \cos \vartheta \left( -\frac{3a^2}{R^5} + \frac{3a^4}{R^5} \right). \end{aligned}$$

Daher

$$DD(\psi_1) = \frac{9}{4} \frac{\sigma}{\mu} U^2 \left( \frac{2a}{R^2} - \frac{3a^2}{R^5} + \frac{a^4}{R^5} \right) \sin^2 \vartheta \cos \vartheta.$$

## Anhang 2.

## Berechnung der Gleichung (30) in § 6.

Wir haben hier:

$$\psi_0 = \frac{A^2 U}{2} \left( \frac{A+x}{e} + \frac{A-x}{e_1} \right) + \frac{U}{4} \left( 3aR - \frac{a^3}{R} \right) \sin^2 \vartheta$$

und wie oben:

$$D\psi_0 = -\frac{3}{2} U \frac{a}{R} \sin^2 \vartheta = -\frac{3}{2} U \frac{ar^2}{R^3}.$$

Gegen die Formeln im Anhang (1) ist hier nur das Glied  $-\frac{UR^2 \sin^2 \vartheta}{2}$  von  $\psi_0$  in das obige erste Glied von  $\psi_0$  abgeändert, während  $D\psi_0$  unverändert geblieben ist. Wir haben daher hier nur noch neu zu berechnen: Von dem Glied  $\frac{1}{r} \left( \frac{\partial \psi_0}{\partial x} \frac{\partial D\psi_0}{\partial r} - \frac{\partial \psi_0}{\partial r} \frac{\partial D\psi_0}{\partial x} \right)$  den Anteil:

$$\begin{aligned} & -\frac{3aA^2U^2}{4r} \left[ \begin{array}{cc} \left[ \frac{1}{e} - \frac{1}{e_1} - \left( \frac{(A+x)^2}{e^3} - \frac{(A-x)^2}{e_1^3} \right) \right] & -\frac{3r^2x}{R^5} \\ \left[ -\frac{r(A+x)}{e^3} + -\frac{r(A-x)}{e_1^3} \right] & \left( -\frac{3r^3}{R^5} + \frac{2r}{R^3} \right) \end{array} \right] \\ & = -\frac{3}{4}aA^2U^2r^2 \left[ \begin{array}{cc} \left( \frac{1}{e^3} - \frac{1}{e_1^3} \right) & -\frac{3x}{R^5} \\ \left( -\frac{A+x}{e^3} - \frac{A-x}{e_1^3} \right) & \frac{2x^2-r^2}{R^5} \end{array} \right] \\ & = -\frac{3}{4}aA^2U^2\frac{r^2}{R^5} \left( \frac{-x^2-r^2-3Ax}{e^3} + \frac{x^2+r^2-3Ax}{e_1^3} \right) \\ & = -\frac{3}{4}aA^2U^2\frac{r^2}{R^5} \left( \frac{e^2-2Ax-A^2+3Ax}{e^3} + \frac{e_1^2+2Ax-A^2-3Ax}{e_1^3} \right) \\ & = \frac{3}{4}aA^2U^2\frac{r^2}{R^5} \left( \frac{1}{e} - \frac{1}{e_1} - \frac{A^2-Ax}{e^3} + \frac{A^2+Ax}{e_1^3} \right). \end{aligned}$$

Ferner erhalten wir zu dem Glied  $-\frac{2}{r^2} \frac{\partial \psi_0}{\partial x} D\psi_0$  den Anteil:

$$\begin{aligned} & -\frac{2A^2U}{2r^2} \left( \frac{r^2}{e^3} - \frac{r^2}{e_1^3} \right) - \frac{3}{2}Ua\frac{r^2}{R^3} \\ & = \frac{3}{2}aA^2U^2\frac{r^2}{R^5} \left( \frac{e^2-2Ax-A^2}{e^3} - \frac{e_1^2+2Ax-A^2}{e_1^3} \right) \\ & = \frac{3}{2}aA^2U^2\frac{r^2}{R^5} \left[ \frac{1}{e} - \frac{1}{e_1} - \frac{A^2+2Ax}{e^3} + \frac{A^2-2Ax}{e_1^3} \right]. \end{aligned}$$

Die beiden Anteile ergeben zusammen:

$$\frac{3}{4}aA^2U^2\frac{r^2}{R^5} \left[ 3 \left( \frac{1}{e} - \frac{1}{e_1} \right) - \frac{3A^2+3Ax}{e^3} + \frac{3A^2-3Ax}{e_1^3} \right].$$

Dieser Teil entspricht dem Glied  $\frac{9}{2}U^2\frac{a}{R^2}\sin^2\vartheta\cos\vartheta$  in der Schlußgleichung von Anhang 1. Wir erhalten also hier im ganzen:

$$(30) \quad DD\psi_1 = \frac{9}{4}\frac{\sigma}{\mu}aU^2 \left\{ \frac{A^2r^2}{R^5} \left[ \frac{1}{e} - \frac{1}{e_1} - A \left( \frac{A+x}{e^3} - \frac{A-x}{e_1^3} \right) \right] \right. \\ \left. + \left( -\frac{3a}{R^3} + \frac{a^2}{R^5} \right) \sin^2\vartheta\cos\vartheta \right\}.$$

## Anhang 3.

Entwicklung der Gl. (34) für kleine Werte von  $\frac{R}{A}$ .

