Ueber Kegelschnitte im Raume.

Von C. Hierholzer in Carlsruhe.

Die Bestimmung eines Kegelschnittes im Raume erfordert acht Bedingungen, ist aber im Allgemeinen schon dann eine vieldeutige, wenn die Bedingungen linear sind, d. h. wenn die bestimmenden Elemente nur in Punkten, geraden Linien und Ebenen bestehen. Herr Chasles hat (Comptes rendus 1865, p. 389) die Zahlen der durch lineare Bedingungen bestimmten Kegelschnitte gegeben, ohne den Weg anzudeuten, auf welchem man zu seinen Resultaten gelangen kann. Ausser einer Abhandlung des Herrn Lüroth im 67ten Bande von Crelle's Journal, in welcher auf geometrischem Wege die Anzahl der Kegelschnitte abgeleitet wird, welche acht gerade Linien schneiden, ist meines Wissens keine Arbeit über diesen Gegenstand veröffentlicht worden. Ich habe auf analytisch-geometrischem Wege die Lösung eines Theils der genannten Aufgaben versucht, und erlaube mir, dieselbe hier vorzulegen.

Weil mir die Betrachtung von Punktcoordinaten und Raumcurven geläufiger ist als diejenige von Ebenencoordinaten und abwickelbaren Flächen, so werde ich statt der oben erwähnten Aufgaben die ihnen nach dem Princip der Dualität entsprechenden behandeln, also Kegel zweiter Ordnung bestimmen, welche gewissen acht linearen Bedingungen genügen. Der Kürze wegen will ich mir erlauben, überall, wo ein Missverständniss nicht zu befürchten steht, statt „Kegel zweiter Ordnung“ einfach „Kegel“ zu schreiben.

§ 1.

Von den verschiedenen Formen, unter welchen die Bedingung zwischen den Coordinaten von sechs Punkten erscheint, welche auf einem Kegelschnitt liegen, ist für die folgenden Untersuchungen vorzugsweise eine geeignet, welche wir in Kürze entwickeln wollen.

Wir bezeichnen durch $x_1\ x_2\ x_3$ die laufenden Coordinaten, durch $x_1^{(i)}\ x_2^{(i)}\ x_3^{(i)}$ $(i = 1, 2, 3, \ldots 6)$ die Coordinaten der gegebenen Punkte 1, 2, 3, ... 6, und setzen

$$U_{\varkappa\lambda} = \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ x_1^{(\varkappa)} & x_2^{(\varkappa)} & x_3^{(\varkappa)} \\ x_1^{(\lambda)} & x_2^{(\lambda)} & x_3^{(\lambda)} \end{vmatrix}.$$

$U_{\varkappa\lambda} = 0$ stellt die Gerade dar, welche die Punkte $\varkappa$ und λ verbindet, und die Gleichung eines jeden, durch die Punkte 1, 2, 3, 4 hindurchgehenden Kegelschnitts hat die Form:

$$U_{12}\ U_{34} - \mu\ U_{14}\ U_{23} = 0,$$

wo μ einen willkürlichen Parameter bezeichnet. Bestimmen wir μ so, dass der Kegelschnitt auch noch durch den Punkt 5 geht, und setzen hierauf für x_1, x_2, x_3 die Coordinaten des Punktes 6, so ergiebt sich die gesuchte Bedingung

$$(126)\ (346)\ (145)\ (235) - (146)\ (236)\ (125)\ (345) = 0,$$

wenn

$$\Sigma \pm x_1^{(\varkappa)}\ x_2^{(\lambda)}\ x_3^{(\mu)}$$

durch $(\varkappa\ \lambda\ \mu)$ bezeichnet wird.

Alle Gleichungen, welche aus der eben erhaltenen durch Vertauschung der Zahlen 1, 2, ... 6 hervorgehen, sind Ausdrücke für dieselbe Bedingung und können sich nur in der Form von einander unterscheiden.

§ 2.

Wir beginnen die Untersuchung mit der Betrachtung von Kegeln, welche sechs gegebene gerade Linien berühren. Solcher Kegel giebt es eine zweifach unendliche Schaar; der Ort ihrer Spitzen ist eine Oberfläche, deren Gleichung wir ableiten wollen.

Durch

$$\left.\begin{array}{l} A_x^{(i)} \equiv a_1^{(i)} x_1 + a_2^{(i)} x_2 + a_3^{(i)} x_3 + a_4^{(i)} x_4 = 0 \\ B_x^{(i)} \equiv b_1^{(i)} x_1 + b_2^{(i)} x_2 + b_3^{(i)} x_3 + b_4^{(i)} x_4 = 0 \end{array}\right\} \quad (i = 1, 2, \ldots 6),$$

mögen die gegebenen geraden Linien dargestellt werden.

Die Ebenen, welche diese Geraden mit einem beliebigen Punkte $y_1\ y_2\ y_3\ y_4$ des Raumes verbinden, haben die Gleichungen

$$(1) \qquad A_x^{(i)}\ B_y^{(i)} - B_x^{(i)}\ A_y^{(i)} = 0 \quad (i = 1, 2, \ldots 6).$$

Diese sechs Ebenen umhüllen einen Kegel, wenn ihre Durchschnittslinien mit einer beliebigen Ebene — wir wählen die Coordinatenebene $x_4 = 0$ — einen Kegelschnitt berühren. Zerfällt der Kegelschnitt in ein Punktepaar, so besteht der Kegel in den beiden Geraden, welche die Spitze mit den Punkten des Paares verbinden.

Die Coordinaten der Durchschnittslinien der Ebenen (1) mit $x_4 = 0$ sind die Coëfficienten von $x_1\ x_2\ x_3$ in den Gleichungen (1),

$$a_1^{(i)} B_y^{(i)} - b_1^{(i)} A_y^{(i)} \quad , \quad a_2^{(i)} B_y^{(i)} - b_2^{(i)} A_y^{(i)} \quad , \quad a_3^{(i)} B_y^{(i)} - b_3^{(i)} A_y^{(i)}$$
$$i = 1, 2, \dots 6.$$

Sollen diese sechs Geraden Tangenten eines Kegelschnittes sein, so müssen ihre Coordinaten der in § 1. entwickelten Bedingung genügen, oder der folgenden, welche durch Vertauschung der Zahlen 3 und 6 aus jener hervorgeht, und welche wir der Uebersichtlichkeit wegen vorziehen:

$$(2) \qquad (123)\,(145)\,(625)\,(634) - (125)\,(134)\,(623)\,(645) = 0.$$

Setzen wir in dieser Gleichung für die $x^{(i)}$ die oben für die Coordinaten der Durchschnittslinien gefundenen Ausdrücke, so erhalten wir die Gleichung für die y, welche erfüllt sein muss, wenn die sechs Ebenen (1) einen Kegel umhüllen sollen, und die daher den Ort der Spitzen der Kegel darstellt, welche die sechs gegebenen geraden Linien berühren. Jede der Determinanten

$$(\varkappa\lambda\mu) = \begin{vmatrix} a_1^{(\varkappa)} B_y^{(\varkappa)} - b_1^{(\varkappa)} A_y^{(\varkappa)} & a_2^{(\varkappa)} B_y^{(\varkappa)} - b_2^{(\varkappa)} A_y^{(\varkappa)} & a_3^{(\varkappa)} B_y^{(\varkappa)} - b_3^{(\varkappa)} A_y^{(\varkappa)} \\ a_1^{(\lambda)} B_y^{(\lambda)} - b_1^{(\lambda)} A_y^{(\lambda)} & a_2^{(\lambda)} B_y^{(\lambda)} - b_2^{(\lambda)} A_y^{(\lambda)} & a_3^{(\lambda)} B_y^{(\lambda)} - b_3^{(\lambda)} A_y^{(\lambda)} \\ a_1^{(\mu)} B_y^{(\mu)} - b_1^{(\mu)} A_y^{(\mu)} & a_2^{(\mu)} B_y^{(\mu)} - b_2^{(\mu)} A_y^{(\mu)} & a_3^{(\mu)} B_y^{(\mu)} - b_3^{(\mu)} A_y \end{vmatrix}$$

ist vom dritten Grade für die y und die Fläche somit von der 12ten Ordnung.

Allein man sieht leicht ein, dass die Ebene $y_4 = 0$ ein Theil dieser Fläche sein muss. Denn verbindet man irgend einen Punkt der Ebene $y_4 = 0$ mit den gegebenen sechs Geraden durch Ebenen, so schneiden sich die Durchschnittslinien dieser letztern mit $y_4 = 0$ in eben jenem Punkte und umhüllen also einen uneigentlichen Kegelschnitt.

