

Badische Landesbibliothek Karlsruhe

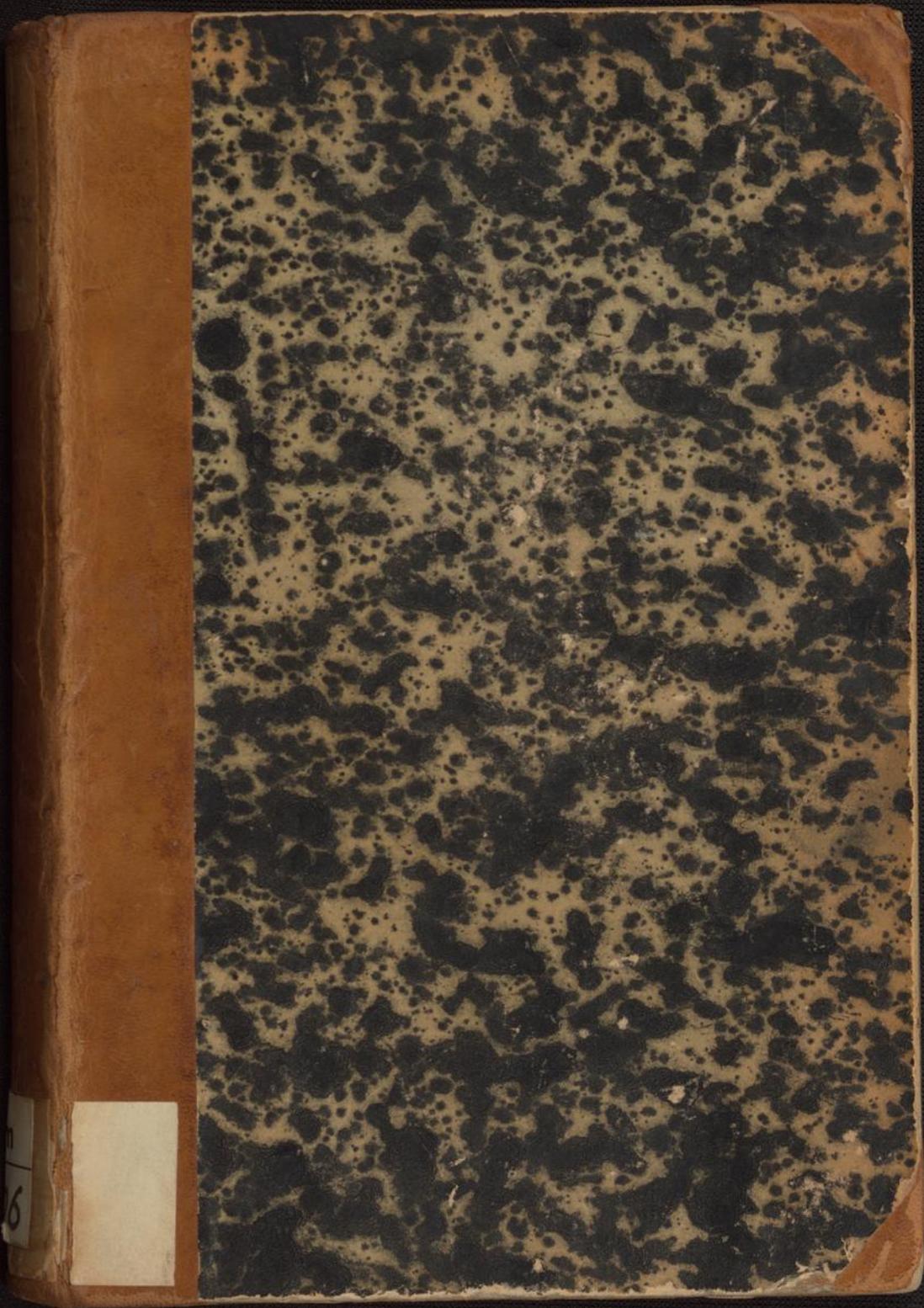
Digitale Sammlung der Badischen Landesbibliothek Karlsruhe

**Ausführliches Lehrbuch der ebenen und sphärischen
Trigonometrie**

Lübsen, Heinrich B.

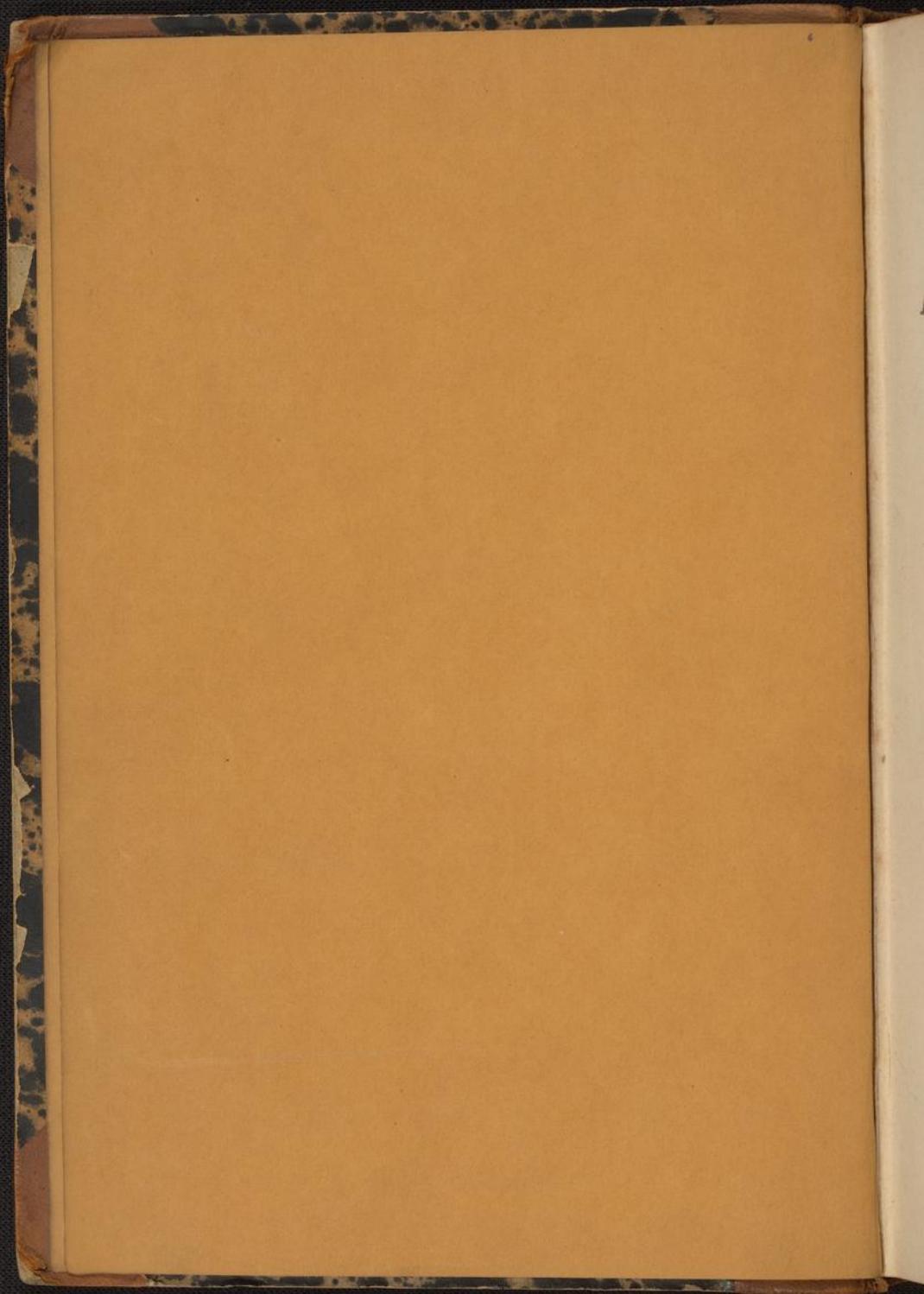
Leipzig, 1884

[urn:nbn:de:bsz:31-273442](https://nbn-resolving.org/urn:nbn:de:bsz:31-273442)



IV A 272

Gym 5006



Ausführliches Lehrbuch
der
ebenen und sphärischen
Trigonometrie.

Zum

Selbstunterricht

mit Rücksicht auf die Zwecke des praktischen Lebens

bearbeitet

von

H. B. Lübsen.

Mit 58 Figuren im Text.

Vierzehnte, vielfach vermehrte und verbesserte Auflage.

Leipzig.

Friedrich Brandstetter.

1884.

2au gym 5006

Übersetzungsrecht vorbehalten.

V

Vorrede.

Dem Zwecke aller mathematischen Lehrbücher des Verfassers gemäß hat auch das der Trigonometrie einige durchgreifende Eigentümlichkeiten. Damit sich die Schwierigkeiten nicht häufen, sondern zu ihrer Bewältigung vielmehr erst Kräfte und Hilfsmittel geschaffen werden, und vielseitiges und intensives Interesse sie weniger empfinden lasse, ist die Goniometrie nicht an die Spitze gestellt, sondern wird erst da behandelt, wo das Interesse sich ihr in vollem Mafse zuwenden kann und hinlängliche Übung der Kräfte vorausgegangen ist. Überhaupt sucht sich Darstellung und Anordnung dem Bedürfnisse der Lernenden aufs innigste anzuschmiegen. Daher werden die Begriffe nicht nur klar und deutlich gemacht und einfach und übersichtlich miteinander verbunden, sondern auch so gefaßt, wie sie sich ursprünglich darbieten. Jede voreilige Erweiterung und Verallgemeinerung wird sorgfältig vermieden. Erst, wo die Begriffe über sich selbst hinausweisen und eine Verallgemeinerung fordern, tritt eine solche ein. Darum werden die trigonometrischen Funktionen nicht als Linien, sondern als Zahlen erklärt, ist anfangs nur von den Funktionen spitzer Winkel die Rede, geht die Auflösung der Dreiecke vom rechtwinkligen durch das gleichschenklige hindurch zu dem allgemeinen allmählich fort, werden zuerst nur Sinus und Cosinus und dann auch Tangente und Cotangente

zur Auflösung herbeigezogen und dehnt sich der Begriff der trigonometrischen Funktionen in diesem Gange auf stumpfe Winkel aus, um endlich in der Goniometrie selbst Abschluß und Vollendung zu finden.

Hamburg.

H. B. Lübsen.

Vorrede zur 14. Auflage.

Von der Verlagsbuchhandlung mit einer Revision der Lübsen'schen Trigonometrie betraut, bin ich bestrebt gewesen, diesem Werke eine Vollständigkeit zu verleihen, wie sie dem Bedürfnisse des Lernenden entspricht, der ganz und mit Sicherheit in diesen höchst wichtigen Teil der Mathematik eingeführt sein will. Die neue Auflage hat sowohl an Form als auch an Inhalt gewonnen, indem ich die Sätze vielfach logischer ordnete, einfachere Beweise und Deduktionen substituierte und noch fehlende wichtige Sätze, sowie unabweisbare praktische Bemerkungen hinzufügte. In dieser Beziehung sei vorzüglich auf die §§ 9 bis 14, 26 b, 57, 63 a, 64 und vor allen Dingen auf die bisher sehr mangelhaft behandelten Hilfswinkel (§ 65) aufmerksam gemacht.

Leipzig, im März 1884.

Richard Schurig.

Erster Teil.

Ebene Trigonometrie.

Einleitung.

Die Elementar-Geometrie lehrt schon, daß unter allen räumlichen Größen das einfache Dreieck insofern sich am wichtigsten zeigt, als es gleichsam ein Schlüssel ist, durch dessen Vermittlung wir zur Kenntnis der meisten übrigen Figuren gelangen. Kreis und Dreieck sind höchst verschiedene Gestalten, aber nur durch Hilfe des Dreiecks konnten wir die vielen merkwürdigen Eigenschaften des Kreises entdecken, seinen Umfang und seinen Inhalt finden. Dasselbe gilt von vielen anderen räumlichen Größen, Kegel, Kugel etc. Nicht allein die reine Geometrie kommt auf das einfache Dreieck zurück, sondern fast auch die ganze praktische Geometrie, mithin ganze, für das bürgerliche Leben wichtige und unentbehrliche Wissenschaften. Geodäsie (Geographie, Land- und Seekarten), Schiffahrtskunde, Astronomie, Mechanik, Optik etc. konnten erst in neuerer Zeit durch eine vervollkommnete Theorie des Dreiecks (Trigonometrie) fest begründet, praktisch sicher und fruchtbar gemacht werden. Aus diesen Gründen ist die vollständige Theorie des Dreiecks (Trigonometrie) von so großer Wichtigkeit für die Wissenschaft selbst und für das praktische Leben, und man kann behaupten, einer der wichtigsten Teile der gesamten Mathematik, und deshalb ein gründliches Studium derselben die darauf verwandte Zeit und Mühe reichlich lohnend.

Aus der Elementar-Geometrie wissen wir, durch welche von den sechs Bestandteilen eines Dreiecks (drei Seiten und drei

Winkel) die übrigen bestimmt sind, mithin das ganze Dreieck vollkommen bestimmt ist, nämlich durch:

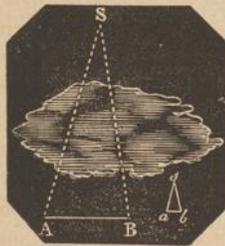
1. Zwei Seiten und den eingeschlossenen Winkel.
2. Eine Seite und die beiden anliegenden Winkel.
3. Alle drei Seiten.
4. Zwei Seiten und den der größeren dieser beiden Seiten gegenüber liegenden Winkel.