Zur Entwicklung von  $f(x, y, z)$  nach Potenzen von  $\frac{R}{A}$  ist die Form (34) geeigneter als (34a): Wir haben:

$$e = \sqrt{R^2 + A^2 + 2RA \cos \vartheta} = A \sqrt{1 + \left(\frac{R}{A}\right)^2 + 2\frac{R}{A} \cos \vartheta}$$

$$e_1 = \sqrt{R^2 + A^2 - 2RA \cos \vartheta} = A \sqrt{1 + \left(\frac{R}{A}\right)^2 - 2\frac{R}{A} \cos \vartheta}.$$

Daher für kleine Werte von  $\frac{R}{A}$ :

$$\begin{aligned} \frac{e}{R} &= \frac{A}{R} \left( 1 + \frac{R}{A} \cos \vartheta + \frac{R^2}{A^2} \left( \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos^2 \vartheta \right) \right. \\ &\quad \left. + \frac{R^3}{A^3} \left( -\frac{1}{2} \cos \vartheta + \frac{1}{2} \cos^3 \vartheta \right) + \dots \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{e_1}{R} &= \frac{A}{R} \left( 1 - \frac{R}{A} \cos \vartheta + \frac{R^2}{A^2} \left( \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos^2 \vartheta \right) \right. \\ &\quad \left. + \frac{R^3}{A^3} \left( +\frac{1}{2} \cos \vartheta - \frac{1}{2} \cos^3 \vartheta \right) + \dots \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{e^3}{R^3} &= \frac{A^3}{R^3} \left( 1 + \frac{3R}{A} \cos \vartheta + \frac{R^2}{A^2} \left( \frac{3}{2} + \frac{3}{2} \cos^2 \vartheta \right) \right. \\ &\quad \left. + \frac{R^3}{A^3} \left( \frac{3}{2} \cos \vartheta - \frac{1}{2} \cos^3 \vartheta \right) + \dots \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{e_1^3}{R^3} &= \frac{A^3}{R^3} \left( 1 - \frac{3R}{A} \cos \vartheta + \frac{R^2}{A^2} \left( \frac{3}{2} + \frac{3}{2} \cos^2 \vartheta \right) \right. \\ &\quad \left. + \frac{R^3}{A^3} \left( -\frac{3}{2} \cos \vartheta + \frac{1}{2} \cos^3 \vartheta \right) + \dots \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Also} \quad & \left( \frac{e}{R} - \frac{1}{3} \frac{e^3}{R^3} - \frac{2}{3} \right) \\ &= -\frac{1}{3} \frac{A^3}{R^3} - \frac{A^2}{R^2} \cos \vartheta + \frac{A}{R} \left( \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos^2 \vartheta \right) + \left( -\frac{2}{3} + \frac{1}{2} \cos \vartheta + \frac{1}{6} \cos^3 \vartheta \right) + \dots \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \left( \frac{e_1}{R} - \frac{1}{3} \frac{e_1^3}{R^3} - \frac{2}{3} \right) = \\ &= -\frac{1}{3} \frac{A^3}{R^3} + \frac{A^2}{R^2} \cos \vartheta + \frac{A}{R} \left( \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos^2 \vartheta \right) + \left( -\frac{2}{3} - \frac{1}{2} \cos \vartheta - \frac{1}{6} \cos^3 \vartheta \right) + \dots \end{aligned}$$

Ferner ist noch:

$$\frac{R}{e} = \frac{R}{A} \left( 1 - \frac{R}{A} \cos \vartheta + \frac{R^2}{A^2} \left( -\frac{1}{2} + \frac{3}{2} \cos^2 \vartheta \right) + \dots \right)$$

$$\frac{R}{e_1} = \frac{R}{A} \left( 1 + \frac{R}{A} \cos \vartheta + \frac{R^2}{A^2} \left( -\frac{1}{2} + \frac{3}{2} \cos^2 \vartheta \right) + \dots \right)$$