In der That enthält jede der Determinanten $(\varkappa\lambda\mu)$ den Factor y_4. Es ist nämlich, wenn wir die Determinanten des Systems

$$\begin{vmatrix} a_1^{(i)} & a_2^{(i)} & a_3^{(i)} & a_4^{(i)} \\ b_1^{(i)} & b_2^{(i)} & b_3^{(i)} & b_4^{(i)} \end{vmatrix}$$

mit passend gewählten Vorzeichen durch

$$p_1^{(i)} \quad , \quad p_2^{(i)} \quad \dots \quad p_6^{(i)}$$

bezeichnen, und

$$a_\varrho^{(i)}\ B_y - b_\varrho^{(i)}\ A_y^{(i)} = c_\varrho^{(i)}$$

setzen,

$$(3) \qquad \begin{cases} c_1^{(i)} = \qquad\qquad\qquad\quad p_1^{(i)} y_2 + p_2^{(i)} y_3 + p_3^{(i)} y_4, \\ c_2^{(i)} = - p_1^{(i)} y_1 \qquad\qquad\quad + p_4^{(i)} y_3 + p_5^{(i)} y_4, \\ c_3^{(i)} = - p_2^{(i)} y_1 - p_4^{(i)} y_2 \qquad\qquad + p_6^{(i)} y_4, \\ c_4^{(i)} = - p_3^{(i)} y_1 - p_5^{(i)} y_2 - p_6^{(i)} y_3 \qquad\qquad . \end{cases}$$

Hieraus erkennt man sofort, dass die Determinante

$$(\varkappa\lambda\mu) = \begin{vmatrix} c_1^{(\varkappa)} & c_2^{(\varkappa)} & c_3^{(\varkappa)} \\ c_1^{(\lambda)} & c_2^{(\lambda)} & c_3^{(\lambda)} \\ c_1^{(\mu)} & c_2^{(\mu)} & c_3^{(\mu)} \end{vmatrix}$$

mit y_4 zugleich verschwindet und folglich den Factor y_4 enthalten muss.

Aus den Gleichungen (3) folgt noch die später zu benutzende identische Gleichung

(4) $$c_y^{(i)} = c_1^{(i)} y_1 + c_2^{(i)} y_2 + c_3^{(i)} y_3 + c_4^{(i)} y_4 = 0.$$

Die Gleichung (2) lässt sich durch die vierte Potenz von y_4 dividiren, und die Fläche der Kegelspitzen ist somit nur von der achten Ordnung.

§ 3.

Wir stellen uns nun die Aufgabe, die Gleichung (2) der Fläche der Kegelspitzen von dem überflüssigen Factor $y_4{}^4$ zu befreien. Man kann in jedem einzelnen der Ausdrücke $(\varkappa\lambda\mu)$ den Factor y_4 absondern, ohne dass die Determinantenform verloren geht.

Betrachten wir an Stelle von $(\varkappa\lambda\mu)$ den allgemeinern Ausdruck

$$\begin{vmatrix} c_1^{(\varkappa)} & c_2^{(\varkappa)} & c_3^{(\varkappa)} & c_4^{(\varkappa)} \\ c_1^{(\lambda)} & c_2^{(\lambda)} & c_3^{(\lambda)} & c_4^{(\lambda)} \\ c_1^{(\mu)} & c_2^{(\mu)} & c_3^{(\mu)} & c_4^{(\mu)} \\ K_1 & K_2 & K_3 & K_4 \end{vmatrix},$$

welchen wir kürzer durch

$$(c^{(\varkappa)}\ ,\ c^{(\lambda)}\ ,\ c^{(\mu)}\ ,\ K)$$

bezeichnen wollen, und welcher sich, von $(\varkappa\lambda\mu)$ nur dadurch unterscheidet, dass er statt des Factors y_4 den Factor

$$K_y = K_1 y_1 + K_2 y_2 + K_3 y_3 + K_4 y_4$$

enthält. Die K sollen ganz willkürliche Grössen sein.

Nun ist nach Seite 565

$$c^{(\mu)} = a^{(\mu)} B_y{}^{(\mu)} - b^{(\mu)} A_y{}^{(\mu)}$$

und folglich

(5) $$\begin{aligned}(c^{(\varkappa)}\ ,\ c^{(\lambda)}\ ,\ c^{(\mu)}\ ,\ K) &= B_y{}^{(\mu)}\,(c^{(\varkappa)}\ ,\ c^{(\lambda)}\ ,\ a^{(\mu)}\ ,\ K) \\ &\quad - A_y{}^{(\mu)}\,(c^{(\varkappa)}\ ,\ c^{(\lambda)}\ ,\ b^{(\mu)}\ ,\ K).\end{aligned}$$

Aber wegen der identischen Gleichung

$$\begin{vmatrix} c_y^{(\varkappa)} & c_1^{(\varkappa)} & c_2^{(\varkappa)} & c_3^{(\varkappa)} & c_4^{(\varkappa)} \\ c_y^{(\lambda)} & c_1^{(\lambda)} & c_2^{(\lambda)} & c_3^{(\lambda)} & c_4^{(\lambda)} \\ K_y & K_1 & K_2 & K_3 & K_4 \\ A_y^{(\mu)} & a_1^{(\mu)} & a_2^{(\mu)} & a_3^{(\mu)} & a_4^{(\mu)} \\ B_y^{(\mu)} & b_1^{(\mu)} & b_2^{(\mu)} & b_3^{(\mu)} & b_4^{(\mu)} \end{vmatrix} = 0$$

und weil nach Gleichung (4), § 2.,

$$c_y^{(\varkappa)} = 0 \quad , \quad c_y^{(\lambda)} = 0,$$

haben wir

$$-A^{(\mu)}(c^{(\varkappa)}, c^{(\lambda)}, b^{(\mu)}, K) + B^{(\mu)}(c^{(\varkappa)}, c^{(\lambda)}, a^{(\mu)}, K) = K_y(c^{(\varkappa)}, c^{(\lambda)}, a^{(\mu)}, b^{(\mu)}),$$

und folglich, wegen Gleichung (5),

$$(c^{(\varkappa)}, c^{(\lambda)}, c^{(\mu)}, K) = K_y(c^{(\varkappa)}, c^{(\lambda)}, a^{(\mu)}, b^{(\mu)}).$$

Setzen wir jetzt

$$K_1 = 0, K_2 = 0, K_3 = 0, K_4 = 1,$$

so erhalten wir

$$(\varkappa\lambda\mu) = y_4(c^{(\varkappa)}, c^{(\lambda)}, a^{(\mu)}, b^{(\mu)}).$$

Weil die linke Seite bei einer Vertauschung von $\varkappa$ und μ, λ und μ bis auf das Vorzeichen ungeändert bleibt, so muss dies auch mit dem Factor von y_4 der Fall sein.

Wir wollen von nun an durch $(\varkappa\lambda\mu)$ den Factor von y_4 in der letzten Gleichung bezeichnen, so dass wir haben

$$(\varkappa\lambda\mu) = (c^{(\varkappa)}, c^{(\lambda)}, a^{(\mu)}, b^{(\mu)}) =$$

$$\begin{vmatrix} a_1^{(\varkappa)}B_y^{(\varkappa)} - b_1^{(\varkappa)}A_y^{(\varkappa)} & a_2^{(\varkappa)}B_y^{(\varkappa)} - b_2^{(\varkappa)}A_y^{(\varkappa)} & a_3^{(\varkappa)}B_y^{(\varkappa)} - b_3^{(\varkappa)}A_y^{(\varkappa)} & a_4^{(\varkappa)}B_y^{(\varkappa)} - b_4^{(\varkappa)}A_y^{(\varkappa)} \\ a_1^{(\lambda)}B_y^{(\lambda)} - b_1^{(\lambda)}A_y^{(\lambda)} & a_2^{(\lambda)}B_y^{(\lambda)} - b_2^{(\lambda)}A_y^{(\lambda)} & a_3^{(\lambda)}B_y^{(\lambda)} - b_3^{(\lambda)}A_y^{(\lambda)} & a_4^{(\lambda)}B_y^{(\lambda)} - b_4^{(\lambda)}A_y^{(\lambda)} \\ a_1^{(\mu)} & a_2^{(\mu)} & a_3^{(\mu)} & a_4^{(\mu)} \\ b_1^{(\mu)} & b_2^{(\mu)} & b_3^{(\mu)} & b_4^{(\mu)} \end{vmatrix}.$$

Die Gleichung

$$(\varkappa\lambda\mu) = 0$$

stellt eine Fläche der zweiten Ordnung dar, welche durch die Geraden $\varkappa$, λ und μ hindurchgeht. Denn für die Punkte der Geraden $\varkappa$ verschwinden $A_y^{(\varkappa)}$ und $B_y^{(\varkappa)}$ nach § 2., und bei einer Vertauschung der Buchstaben ändert $(\varkappa\lambda\mu)$ nur das Vorzeichen.

Die Fläche zweiter Ordnung ist also das durch die geraden Linien $\varkappa$, λ, μ bestimmte Hyperboloid.

Nach unserer jetzigen Bezeichnungsweise ist

$$(6) \qquad (123)\,(145)\,(625)\,(634) - (125)\,(134)\,(623)\,(645) = 0$$

die von dem überflüssigen Factor y_4^4 befreite Gleichung der Fläche der Kegelspitzen.