Auch lehrt die Geometrie das Verfahren, wenn irgend drei dieser Bestimmungsstücke der Größe nach gegeben sind, die dadurch bestimmte Größe der übrigen drei Stücke durch Konstruktion des ganzen Dreiecks zu finden.

In rein theoretischer Hinsicht läßt sich gegen die Richtigkeit dieses zeichnenden Verfahrens auch nichts einwenden, in praktischer Hinsicht aber, wo möglichste Genauigkeit gefordert wird, ist dieses Verfahren, wegen Unzulänglichkeit unserer Sinne und Unvollkommenheit der beim Konstruieren gebrauchten Werkzeuge, höchst selten zuverlässig und genügend, oft auch ganz unausführbar.

Um dieses einleuchtend zu machen, bedarf es nur eines Beispiels aus der Geodäsie.

Angenommen: es solle die Entfernung eines Punktes, S, von einem Punkte, A, bestimmt werden. Ist die Entfernung wegen eines zwischenliegenden Hindernisses nicht unmittelbar zu messen, so muß es durch Hilfe eines erst zu bildenden Dreiecks geschehen.



Es werde deshalb eine beliebig große sogenannte Standlinie, AB, unmittelbar und möglichst genau gemessen, ebenso die beiden Winkel A und B an derselben, mittelst eines bis auf die Sekunde genau messenden Winkelmessers,

z. B. $AB = 800$ Meter, $\angle A = 78^\circ 14' 36''$; $\angle B = 85^\circ 20' 17''$.

Wollte man nun aus diesen in Zahlen gegebenen Größen die fragliche Länge der Linie AS durch Zeichnung finden, so müßte man erst ein ähnliches Dreieck konstruieren, und also nach einem verjüngten Maßstabe eine Linie, $ab = 800$ Meter, auf einem Zeichenbrette abstecken und hieran die Winkel $a = A$, $b = B$ zeichnen. So groß dann die Linie as , nach demselben verjüngten Maßstabe gemessen, ist, so groß müßte AS in der Wirklichkeit sein, wenn das mit ABS ähnliche Dreieck abs voll-

kommen genau gezeichnet wäre. Diese Genauigkeit ist aber durch Zeichnung schon deshalb nicht möglich, weil sich die, bis auf die Sekunde genau gemessenen Winkel nicht so genau wieder zeichnen lassen. Ein paar Minuten gröfser oder kleiner könnte aber, namentlich wenn die Summe der beiden Winkel A, B nahe an 180° käme, einen Fehler verursachen, wodurch die Länge von as , also auch AS um mehr als die Hälfte zu groß oder zu klein ausfiele, abgesehen von der großen Umständlichkeit dieses zeichnenden Verfahrens, und dafs außerdem der Durchschnittspunkt s eine so große Entfernung von a und b haben könnte, dafs die Linie as , bs fast parallel liefen, auf dem Zeichenbrette, und wenn es auch die Gröfse einer Provinz hätte, gar nicht zum Durchschnitt kämen, und deshalb gar keine Zeichnung möglich wäre. Eben so ungenaue Resultate würde das Konstruktionsverfahren geben, wenn man darnach aus den drei in Zahlen gegebenen Seiten eines Dreiecks die Gröfsen der dadurch bestimmten Winkel in Zahlen genau finden wollte.

Diese Beispiele, deren wir nicht nur aus der Geodäsie, sondern auch aus anderen Teilen der angewandten Mathematik noch viele anführen könnten, wo man nämlich aus den in Zahlen gegebenen Stücken eines Dreiecks die dadurch bestimmten mit möglichster Genauigkeit finden soll, zeigen deutlich, dafs dies, aus angeführten Gründen, durch geometrische Konstruktionen durchaus unmöglich ist, und dafs wir in allen solchen Fällen auf genaue und sichere Praxis entweder ganz verzichten, oder noch ein anderes, von unsern Sinnen und Werkzeugen unabhängiges Verfahren erfinden, kurzum, die Theorie des Dreiecks erst noch vervollkommen müssen, und es fragt sich nun, ob und wie sich dieser wichtige Gedanke, den, wie wir eben angedeutet, nicht müfsige Spekulationen, sondern vielfache, rein praktische Bedürfnisse hervorgerufen habe, verwirklichen lasse?

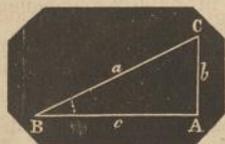
Der Einfall: Hilfe in der Arithmetik zu suchen, stellt sich hier von selbst ein. Denn, könnten wir allgemeine arithmetische Regeln finden, nach welchen man aus den in Zahlen gegebenen Stücken eines Dreiecks die dadurch bestimmten Stücke berechnen könnte, so wäre damit jener Gedanke offenbar verwirklicht, weil alle durch Rechnung erhaltenen Resultate reines Produkt des Geistes, mithin von der Unzulänglichkeit unserer Sinne ganz unabhängig, also vollkommen genau und zuverlässig sind, wie es die Arithmetik selbst ist.

Dafs solche allgemeine arithmetische Regeln existieren müssen, läßt sich wenigstens mutmaßen. Auch sind diese Regeln, obwohl die Wissenschaft, zu ihrem eigenen und zum großen Nachteil der Praxis, wegen vernachlässigter Ausbildung der den Alten fast gänzlich unbekanntem arithmetischen Wissenschaften, sehr lange darauf warten mußte, in den letzten anderthalb hundert Jahren gefunden, und machen zusammen nun denjenigen Teil der Mathematik aus, welchem man den Titel Trigonometrie (Dreiecksrechnung) giebt.

Der Zweck und Begriff dieser jetzt zu bildenden Wissenschaft ist vorläufig nun wohl so deutlich ausgesprochen, daß der Anfänger, dadurch vorbereitet und angeregt, auf den Gang der Erfindung und Entwicklung gespannt sein wird.

Denn so leicht ist die Sache nicht. Und wer den unaufhaltsamen Fortschritt in den Wissenschaften mit Aufmerksamkeit betrachtet und wahrnimmt, auf welche sinnreiche Weise der menschliche Geist scheinbar unüberwindliche Schwierigkeiten zu beseitigen weiß, der wird auch hier das Verdienst desjenigen anerkennen und dessen Scharfsinn bewundern, der als der erste Erfinder der Trigonometrie betrachtet werden muß. Auf welche sinnreiche Weise er zu Werke ging, wollen wir jetzt zeigen.

Durch die Überlegung, daß jedes Dreieck durch ein Perpendikel immer in zwei rechtwinklige zerlegt werden kann, und deshalb die ganze Trigonometrie auf die des einfacheren rechtwinkligen Dreiecks zurückkommt, war die allgemeine Aufgabe vorläufig auf die weit einfachere gebracht: aus beliebigen in Zahlen gegebenen Bestimmungsstücken eines rechtwinkligen Dreiecks die übrigen Stücke desselben durch Rechnung zu finden; und es war ein sehr glücklicher, gleich auf die beste und bequemste Methode führender Gedanke, durch Herbeischaffung folgender Hilfsgrößen diese Aufgabe leicht zu lösen.



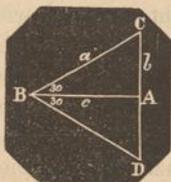
Man denke sich, sagte der erste Erfinder, auf dem einen Schenkel eines bestimmten Winkels, B, ein beliebiges Stück, BC, abgeschnitten und von dem Endpunkt C eine Senkrechte, CA, auf den andern Schenkel gefällt, so entsteht ein bei A rechtwinkliges Dreieck, dessen Seiten a , b , c heißen mögen.

Denken wir uns die Längen dieser Seiten nach einer beliebigen Längeneinheit gemessen und durch Zahlen ausgedrückt, so ist klar, daß die Verhältnisse von je zwei dieser Seiten oder die unbenannten Quotienten, die je zwei Seiten durch einander dividiert geben (wie $\frac{b}{a}$, $\frac{c}{a}$, $\frac{b}{c}$, $\frac{c^*}{b}$), durch die Größe des Winkels B vollkommen bestimmt sind.

Wäre z. B. $\angle B = 30^\circ$, so wäre:

$$\frac{b}{a} = \frac{1}{2}; \quad \frac{c}{a} = \frac{1}{2}\sqrt{3}; \quad \frac{b}{c} = \frac{1}{3}\sqrt{3}; \quad \frac{c}{b} = \sqrt{3}.$$

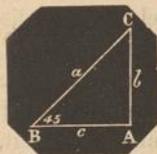
Denn denkt man den Winkel $B = 30^\circ$ auch unterhalb BA angetragen und CA bis D verlängert, so ist BCD ein gleichseitiges Dreieck (weil jeder Winkel $= 60^\circ$), folglich $b = \frac{1}{2}a$; $c = \sqrt{a^2 - (\frac{1}{2}a)^2} = \frac{1}{2}a\sqrt{3}$, mithin



$$\frac{b}{a} = \frac{\frac{1}{2}a}{a} = \frac{1}{2}; \quad \frac{c}{a} = \frac{\frac{1}{2}a\sqrt{3}}{a} = \frac{1}{2}\sqrt{3}; \quad \frac{b}{c} = \frac{\frac{1}{2}a}{\frac{1}{2}a\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}}; \quad \frac{c}{b} = \frac{\frac{1}{2}a\sqrt{3}}{\frac{1}{2}a} = \sqrt{3}.$$

Ferner ist auch klar, daß diese vier Quotienten nur von der Größe des Winkels B, nicht aber von der absoluten Größe der Seiten a , b , c abhängen; denn wird eine dieser Seiten, z. B. $BC = a$, 2, 3 \dots n mal so groß genommen, so werden (vermöge Ähnlichkeit der Dreiecke) auch die beiden andern Seiten b und c in demselben Verhältnisse größer, und die Quotienten bleiben deshalb für denselben Winkel noch dieselben. In der Figur zum

7. Satze ist z. B. für denselben $\angle a$ das Verhältnis $\frac{MP}{CM} = \frac{AT}{CT}$



Ändern sich jedoch die Winkel, so ändern sich auch die Quotienten.

Wäre z. B. $\angle B = 45^\circ$, so wären die erwähnten Quotienten:

$$\frac{b}{a} = \sqrt{\frac{1}{2}}; \quad \frac{c}{a} = \sqrt{\frac{1}{2}}; \quad \frac{b}{c} = 1, \quad \frac{c}{b} = 1.$$

Denn wenn in dem bei A rechtwinkligen Dreieck CAB der Winkel $B = 45^\circ$ ist, so ist auch $\angle C = 45^\circ$, und die beiden Katheten b und c sind einander gleich. Setzen wir die Länge dieser

*) Die beiden Quotienten $\frac{a}{b}$, $\frac{a}{c}$ sind überflüssig.

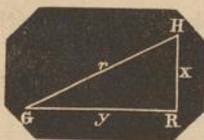
gleichen Katheten $= x$, so ist: $x^2 + x^2 = a^2$ oder $x^2 = \frac{1}{2}a^2$, mithin $x = a\sqrt{\frac{1}{2}}$; folglich, wie oben, $\frac{b}{a} = \frac{a\sqrt{\frac{1}{2}}}{a} = \sqrt{\frac{1}{2}}$; $\frac{c}{a} = \frac{a\sqrt{\frac{1}{2}}}{a} = \sqrt{\frac{1}{2}}$; $\frac{b}{c} = \frac{a\sqrt{\frac{1}{2}}}{a\sqrt{\frac{1}{2}}} = 1$ etc.

Könnte man nun diese vier Quotienten, wie hier für 30° und 45° , auch für jeden andern Zustand des Winkels B, von 0° bis 90° berechnen, und dann alle nebst den zugehörigen Winkeln in einer Tabelle leicht übersichtlich zusammenstellen, etwa so:

Winkel	Quotienten			
	$\frac{b}{a}$	$\frac{c}{a}$	$\frac{b}{c}$	$\frac{c}{b}$
$0^\circ 0' 0''$
.
$30^\circ 0' 0''$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$\frac{1}{3}\sqrt{3}$	$\sqrt{3}$
.
$45^\circ 0' 0''$	$\sqrt{\frac{1}{2}}$	$\sqrt{\frac{1}{2}}$	1	1
.
.

so leuchtet der große praktische Nutzen einer solchen Tabelle leicht ein, und wir wollen zeigen, daß durch Anfertigung derselben die Aufgabe der Trigonometrie schon so gut wie gelöst wäre. Denn wären dann von einem rechtwinkligen Dreieck (und darauf kommt, wie gesagt, alles zurück) zwei Bestimmungsstücke gegeben, so könnte man mittelst einer solchen vollständigen trigonometrischen Tafel die übrigen

Stücke durch eine einfache Multiplikation oder Division sehr leicht berechnen.



Wären z. B. in dem bei R rechtwinkligen Dreieck GHR der Winkel $G = 30^\circ$, die Hypotenuse $GH = r = 2530$ Meter gegeben, und die dem Winkel G gegenüber liegende Senkrechte $HR = x$, so wie auch die ihr anliegende $GR = y$ zu bestimmen verlangt,

so giebt offenbar x durch r dividiert denselben Quotienten, welcher in der ersten Spalte der Tafel neben dem Winkel von 30° steht;

daher $\frac{x}{2530} = \frac{1}{2}$, und hieraus durch eine leichte Multiplikation

$x = 1265$ Meter. Ebenso ist der Quotient $\frac{y}{2530}$ für den Winkel

$G = 30^\circ$ vollkommen bestimmt. Sucht man diesen Quotienten

neben dem Winkel von 30° in der zweiten Spalte, so ist $\frac{y}{2530} = \frac{1}{2}\sqrt{3}$, also $y = 2530 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}$. Einen gleichen Nutzen gewähren offenbar die beiden andern Spalten, wenn von einem rechtwinkligen Dreieck eine Kathete und ein spitzer Winkel gegeben sind; auch merkt man wohl schon, wie die Tafel (als vollständig vorausgesetzt) dienen kann, um in einem rechtwinkligen Dreieck die beiden spitzen Winkel zu bestimmen, wenn irgend zwei Seiten desselben gegeben sind.