Also:

$$\begin{aligned} & \frac{\varrho^3}{R^3} - \frac{6\varrho}{R} + 8 - \frac{3R}{\varrho} = \\ & = \frac{A^3}{R^3} + \frac{3A^2}{R^2} \cos \vartheta + \frac{A}{R} \left( -\frac{9}{2} + \frac{3}{2} \cos^2 \vartheta \right) + \left( 8 - \frac{9}{2} \cos \vartheta - \frac{1}{2} \cos^3 \vartheta \right) + \dots \\ & \frac{\varrho_1^3}{R^3} - \frac{6\varrho_1}{R} + 8 - \frac{3R}{\varrho_1} = \\ & = \frac{A^3}{R^3} - \frac{3A^2}{R^2} \cos \vartheta + \frac{A}{R} \left( -\frac{9}{2} + \frac{3}{2} \cos^2 \vartheta \right) + \left( 8 + \frac{9}{2} \cos \vartheta + \frac{1}{2} \cos^3 \vartheta \right) + \dots \end{aligned}$$

Ferner ist:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{A^2(A+2x)^2} = \frac{1}{A^4 \left( 1 + \frac{2R}{A} \cos \vartheta \right)^2} \\ & = \frac{1}{A^4} \left( 1 - \frac{4R}{A} \cos \vartheta + \frac{12R^2}{A^2} \cos^2 \vartheta - \frac{32R^3}{A^3} \cos^3 \vartheta \dots \right) \\ & \frac{1}{A^2(A-2x)^2} = \frac{1}{A^4} \left( 1 + \frac{4R}{A} \cos \vartheta + \frac{12R^2}{A^2} \cos^2 \vartheta + \frac{32R^3}{A^3} \cos^3 \vartheta \dots \right) \\ & \frac{A+x}{3A^2(A+2x)^3} = \frac{1}{3A^4} \left( 1 + \frac{R}{A} \cos \vartheta \right) \left( 1 - \frac{6R}{A} \cos \vartheta + \frac{24R^2}{A^2} \cos^2 \vartheta - \frac{80R^3}{A^3} \cos^3 \vartheta \dots \right) \\ & = \frac{1}{3A^4} \left( 1 - \frac{5R}{A} \cos \vartheta + \frac{18R^2}{A^2} \cos^2 \vartheta - \frac{56R^3}{A^3} \cos^3 \vartheta \dots \right) \end{aligned}$$

Ebenso:

$$\frac{A-x}{3A^2(A-2x)^3} = \frac{1}{3A^4} \left( 1 + \frac{5R}{A} \cos \vartheta + \frac{18R^2}{A^2} \cos^2 \vartheta + \frac{56R^3}{A^3} \cos^3 \vartheta \dots \right)$$

Also wird:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{A^2(A+2x)^2} \left( \frac{\varrho}{R} - \frac{1}{3} \frac{\varrho^3}{R^3} - \frac{2}{3} \right) - \frac{1}{A^2(A-2x)^2} \left( \frac{\varrho_1}{R} - \frac{1}{3} \frac{\varrho_1^3}{R^3} - \frac{2}{3} \right) \\ & = \frac{2 \cos \vartheta}{3 R^2 A^2} + \frac{1}{A^4} \left( -3 \cos \vartheta + \frac{5}{3} \cos^3 \vartheta \right) + \dots \\ & \frac{A+x}{3A^2(A+2x)^3} \left( 2 \frac{\varrho}{R} - \frac{1}{3} \frac{\varrho^3}{R^3} - \frac{8}{3} + \frac{R}{\varrho} \right) + \frac{A-x}{3A^2(A-2x)^3} \left( 2 \frac{\varrho_1}{R} - \frac{1}{3} \frac{\varrho_1^3}{R^3} - \frac{8}{3} + \frac{R}{\varrho_1} \right) \\ & = -\frac{4 \cos \vartheta}{3 A^2 R^2} + \frac{1}{A^4} \left( 12 \cos \vartheta - \frac{20}{3} \cos^3 \vartheta \right) + \dots \end{aligned}$$

Aus diesen beiden Gleichungen folgt zusammen nach (34):

$$\begin{aligned} f(x, y, z) &= \frac{9 a U^2 \sigma}{4 \mu} \left[ -\frac{2 \cos \vartheta}{3 R^2} + \frac{1}{A^2} (9 \cos \vartheta - 5 \cos^3 \vartheta) + \dots \right] \\ &= \frac{a U^2 \sigma}{\mu} \left[ -\frac{3 \cos \vartheta}{2 R^2} + \frac{9}{4 A^2} (9 \cos \vartheta - 5 \cos^3 \vartheta) + \dots \right]. \end{aligned}$$











N11< 51973796 090

KIT-Bibliothek