Diese Fläche hat jede der sechs gegebenen Geraden zu Doppellinien, weil jede der Zahlen 1, 2, ... 6 zweimal in jedem der beiden Glieder der Gleichung vorkommt. Ausserdem liegen auf ihr die Schnittcurven von je zwei Hyperboloiden, welche entweder wie

(123) und (125)

zwei, oder wie

(123) und (456)

keine der gegebenen Geraden zu gemeinschaftlichen Erzeugenden haben. Die Hyperboloide (123) und (125) schneiden sich ausser in 1 und 2 noch in den beiden windschiefen Geraden, welche die Linien 1, 2, 3, 5 treffen. Wir werden fernerhin diese windschiefen Geraden die Transversalen der Linien 1, 2, 3, 5 nennen. Offenbar liegen ebenso die Transversalen von irgend vier der sechs gegebenen Geraden auf der Fläche achter Ordnung (6), und diese enthält somit noch

$$2 \cdot \frac{6.5.4.3}{1.2.3.4} = 30$$

einfache gerade Linien.

Je zwei Hyperboloide wie (123) und (456) schneiden sich in einer Curve der vierten Ordnung, deren also

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{6.5.4}{1.2.3} = 10$$

auf der betrachteten Oberfläche liegen müssen.

Wir fassen diese Resultate in den Satz zusammen:

Die Spitzen der Kegel, welche sechs gegebene gerade Linien berühren, bilden eine Fläche der achten Ordnung, welche die sechs Geraden zu Doppellinien hat, welche ferner die 30 geraden Linien enthält, die je vier der sechs gegebenen treffen, und auf welcher noch zehn Raumcurven vierter Ordnung erster Species liegen. Diese Fläche wird dargestellt durch die Gleichung (6).

Die 30 geraden Linien und 10 Raumcurven haben eine sehr einfache Bedeutung. Verbindet man einen beliebigen Punkt einer Transversalen mit den sechs gegebenen Geraden durch Ebenen, so schneiden sich vier dieser Ebenen in der Transversalen, welche mit der Schnittlinie der beiden übrigen Ebenen ein Linienpaar bildet, das als ein uneigentlicher Berührungskegel anzusehen ist.

Verbindet man einen Punkt der Curve vierter Ordnung (123), (456) mit den sechs gegebenen Geraden durch Ebenen, so enthält die Ebene, welche den Punkt mit der Linie 1 verbindet, die durch den Punkt gehende Erzeugende zweiter Art des Hyperboloids (123), (die Geraden 1, 2, 3 als Erzeugende erster Art angesehen); denn diese Erzeugende muss die Linie 1 schneiden. Dieselbe Erzeugende liegt aber auch in den Ebenen, welche den Punkt mit den Geraden 2 und 3 verbinden. Die drei übrigen Ebenen schneiden sich in der Erzeugenden zweiter Art des Hyperboloids (456), welche durch den angenommenen Punkt geht. Beide Erzeugende zweiter Art bilden wieder einen uneigentlichen Berührungskegel.

Die Punkte der 30 Geraden sowohl als die Punkte der zehn Raumcurven sind daher bei den Abzählungen von Berührungskegeln auszuschliessen. Ausser ihnen existiren keine Punkte auf der Fläche mehr, welche uneigentlichen Berührungskegeln entsprechen.

§ 4.

Um die Kegel zu bestimmen, welche sieben gegebene gerade Linien 1, 2, ... 7 berühren, kann man ausser der Fläche achter Ordnung

$$(6)\qquad (123)\,(145)\,(625)\,(634) - (125)\,(134)\,(623)\,(645) = 0$$

noch eine Fläche derselben Art

$$(7)\qquad (123)\,(145)\,(725)\,(734) - (125)\,(134)\,(723)\,(745) = 0$$

betrachten, welche sich von der ersten nur dadurch unterscheidet, dass sie die Linie 7 an Stelle der Linie 6 enthält. Der Durchschnitt beider Flächen giebt den Ort derjenigen Punkte, von welchen man sowohl Berührungskegel an 1, 2, 3, 4, 5, 6 als an 1, 2, 3, 4, 5, 7 legen kann. Diese Kegel fallen für die Punkte der Geraden 1, 2, 3, 4, 5 im Allgemeinen nicht zusammen; diese Linien sind somit auszuschliessen.

Die Flächen (6) und (7) schneiden sich in einer Curve der 64ten Ordnung. Diese Curve enthält aber die vierfach zu zählenden Geraden 1, 2, . . . 5, und die zehn Transversalen derselben. Es bleibt daher nur eine Curve der $64 - 4 . 5 - 10 = 34$ten Ordnung zu betrachten übrig.

Die Curve der 34ten Ordnung ist vollständig definirt durch die Gleichung (6) und diejenigen sechs Gleichungen, welche man erhält, wenn man in (6) nach einander jede der Zahlen 1, 2, . . . 6 durch 7 ersetzt. Eine geringere Anzahl der so erhaltenen Gleichungen enthält ausser der Curve 34ter Ordnung immer noch einige der auszuschliessenden Geraden.

Die gerade Linie 7 schneidet die Fläche (6) in acht Punkten, welche Doppelpunkte der Curve 34ter Ordnung sein müssen. Ebenso kann man, von zwei andern der oben erwähnten sieben Gleichungen ausgehend, zeigen, dass die Curve 34ter Ordnung auf jeder der sieben gegebenen Geraden acht Doppelpunkte haben muss.

Jede der beiden Transversalen der Geraden 3, 4, 5, 7 liegt auf der Fläche (7) und schneidet die Fläche (6) in acht Punkten, von welchen drei doppelt zu rechnende auf die Geraden 3, 4, 5 fallen; die beiden übrigen Schnittpunkte gehören der Curve 34ter Ordnung an. Ebenso zeigt man, von andern Paaren der oben erwähnten sieben Gleichungen ausgehend, dass jede Transversale von je vier der sieben gegebenen Geraden die Curve 34ter Ordnung in zwei Punkten geschnitten wird. Wir haben daher den Satz:

„Die Spitzen der Kegel, welche sieben gegebene Geraden berühren, bilden eine Curve der 34ten Ordnung mit acht Doppelpunkten auf jeder dieser Geraden und zwei einfachen Punkten auf

jeder der 2 . 35 *geraden Linien, welche je vier der gegebenen treffen.“*

Die auf den Flächen (6) und (7) liegenden Curven vierter Ordnung schneiden die Curve 34ter Ordnung ebenfalls. Auf (6) liegt die Curve (123), (456); auf (7) liegt (123), (457). Beide Curven aber schneiden sich in Punkten, welche auf 4, 5 und auf den Transversalen von 4, 5, 6, 7 liegen, also schon berücksichtigt sind.

§ 5.

Diejenigen Punkte der Curve 34ter Ordnung, deren Kegel noch eine achte gegebene Gerade 8 berühren, müssen zugleich auf der Fläche liegen:

(8) (345) (367) (847) (856) — (347) (356) (845) (867) = 0.

Unter den 8 . 34 Schnittpunkten dieser Fläche mit der Curve 34ter Ordnung befinden sich nach dem Satze des § 4. 5.8 auf den Geraden 3, 4, 5, 6, 7 liegende Doppelpunkte der Curve, welche, da sie zugleich Doppelpunkte der Fläche (8) sind, vierfach gerechnet werden müssen. Diese Punkte sind auszuschliessen; denn die Kegel, welche man von ihnen an 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 legen kann, sind verschieden von denjenigen, welche 3, 4, 5, 6, 7, 8 berühren.

Auf der Fläche (8) liegen die zehn Transversalen der Geraden 3, 4, 5, 6, 7. Nach § 4. schneidet jede dieser Transversalen die Curve 34ter Ordnung in zwei Punkten, welche (nach § 3.) ebenfalls ausgeschlossen werden müssen.

Allen andern Schnittpunkten der Curve 34ter Ordnung mit der Fläche (8) entsprechen eigentliche Berührungskegel der acht gegebenen Geraden. Damit ist der von Herrn Lüroth aufgestellte Satz bewiesen:

Es giebt $8.34 - 4.5.8 - 2.10 = 92$ *Kegel, welche acht gegebene gerade Linien berühren.*

§ 6.

Aus der Zusammensetzung der Gleichungen (6), (7), (8) ist leicht ersichtlich, dass die in den §§ 3, 4, 5 gefundenen Zahlen Aenderungen erleiden werden in folgenden drei Fällen:

1) wenn fünf oder mehr der geraden Linien eine gemeinsame Transversale haben;
2) wenn vier oder mehr der gegebenen Geraden auf einem Hyperboloid liegen;
3) wenn sich die gegebenen Geraden schneiden.

Wir wollen von der grossen Anzahl von besonderen Fällen nur einige der einfachsten näher betrachten, und zunächst annehmen, dass die Linien 4, 5, 6, 7, 8 von einer geraden Linie geschnitten werden. Diese Gerade ist Doppellinie der Fläche (8), weil sie zugleich auf den vier Hyperboloiden

$$(856), (847), (845), (867)$$

liegt. Sie schneidet die Curve 34ter Ordnung (§ 4.) in zwei Punkten, welche jetzt doppelt abgerechnet werden müssen, während alle übrigen dort angestellten Betrachtungen ungeändert bleiben.

Es giebt also in diesem Falle nur noch 90 Kegel, welche die acht gegebenen Geraden berühren.