Der große Nutzen einer solchen vollständigen Tafel ist aus dem Gesagten nun wohl einleuchtend, und der Erste, der den Gedanken an eine solche Tabelle faßte, muß als der eigentliche Erfinder der Trigonometrie betrachtet werden, denn alles folgende, die ganze Trigonometrie, ist nur Bearbeitung und Ausführung dieses Gedankens, woran nun Viele teilnehmen und ihren Scharfsinn zeigen konnten, und den die Zeit bald zur Reife bringen mußte; denn eines folgt aus dem andern fast von selbst. Hier gilt wieder, was Descartes von den Fortschritten der Mathematik überhaupt sagt: „wenn man nur erst die zwei oder drei ersten Glieder hat, so ist es nicht schwer, auch die übrigen zu finden.“

Erstes Buch.

Benennung der trigonometrischen Funktionen. Berechnung derselben. Grenzen, zwischen welchen sie enthalten sind. Einrichtung der trigonometrischen Tafeln.

Benennung der trigonometrischen Funktionen.

1.

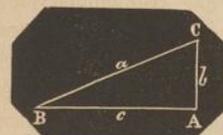
Die in der Einleitung erwähnten vier Quotienten: $\frac{b}{a}, \frac{c}{a}, \frac{b}{c}, \frac{c}{b}$,

welche in einem rechtwinkligen Dreieck, ABC, in bezug auf einen der beiden spitzen Winkel, B, je zwei Seiten durch einander dividiert, geben, sind, wie wir gesehen haben, durch die Größe des Winkels B vollkommen bestimmt, und also Funktionen dieses Winkels (Algebra § 148). Man benennt sie deshalb mit dem gemeinschaftlichen Namen: trigonometrische Funktionen oder goniometrische Funktionen. Da nun aber von diesen vier trigonometrischen Funktionen bald die eine, bald die andere gebraucht wird, so ist es, um Verwechslungen und Weitläufigkeiten im Vortrage zu vermeiden, offenbar notwendig, jede mit einem eigenen Namen zu benennen. Diese Namen sind, wie alle Eigennamen, ursprünglich ganz willkürlich, und der Anfänger muß deshalb in den folgenden etwas seltsam klingenden Namen keinen verborgenen Sinn suchen wollen.

2.

Man nennt nämlich in jedem rechtwinkligen Dreieck, ABC, in bezug auf einen der beiden spitzen Winkel, z. B. $\angle B$:

1. *sinus* des Winkels B (sprich kurz: *sinus* B): die ihm gegenüber liegende



Kathete durch die Hypotenuse dividiert. In Zeichen: $\sin B = \frac{b}{a}$.

2. *cosinus* des Winkels B: die ihm anliegende Kathete durch die Hypotenuse dividiert. In Zeichen: $\cos B = \frac{c}{a}$.

3. *tangente* des Winkels B: die ihm gegenüber liegende Kathete durch die anliegende dividiert. In Zeichen: $\operatorname{tg} B = \frac{b}{c}$.
(Lies: „Tangente B“ oder „tangens B“.)

4. *cotangente* des Winkels B: die ihm anliegende Kathete durch die gegenüber liegende dividiert. In Zeichen: $\operatorname{cot} B = \frac{c}{b}$.
(Lies: „Cotangente B“ oder „cotangens B“.)

Diese vier Kunstwörter und ihre Bedeutung muß der Anfänger sich wohl merken, so wie auch, daß die trigonometrischen Funktionen (*sinus*, *cosinus*, *tangente* und *cotangente*) abstrakte Zahlen, nicht aber Linien sind, und also das Wort *tangente* hier eine ganz andere Bedeutung hat, als in der Geometrie, wo es eine berührende Linie bedeutet, wiewohl letztere zu jenem trigonometrischen Begriffe Veranlassung gab (s. Fig. zum 7. Paragraph: $\operatorname{tg} a = \frac{AT}{AC}$).

Die Lehre von den trigonometrischen Funktionen und ihren gegenseitigen Beziehungen nennt man *Goniometrie*. *Trigonometrie* ist die Anwendung derselben auf Berechnung der Dreiecke und ihrer Teile.

Anmerkung. Die Ausdrücke *cos* und *cot* entstanden in folgender Weise. Es ist $\sin C = \frac{c}{a}$, d. i. der *sin.* des Komplementwinkels von B $= \frac{c}{a}$, oder: *complementi sinus* B $= \frac{c}{a}$, abgekürzt: *co. sin.* B $= \frac{c}{a}$ und endlich *cosin* B $= \frac{c}{a}$.

Berechnung der trigonometrischen Funktionen.

3.

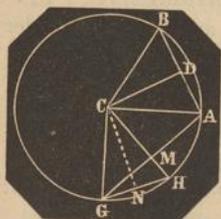
Mit der ursprünglichen Berechnung der trigonometrischen Funktionen verhält es sich, gleichnisweise, wie mit der ursprünglichen Berechnung der Logarithmen. Als man diese sehr mühsame Arbeit unternahm, waren die kurzen und leichten Methoden, welche die seitdem erfundene höhere Mathematik jetzt darbietet, noch nicht bekannt, und wir müssen uns deshalb auch, weil wir die höhere Mathematik hier nicht als bekannt voraussetzen

dürfen, damit begnügen, an ein paar Beispielen die Möglichkeit der Berechnung nach dem ältern mühsamen Verfahren zu erklären. Die ersten Berechner der trigonometrischen Tabellen haben der Wissenschaft einen unschätzbaren Dienst geleistet, und wir können auch hier wieder von ihnen sagen, daß sie über diese sehr mühsame Arbeit ihr Leben verkürzt haben, um das unsrige zu verlängern.

Die Möglichkeit, die trigonometrischen Funktionen zu berechnen, erkannte der erste Erfinder darin: daß man die Seiten aller regelmäßigen Vielecke, welche man konstruieren kann, auch bloß durch Hilfe des pythagoräischen Lehrsatzes, der sich hier in seiner größten Wichtigkeit zeigt, zu berechnen imstande ist.

4.

In der Elementar-Geometrie ist nämlich § 194 gezeigt, daß man aus dem *radius* eines Kreises die Seiten AG, GH, AB... aller regelmäßigen Vielecke von 4, 8, 16, 32, 64,...; 6, 12, 24,...; 5, 10, 20,...; 15, 30, 60,... Seiten berechnen kann. Da nun die, diesen Seiten am Mittelpunkt gegenüber liegenden Winkel beziehlich 90°, 45°, 22° 30'...; 120°, 60°, 30°, 15°...; 72°, 36°, 18°...; 24°, 12°, 6°... sind, und die Hälfte jeder berechneten



Vielecksseite, wie z. B. BD, durch den *radius* CB dividiert, nämlich: $\frac{BD}{CB}$, den *sinus* des entsprechenden halben Winkels am Mittelpunkt giebt, ($\frac{BD}{CB} = \sin BCD$), dann aus dem *radius* CB und der halben Vielecksseite BD auch leicht das darauf gefällte Perpendikel CD, mithin auch der *cosinus*,

dann die *tangente* und *cotangente* vom Winkel BCD, nämlich:

$\frac{CD}{CB}$, $\frac{BD}{CB}$, $\frac{CD}{BD}$ zu finden sind, so hat man zuerst die trigonometri-

sehen Funktionen von folgenden Winkeln:

45°	30°	36°	12°
22° 30'	15°	18°	6°
11° 15'	7° 30'	9°	3°
5° 37' 30"	3° 45'	4° 30'	1° 30'
2° 48' 45"	1° 52' 30"	2° 15'	0° 45'

Wäre z. B. AB die Seite des regelmäßigen Sechsecks, folglich $AB = CB$, so ist, wenn man der leichtern Rechnung halber den *radius* $CB = 1$ setzt*), $BD = \frac{1}{2}$, $\angle BCA = 60^\circ$, $\angle BCD = 30^\circ$, daher $\sin BCD = \frac{BD}{CB} = \frac{\frac{1}{2}}{1}$, oder $\sin 30^\circ = \frac{1}{2}$. Ferner $CD = \sqrt{1 - \frac{1}{4}} = \sqrt{\frac{3}{4}} = \frac{1}{2}\sqrt{3}$, also: $\cos 30^\circ = \frac{CD}{CB} = \frac{\frac{1}{2}\sqrt{3}}{1}$; dann $tg 30^\circ = \frac{BD}{CD} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$ und $cot 30^\circ = \frac{CD}{BD} = \frac{\frac{1}{2}\sqrt{3}}{\frac{1}{2}} = \sqrt{3}$. Die vier trigonometrischen Funktionen des Winkels von 30° sind also:

$$\sin 30^\circ = \frac{1}{2} = 0,5 \qquad tg 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{3} = 0,5773502$$

$$\cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2} = 0,8660254 \qquad cot 30^\circ = \sqrt{3} = 1,7320508$$

Aus demselben $\triangle BCD$ ergeben sich auch die trigonometrischen Funktionen des Winkels von 60° , denn so groß ist $\angle CBD$. Es ist nämlich

$$\sin CBD = \sin 60^\circ = \frac{CD}{BC} = \frac{CD}{1} = CD = \frac{1}{2}\sqrt{3};$$

$$\cos CBD = \cos 60^\circ = \frac{BD}{BC} = BD = \frac{1}{2};$$

$$tg CBD = tg 60^\circ = \frac{CD}{BD} = \frac{\frac{1}{2}\sqrt{3}}{\frac{1}{2}} = \sqrt{3};$$

$$cot CBD = cot 60^\circ = \frac{BD}{CD} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

Ist AG die Seite des regelmäßigen Vierecks, so hat man (CA wieder = 1 gesetzt): $AG = \sqrt{2}$, also, weil $\angle ACM = \angle CAM = 45^\circ$; $AM = \frac{1}{2}\sqrt{2}$ und $CM = \frac{1}{2}\sqrt{2}$, daher:

$$\sin 45^\circ = \frac{1}{2}\sqrt{2} \qquad tg 45^\circ = 1$$

$$\cos 45^\circ = \frac{1}{2}\sqrt{2} \qquad cot 45^\circ = 1.$$

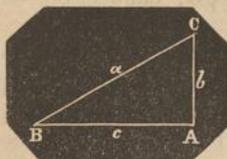
Eben so könnte man für die übrigen angeführten unzähligen Winkel die entsprechenden trigonometrischen Funktionen be-

*) Nähme man den *radius* CB, r mal, z. B. 10mal, so groß, so würden auch die Linien BD, CD eben so viel mal so groß, wobei aber die Quotienten $\frac{BD}{CB}$, $\frac{CD}{CB}$ etc., dieselben bleiben, als wenn man, der leichtern Rechnung halber, $CB = 1$ setzt, wo dann die halben Vielecksseiten BD, AM schon die *sinus*, und die darauf gefällten Perpendikel CD, CM, die *cosinus* der entsprechenden Winkel BCD, ACM selbst sind, denn es ist $\sin BCD = \frac{BD}{CB} = \frac{BD}{1} = BD$.

rechnen. Man sieht aber leicht, daß dennoch eine sehr große Lücke bleibt.

5.

Aus der Erklärung der trigonometrischen Funktionen folgt aber, und konnte auch vom ersten Erfinder nicht unbemerkt bleiben, daß in einem rechtwinkligen Dreieck, ABC, irgend eine trigonometrische Funktion des einen spitzen Winkels, B, zugleich auch die sinnverwandte trigonometrische Funktion des andern spitzen Winkels, C, ist. Der Quotient $\frac{b}{a}$ z. B. ist



der *sinus* vom Winkel B (nämlich die gegenüber liegende Kathete durch die Hypotenuse dividiert, § 2), derselbe Quotient $\frac{b}{a}$ ist aber in Beziehung auf den andern spitzen Winkel C der *cosinus* vom Winkel C (nämlich die anliegende Kathete durch die Hypotenuse dividiert). In Zeichen:

$$\sin B = \frac{b}{a} = \cos C \quad \text{tg } B = \frac{b}{c} = \cot C$$

$$\cos B = \frac{c}{a} = \sin C \quad \cot B = \frac{c}{b} = \text{tg } C.$$

Wäre z. B. $B = 30^\circ$, mithin $C = 90 - 30 = 60^\circ$, so haben wir bereits gefunden (§ 4), daß:

$$\sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2} = \cos 30^\circ \quad \text{tg } 60^\circ = \sqrt{3} = \cot 30^\circ$$

$$\cos 60^\circ = \frac{1}{2} = \sin 30^\circ \quad \cot 60^\circ = \frac{1}{\sqrt{3}} = \text{tg } 30^\circ.$$

Wäre $C = 80^\circ$, mithin $B = 10^\circ$, so wäre:

$$\sin 80^\circ = \cos (90^\circ - 80^\circ) = \cos 10^\circ \text{ und}$$

$$\cos 80^\circ = \sin (90^\circ - 80^\circ) = \sin 10^\circ.$$

Allgemein, wenn a einen beliebigen spitzen Winkel bedeutet:

$$\sin (90 - a) = \cos a \quad \text{tg } (90 - a) = \cot a$$

$$\cos (90 - a) = \sin a \quad \cot (90 - a) = \text{tg } a.$$

Setzt man in den vorstehenden Formeln $a = 45^\circ + b$, so erhält man

$$\sin [90^\circ - (45^\circ + b)] = \cos (45^\circ + b) \text{ u. s. w.}$$

oder

$$\sin (45^\circ - b) = \cos (45^\circ + b) \quad \text{tg } (45^\circ - b) = \cot (45^\circ + b)$$

$$\cos (45^\circ - b) = \sin (45^\circ + b) \quad \cot (45^\circ - b) = \text{tg } (45^\circ + b).$$

Anmerkung. Man nennt

<i>sin</i>	die Kofunktion (sinnverwandte Funktion) von <i>cos</i> ,
<i>cos</i>	" " " " " <i>sin</i> ,
<i>tg</i>	" " " " " <i>cot</i> ,
<i>cot</i>	" " " " " <i>tg</i> .