Es ist leicht, diese Verminderung auch geometrisch zu verfolgen. Durch die gemeinschaftliche Transversale der Geraden 4, 5, 6, 7, 8 denke man sich die beiden Tangentialebenen an das durch die Geraden 1, 2, 3 bestimmte Hyperboloid gelegt. Jede dieser Tangentialebenen schneidet das Hyperboloid in zwei Geraden, von welchen eine die Linien 1, 2, 3 trifft. Diese Gerade bildet im Verein mit der Transversalen einen uneigentlichen Berührungskegel, deren also, entsprechend den beiden Tangentialebenen, zwei existiren.

Wenn von den acht geraden Linien die vier

$$5, 6, 7, 8$$

auf einem Hyperboloid liegen, so zerfällt die Fläche (8) in dieses Hyperboloid und in eine Fläche der sechsten Ordnung. Von den 92 Schnittpunkten der Fläche (8) mit der Curve 34ter Ordnung fallen 20 auf das Hyperboloid, zu welchen keine Kegel gehören, welche alle acht Linien berühren. Es giebt daher nur noch 72 Berührungskegel.

Wenn sechs von den acht Geraden auf einem Hyperboloid liegen, so wird die Gleichung der entsprechenden Fläche achter Ordnung eine identische, weil jeder Punkt des Raumes Spitze eines Kegels sein kann, welcher die sechs gegebenen Geraden berührt. Es giebt dann eine einfach unendliche Schaar von Berührungskegeln an die acht gegebenen Geraden. U. s. f.

Wenn zwei der gegebenen Geraden, etwa 7 und 8 sich schneiden, so zerfällt die Fläche (8) in die Ebene dieser Linien und in eine Fläche siebenter Ordnung, welche durch

$$(345)\,(367)\,(856)\,(\overline{847}) - k\,(347)\,(356)\,(845)\,(\overline{867}) = 0$$

dargestellt wird, wo k eine Constante und $(\overline{847})$, $(\overline{867})$ Ausdrücke bezeichnen, welche gleich Null gesetzt, die Ebenen repräsentiren, die den Schnittpunkt von 7 und 8 mit den Geraden 4 und 6 verbinden.

Von den 34 Schnittpunkten der Ebene der 7 und 8 mit der Curve 34ter Ordnung (§ 4.) liegen acht doppelt zu rechnende auf der geraden Linie 7. Die Anzahl der Berührungskegel vermindert sich daher in diesem Falle um $34 - 2 \,.\, 8 = 18$, wenn man diejenigen ausschliesst, deren Spitzen in der Ebene der 7 und 8 liegen, welche also diese Ebene berühren. Eine gleiche Verminderung tritt ein, wenn die Linie 8 noch die Gerade 6, und ebenso, wenn die 8 auch noch die Gerade 5 schneidet. Von der Fläche siebenter Ordnung trennen sich alsdann noch die Ebenen der 6 und 8 und der 5 und 8 ab, von welchen jede 18 wesentliche Schnittpunkte enthält.

Wenn aber die 8 auch noch die Gerade 4 schneidet, also in eine der beiden Transversalen der Linien 4, 5, 6, 7 übergeht, so vermindert sich die Anzahl der Berührungskegel nicht mehr um 18. Denn in diesem Falle spaltet sich die Fläche (8) in die vier Ebenen

$$(7,8)\ (6,8)\ (5,8)\ (4,8)$$

und in eine Fläche der vierten Ordnung, deren Gleichung die Form hat:

$$(345)\ (367) - k\ (347)\ (356) = 0,$$

wo k eine Constante bezeichnet. Die Gerade 3 ist Doppellinie dieser Fläche, die Geraden 4, 5, 6, 7 liegen als einfache Linien auf derselben, ebenso die acht Transversalen, welche die Linie 3 und drei der Linien 4, 5, 6, 7 schneiden. Die Anzahl der Berührungskegel ist somit

$$4 \,.\, 34 - 8 \,.\, 4 - 4 \,.\, 8 \,.\, 2 - 8 \,.\, 2 = 24.$$

Wir untersuchen noch den Fall, wenn die Linie 8 von jeder der Geraden 1, 2, ... 7 getroffen wird.

Die Fläche achter Ordnung

$$(123)\ (145)\ (825)\ (834) - (125)\ (134)\ (823)\ (845) = 0$$

zerfällt unter dieser Voraussetzung in die fünf Ebenen

$$(1,8)\,,\ (2,8)\,,\ (3,8)\,,\ (4,8)\,,\ (5,8)$$

und in eine Fläche der dritten Ordnung, welche die Geraden 1, 2, 3, 4, 5, 8 als einfache Linien enthält. In ähnlicher Weise zerfallen die beiden Flächen

$$(234)\,(256)\,(836)\,(845) - (236)\,(245)\,(834)\,(856) = 0,$$
$$(345)\,(367)\,(847)\,(856) - (347)\,(356)\,(845)\,(867) = 0,$$

deren Durchschnittspunkte mit der ersten Fläche die gesuchten Kegelspitzen sind.

Die Aufgabe kommt also darauf hinaus, von den Durchschnittspunkten der drei Oberflächen dritter Ordnung, welche durch die halben Doppelsechse

$$\begin{array}{l} 1,2,3,4,5\ ;\ 8 \\ 2,3,4,5,6\ ;\ 8 \\ 3,4,5,6,7\ ;\ 8 \end{array}$$

bestimmt sind, diejenigen abzusondern, welche auf den Geraden 1, 2, ... 8 liegen.

Die Durchschnittscurve der beiden ersten Flächen zerfällt in die Geraden 2, 3, 4, 5, 8 und in eine Curve der vierten Ordnung. Aus dem leicht zu beweisenden Satze:

wenn zwei Flächen der dritten Ordnung eine gerade Linie gemein haben, so wird diese von dem übrigen Theile der Durchschnittscurve in vier Punkten geschnitten,

folgt, dass die Gerade 8 von der Curve vierter Ordnung gar nicht, jede der Geraden 2, 3, 4, 5 dagegen dreimal geschnitten wird.

Die Gerade 6 schneidet die erste Fläche in drei Punkten, von welchen einer auf 8 liegt; die beiden andern gehören der Curve vierter Ordnung an.

Von den zwölf Schnittpunkten dieser Curve mit der dritten Fläche liegen daher je drei auf den Geraden 3, 4, 5 und zwei auf der Geraden 6; es bleibt somit ein einziger wesentlicher Schnittpunkt übrig, und man hat den von den Herren Lüroth und Nöther zuerst ausgesprochenen Satz:

Es giebt nur einen einzigen Kegel, welcher acht gerade Linien berührt, wenn sieben von der achten getroffen werden.

§ 7.

Im vorigen § Seite 572 wird der Satz bewiesen:

„Es giebt 18 Kegel, welche eine gegebene Ebene und sechs gegebene gerade Linien berühren.“

Wenn ausser der Ebene nur fünf gerade Linien gegeben sind, so giebt es eine einfach unendliche Schaar von Berührungskegeln, deren Spitzen eine in jener Ebene liegende Curve bilden, von welcher wir Ordnung und Singularitäten leicht bestimmen können.

Wenn 1, 2, 3, 4, 5 die gegebenen und 6 eine beliebig in der gegebenen Ebene angenommene Gerade bezeichnen, so liegen die Spitzen der Berührungskegel ausser in jener Ebene noch auf der Fläche achter Ordnung

$$(123)\,(145)\,(625)\,(634) - (125)\,(134)\,(623)\,(645) = 0.$$

Der Durchschnitt der gegebenen Ebene mit dieser Fläche zerfällt in die doppelt zu rechnende Gerade 6 und in eine Curve der sechsten Ordnung, welche auf jeder der Geraden 1, 2, 3, 4, 5 einen Doppelpunkt besitzt. Damit ist der Satz bewiesen:

„Die Spitzen der Kegel, welche eine gegebene Ebene und fünf gegebene Geraden berühren, liegen auf einer ebenen Curve 6ter Ordnung mit fünf Doppelpunkten.“

Wenn die Kegel statt der Linie 5 noch eine zweite Ebene berühren sollen, so wird ihre Anzahl eine endliche. Denken wir uns die Linie 5 in dieser Ebene willkürlich angenommen, so geht die Durchschnittslinie der beiden gegebenen Ebenen, welche die Kegelspitzen enthält, durch den auf der Geraden 5 liegenden Doppelpunkt der Curve sechster Ordnung, und schneidet diese noch in vier weiteren Punkten, den gesuchten Kegelspitzen.

Es giebt daher vier Kegel, welche zwei gegebene Ebenen und vier gegebene gerade Linien berühren.

§ 8.

Die Kegel, welche durch einen gegebenen Punkt gehen und fünf gegebene Geraden berühren, bilden eine zweifach unendliche Schaar; der Ort ihrer Spitzen ist eine Oberfläche, deren Gleichung auf folgende Weise abgeleitet werden kann:

Verbinden wir die fünf gegebenen Geraden mit einem beliebigen Punkte des Raumes durch Ebenen $C_1, C_2, \ldots C_5$, so bestimmen diese einen Kegel, welchen sie umhüllen. Legen wir durch die Verbindungslinie des gegebenen und des willkürlich angenommenen Punktes ein Ebenbüschel $A_x + \lambda B_x = 0$, und stellen die Bedingung auf, unter welcher die sechs Ebenen

$$C_1 \,,\; C_2 \,,\; \ldots\; C_5 \,,\; A_x + \lambda B_x$$

Tangentialebenen eines Kegels sind, so erhalten wir eine in λ quadratische Gleichung, weil zwei Ebenen des Büschels den Kegel berühren. Der gegebene Punkt liegt auf dem Kegel, wenn beide Ebenen zusammenfallen. Wir erhalten daher die gesuchte Gleichung, wenn wir die Discriminante der quadratischen Gleichung verschwinden lassen.