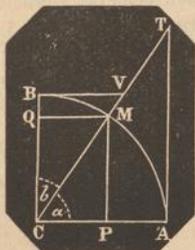
6.

Durch vorhergehenden wichtigen Satz ist also — was die Berechnung der trigonometrischen Funktionen für alle Winkel von 0 bis 90° betrifft — die Arbeit offenbar auf die Hälfte reduziert, weil man die trigonometrischen Funktionen für alle Winkel von 45 bis 90° erhält, indem man nur die sinnverwandten Funktionen derjenigen Winkel wieder abschreibt, welche erstere zu 90° ergänzen. So ist z. B.:

$$\begin{aligned} \sin 46^\circ &= \cos (90^\circ - 46^\circ) = \cos 44^\circ, \\ \cos 46^\circ &= \sin (90^\circ - 46^\circ) = \sin 44^\circ, \\ \sin 47^\circ &= \cos (90^\circ - 47^\circ) = \cos 43^\circ, \\ \cos 47^\circ &= \sin (90^\circ - 47^\circ) = \sin 43^\circ, \\ \cot 83^\circ 39' &= \operatorname{tg} (90^\circ - 83^\circ 39') = \operatorname{tg} 6^\circ 21'. \end{aligned}$$

Es brauchten also die trigonometrischen Funktionen nur für alle Winkel von 0 bis 45° berechnet zu werden. Dies geschah zuerst mit Zwischenräumen, welche dann durch Einschalten der Proportionaltheile und durch Hilfe der §§ 45 und 47 ausgefüllt wurden, nach welchen man, aus bereits bekannten trigon. Funktionen beliebiger Winkel, sehr leicht die trigon. Funktionen für die Summen und Differenzen dieser Winkel finden und dadurch die gelassenen Zwischenräume der Tafel ausfüllen konnte. (Der wissbegierige Anfänger, der die Möglichkeit hiervon einsehen will, kann schon jetzt die, des Raumes halber hier nicht mit aufgenommenen, zitierten Sätze §§ 45 und 47 nachlesen.)

7.



Durch Hilfe des Kreises lassen sich die erklärten vier trigonometrischen Funktionen, so wie auch der vorhergehende Satz § 5 auf folgende Weise versinnlichen.

So wie man nämlich die Zahlenbegriffe: eins, zwei etc. durch die Zeichen 1, 2, 3... darstellen kann, so kann man sie auch durch Linien darstellen. Läßt man die Linie CA

die Zahl eins bedeuten, so stellt offenbar eine zweimal so lange Linie die Zahl zwei, eine halb so lange Linie den Bruch $\frac{1}{2}$ dar etc.

Beschreibt man nun zwischen den Schenkeln eines Winkels, a , mit der Linear-Einheit (Radius) $CA = 1$ einen Bogen AM und fällt von dem Endpunkte M auf CA das Perpendikel MP , so stellt schon $MP (= CQ)$ den *sinus*, und $CP (= QM)$ den *cosinus* des Winkels a dar, weil hier die Division durch die Hypotenuse, da sie die Einheit ist ($CM = CA = 1$), wegfällt, indem $\frac{MP}{CM} = \frac{MP}{1} = MP$ etc.

Um die *tangente* des Winkels a durch eine einzige Linie zu versinnlichen, ziehe man durch A eine Berührungslinie, welche den verlängerten Schenkel CM in T schneidet, so stellt, weil $CA = 1$ ist, die Linie AT die *tangente* des Winkels a dar: denn im $\triangle ACT$ ist AT die dem $\angle a$ gegenüber liegende, AC die ihm anliegende Kathete.

Um endlich auch die *cotangente* des Winkels a durch eine einzige Linie darzustellen, sei der Bogen AM bis zu einem Viertelkreise (Quadranten) fortgeführt, mithin der *radius* BC senkrecht auf AC , so daß also der Winkel b den Winkel a zu 90° ergänzt. Zieht man nun in B eine Berührungslinie BV an den Kreis, so ist $\angle BVC = \angle ACV$, weil BV parallel CA , und folglich ist $\angle BVC = a$. Die Berührende BV stellt nun die *Cotangente* des Winkels a dar, denn im $\triangle BCV$ ist BV die dem $\angle a (= \angle V)$ anliegende Kathete, CB die demselben Winkel gegenüber liegende Kathete und folglich ist $\cot a = \frac{BV}{BC} = \frac{BV}{1} = BV$:

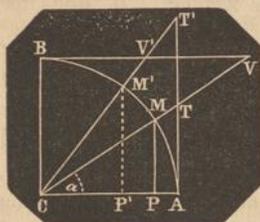
Diese Darstellung erscheint zwar weniger einfach als die in § 4, dient aber oft zur schnelleren Entwicklung gewisser Formen und Beziehungen*).

*) Zur historischen Notiz dienend, möge hier noch bemerkt werden, daß in der alten Kunstsprache: die Linie AP , als Zahl gedacht (für $CA = 1$), der *sinus versus* des Winkels a , und wenn von M auf BC das Perpendikel MQ gefällt wird, die Linie BQ der *cosinus versus*, ferner die Linie CT die *secante*, und CV die *cosecante* des Winkels a genannt wird, so daß also: $\sin \text{vers } a = 1 - \cos a$; $\cos \text{vers } a = 1 - \sin a$; $\sec a = \frac{1}{\cos a}$; $\text{cosec } a = \frac{1}{\sin a}$ (wie aus $CP : CM = AC : CT$, d. i. $\cos a : 1 = 1 : \sec a$ und aus $QC : CM = BC : CV$, d. i. $\sin a : 1 = 1 : \text{cosec } a$ folgt).

Grenzen der trigonometrischen Funktionen.

8.

Aus der eben gezeigten bildlichen Darstellung der trigonometrischen Funktionen oder auch aus dem rechtwinkligen Dreieck



ist nun leicht zu ersehen, daß mit dem Wachsen eines Winkels auch dessen *sinus* und *tangente* wachsen, *cosinus* und *cotangente* aber abnehmen. Denn es sei $CA = 1$ der festliegende Schenkel des Winkels $MCA = a$, und dessen beweglicher Schenkel $MC = 1$ in die Lage $M'C$ gekommen, so ist der Winkel MCA größer, nämlich $M'CP$ geworden,

zugleich ist aber auch die ihm gegenüber liegende Kathete (sein *sinus*) MP größer, nämlich $M'P'$ geworden. Fällt der bewegliche Schenkel MC mit BC (senkrecht auf CA) zusammen, so wird MP auch $= MC = 1$, oder was dasselbe ist: in dem Bruche $\frac{MP}{CM} = \sin a$, wird für $a = 90^\circ$ der Zähler dem Nenner gleich, mithin $\sin 90^\circ = 1$. Wird dagegen der Winkel a immer kleiner, so wird auch sein *sinus*, MP , immer kleiner, und verschwindet mit dem Winkel, oder, was dasselbe sagt, in dem Bruche $\frac{MP}{CM} = \sin a$, wird für $a = 0^\circ$, der Zähler $MP = 0$, folglich $\sin 0^\circ = \frac{0}{CM} = 0$. Die *sinus* sind also immer echte Brüche (höchstens $= 1$).

Der *cosinus* eines Winkels $MCP = a$, nämlich CP , wird mit dem Wachsen des Winkels immer kleiner und für $a = 90^\circ$, wo P in C fällt, offenbar $= 0$, folglich $\cos 90^\circ = 0$. Dies folgt auch aus dem rechtwinkligen Dreieck MCP , indem der Zähler des Bruches $\frac{CP}{CM} = \cos a$, für $a = 90^\circ$, Null wird, daher $\cos 90^\circ = \frac{0}{CM} = 0$. Mit dem Abnehmen des Winkels a dagegen wird sein *cosinus*, nämlich CP , immer größer und zuletzt gleich $CA = 1$, oder, was dasselbe ist: die anliegende Kathete wird, für $a = 0^\circ$, der Hypotenuse gleich, daher im Bruche $\frac{CP}{CM} = \cos a$, für

$a = 0^\circ$, der Zähler dem Nenner gleich, mithin $\cos 0^\circ = 1$. Die *cosinus* sind also auch immer echte Brüche (höchstens = 1).

Mit dem Abnehmen des Winkels a wird (für $CA = 1$) die *tangente* AT offenbar immer kleiner und verschwindet mit dem Winkel, indem dann T auf A fällt, oder in dem Bruche $\frac{MP}{CP} = tg a$, wird, für $a = 0^\circ$, auch der Zähler = 0, und der Nenner gleich $CA = 1$, daher $tg 0^\circ = \frac{0}{1} = 0$. Wächst dagegen der Winkel a , so wächst auch seine *tangente*, und muß zuletzt jede noch so große Zahl überschreiten. Ist der Winkel a schon beinahe 90° geworden, so geht die Linie CT fast parallel mit AT , der Durchschnittspunkt T rückt, mit dem Wachsen des Winkels a , immer weiter von A , es ist also, wenn a sehr nahe $= 90^\circ$ ist, auch CA in AT (oder CP in MP) sehr viele mal (hundert, tausend, millionen mal) enthalten. Wird aber $a = 90^\circ$, so hat (für $CA = 1$) die *tangente* AT alle bestimmten Zahlen überschritten, und ist also unendlich groß (∞) geworden, daher $tg 90^\circ = \infty$. Dasselbe folgt auch: weil in dem Quotienten $\frac{MP}{CP} = tg a$, für $a = 90^\circ$, die gegenüber liegende Kathete $MP = BC$, und die anliegende Kathete $CP = 0$ wird; daher: $tg 90^\circ = \frac{BC}{0} = \infty$. *)

Mit dem Wachsen des Winkels $MCP = a$ wird offenbar die *cotangente* BV immer kleiner, und verschwindet für $a = 90^\circ$, wo V auf B fällt, daher $cot 90^\circ = 0$. Dasselbe folgt aus dem Bruche $\frac{CP}{MP} = cot a$, in welchem, für $a = 90^\circ$, der Zähler (die anliegende Kathete) $CP = 0$, und der Nenner $MP = CM = CB$ wird; daher $cot 90^\circ = \frac{0}{BC} = 0$. Nimmt dagegen der Winkel a

*) Dividirt man eine Zahl, z. B. die Einheit, durch immer kleinere Zahlen, so wird der Quotient immer größer, z. B. $\frac{1}{0,1} = 10$; $\frac{1}{0,01} = 100$; $\frac{1}{0,001} = 1000$ etc., $\frac{1}{0} = \infty$. Eben so verhält es sich mit dem Ausdruck $\frac{MP}{CP} = tg a$. Wächst a von 0 bis 90° , so wird der Zähler MP immer größer, der Nenner CP immer kleiner, und zuletzt, für $a = 90^\circ$, wird $\frac{MP}{CP} = \frac{BC}{0} = \infty$.

immer fort bis 0 ab, so wird die *cotangente* dabei immer größer und größer, und es giebt keine so große Zahl, welche sie nicht überschreiten könnte, daher $\cot 0 = \infty$. Wir haben demnach folgende wohl zu merkende Formeln:*)

$$\begin{array}{ll} \sin 0 = 0 & \sin 90 = 1 \\ \cos 0 = 1 & \cos 90 = 0 \\ \operatorname{tg} 0 = 0 & \operatorname{tg} 90 = \infty \\ \cot 0 = \infty & \cot 90 = 0. \end{array}$$

Einrichtung der trigonometrischen Tafeln.

9.

In der Einleitung ist gezeigt, daß wir vermittelst der trigonometrischen Funktionen aus den in Zahlen gegebenen Stücken eines Dreiecks die dadurch bestimmten Stücke leicht berechnen können, und zwar durch eine einfache Multiplikation oder Division. Da man diese Operationen aber immer am bequemsten mit Logarithmen vollzieht, und es also sehr umständlich sein würde, zu gegebenen Winkeln erst die trigonometrischen Funktionen und dann zu diesen Funktionen wieder die Logarithmen zu suchen, so sind offenbar viel zweckmäßiger die trigonometrischen Funktionen nicht selbst, sondern sogleich ihre Logarithmen eingetragen.

Da nach den §§ 5—8 alle Sinusse, Cosinusse und Tangenten von 0° bis 45° kleiner als 1 (also echte Brüche), so sind ihre Logarithmen negativ. Dagegen ist $\cot 45^\circ = 1$, $\cot 0^\circ = \infty$, folglich liegen alle Cotangenten von 0° bis 45° zwischen ∞ und 1 und ihre Logarithmen sind positiv. Es ist daher

$$\begin{array}{l} \sin 30^\circ = \frac{1}{2} = 0,5 \text{ (s. § 8),} \\ \sin 5^\circ = 0,0871557 \\ \sin 0^\circ 30' = 0,0087265, \text{ und folglich} \\ \lg \sin 30^\circ = 0,6989700 - 1 \\ \lg \sin 5^\circ = 0,9402960 - 2 \\ \lg \sin 0^\circ 30' = 0,9408419 - 3. \end{array}$$

Um nun in den logarithmisch-trigonometrischen Tafeln Raum zu sparen, benutzt man die negativen Logarithmen nicht mit veränderlichen negativen Kennziffern, sondern setzt die negative

*) Wir werden sämtliche Formeln, so wie wir sie nach und nach entwickeln, in § 100 übersichtlich zum Nachschlagen zusammenstellen.