Wir bezeichnen wie früher durch

$$A_x^{(i)} = 0 \quad , \quad B_x^{(i)} = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots 5)$$

die Gleichungen der fünf Geraden. Wenn $x_1^0\; x_2^0\; x_3^0\; x_4^0$ die Coordinaten des gegebenen, $y_1\; y_2\; y_3\; y_4$ die des willkürlich angenommenen, $k_1\; k_2\; k_3\; k_4$ und $l_1\; l_2\; l_3\; l_4$ die Coordinaten zweier beliebigen festen Punkte sind und

$$\Sigma a_i x_i = A_x = \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ y_1 & y_2 & y_3 & y_4 \\ x_1^0 & x_2^0 & x_3^0 & x_4^0 \\ k_1 & k_2 & k_3 & k_4 \end{vmatrix} \qquad \Sigma b_i x_i = B_x = \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ y_1 & y_2 & y_3 & y_4 \\ x_1^0 & x_2^0 & x_3^0 & x_4^0 \\ l_1 & l_2 & l_3 & l_4 \end{vmatrix},$$

so ist

$$A_x + \lambda B_x = 0$$

die Gleichung des Ebenenbüschels, welcher die Verbindungslinie der Punkte y, x^0 zur Axe hat.

Die sechs Ebenen

$$A_x^{(i)} B_y^{(i)} - A_y^{(i)} B_x^{(i)} = 0 \quad (i = 1, 2, \ldots 5) \,,\; A + \lambda B = 0$$

umhüllen einen Kegel, wenn die Coordinaten ihrer Durchschnittslinien mit $x_4 = 0$ der Gleichung des § 1. genügen, wenn also die Gleichung

$$(123)(145)(625)(634) - (125)(134)(623)(645) = 0$$

erfüllt wird für

$$(i\,k\,l) = \begin{vmatrix} c_1^{(i)} & c_2^{(i)} & c_3^{(i)} \\ c_1^{(k)} & c_2^{(k)} & c_3^{(k)} \\ c_1^{(l)} & c_2^{(l)} & c_3^{(l)} \end{vmatrix} \quad (i,\ k,\ l = 1,\ 2,\ \ldots\ 5)$$

und

$$(6\,k\,l) = \begin{vmatrix} a_1 + \lambda b_1 & a_2 + \lambda b_2 & a_3 + \lambda b_3 \\ c_1^{(k)} & c_2^{(k)} & c_3^{(k)} \\ c_1^{(l)} & c_2^{(l)} & c_3^{(l)} \end{vmatrix}, \quad (k,\ l = 1,\ 2,\ \ldots\ 5).$$

Jede dieser Determinanten enthält den Factor y_4, welchen wir uns wie in § 3. abgesondert denken, so dass wir von nun an unter (ikl) und $(6kl)$ die Ausdrücke verstehen wollen

$$(i\,k\,l) = \begin{vmatrix} c_1^{(i)} & c_2^{(i)} & c_3^{(i)} & c_4^{(i)} \\ c_1^{(k)} & c_2^{(k)} & c_3^{(k)} & c_4^{(k)} \\ a_1^{(l)} & a_2^{(l)} & a_3^{(l)} & a_4^{(l)} \\ b_1^{(l)} & b_2^{(l)} & b_3^{(l)} & b_4^{(l)} \end{vmatrix}, \quad (i,\ k,\ l = 1,\ 2,\ \ldots\ 5)$$

$$(6kl) = \begin{vmatrix} a_1 + \lambda b_1 & a_2 + \lambda b_2 & a_3 + \lambda b_3 & a_4 + \lambda b_4 \\ c_1^{(k)} & c_2^{(k)} & c_3^{(k)} & c_4^{(k)} \\ a_1^{(l)} & a_2^{(l)} & a_3^{(l)} & a_4^{(l)} \\ b_1^{(l)} & b_2^{(l)} & b_3^{(l)} & b_4^{(l)} \end{vmatrix} \quad (k,\ l = 1, 2, \ldots 5),$$

welche nur noch von der zweiten Ordnung in den y sind.

Wir führen nun folgende Bezeichnungen ein:

$$(123)(145) = \varphi\ ,\ (125)(134) = \psi,$$

$$f_{ik}(u) = \begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 & u_4 \\ c_1^{(i)} & c_2^{(i)} & c_3^{(i)} & c_4^{(i)} \\ a_1^{(k)} & a_2^{(k)} & a_3^{(k)} & a_4^{(k)} \\ b_1^{(k)} & b_2^{(k)} & b_3^{(k)} & b_4^{(k)} \end{vmatrix}, \quad (i, k = 1\ , 2, \ldots 5).$$

Nun ist

$$(6\,i\,k) = f_{ik}(a) + \lambda f_{ik}(b)$$

und unsere Gleichung schreibt sich

$$(9) \quad \begin{aligned} &+ \varphi \left\{ f_{25}(a) + \lambda f_{25}(b) \right\} \left\{ f_{34}(a) + \lambda f_{34}(b) \right\} \\ &- \psi \left\{ f_{23}(a) + \lambda f_{23}(b) \right\} \left\{ f_{45}(a) + \lambda f_{45}(b) \right\} = 0. \end{aligned}$$

oder

$$\varphi \left\{ M + 2N\lambda + P\lambda^2 \right\} - \psi \left\{ M' + 2N'\lambda + P'\lambda^2 \right\} = 0,$$

wenn

$$M = f_{25}(a)\, f_{34}(a)\ ,\ 2\,N = f_{25}(a)\, f_{34}(b) + f_{25}(b)\, f_{34}(a),$$
$$P = f_{25}(b)\, f_{34}(b)$$
$$M' = f_{23}(a)\, f_{45}(a),\ 2\,N' = f_{23}(a)\, f_{45}(b) + f_{23}(b)\, f_{45}(a),$$
$$P' = f_{23}(b)\, f_{45}(b).$$

Indem wir die nach λ gebildete Discriminante mit Null verglei-chen, erhalten wir die Gleichung der Fläche der Kegelspitzen in der Form:

$$(10) \qquad (\varphi\, M - \psi\, M')\, (\varphi\, P - \psi\, P') - (\varphi\, N - \psi\, N')^2 = 0.$$

Die Ausdrücke $\varphi, \psi, M, N, P, M', N', P'$ sind sämmtlich vom vierten Grade für die y. Gleichung (10) stellt also eine Fläche der 16^{ten} Ordnung dar.

Bemerken wir aber, dass dieser Gleichung auch genügt werden muss, wenn der Punkt y in die Ebene zu liegen kommt, welche bestimmt ist durch den gegebenen Punkt x^0 und die beiden willkürlich ange-nommenen Punkte k und l, weil dann die Ebenen A und B zusam-menfallen, $f_{ik}(a) = f_{ik}(b)$ wird und die Gleichung (9) den Factor $(1 + \lambda)^2$ enthält, dessen Discriminante verschwindet.

Es handelt sich also darum, aus Gleichung (10) den Factor

$$K = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & y_3 & y_4 \\ x_1^0 & x_2^0 & x_3^0 & x_4^0 \\ k_1 & k_2 & k_3 & k_4 \\ l_1 & l_2 & l_3 & l_4 \end{vmatrix}$$

abzutrennen.

Betrachten wir für einen Augenblick den Punkt y als fest und den Punkt x^0 als veränderlich, so stellt Gleichung (10) den Kegel zweiter Ordnung in Punktcoordinaten dar, welcher von den Ebenen $C_1, C_2, \ldots C_5$ berührt wird. Gleichung (10) muss daher nach Ab-sonderung des fremden Factors noch von der zweiten Ordnung in x^0 sein, und somit die zweite Potenz von K enthalten. In der That gehen dann die willkürlichen Grössen k und l ganz aus der Gleichung heraus.

Da der auszuscheidende Factor in φ und ψ nicht vorkommen kann, so schreiben wir Gleichung (10) in der Form:

$$\varphi^2\, (MP - N^2) + \psi^2 (M'P' - N'^2) - \varphi\psi\, (MP' + M'P - 2\,NN') = 0,$$

und zeigen, dass die Coëfficienten φ^2, ψ^2 und $\varphi\psi$ einzeln den Factor K^2 enthalten.

Die Functionen $f_{ik}(u)$ (Seite 575) sind linear für die u; setzen wir daher

$$f_{ik}(u) = A'_{ik}\, u_1 + A''_{ik}\, u_2 + A'''_{ik}\, u_3 + A''''_{ik}\, u_4;$$

so sind die A_{ik} von den u unabhängige Ausdrücke.

Nun ist

$$MP - N^2 = -\tfrac{1}{4}\left\{f_{34}(a)\,f_{25}(b) - f_{34}(b)\,f_{25}(a)\right\}^2$$

$$= -\tfrac{1}{4}\begin{vmatrix} A'_{34}\,a_1 + \cdots A''''_{34}\,a_4 & A'_{34}\,b_1 + \cdots A''''_{34}\,b_4 \\ A'_{25}\,a_1 + \cdots A''''_{25}\,a_4 & A'_{25}\,b_1 + \cdots A''''_{25}\,b_4 \end{vmatrix}$$

$$= -\tfrac{1}{4}\left\{\begin{vmatrix} A'_{25} & A''_{25} & A'''_{25} & A''''_{25} \\ A'_{34} & A''_{34} & A'''_{34} & A''''_{34} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ b_1 & b_2 & b_3 & b_4 \end{vmatrix}\right\}^2.$$

Die a_1, a_2, a_3, a_4; b_1, b_2, b_3, b_4 sind nach (§ 8.) die aus den Systemen

$$\begin{vmatrix} y_1 & y_2 & y_3 & y_4 \\ x_1^0 & x_2^0 & x_3^0 & x_4^0 \\ k_1 & k_2 & k_3 & k_4 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & y_3 & y_4 \\ x_1^0 & x_2^0 & x_3^0 & x_4^0 \\ l_1 & l_2 & l_3 & l_4 \end{vmatrix}$$

mit passendem Vorzeichen gebildeten Determinanten.

Eine einfache Rechnung zeigt, dass jede Determinante des Systems

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ b_1 & b_2 & b_3 & b_4 \end{vmatrix}$$

den Factor K enthält, und als andern Factor diejenige Determinante des Systems

$$\begin{vmatrix} x_1^0 & x_2^0 & x_3^0 & x_4^0 \\ y_1 & y_2 & y_3 & y_4 \end{vmatrix},$$

in welcher die beiden übrigen Indices vorkommen. So ist z. B.

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} = K_1 \begin{vmatrix} x_3^0 & x_4^0 \\ y_3 & y_4 \end{vmatrix}.$$

Indem wir dies berücksichtigen, erhalten wir für $MP' - N^2$ den Ausdruck

$$-\tfrac{1}{4}K^2\left\{\begin{vmatrix} A'_{25} & A''_{25} & A'''_{25} & A''''_{25} \\ A'_{34} & A''_{34} & A'''_{34} & A''''_{34} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & y_3 & y_4 \\ x_1^0 & x_2^0 & x_3^0 & x_4^0 \end{vmatrix}\right\}^2.$$

In ganz ähnlicher Weise lassen sich

$$M'P' - N'^2 \quad \text{und} \quad MP' + M'P - 2NN'$$

transformiren, und wir erhalten schliesslich die Gleichung unserer Oberfläche in der folgenden, eleganten Form:

$$\begin{aligned} &\varphi^2 \cdot \left\{\begin{vmatrix} A_{25} \\ A_{34} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} y \\ x^0 \end{vmatrix}\right\}^2 \\ (11)\qquad &+ 2\varphi\psi\left\{\begin{vmatrix} A_{25} \\ A_{23} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} y \\ x^0 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} A_{34} \\ A_{45} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} y \\ x^0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} A_{34} \\ A_{45} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} y \\ x^0 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} A_{31} \\ A_{23} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} y \\ x^0 \end{vmatrix}\right\} \\ &+ \psi^2 \left\{\begin{vmatrix} A_{23} \\ A_{45} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} y \\ x^0 \end{vmatrix}\right\}^2 = 0, \end{aligned}$$

wenn wir mit

$$\begin{vmatrix} A_{\varkappa\lambda} \\ A_{\mu\nu} \end{vmatrix} \quad \text{und} \quad \begin{vmatrix} y \\ x^0 \end{vmatrix}$$

die unvollständigen Systeme bezeichnen

$$\begin{vmatrix} A'_{\varkappa\lambda} & A''_{\varkappa\lambda} & A'''_{\varkappa\lambda} & A''''_{\varkappa\lambda} \\ A'_{\mu\nu} & A''_{\mu\nu} & A'''_{\mu\nu} & A''''_{\mu\nu} \end{vmatrix} \quad \text{und} \quad \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & y_3 & y_4 \\ x_1{}^0 & x_2{}^0 & x_3{}^0 & x_4{}^0 \end{vmatrix}.$$

Diese Gleichung gestattet eine doppelte Interpretation, je nachdem man die x^0 oder die y als Veränderliche ansieht. Im ersten Falle stellt sie, wie schon früher bemerkt, den Kegel zweiter Ordnung in Punktcoordinaten dar, der durch die fünf Tangentenebenen $C_1, C_2, \ldots C_5$ bestimmt wird. Im zweiten Falle ist sie die gesuchte Gleichung der Fläche der Kegelspitzen, und da die A_{ik} lineare Functionen der y bezeichnen, von der vierzehnten Ordnung.

Diese Fläche muss offenbar symmetrisch sein für die Geraden 1, 2, ... 5; die Gleichung (11) ist es der Form nach nicht, denn die Gerade 1 kommt nur in den Ausdrücken φ, ψ vor.

Wir erkennen sofort, dass 1 eine vierfache Linie der Fläche sein muss, weil φ und ψ für die Punkte auf 1 in der zweiten Ordnung verschwinden. Die Transversalen von 1, 2, 3, 4 sind Doppellinien der Fläche, weil φ und ψ für die Punkte derselben in der ersten Ordnung Null werden. Gleichung (11) zeigt sofort, dass x^0 ein Doppelpunkt ist.

Wir fassen diese Resultate in den Satz zusammen:

Der Ort der Spitzen der Kegel, welche durch einen gegebenen Punkt gehen und fünf gegebene gerade Linien berühren, ist eine Fläche der vierzehnten Ordnung, welche diesen Punkt zum Doppelpunkt, jede der fünf Geraden zu vierfachen Linien, und jede der zehn Geraden, welche je vier der gegebenen verbinden, zur Doppellinie hat.

§ 9.

Da fünf Tangentenebenen einen Kegel eindeutig bestimmen, so giebt der Durchschnitt der Fläche (11) mit der Fläche achter Ordnung

$$(123)(145)(625)(634) - (125)(134)(623)(645) = 0$$

den Ort der Spitzen derjenigen Kegel, welche durch den gegebenen Punkt gehen und die sechs Geraden 1, 2, ... 6 berühren. Die Schnittcurve ist von der $(8.14)^{\text{ten}}$ Ordnung und zerfällt in die achtfach zu zählenden Geraden 1, 2, 3, 4, 5, in die zehn doppelt zu zählenden Transversalen und in eine Curve der $8.14 - 5.8 - 10.2 = 52^{\text{ten}}$ Ordnung. Die Gerade 6 schneidet die Fläche (11) in 14 Punkten, welche Doppelpunkte der Curve 52^{ter} Ordnung sind.

Die Transversalen von 3, 4, 5, 6 liegen auf der Fläche achter

Ordnung; jede derselben schneidet die Fläche (11) in vierzehn Punkten, von welchen drei vierfach zu rechnende auf den Geraden 3, 4, 5 liegen; die beiden übrigen gehören der Curve 52^{ter} Ordnung an.

Wir haben also den Satz:

Die Spitzen der Kegel, welche durch einen gegebenen Punkt gehen und sechs gegebene gerade Linien berühren, bilden eine Curve der 52^{ten} Ordnung, welche auf jeder der gegebenen Geraden vierzehn Doppelpunkte besitzt, und von jeder Geraden, welche vier der gegebenen trifft, in zwei Punkten geschnitten wird.

§ 10.

Um die Kegel zu bestimmen, welche durch einen Punkt gehen und sieben gerade Linien berühren, können wir entweder die Durchschnittspunkte der Curve 34^{ter} Ordnung (§ 4.) mit der Fläche (11), oder die Schnittpunkte der Fläche achter Ordnung (6) mit der Curve 52^{ter} Ordnung § 9. aufsuchen.

Von den 14.34 Schnittpunkten der Fläche (11) mit der Curve 34^{ter} Ordnung liegen acht achtfach zu rechnende auf jeder der Geraden 1, 2, 3, 4, 5 und zwei doppelt zu rechnende auf jeder Transversalen dieser Linien. Es bleiben also

$$34.14 - 5.8.8 - 10.2.2 = 116$$

Schnittpunkte übrig.

Die Curve 52^{ter} Ordnung schneidet die Fläche achter Ordnung (6) in 52 . 8 Punkten, von welchen 14 vierfach zu rechnende auf jeder der Geraden 1, 2, 3, 4, 5 und zwei einfach zu rechnende auf jeder ihrer Transversalen liegen. Es bleiben also

$$52.8 - 5.14.4 - 10.2 = 116$$

Schnittpunkte, wie vorhin, und man hat den Satz:

Es giebt 116 Kegel, welche durch einen gegebenen Punkt gehen und sieben gegebene gerade Linien berühren.

Auf die Betrachtung besonderer Fälle, welche man in ähnlicher Weise wie in § 6. mit Leichtigkeit anstellen kann, wollen wir hier nicht eingehen.

§ 11.