Kennziffer unveränderlich -10 , und weil $0 - 1 = 9 - 10$,
 $0 - 2 = 8 - 10$, $0 - 3 = 7 - 10$, so ist alsdann

$$\lg \sin 30^\circ = 9,6989700 - 10,$$

$$\lg \sin 5^\circ = 8,9402960 - 10,$$

$$\lg \sin 0^\circ 30' = 7,9408419 - 10.$$

In den Tafeln kann nun die negative Kennziffer -10 weggelassen werden, nur hat man sich zu merken, bei welchen Logarithmen diese weggelassene -10 hinzuzudenken ist. Wie schon vorher gezeigt wurde, ist dies bei \sin , \cos und tg von 0° bis 45° der Fall, während $\lg \cot 0^\circ$ bis 45° positiv, also -10 nicht zu ergänzen ist (z. B. $\cot 40^\circ = 1,1917536$, folglich $\lg \cot 40^\circ = 0,0761865$ ohne -10).

Die Bruhnschen Tafeln, auf welche wir uns hier allein beziehen, zeigen 4 Kolonnen, deren Überschriften \sin , \cos , tg , \cot für den Winkel von 0° bis 45° gelten. Folglich hat man sich in den 3 ersten Kolonnen -10 hinzuzudenken, in der 4. Kolonne jedoch nicht, vielmehr enthält die 4. Kolonne (die letzte rechts) den Logarithmus stets vollständig. So findet man z. B.

$$S. 429, 1. \text{ Zeile oben: } \lg \sin 15^\circ 10' 0'' = 9,4176837 - 10$$

$$" 546, 1. " " : \lg \cos 34^\circ 40' 0'' = 9,9151228 - 10$$

$$" 385, 1. " " : \lg tg 7^\circ 50' 0'' = 9,1385417 - 10$$

$$" 520, 1. " " : \lg \cot 30^\circ 20' 0'' = 0,2327450$$

$$" 493, \text{ in der Mitte: } \lg \cos 25^\circ 54' 50'' = 9,9539779 - 10.$$

10.

Für die in den Bruhnschen Tafeln oben angegebenen Funktionen gelten die darüber (am Kopfe der Seite) stehenden Grade und die in der 1. Kolonne links befindlichen Minuten und Sekunden (s. die letzten Beispiele in § 9). Für die unten angegebenen Funktionen gelten die darunter (am Fusse der Seite) stehenden Grade und die in der letzten Kolonne rechts befindlichen, von unten nach oben zu zählenden Minuten und Sekunden. Z. B.

$$S. 493, \text{ letzte Zeile: } \lg tg 64^\circ 0' 0'' = 0,3118182;$$

$$" 493, \text{ vorletzte Zeile: } \lg \cot 64^\circ 0' 10'' = 9,6881283 - 10;$$

$$" 493, 6. \text{ Zeile v. u.: } \lg \cos 64^\circ 0' 50'' = 9,9537155 - 10;$$

$$" 394, \text{ in der Mitte: } \lg \sin 80^\circ 34' 50'' = 9,2139446 - 10.$$

Seite 374—607 (6° bis 45° und 45° bis 84°) sind die Logarithmen der Funktionen von 10 zu 10 Sekunden angegeben (s. die

9 letzten Beispiele). Der vorausgehende Teil, S. 188 bis 372, gilt für 0° bis 6° und 84° bis 90° und enthält die Logarithmen der Funktionen für jede einzelne Sekunde, jedoch sind hier die Kennziffer und die 3 (resp. 2) ersten Decimalen der Logarithmen nur nach je 10 Sekunden mit grösseren Zahlen angegeben. Z. B.

$$\text{S. 269, linke Hälfte, oben: } \lg \operatorname{tg} 2^{\circ} 32' 0'' = 8,6458528 - 10$$

$$\lg \operatorname{tg} 2^{\circ} 32' 1'' = 8,6459005 - 10$$

$$\lg \operatorname{tg} 2^{\circ} 32' 14'' = 8,6465199 - 10$$

$$\text{„ 269, rechte Hälfte, unten: } \lg \cos 87^{\circ} 26' 6'' = 8,6508197 - 10$$

$$\text{„ 207, linke Hälfte, unten: } \lg \operatorname{tg} 89^{\circ} 31' 5'' = 2,0751154$$

$$\text{„ 227, rechte Hälfte, Mitte: } \lg \sin 1^{\circ} 9' 29'' = 8,3055772 - 10.$$

Ist in diesem ersten Teile der trigon. Tafel die viert- (resp. fünft-) letzte Stelle des Logarithmus mit einem * oder Strich versehen, so sind die weiter unten folgenden grösser gedruckten Ziffern vorzusetzen. Z. B.

$$\text{S. 247, rechte Hälfte: } \lg \cot 1^{\circ} 49' 27'' = 1,4969113.$$

$$\text{„ 213, linke Hälfte: } \lg \sin 0^{\circ} 40' 24'' = 8,0700975 - 10.$$

11.

Die mit *d.* oder *d. c.* (*differentia communis*) überschriebenen Kolonnen enthalten die Differenz von je 2 auf einander folgenden Logarithmen. Nur im 1. Teile sind dieselben bei den Cosinussen von 0° bis 6° weggelassen, da sie hier sehr leicht gebildet werden können.

Die Logarithmen der *tg* und *cot* haben gleiche Differenzen (*d. c.*), denn ist (s. § 2)

$$\operatorname{tg} B = \frac{b}{c}, \text{ so ist } \cot B = \frac{c}{b}, \text{ folglich}$$

$$\operatorname{tg} B \cdot \cot B = \frac{b}{c} \cdot \frac{c}{b} = 1, \text{ mithin}$$

$$\lg \operatorname{tg} B + \lg \cot B = \lg 1 = 0 \text{ und folglich}$$

$$\lg \cot B = -\lg \operatorname{tg} B.$$

Sind nun *B* und *B'* 2 in den Tafeln unmittelbar auf einander folgende Winkel, so ist (da auch

$$\lg \cot B' = -\lg \operatorname{tg} B' \text{ sein mufs):}$$

$$\lg \cot B - \lg \cot B' = -\lg \operatorname{tg} B - (-\lg \operatorname{tg} B'), \text{ d. i.}$$

$$\lg \cot B - \lg \cot B' = \lg \operatorname{tg} B' - \lg \operatorname{tg} B, \text{ also gleiche Diff.}$$

Aus vorstehenden Gleichungen folgt zugleich, daß $\lg \operatorname{tg} a = (10,0000000 - 10) - \lg \cot a$ und $\lg \cot a = (10,00\dots - 10) - \lg \operatorname{tg} a.$

Dafs ferner jeder Logarithmus für 2 sinnverwandte Funktionen und für 2 sich zu 90° ergänzende Winkel gilt, folgt aus § 5. So ist z. B. (s. S. 433, 1. Zeile oben):

$$\lg \cos 15^\circ 50' 0'' = 9,9832019 - 10,$$

$$\lg \sin 74^\circ 10' 0'' = \lg \sin (90^\circ - 15^\circ 50' 0'') = 9,9832019 - 10.$$

12.

I. Um die Logarithmen der Funktionen von Winkeln zu bestimmen, die nicht unmittelbar in den Bruhnschen Tafeln enthalten sind, hat man zunächst zu berücksichtigen, dafs die in den Tafeln angegebene Differenz im 2. Teile (S. 374 bis 607) für 10 Sekunden, im 1. Teile (S. 188 bis 372) jedoch für 1 Sekunde gilt und dafs für zunehmende Winkel die Logarithmen der Sinusse und Tangenten zu-, die Logarithmen der Cosinusse und Cotangenten dagegen abnehmen, denn je gröfser der Winkel, desto gröfser Sinus und Tangente und desto kleiner Cosinus und Cotangente.

Es sei z. B. $\lg \sin 32^\circ 10' 6'',45$ zu bestimmen. S. 531 findet man in der 1. Zeile oben

$$\lg \sin 32^\circ 10' 0'' = 9,7262249.$$

Daneben steht 335 als Zuwachs für 10 Sekunden, daraus folgt für 1 Sekunde 33,5 und für die gegebenen 6,45 Sekunden: $33,5 \cdot 6,45 = 216$. Daher

$$9,7262249$$

$$+ 216$$

$$\lg \sin 32^\circ 10' 6'',45 = 9,7262465 - 10.$$

2. Beispiel. $\lg \tan 87^\circ 27' 33'',76$?

Seite 269, Mitte der linken Hälfte findet man:

$$\lg \tan 87^\circ 27' 33'' = 1,3528616.$$

Der Zuwachs beträgt, wie daneben angegeben ist, für 1 Sek. 476, folglich für 0,76 Sek.: $476 \cdot 0,76 = 362$. Daher

$$1,3528616$$

$$+ 362$$

$$\lg \tan 87^\circ 27' 33'',76 = 1,3528978.$$

II. Für *cos* und *cot* weicht die Berechnung von der vorstehenden nur insofern ab, als der aus der Differenz berechnete Betrag nicht addiert, sondern subtrahiert wird.

1. Beispiel. $\lg \cot 60^\circ 25' 46'',09$?

S. 515, etwas oberhalb der Mitte findet man:

$$\lg \cot 60^\circ 25' 40'' = 9,7539184,$$

und als Abnahme für 10 Sek. 491, daher für 1 Sek. 49,1 und für die gegebenen 6,09 Sek.: $49,1 \cdot 6,09 = 299$. Folglich

$$9,7539184$$

$$- 299$$

$$\lg \cot 60^\circ 25' 46'',09 = 9,7538885 - 10.$$

2. Beispiel. $\lg \cos 86^\circ 56' 35'',16?$

S. 284, Mitte der rechten Hälfte findet man:

$$\lg \cos 86^\circ 56' 35'' = 8,7269588,$$

und als Abnahme für 1 Sek. 394, daher für die gegebenen 0,16 Sek.: $394 \cdot 0,16 = 42$. Folglich

$$8,7269588$$

$$- 42$$

$$\lg \cos 86^\circ 56' 35'',16 = 8,7269546 - 10.$$

III. Für die Logarithmen der *sin* und *tg* von $0^\circ 0'$ bis etwa $0^\circ 30'$ sind die Differenzen der Zunahme der Winkel nicht proportional. Wächst z. B. $\angle 0^\circ 10' 0''$ (s. S. 198 links oben) um 1 Sek., so nimmt der $\lg \sin$ um 7232 zu, bei einer Zunahme um 20 Sek. jedoch nicht um $2 \cdot 7232$, sondern um $7232 + 7220$. Die soeben gelehrtete Berechnungsweise würde daher auch kein vollkommen richtiges Resultat geben. Ein solches ergibt sich aber, wenn man die Seite 2 bis 185 unterhalb der Logarithmen der natürlichen Zahlen angegebene Tabelle in folgender Weise benutzt.

Man addiert zu dem Log. der gegebenen Sekundenzahl bei *sin* die Zahl S, bei *tg* die Zahl T.

Beispiel. $\lg \tg 0^\circ 19' 48'',9?$

Seite 9 findet man zunächst, daß $0^\circ 19' 40'' = 1180$ Sek.,
daher $0^\circ 19' 48'',9 = 1188,9$ Sek.

Daneben ist für T: 4,6855797 angegeben. Folglich:

$$\lg 1188,9 = 3,0751453 \text{ (auf derselben 9. Seite)}$$

$$+ T = 4,6855797$$

$\lg \tg 0^\circ 19' 48'',9 = 7,7607250 - 10$. (Vergl. S. 202, rechte Hälfte, 12. Zeile von unten.)

13.

I. Ist $\lg \sin$ oder $\lg \tg$ gegeben und soll der zugehörige Winkel gefunden werden, so vermindert man den gegebenen

Log. um den in den Tafeln enthaltenen nächstkleinern Log. Der Rest durch die in den Tafeln S. 188 bis 372 angegebene Logarithmen-Differenz oder durch den 10. Teil der S. 374 bis 607 angegebenen Log.-Diff. dividiert, giebt die Sekundenzahl, um welche der jenem nächstkleinern Log. zugehörige Winkel zu vermehren ist.

1. Beispiel. $lg tg x = 0,3462691$.

S. 483 findet man: $0,3462244 = lg tg 65^{\circ} 44' 40''$ mit d. Diff. 562.
Rest 447.

Folglich ist $x = 65^{\circ} 44' 40'' + \frac{447}{56,2}$ Sek. (denn für je 56,2 nimmt der Winkel um 1 Sek. zu)
 $= 65^{\circ} 44' 40'' + 7'',95 = 65^{\circ} 44' 47'',95$.

2. Beispiel. $lg sin x = 8,6471413 - 10$.

S. 269 findet man: $8,6471380 = lg sin 2^{\circ} 32' 36''$ mit d. Diff. 474.
Rest 33.

Folglich ist $x = 2^{\circ} 32' 36'' + \frac{33}{474}$ Sek. (474 giebt 1 Sek., wieviel Sek. giebt 33?)
 $= 2^{\circ} 32' 36'' + 0'',07 = 2^{\circ} 32' 36'',07$.

II. Für *cos* und *cot* weicht die Berechnung des Winkels von der vorstehenden nur insofern ab, als man den gegebenen *lg* von dem in den Tafeln enthaltenen nächstgrößern Log. subtrahiert.

1. Beispiel. $lg cos x = 9,8650263 - 10$.

S. 595 findet man: $lg cos 42^{\circ} 52' 20'' = 9,8650286$ (Diff. = 195).
Der gegebene Log. 0263 subtrahiert.

Rest 23.

Folglich ist $x = 22^{\circ} 41' 20'' + \frac{20}{19,5}$ Sek. (für eine Abnahme von je 19,5 nimmt der Winkel um 1 Sek. zu)
 $= 22^{\circ} 41' 20'' + 1'',03 = 22^{\circ} 41' 21'',03$.

2. Beispiel. $lg cot x = 8,5158500 - 10$.

S. 249 findet man: $lg cot 88^{\circ} 7' 17'' = 8,5158699$ (Diff. = 642).
Der gegebene Log. 8500 subtr.

Rest 199.

Folglich ist $x = 88^{\circ} 7' 17'' + \frac{199}{642}$ Sek. (642 giebt 1 Sek., wieviel Sek. giebt 199?)
 $= 88^{\circ} 7' 17'' + 0'',31 = 88^{\circ} 7' 17'',31$.

III. Ist *lg sin* oder *lg tg* kleiner als 7,94.... gegeben, so würde der gesuchte Winkel aus dem in § 12, III angegebenen

Grunde durch den vorstehenden Abschnitt I nicht genau berechnet werden können. Man sucht in diesem Falle in Seite 188 bis 207 den zunächstliegenden Winkel (in ganzen Sekunden) und bestimmt für denselben aus Seite 2 bis 20 das zugehörige S (bei \sin) oder T (bei \tan).

Dieses S, resp. T vom gegebenen \lg subtrahiert, giebt den Logarithmus der Sekundenzahl des gesuchten Winkels.

Beispiel. $\lg \sin x = 7,5528765 - 10$. Seite 199 giebt annähernd $x = 0^\circ 12' 17''$. Für diesen Winkel aber findet man Seite 5:

$$\begin{aligned} S &= 4,6855739 \text{ vom gegebenen } \lg \text{ subtr.:} \\ \text{Rest } &2,8673026. \end{aligned}$$

Da diese Zahl = $\lg 736,72$ (s. S. 133, oberhalb der Mitte), so ist $x = 736,72 = 0^\circ 12' 16'',72$.

IV. Dem Anfänger bereitet das Aufsuchen eines gegebenen Log. oft Schwierigkeiten. Man merke sich daher, daß bei \sin und \cos der Log., welcher kleiner als 9,8495 ist, stets in der 1. Kolumne der Bruhnschen Tafeln, derjenige, welcher größer als 9,8495, stets in der 2. Kolumne aufgesucht wird. Bei \tan und \cot ist der negative Log. (also 9,.... - 10 oder 8,.... - 10 u. s. w.) stets in der 3. Kolumne, der positive Log. (also 0,..... oder 1,..... u. s. w.) stets in der 4. Kolumne aufzusuchen.

14.

Wie schon oben bemerkt wurde, enthalten die Tafeln nur die Log. der trigonometrischen Funktionen. Will man daher die trigonometrische Funktion selbst kennen lernen, so hat man noch für den Log. die absolute Zahl zu bestimmen.

Es werde z. B. $\tan 16^\circ 17' 18'',9$ gesucht.

S. 435 findet man:

$$\begin{aligned} \lg \tan 16^\circ 17' 18'',9 &= 9,4656168 + 78,2.8'',9 \\ &= 9,4656168 + 696 \\ &= 9,4656864 - 10. \end{aligned}$$

Die Bruhnschen Tafeln geben Seite 44:

$$9,4656864 - 10 = \lg 0,2922042.$$

Daher: $\tan 16^\circ 17' 18'',9 = 0,2922042$.

Mit diesen Vorkenntnissen ausgerüstet, können wir nun zur eigentlichen Trigonometrie (Berechnung der Dreiecke) schreiten.

Zweites Buch.

Berechnung des rechtwinkligen Dreiecks.

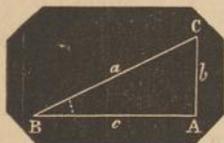
15.

Die leichten Regeln für die Berechnung des rechtwinkligen Dreiecks folgen von selbst aus den Erklärungen der trigonometrischen Funktionen (§ 2). Wird nämlich eine Gleichung zwischen zwei Seiten und einem Winkel verlangt, so geben die beiden Seiten, gehörig zur Division (als Quotient) angesetzt, die entsprechende trigonometrische Funktion des betreffenden Winkels, und man braucht dann diese kleine Formel, im Fall nicht der Winkel, sondern die eine Seite gesucht wird, nur noch auf die gesuchte Seite zu reduzieren, wie folgende Beispiele zeigen.

16.

Aufgabe. Es ist die Hypotenuse und ein Winkel gegeben: $a = 205,7898$, $B = 35^\circ 26' 14''$. Man sucht die übrigen Stücke b, c, C .

Auflösung. Es ist



$$\frac{b}{a} = \sin B \text{ und } \frac{c}{a} = \cos B \text{ (§ 2),}$$

folglich $b = a \sin B$ und $c = a \cos B$,
 oder $b = 205,7898 \sin 35^\circ 26' 14''$
 und $c = 205,7898 \cos 35^\circ 26' 14''$.

$$\begin{aligned} \lg(\sin) 205,7898 &= 2,3134239 \\ \lg \sin 35^\circ 26' 14'' &= 9,7632861 - 10 \\ \log b &= 2,0767100 \\ b &= 119,3191. \\ \lg 205,7898 &= 2,3134239 \\ \lg \cos 35^\circ 26' 14'' &= 9,9110251 - 10 \\ \log c &= 2,2444490 \\ c &= 167,6675. \end{aligned}$$

Unmittelbar löst man die Aufgabe in folgender Weise: Ist $BC = 1$, so ist $AC = \sin B$. Da nun BC a mal so groß als 1 ist, so muß auch $AC (= b)$ a mal so groß als $\sin B$ sein. Oder: Die Kathete

ist = der Hypotenuse multipliziert entweder mit dem *sin* des gegenüber liegenden Winkels, oder mit dem *cos* des anliegenden Winkels.
 Noch ist $\angle C = 90^\circ - B = 90^\circ - 35^\circ 26' 14'' = 54^\circ 33' 46''$.

17.

Aufgabe. Es ist eine Kathete und ein Winkel gegeben, nämlich: $c = 13,00579$, $B = 65^\circ 18' 40''$.

Man sucht die übrigen Stücke b , a , C .

Auflösung. Es ist $\frac{b}{c} = \operatorname{tg} B$ $\cos B = \frac{c}{a}$
 $b = c \operatorname{tg} B$ $a \cos B = c$
 $a = \frac{c}{\cos B}$

$\log \operatorname{tg} B = 0,3375125$ $\log c = 1,1141367$
 $\log c = 1,1141367$ $\log \cos B = 9,6208550 - 10$
 $\log b = 1,4516492$ $\log a = 1,4932817$
 $b = 28,29106$ $a = 31,13735$

18.

Aufgabe. Es ist die Hypotenuse a und eine Kathete, b , gegeben: $a = 3798,47$; $b = 1480,99$. Man sucht die übrigen Stücke c , B , C .

Auflösung. Man hat:

$c = \sqrt{a^2 - b^2}$ $\sin B = \frac{b}{a} = \cos C$
 $c = \sqrt{(a+b)(a-b)}$ $\log b = 3,1705522$
 $\log(a+b) = 3,7225895$ $\log a = 3,5796087$
 $\log(a-b) = 3,3650160$
 $7,0876055 : 2$ $\log \sin B = 9,5909435 - 10$
 $\log c = 3,5438027$ $B = 22^\circ 56' 52''$
 $c = 3497,862$ $C = 67^\circ 3' 8''$

19a.

Aufgabe. Es sind gegeben beide Katheten: $b = 0,8745932$, $c = 0,5670073$. Man sucht die Winkel B und C und die Hypotenuse a .

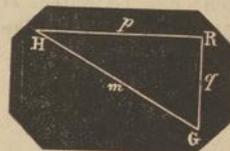
Auflösung. Man hat:

$a = \sqrt{b^2 + c^2}$
 oder kürzer (indem man erst den Winkel B berechnet):
 $\operatorname{tg} B = \frac{b}{c} = \cot C$ $a = \frac{b}{\sin B}$
 $\log b = 0,9418061 - 1$ $\log b = 0,9418061 - 1$
 $\log c = 0,7535886 - 1$ $\log \sin B = 9,9238086 - 10$
 $\log \operatorname{tg} B = 0,1882175$ $\log a = 0,0179975$
 $B = 57^\circ 2' 39''$ $a = 1,042311$
 $C = 32^\circ 57' 21''$

19 b.

Um Sicherheit und Gewandtheit in der Berechnung rechtwinkliger Dreiecke zu erlangen, wird der Anfänger wohl thun, die folgenden 9 Aufgaben mehrmals zu lösen und dabei jedesmal das bei R rechtwinklige Dreieck in eine andere Lage zu bringen.

	Gegeben	Gesucht.	Auflösung.
1	m, G	p, q	$p = m \sin G$ $q = m \cos G$
2	m, H	p, q	$p = m \cos H$ $q = m \sin H$
3	p, H	q, m	$q = p \operatorname{tg} H$ $m = \frac{p}{\cos H}$
4	p, G	q, m	$q = p \cot G = \frac{p}{\operatorname{tg} G}$ $m = \frac{p}{\sin G}$
5	q, G	p, m	$p = q \operatorname{tg} G$ $m = \frac{q}{\cos G}$
6	q, H	p, m	$p = q \cot H = \frac{q}{\operatorname{tg} H}$ $m = \frac{q}{\sin H}$
7	m, q	p, H, G	$p = \sqrt{(m+q)(m-q)}$ $\sin H = \frac{q}{m} = \cos G$
8	m, p	q, H, G	$q = \sqrt{(m+p)(m-p)}$ $\cos H = \frac{p}{m} = \sin G$
9	p, q	H, G, m	$\operatorname{tg} H = \frac{q}{p} = \cot G$ $m = \sqrt{p^2 + q^2}$



Anmerkung. Bei der 4ten Aufgabe hat man:

$$\frac{q}{p} = \cot G \text{ und auch}$$

$\frac{p}{q} = \operatorname{tg} G$. Aus der 1sten Gleichung folgt

$$q = p \cot G \text{ und aus}$$

der 2ten: $q = \frac{p}{\operatorname{tg} G}$. Es ist also einerlei, ob man eine GröÙe mit der *cotangente* eines Winkels multipliziert oder durch die *tangente* desselben dividiert und umgekehrt. Dies folgt schon aus § 11, wonach immer $\operatorname{tg} G \cdot \cot G = 1$, mithin:

$$\cot G = \frac{1}{\operatorname{tg} G} \text{ und}$$

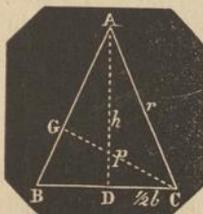
$$\operatorname{tg} G = \frac{1}{\cot G}.$$

Drittes Buch.

Berechnung der gleichschenkligen Dreiecke und
regelmäßigen Vielecke.

20.

Das gleichschenklige Dreieck zerlegt man fast stets durch die Höhe zur ungleichen Seite in zwei kongruente rechtwinklige Dreiecke.



Aufgabe. Es sind die Schenkel eines gleichschenkligen Dreiecks und der Winkel an der Spitze gegeben, nämlich: $AB = AC = r = 15079,38 \text{ m}$ und $\angle BAC = A = 50^\circ 16' 48''$. Man sucht die Grundlinie $BC = b$, die Höhe $AD = h$ und den Flächeninhalt F .

Auflösung. Weil durch das Perpendikel AD das gleichschenklige Dreieck in zwei kongruente rechtwinklige zerlegt wird, so hat man:

$$\begin{aligned} \frac{\frac{1}{2}b}{r} &= \sin \frac{1}{2}A & \frac{h}{r} &= \cos \frac{1}{2}A \\ b &= 2r \sin \frac{1}{2}A & h &= r \cos \frac{1}{2}A \\ \log \sin \frac{1}{2}A &= 9,6282167 - 10 & \log \cos \frac{1}{2}A &= 9,9567793 - 10 \\ \log r &= 4,1783834 & \log r &= 4,1783834 \\ \log 2 &= 0,3010300 & \log h &= 4,1351627 \\ \log b &= 4,1076301 & h &= 13650,94 \\ b &= 12812,39 \end{aligned}$$

Den Flächeninhalt $F = \frac{1}{2}bh$ könnte man erhalten, indem man die für $\frac{1}{2}b$ und h gefundenen Ausdrücke $r \sin \frac{1}{2}A$ und $r \cos \frac{1}{2}A$ mit einander multipliziert, dies gäbe $F = r^2 \sin \frac{1}{2}A \cos \frac{1}{2}A$. Man erhält aber für den Inhalt F eine bequemere Formel, wenn man $AB = r$ als Grundlinie betrachtet und auf diese das Perpendikel

$CG = p$ fällt; dann hat man aus dem rechtwinkligen Dreieck ACG , $\frac{p}{r} = \sin A$, mithin $p = r \sin A$. Dies mit der halben Grundlinie ($\frac{1}{2}AB = \frac{1}{2}r$) multipliziert, kommt:

$$\text{✿ } F = \frac{1}{2}r^2 \sin A$$

$$\log \sin A = 9,8860260 - 10$$

$$2 \log r = 8,3567668$$

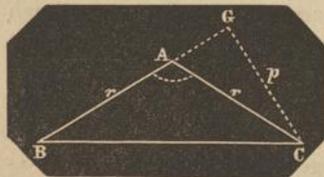
$$\log 0,5 = 0,6989700 - 1$$

$$\log F = 7,9417628$$

$$F = 87450600 \text{ □m.}$$

21.