Um die Anzahl der Kegel zu bestimmen, welche durch einen gegebenen Punkt gehen, eine gegebene Ebene und fünf gegebene Geraden 1, 2, . . . 5 berühren, nehmen wir in dieser Ebene eine Gerade 6 willkürlich an. Die Punkte, in welchen diese Ebene von der Curve

52ter Ordnung (§ 9.) geschnitten wird, sind die Spitzen der gesuchten Kegel. Von den 52 Schnittpunkten liegen 14 doppelt zu rechnende auf der Geraden 6. Es bleiben daher $52 - 2.14 = 24$ wesentliche Schnittpunkte und wir haben den Satz:

Es giebt 24 Kegel, welche durch einen gegebenen Punkt gehen, eine gegebene Ebene und fünf gegebene Geraden berühren.

Eine beliebige, durch die Gerade 1 gehende Ebene schneidet die Fläche (11) in einer Curve 14ter Ordnung, welche in die vierfach zu rechnende Gerade 1 und in eine Curve der zehnten Ordnung zerfällt. Die letztere hat die Schnittpunkte der Geraden 2, 3, 4, 5 mit der Ebene zu vierfachen und die Schnittpunkte der Transversalen von 2, 3, 4, 5 mit der Ebene zu Doppelpunkten. Daraus folgt der Satz:

Die Spitzen der Kegel, welche durch einen gegebenen Punkt gehen, eine gegebene Ebene und vier gegebene Geraden berühren, bilden eine ebene Curve der zehnten Ordnung, welche die Schnittpunkte der Geraden mit der Ebene zu vierfachen, und die Punkte, in welchen die beiden Transversalen der gegebenen Geraden die Ebene treffen, zu Doppelpunkten hat.

Legen wir durch die Gerade 2 eine zweite beliebige Ebene, so schneidet sie die Curve zehnter Ordnung ausser in dem auf 2 liegenden vierfachen Punkte noch in sechs andern Punkten; sie sind die Spitzen der Kegel, welche beide Ebenen und die Geraden 3, 4, 5 berühren, und durch den gegebenen Punkt gehen.

Es giebt also sechs Kegel, welche durch einen gegebenen Punkt gehen, zwei gegebene Ebenen und drei gegebene gerade Linien berühren.

§ 12.

Wir betrachten jetzt den Durchschnitt von zwei Oberflächen vierzehnter Ordnung, welche in der in § 8. angegebenen Weise bestimmt sind durch

die Geraden 1, 2, 3, 4, 5 und den Punkt 0 und
die Geraden 1, 2, 3, 4, 5 und den Punkt 0′.

Diese Flächen schneiden sich in einer Curve der $(14.14)^{\text{ten}}$ Ordnung, von welcher aber die sechszehnfach zu zählenden Geraden 1, 2, ... 5 und ihre zehn vierfach zu zählenden Transversalen Bestandtheile sind. Hieraus folgt, dass

die Spitzen der Kegel, welche fünf gegebene Geraden berühren und durch zwei gegebene Punkte gehen, eine Curve der 76ten Ordnung bilden.

Die Curve 52ter Ordnung (§ 9.) schneidet die zweite der oben betrachteten Flächen in 52.14 Punkten; davon liegen 14 achtfach zu rechnende auf jeder der Linien 1, 2, ... 5 und zwei doppelt zu rechnende auf jeder ihrer Transversalen. Die übrigen Punkte sind Spitzen von Kegeln, welche durch 0 und 0′ gehen und die Geraden 1, 2, 3, 4, 5, 6 berühren.

Es giebt also 128 Kegel, welche durch zwei gegebene Punkte gehen und 6 gegebene gerade Linien berühren.

§ 13.

Die Spitzen der Kegel, welche durch zwei Punkte 0 und 0′ gehen, und vier Linien 1, 2, 3, 4 berühren, bilden als zweifach unendliche Schaar eine Oberfläche, deren Gleichung in einer übersichtlichen Form abzuleiten bedeutende Schwierigkeiten zu überwinden erfordert.

Man überzeugt sich leicht auf geometrischem Wege, dass sowohl die Verbindungslinie der Punkte 0 und 0′, als die gegebenen Geraden 1, 2, 3, 4 auf der Fläche liegen müssen, weil alle ihre Punkte Spitzen von Kegeln sein können, welche den gestellten Bedingungen genügen, und zwar entsprechen den Punkten von 00′ uneigentliche Kegel dieser Art. Die Geraden 1, 2, 3, 4 und 00′ werden vielfache Linien der Fläche sein.

Die beiden Transversalen von 1, 2, 3, 4 dagegen liegen nicht auf der Fläche, weil man von den Punkten dieser Linien keine eigentlichen oder uneigentlichen Kegel den gegebenen Bedingungen gemäss construiren kann, wohl aber die Transversalen von 0 0′ und je drei der Geraden 1, 2, 3, 4.

Wir betrachten nun zwei solche Flächen, entsprechend

$$1, 2, 3, 4 \;\; ; \;\; 0 \, , 0'$$

und

$$1, 2, 3, 5 \;\; ; \;\; 0 \, , 0'.$$

Der Durchschnitt beider enthält den Ort der Punkte, von welchen man Berührungskegel an 1, 2, 3, 4, 5 legen kann, die zugleich durch 0 und 0′ gehen. Dieser Ort ist nach § 12 eine Curve der 76ten Ordnung.

Wenn x die Ordnung der beiden Flächen bezeichnet, auf welchen die gegebenen Geraden $z$fache Linien sein mögen, so schneidet die Linie 5 die erste Fläche in x Punkten, welche $z$fache Punkte der Curve 76ter Ordnung sein müssen. Diese Curve hat folglich auf jeder der Geraden 1, 2, 3, 4, fünf xzfache Punkte.

Unter den Schnittpunkten dieser Curve mit der Fläche achter Ordnung (6) befinden sich die Spitzen derjenigen Kegel, welche die Geraden 1, 2, ... 6 berühren und durch 0 und 0′ gehen. Nach § 12 ist die Anzahl dieser Kegel 128. Da die Linien 1, 2, 3, 4, 5 Doppellinien der Fläche (6) sind, so ist diese Zahl andrerseits auch

$$8 . 76 - 5 . 2 . xz$$

und aus der Gleichung

$$128 = 8 . 76 - 5 . 2 . xz$$

folgt $xz = 48$.

Betrachten wir jetzt die Schnittpunkte der Curve 76ter Ordnung mit derjenigen Fläche 14ter Ordnung, welche aus (11) entsteht, wenn man für 0 einen dritten Punkt $0''$ setzt. Da diese Fläche jede der Geraden 1, 2, 3, 4, 5 zu vierfachen Linien hat, so ist die Anzahl derjenigen Schnittpunkte, welche ausserhalb dieser Geraden liegen

$$14 . 76 - 4 . 5 . xz = 104.$$

Man hat daher den Satz:

Es giebt 104 Kegel, welche durch drei gegebene Punkte gehen und fünf gegebene gerade Linien berühren.

Dieser Satz ist das letzte Resultat, welches aus unsern Hauptgleichungen (6) und (11) abgeleitet werden kann.

§ 14.

In allen vorhergehenden Untersuchungen treten wenigstens fünf berührende gerade Linien auf, welche ausreichen, um einen Kegel von gegebener Spitze eindeutig zu bestimmen.

Wir wenden uns nun zur Betrachtung von Kegeln, welche mindestens durch fünf Punkte gehen, und können hierbei einen dem vorher befolgten ganz ähnlichen Weg einschlagen. Die Entwickelungen gestalten sich viel einfacher, weil an die Stelle der geraden Linien Punkte, an Stelle der Hyperboloide Ebenen treten.

Die Spitzen der Kegel, welche durch sechs gegebene Punkte gehen, bilden eine Oberfläche, deren Gleichung wir zunächst ableiten wollen. Die gegebenen Punkte

$$x_1^{(i)} \quad x_2^{(i)} \quad x_3^{(i)} \quad x_4^{(i)} \quad (i = 1, 2, \ldots 6)$$

verbinden wir durch gerade Linien mit einem beliebigen Punkte

$$x_1 \quad x_2 \quad x_3 \quad x_4$$

des Raumes, und drücken aus, dass die Durchschnittspunkte der sechs Geraden mit der Ebene $x_4 = 0$ auf einem Kegelschnitte liegen. Diese Durchschnittspunkte haben die Coordinaten

$$x_1 x_4^{(i)} - x_4 x_1^{(i)}\,,\ x_2 x_4^{(i)} - x_4 x_2^{(i)}\,,\ x_3 x_4^{(i)} - x_4 x_3^{(i)} \quad (i = 1, 2 \ldots 6)$$

und liegen auf einem Kegelschnitte, wenn

$$(123)\,(145)\,(625)\,(634) - (125)\,(134)\,(623)\,(645) = 0,$$

wo $(\varkappa \lambda \mu)$ die Determinante bezeichnet

$$\begin{vmatrix} x_1x_4^{(\varkappa)} - x_4x_1^{(\varkappa)} & x_2x_4^{(\varkappa)} - x_4x_2^{(\varkappa)} & x_3x_4^{(\varkappa)} - x_4x_3^{(\varkappa)} \\ x_1x_4^{(\lambda)} - x_4x_1^{(\lambda)} & x_2x_4^{(\lambda)} - x_4x_2^{(\lambda)} & x_3x_4^{(\lambda)} - x_4x_3^{(\lambda)} \\ x_1x_4^{(\mu)} - x_4x_1^{(\mu)} & x_2x_4^{(\mu)} - x_4x_2^{(\mu)} & x_3x_4^{(\mu)} - x_4x_3^{(\mu)} \end{vmatrix},$$

welche identisch ist mit

$$- x_4^2 \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ x_1^{(\varkappa)} & x_2^{(\varkappa)} & x_3^{(\varkappa)} & x_4^{(\varkappa)} \\ x_1^{(\lambda)} & x_2^{(\lambda)} & x_3^{(\lambda)} & x_4^{(\lambda)} \\ x_1^{(\mu)} & x_2^{(\mu)} & x_3^{(\mu)} & x_4^{(\mu)} \end{vmatrix}.$$

Wir wollen von nun an unter $(\varkappa\lambda\mu)$ den Factor von $-x_4^2$ verstehen. Es stellt, gleich Null gesetzt, die durch die Punkte $\varkappa, \lambda, \mu$ bestimmte Ebene dar. Nun ist

$$(12) \qquad (123)\,(145)\,(625)\,(634) - (125)\,(134)\,(623)\,(645) = 0$$

die Gleichung der Fläche der Kegelspitzen, frei von jedem überflüssigen Factor. Diese Gleichung ist der Form nach identisch mit (6). Aber in der letztern bedeuten 1, 2, ... 6 gerade Linien und $(\varkappa\,\lambda\,\mu)$ Hyperboloide, während in (12) diese Zeichen für Punkte und Ebenen gesetzt sind.

Aus Gleichung (12) können wir sofort den Satz ablesen:

Die Spitzen der Kegel, welche durch sechs gegebene Punkte gehen, bilden eine Oberfläche der vierten Ordnung, welche diese Punkte zu Doppelpunkten hat. Auf ihr liegen die 15 Verbindungslinien von je zweien der sechs Punkte und die Schnittlinien der 10 Ebenenpaare, welche man durch die sechs Punkte hindurchlegen kann.

Wir nehmen nun, analog den Betrachtungen in § 4., zu der Fläche (12) eine zweite, gleichgebildete Fläche hinzu, in welcher der Punkt 6 durch einen weitern gegebenen Punkt 7 ersetzt ist. Beide Flächen haben die zehn Verbindungslinien der Punkte 1, 2, ... 5 gemein und schneiden sich ausserdem noch in einer Curve der sechsten Ordnung. Von den vier Schnittpunkten der ersten Fläche mit der Verbindungslinie von 5 und 7 fallen zwei in den Punkt 5; die beiden andern liegen auf der Curve sechster Ordnung.

So ergiebt sich der Satz:

Die Spitzen der Kegel, welche durch sieben gegebene Punkte hindurchgehen, bilden eine Curve der sechsten Ordnung, welche die Verbindungslinien dieser Punkte zu Sehnen hat.

Von den 24 Schnittpunkten dieser Curve mit einer dritten, den Punkten 3, 4, 5, 6, 7, 8 entsprechenden Fläche vierter Ordnung liegen 20 auf den Verbindungslinien der Punkte 3, 4, 5, 6, 7.

Es giebt daher vier Kegel, welche durch acht Punkte gehen, wie bekannt.

§ 15.

Wir haben in § 8. an die Stelle einer der gegebenen Geraden einen Punkt treten lassen; in ähnlicher Weise können wir jetzt einen der gegebenen Punkte durch eine Gerade ersetzen und den Ort der Spitzen der Kegel untersuchen, welche durch fünf gegebene Punkte gehen und eine gegebene gerade Linie berühren.

Es mögen

$$x_1^{(i)} \quad x_2^{(i)} \quad x_3^{(i)} \quad x_4^{(i)} \quad (i = 1, 2, \ldots 5)$$

die Coordinaten der gegebenen Punkte, und

$$y_1\ y_2\ y_3\ y_4 \quad , \quad z_1\ z_2\ z_3\ z_4$$

die Coordinaten von irgend zwei Punkten der gegebenen Geraden sein.

Wir haben weiter nichts zu thun, als in Gleichung (12) an Stelle des Punktes $x^{(6)}$ irgend einen Punkt

$$y_1 - \lambda z_1, \quad y_2 - \lambda z_2, \quad y_3 - \lambda z_3, \quad y_4 - \lambda z_4$$

der gegebenen Geraden zu setzen und die nach λ gebildete Discriminante der Gleichung (12) mit Null zu vergleichen.

Bezeichnen wir wie in § 8. die Producte (123) (145) und (123) (134) mit φ und ψ und setzen

$$f_{ik}(u) = \Sigma \pm x_1 u_2 x_3^{(i)} x_4^{(k)},$$

so erhalten wir aus (12) die Gleichung

$$\varphi \{ M + 2N\lambda + P\lambda^2 \} - \psi \{ M' + 2N'\lambda + P'\lambda^2 \} = 0,$$

wo die M, N, P, M', N', P' ganz wie in § 8., Seite 575 aus den $f_{ik}(y)$ und $f_{ik}(z)$ zusammengesetzt sind.

Bilden wir jetzt die Discriminante und definiren die Ausdrücke A_{ik} durch die Gleichungen

$$f_{ik}(u) = u_1 A'_{ik} + u_2 A''_{ik} + u_3 A'''_{ik} + u_1 A''''_{ik},$$

so erhalten wir als Gleichung der Fläche der Kegelspitzen:

$$\begin{aligned} & \varphi^2 \cdot \left\{ \begin{vmatrix} A_{25} \\ A_{34} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} y \\ x^0 \end{vmatrix} \right\}^2 \\ (13) \quad & + 2\varphi\psi \cdot \left\{ \begin{vmatrix} A_{25} \\ A_{23} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} y \\ x^0 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} A_{34} \\ A_{45} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} y \\ x^0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} A_{34} \\ A_{15} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} y \\ x^0 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} A_{34} \\ A_{23} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} y \\ x^0 \end{vmatrix} \right\} \\ & + \psi^2 \quad \left\{ \begin{vmatrix} A_{23} \\ A_{45} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} y \\ x^0 \end{vmatrix} \right\}^2 = 0, \end{aligned}$$

welche der Form nach mit (11) vollkommen übereinstimmt.

Wie Gleichung (11) so gestattet auch Gleichung (13) eine doppelte Interpretation. Betrachtet man nämlich die in φ, ψ und den A_{ik} vorkommenden Coordinaten x_1, x_2, x_3, x_4 als Constanten und die Determinanten des Systems

$$\begin{vmatrix} y_1 & y_2 & y_3 & y_4 \\ z_1 & z_2 & z_3 & z_4 \end{vmatrix},$$

welche wir in passender Reihenfolge mit passenden Zeichen durch

$$v_1, \quad v_2, \quad \ldots \quad v_6$$

bezeichnen wollen, als Veränderliche, welche der Gleichung

$$v_1 v_4 + v_2 v_5 + v_3 v_6 = 0$$

genügen, so stellt Gleichung (13) den Kegel in Liniencoordinaten dar, welcher den Punkt x zur Spitze hat und durch die Punkte $1, 2, \ldots 5$ geht.

Betrachten wir dagegen die x als die Veränderlichen, so ist (13) die Gleichung des gesuchten Ortes der Kegelspitzen und wir können aus ihr sofort den Satz ablesen:

Die Spitzen der Kegel, welche durch fünf gegebene Punkte gehen und eine gegebene Gerade berühren, bilden eine Fläche achter Ordnung, welche sowohl die gegebene Gerade als die zehn Verbindungslinien der fünf Punkte zu Doppellinien hat.

§ 16.

Mit Hülfe der Gleichungen (12) und (13) kann man in ähnlicher Weise wie mit den Gleichungen (6) und (11) eine Reihe von Abzählungen machen. Wir führen darunter folgende an:

Die Spitzen der Kegel, welche durch sechs Punkte gehen und eine Gerade berühren, bilden eine Curve der zwölften Ordnung mit vier Doppelpunkten auf der gegebenen Geraden und vier einfachen Punkten auf jeder Verbindungslinie der gegebenen Punkte.

Es giebt acht Kegel, welche durch sieben Punkte gehen und eine Gerade berühren.

Die Spitzen der Kegel, welche durch fünf Punkte gehen und zwei gerade Linien berühren, bilden eine Curve der 24ten Ordnung mit acht Doppelpunkten auf jeder der gegebenen Geraden.

Es giebt 16 Kegel, welche durch sechs Punkte gehen und zwei gerade Linien berühren.

Es giebt acht Kegel, welche durch fünf Punkte gehen, eine Ebene und eine gerade Linie berühren.

Es giebt vier Kegel, welche durch sechs Punkte gehen und eine Ebene berühren.

U. s. w.

Die im Vorhergehenden entwickelten Gleichungen reichen aus für alle Abzählungen von Kegeln, zu deren Bestimmung entweder mindestens fünf Punkte, oder mindestens fünf gerade Linien gegeben sind.

Wir behalten uns vor, in einer spätern Arbeit auf diesen Gegenstand zurückzukommen, und auch die geringe Zahl der übrigen Fälle zu behandeln.

Carlsruhe im December 1869.