Bei vorstehender Formel für den Flächeninhalt eines gleichschenkligen Dreiecks ($F = \frac{1}{2}r^2 \sin A$) ist jedoch zu bemerken,



dafs, wenn der Winkel A an der Spitze ein stumpfer ist, das Perpendikel $CG = p$, womit die halbe Grundlinie ($\frac{1}{2}AB = \frac{1}{2}r$) multipliziert werden mufs, auferhalb des Dreiecks auf die Verlängerung der Grundlinie fällt. Da aber aus dem gegebenen stumpfen Winkel A leicht sein Nebenwinkel $\angle GAC = 180 - A$ zu berechnen und dann $\frac{p}{r} = \sin(180 - A)$

ist, so hat man: $p = r \sin(180 - A)$. Die vorhergehende Formel für den Flächeninhalt des gleichschenkligen Dreiecks: $F = \frac{1}{2}r^2 \sin A$, könnte also, im Fall der Winkel A stumpf wäre, durch $F = \frac{1}{2}r^2 \sin(180 - A)$ ausgedrückt werden. Allein dieser Fall braucht gar nicht als besonderer betrachtet und durch eine eigene Formel dargestellt zu werden. Der erste Begründer der Trigonometrie bemerkte nämlich bald, dafs erstere Formel $F = \frac{1}{2}r^2 \sin A$ beide Fälle begreift und folglich allgemein ist, der Winkel A möge spitz oder stumpf sein, wenn man nur den Begriff des *sinus*, der anfangs auf spitze Winkel beschränkt wurde, erweitert und auch auf stumpfe Winkel ausdehnt, wobei man dann aber die kleine Regel zu merken hat: dafs der *sinus* eines stumpfen Winkels gleich ist dem *sinus* seines Nebenwinkels, und dafs man — weil in den trigonometrischen Tafeln keine stumpfen Winkel vorkommen — um den *sinus* eines stumpfen Winkels mittelst der Tafeln zu finden, diesen Winkel erst von 180° abziehen und

dann zu dem Reste den *sinus* nehmen muß; so ist z. B.: $\sin 150^\circ = \sin (180 - 150) = \sin 30^\circ$, $\sin 120^\circ = \sin 60^\circ$. Allgemein, wenn a irgend einen Winkel, spitz oder stumpf, bedeutet:

$$\sin (180 - a) = \sin a.$$

Zusatz. Setzt man hier $a = 90^\circ - b$, so entsteht

$$\sin [180 - (90^\circ - b)] = \sin (90^\circ - b), \text{ d. i.}$$

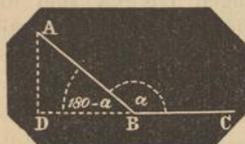
$$\sin (90^\circ + b) = \cos b.$$

Diese praktische Formel macht die in der vorhergehenden ausgesprochene beschwerliche Subtraktion von 180° entbehrlich. Z. B.:

$$\sin 132^\circ 43' 18'',7 = \sin (90^\circ + 42^\circ 43' 18'',7) = \cos 42^\circ 43' 18'',7.$$

22.

Diese Erweiterung des Begriffes *sinus* hebt aber keineswegs die § 2 gegebene Erklärung desselben auf, denn es sei $\angle ABC = a$



ein stumpfer Winkel. Schneidet man von dem einen Schenkel ein beliebiges Stück, BA, ab, fällt von A auf den andern Schenkel (hier also auf die Verlängerung desselben) das Perpendikel AD, so kann man dies Perpendikel AD

sowohl dem Winkel a , als auch seinem Nebenwinkel $180^\circ - a$ gegenüber liegend betrachten, und es ist dann, nach der gegebenen

Erklärung, $\sin a = \sin (180 - a) = \frac{AD^*}{AB}$.

23.

Aus vorhergehendem Paragraph folgt, daß die *sinus* zweier Nebenwinkel vollkommen gleich sind, ferner, daß der zu einem bestimmten Winkel gehörige *sinus* vollkommen bestimmt ist, der Winkel möge spitz oder stumpf sein. Umgekehrt aber, daß der zu einem bestimmten *sinus* gehörige Winkel unbestimmt ist, indem zu ihm, außer dem spitzen Winkel, den man in den Tafeln aufschlägt, auch noch der stumpfe Nebenwinkel gehört.

Ist z. B. $\sin x = 0,567$, so ist $\lg \sin x = \lg 0,567 = 9,7535831 - 10$ und man findet zunächst in den Tafeln $x = 34^\circ 32' 28'',66$. Es ist aber auch $x = 180^\circ - 34^\circ 32' 28'',66 = 145^\circ 27' 31'',34$.

*) Hätten wir den Begriff des *sinus*, so wie nun erst hier geschehen, schon zu Anfang des § 2 auf den stumpfen Nebenwinkel ausdehnen wollen, so hätte der Anfänger noch nicht den Zweck und Nutzen davon einsehen, also auch nicht mit klaren Begriffen folgen können.

24 a.

Aufgabe. Es ist von einem gleichschenkligen Dreieck der Winkel an der Spitze $A = 140^\circ 16' 28''$ und die Länge der Schenkel $AB = AC = r = 505,67$ m gegeben. Man sucht den Inhalt F ?

Auflösung. Nach § 21 hat man:

$$\begin{array}{r}
 F = \frac{1}{2}r^2 \sin A \\
 \log \sin A = 9,8055762 - 10 \\
 \log r^2 = 5,4077344 \\
 \log 0,5 = 0,6989700 - 1 \\
 \hline
 \log F = 4,9122806 \\
 F = 81711 \square \text{m}
 \end{array}
 \qquad
 \begin{array}{r}
 180^\circ \\
 A = 140 \cdot 16 \cdot 28 \\
 \hline
 180 - A = 39^\circ 43' 32''
 \end{array}$$

24 b.

Aufgabe. Von einem gleichschenkligen Dreieck sind die Schenkel $AB = AC = r = 304$ m und der Flächeninhalt $F = 7945$ \square m gegeben. Wie groß ist der Winkel A an der Spitze?

Auflösung. Aus der Formel $F = \frac{1}{2}r^2 \sin A$ (§ 24) folgt:



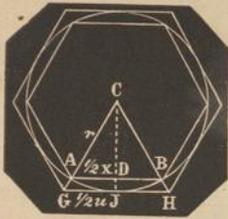
$$\begin{array}{r}
 \sin A = \frac{2F}{r^2} \\
 \log F = 3,9000939 \\
 \log 2 = 0,3010300 \\
 \hline
 4,2011239 \\
 2 \log r = 4,9657472 \\
 \hline
 \log \sin A = 9,2353767 - 10 \\
 \text{also } A = 9^\circ 54' 2''
 \end{array}$$

oder auch $A = 170^\circ 5' 58''$ (§ 23).

Dafs die vollständige Auflösung hier zwei Winkel geben mufs, ist leicht einzusehen, weil die beiden Dreiecke CAB und CAD (wenn man $AD = AB$ nimmt), wegen gemeinschaftlicher Spitze C und gleicher Grundlinien, $AB = AD$, auch gleichen Inhalt haben. Der gesuchte Winkel A kann also sowohl $\angle BAC = 9^\circ 54' 2''$ als auch $\angle CAD = 170^\circ 5' 58''$ sein. Ver gleiche Geometrie § 202.

25.

Aufgabe. Es ist der Radius eines Kreises, $AC = r$, gegeben. Man sucht die Seiten $AB = x$, und $GH = u$, der ein- und umgeschriebenen regelmäfsigen n Ecke, sowie deren Inhalte f und F .



Auflösung. Es ist der Winkel $ACB =$

$$C = \frac{360}{n}, \text{ daher: } \frac{\frac{1}{2}x}{r} = \sin \frac{1}{2}C \text{ und}$$

$$\frac{GJ}{CJ} = \frac{\frac{1}{2}u}{r} = \operatorname{tg} \frac{1}{2}C; \text{ hieraus:}$$

$$x = 2r \sin \frac{1}{2}C \quad f = n \cdot \frac{1}{2}r^2 \sin C$$

$$u = 2r \operatorname{tg} \frac{1}{2}C \quad F = n \cdot r^2 \operatorname{tg} \frac{1}{2}C$$

Sei z. B. $r = 1\text{m}$, $n = 7$ gegeben, so findet man:

$$C = 51^\circ 25' 42\frac{2}{3}''; \frac{1}{2}C = 25^\circ 42' 51\frac{1}{3}''; n \cdot \frac{1}{2}r^2 = \frac{7}{2} = 3,5; n \cdot r^2 = 7.$$

$$\log \sin \frac{1}{2}C = 9,6373733 - 10 \quad \log \sin C = 9,8931131 - 10$$

$$\log 2r = 0,3010300 \quad \log n \cdot \frac{1}{2}r^2 = 0,5440680$$

$$\log x = 0,9384033 - 1 \quad \log f = 0,4371811$$

$$x = 0,8677674 \quad f = 2,73641$$

$$\log \operatorname{tg} \frac{1}{2}C = 9,6826636 - 10 \quad \log \operatorname{tg} \frac{1}{2}C = 9,6826636 - 10$$

$$\log 2r = 0,3010300 \quad \log n \cdot r^2 = 0,8450980$$

$$\log u = 0,9836936 - 1 \quad \log F = 0,5277616$$

$$u = 0,96315 \quad F = 3,371021.$$

26 a.

Aufgabe. Gegeben: $AC = r = 12,5\text{m}$, $C = 42^\circ 13' = 42^\circ, 21667$.
Man sucht die Fläche des Kreisabschnitts $ADB = F$?

Auflösung. Die Fläche des Ausschnitts

ist $= r^2 \pi \frac{C}{360}$ und die des Dreiecks $= \frac{1}{2}r^2 \sin C$

(§ 21), mithin die Fläche des Abschnitts:

$F = r^2 \pi \frac{C}{360} - \frac{1}{2}r^2 \sin C$, wobei C im ersten

Gliede der rechten Seite stets in Graden ausgedrückt sein muß.

$$\log r^2 = 2,1938200 \quad \log \sin C = 9,8273279 - 10$$

$$\log \pi = 0,4971499 \quad \log r^2 = 2,1938200$$

$$\log C = 1,6254840 \quad \log 0,5 = 0,6989700 - 1$$

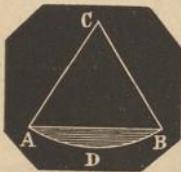
$$4,3164539 \quad \log \frac{1}{2}r^2 \sin C = 1,7201179$$

$$\log 360 = 2,5563025 \quad \frac{1}{2}r^2 \sin C = 52,495$$

$$\log r^2 \pi \frac{C}{360} = 1,7601514$$

$$r^2 \pi \frac{C}{360} = 57,56405$$

$$F = 5,06905 \square\text{m}.$$



26 b.

Aufgabe. Den Inhalt eines Kreissegments AJB, s. Fig. des § 25, aus der Sehne $AB = a$ und der Sagitte $DJ = h$ zu berechnen.

Auflösung. Man ziehe die Gerade AJ und setze $\angle JAD = \varphi$, dann ist

$$\text{I. } \operatorname{tg} \varphi = \frac{DJ}{AD} = h : \frac{a}{2} = \frac{2h}{a}.$$

Da $\angle JAD$ und $\angle BCJ$ auf demselben Bogen BJ stehen, so ist $\angle BCJ$ als Centriwinkel $= 2 \cdot \angle JAD = 2\varphi$, daher

$$\angle ACB = 4\varphi. \quad \text{Ferner } r = AC = \frac{AD}{\sin \angle ACD} = \frac{a}{\sin 2\varphi}.$$

$$\text{Sektor } ACB = \pi r^2 \cdot \frac{\angle ACB}{360^\circ} = \pi \cdot \frac{a^2}{4 \sin^2 2\varphi} \cdot \frac{4\varphi}{360} = \frac{\pi a^2 \varphi}{360 \sin^2 2\varphi};$$

$$\frac{CD}{AD} = \cot 2\varphi, \text{ daher } CD = \frac{a}{2} \cot 2\varphi.$$

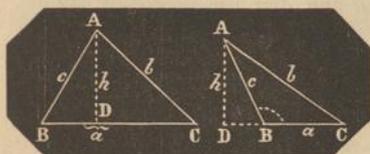
$$\triangle ABC = AD \cdot CD = \frac{a}{2} \cdot \frac{a}{2} \cot 2\varphi = \left(\frac{a}{2}\right)^2 \cot 2\varphi.$$

$$\text{II. Segment} = \text{Sektor} - \triangle = \frac{\pi a^2 \varphi}{360 \sin^2 2\varphi} - \left(\frac{a}{2}\right)^2 \cot 2\varphi.$$

Viertes Buch.

Berechnung des schiefwinkligen Dreiecks.

27.



Lehrsatz. In jedem Dreieck verhalten sich je zwei Seiten zu einander wie die *sinus* der gegenüberliegenden Winkel.*)

Beweis. Man denke das Perpendikel $AD = h$ gefällt, so hat man aus den beiden rechtwinkligen Dreiecken ADB und ADC :

$$\left. \begin{array}{l} \frac{h}{c} = \sin B \dots (1) \\ \frac{h}{b} = \sin C \dots (2) \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{dividiert man (1) durch (2),} \\ \text{so folgt:} \end{array}$$

$$\frac{b}{c} = \frac{\sin B}{\sin C}$$

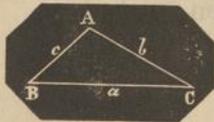
Da die *sinus* zweier Nebenwinkel, zufolge des § 21 erweiterten Begriffs, einander gleich sind, so ist der hier ausgesprochene wichtige Satz: daß sich in jedem Dreieck die Seiten wie die *sinus* der gegenüberliegenden Winkel verhalten, allgemein gültig, das Dreieck möge spitzwinklig oder stumpfwinklig sein, denn die beiden Gleichungen (1) und (2) gelten sowohl für Fig. 2 als für Fig. 1. — Denkt man noch vom Winkel C ein Perpendikel auf die gegenüberliegende Seite c (oder deren Verlängerung Fig. 2) gefällt, so findet man durch gleiche Schlüsse $\frac{a}{b} = \frac{\sin A}{\sin B}$, mithin ist allgemein:

$$a : b : c = \sin A : \sin B : \sin C.$$

*) Es ist üblich, die Seiten eines Dreiecks mit kleinen und die gegenüberliegenden Winkel mit den gleichnamigen großen Buchstaben zu bezeichnen.

Dieser sogenannte *Sinus*-Satz wird immer angewandt, wenn von einem Dreieck eine Seite und zwei Winkel, oder zwei Seiten und ein gegenüber liegender Winkel gegeben sind, mithin jedesmal, wenn eine Gleichung zwischen vier Stücken, die paarweise gegenüber liegen, gesucht wird.

28.



Aufgabe. Von einem Dreiecke, ABC, sind eine Seite und die beiden anliegenden Winkel gegeben, z. B. $a = 2057,8 \text{ m}$, $B = 54^\circ 17' 12''$, $C = 41^\circ 39' 10''$. Man sucht die beiden andern Seiten b , c und den Flächeninhalt F ?

Auflösung. Zuerst findet man den dritten Winkel $A = 180 - (B + C) = 84^\circ 3' 38''$; dann, nach dem *Sinus*-Satz:

$$\frac{b}{a} = \frac{\sin B}{\sin A}$$

$$\frac{c}{a} = \frac{\sin C}{\sin A}$$

$$\text{folglich } b = a \frac{\sin B}{\sin A}$$

$$c = a \frac{\sin C}{\sin A}$$

$$\log \sin B = 9,9095280 - 10$$

$$\log \sin C = 9,8225700 - 10$$

$$\log a = 3,3134032$$

$$\log a = 3,3134032$$

$$\hline 13,2229312 - 10$$

$$\hline 13,1359732$$

$$\log \sin A = 9,9976624 - 10$$

$$\log \sin A = 9,9976624$$

$$\log b = 3,2252688$$

$$\log c = 3,1383108$$

$$b = 1679,843$$

$$c = 1375,025.$$

Um den Inhalt F zu erhalten, suche man erst das von der Spitze A auf die Grundlinie a gefällte Perpendikel h . Weil $\frac{h}{b} = \sin C$, so ist: $h = b \sin C$, und da, wie vorhin gefunden:

$b = a \frac{\sin B}{\sin A}$, so ist auch: $h = a \frac{\sin B}{\sin A} \sin C$, mithin ist:

$$F = \frac{1}{2} a^2 \frac{\sin B \cdot \sin C}{\sin A}$$

$$\log \sin B = 9,9095280 - 10$$

$$\log \sin C = 9,8225700 - 10$$

$$\log a^2 = 6,6268064$$

$$\log 0,5 = 0,6989700 - 1$$

$$\hline 27,0578744 - 21$$

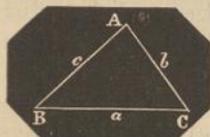
$$\log \sin A = 9,9976624 - 10$$

$$\log F = 6,0602120$$

$$F = 1148714 \square \text{m.}$$

Anmerkung. Es ist also $\sin A = \sin [180^\circ - (B + C)] = \sin (B + C)$, siehe § 21. Oder: Der *sinus* eines Winkels im Dreieck ist = dem Sinus der Summe der beiden andern Winkel. Die Seite b hätte man in vorstehender Aufgabe mithin noch bequemer in folgender Weise gefunden:

$$b = \frac{a \sin B}{\sin A} = \frac{a \sin B}{\sin (B + C)} = \frac{2057,8 \sin 54^\circ 17' 12''}{\sin (54^\circ 17' 12'' + 41^\circ 39' 10'')} = \frac{2057,8 \sin 54^\circ 17' 12''}{\sin 95^\circ 56' 22''} = \frac{2057,8 \sin 54^\circ 17' 12''}{\cos 5^\circ 56' 22''} \quad (\text{s. § 26, Zusatz}).$$



29.

Aufgabe. Von einem Dreieck, ABC, sind zwei Seiten b, c und ein der größern Seite c gegenüber liegender Winkel, C, gegeben. Man sucht die übrigen Stücke.

Auflösung. Man suche zuerst den, der kleinern Seite b gegenüber liegenden Winkel B. Nach dem *Sinus-Satze* ist

$$\frac{\sin B}{\sin C} = \frac{b}{c}$$

$$\sin B = \frac{b}{c} \sin C.$$

Weil $b < c$, so muß auch $B < C$, mithin Winkel B jedenfalls spitz sein. *) Ferner hat man nun $A = 180 - (B + C)$, und dann:

$$\frac{a}{b} = \frac{\sin A}{\sin B} \quad \text{woraus: } a = b \frac{\sin A}{\sin B}.$$

Anmerkung. Sind 2 Seiten und der Gegenwinkel der kleinern dieser beiden Seiten gegeben, so ist die Auflösung unbestimmt. Es sind alsdann 2 verschiedene Dreiecke möglich (s. Geom. §§ 43 und 56).

Aufgabe. $b = 19$ Meter, $c = 23$ Meter, $\angle B = 41^\circ 37'$. Wie groß sind die übrigen Stücke?

Auflösung. Man suche zunächst $\angle C$.

$$\frac{c}{b} = \frac{\sin C}{\sin B}, \quad \text{folglich } \sin C = \frac{c \sin B}{b} = \frac{23 \sin 41^\circ 37'}{19}.$$

$$\log 23 = 1,3617278$$

$$\log \sin 41^\circ 37' = 9,8222621 - 10$$

$$\hline 1,1839900$$

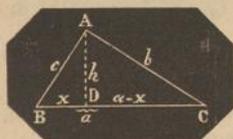
$$\log 19 = 1,2787536$$

$$\hline \log \sin C = 9,9052364 - 10.$$

*) Siehe auch Lübenss *Elementar-Geometrie* (25. Aufl.) §§ 43 u. 56.

In den Tafeln findet man $C = 53^{\circ} 30' 37''$. Nach § 23 ist aber auch $C = 180^{\circ} - 53^{\circ} 30' 37'' = 126^{\circ} 29' 23''$. Man hat demnach 2 verschiedene Dreiecke, das eine mit $b = 19$, $c = 23$, $B = 41^{\circ} 37'$, $C = 53^{\circ} 30' 37''$, das andere mit $b = 19$, $c = 23$, $B = 41^{\circ} 37'$, $C = 126^{\circ} 29' 23''$. Sehr leicht findet sich nun auch in jedem Dreieck der 3. Winkel und nach dem *Sinus-Satze* die 3. Seite.

30.



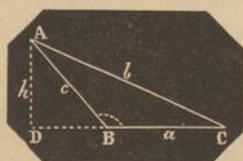
Lehrsatz. In jedem Dreieck ist der *cosinus* eines Winkels gleich der Summe der Quadrate der beiden ihn einschließenden Seiten, weniger dem Quadrate der ihm gegenüber liegenden Seite, dividiert durch das doppelte Produkt der beiden ihn einschließenden Seiten.*)

Es ist z. B. in Bezug auf den Winkel B:

$$\cos B = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac}.$$

Beweis. Denkt man das Perpendikel $AD = h$ gefällt, und setzt $BD = x$, also $DC = a - x$, so hat man: $h^2 = c^2 - x^2$ und auch $h^2 = b^2 - (a - x)^2$; mithin: $b^2 - (a - x)^2 = c^2 - x^2$. Aus dieser Gleichung folgt: $x = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2a}$. Dieser Quotient durch c dividiert, giebt obigen Ausdruck, denn es ist $\cos B = \frac{x}{c}$.

Anmerkung. Der Ausdruck $x = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2a}$ giebt an, wie weit der Fußpunkt D des Perpendikels AD von B gegen C hin fällt. Wäre z. B. $a = 8'$, $b = 6'$, $c = 4'$, so wäre $x = \frac{44}{16}$, und es wäre dann: $\cos B = \frac{11}{8}$.



Ist der Winkel B ein stumpfer (Fig. 2), so fällt das Perpendikel AD außerhalb des Dreiecks auf die rückwärts verlängerte Linie BC, und es ist dann $b^2 > a^2 + c^2$. Obiger, für den Abstand des Punktes D von B gefundene Aus-

*) Dieser Satz, der sogenannte *Cosinus-Satz*, ist wichtig und deshalb dem Gedächtnis wohl einzuprägen.

druck: $x = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2a}$, gilt aber auch für diesen Fall, wenn man nur das Vorzeichen des Resultats, welches hier negativ wird, richtig deutet. Wäre z. B. $a = 8$ m, $b = 12$ m, $c = 6$ m, so wäre $x = -\frac{11}{4}$ m. Das Minuszeichen deutet hier nun an, daß der Fußpunkt D des Perpendikels nicht, wie bei der Ableitung der Formel $x = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2a}$ vorläufig angenommen, in der Richtung BC, sondern in gerade entgegengesetzter Richtung BD um $\frac{11}{4}$ m von B entfernt liegt. *) Nimmt man aber diese negative Größe $x = -DB$ als positiv und dividiert durch c , so ist der Quotient $\frac{DB}{c}$ der *cosinus* von dem spitzen Nebenwinkel ABD, durch dessen Subtraktion von 180° der fragliche stumpfe Winkel B bestimmt wird. Der erste Begründer der Trigonometrie kam deshalb auf den nahe liegenden Gedanken: auch den Begriff des *cosinus* zu erweitern und auf stumpfe Winkel auszudehnen, nämlich: der *cosinus* eines stumpfen Winkels ist an Größe gleich dem *cosinus* des Nebenwinkels, aber negativ. Es ist also (s. letzte Fig.) $\cos ABC = -\cos ABD$.

31.

Mit dieser Erweiterung des Begriffs *cosinus* umfaßt also die vorhin aufgestellte Formel: $\cos B = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac}$, beide Fälle, der Winkel B möge spitz oder stumpf sein. Giebt die Formel ein positives Resultat, so schlägt man den dazu gehörigen spitzen Winkel unmittelbar in den Tafeln auf. Giebt die Formel ein negatives Resultat, so sehe man es vorläufig als positiv an, suche den dazu gehörigen spitzen Winkel in den Tafeln und subtrahiere denselben von 180° .

32.

Es folgt hieraus zugleich, daß es nicht nötig war, auch die stumpfen Winkel in die Tafeln aufzunehmen, indem diese durch ihre Nebenwinkel bestimmt sind, und da nach Ableitung

*) Vergleiche wegen dieses, für den Anfänger schwierigen Punktes, Lübens Arithmetik (und Algebra) § 144.

und Festsetzung der Begriffe die *sinus* zweier Nebenwinkel vollkommen gleich sind und ebenso die *cosinus* zweier Nebenwinkel gleich groß und nur entgegengesetzt sind, so folgt, daß man auch mit Hilfe der Tafeln den *cosinus* eines stumpfen Winkels findet, indem man ihn nur von seinem spitzen Nebenwinkel, aber mit dem *Minus*-Zeichen (negativ) nimmt. Denn nach § 30 ist $\cos \angle ABC = -\cos \angle ABD$ (s. zweite Fig. des § 30), d. i. $\cos (180^\circ - \angle ABD) = -\cos \angle ABD$, oder

$$\cos (180^\circ - a) = -\cos a.$$

Ferner geht $\cos \angle ABC = -\cos \angle ABD$ über in $\cos \angle ABC = -\cos (180^\circ - \angle ABC)$, oder

$$\cos a = -\cos (180^\circ - a).$$

Z. B.: $\cos 120^\circ = -\cos (180^\circ - 120^\circ) = -\cos 60^\circ$.

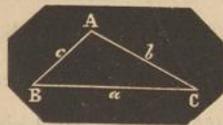
$$\cos 171^\circ 23' = -\cos (180^\circ - 171^\circ 23') = -\cos 8^\circ 37'.$$

Setzt man in der letzten Formel $a = 90^\circ + b$, so entsteht $\cos (90^\circ + b) = -\cos [180^\circ - (90^\circ + b)]$, d. i. $\cos (90^\circ + b) = -\cos (90^\circ - b)$ oder

$$\cos (90^\circ + b) = -\sin b.$$

Z. B.: $\cos 125^\circ 46' = \cos (90^\circ + 35^\circ 46') = -\sin 35^\circ 46'$. (Vergl. den Zusatz zu § 21.)

33.



Aufgabe. Es sind alle drei Seiten eines Dreiecks gegeben: z. B. $a = 13$, $b = 10$, $c = 7$. Man sucht die Winkel.

Auflösung. Nach § 30 hat man:

$$\cos B = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac} = \frac{169 + 49 - 100}{2 \cdot 13 \cdot 7} \text{ oder:}$$

$$\cos B = \frac{118}{182}$$

$$\log 118 = 2,0718820$$

$$\log 182 = 2,2600714$$

$$\log \cos B = 9,8118106 - 10$$

$$B = 49^\circ 34' 57'',3$$

Ebenso hat man § 30:

$$\cos C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab} = \frac{169 + 100 - 49}{2 \cdot 13 \cdot 10} \text{ oder:}$$

$$\cos C = \frac{220}{260}$$

$$\log 220 = 2,3424227$$

$$\log 260 = 2,4149733$$

$$\log \cos C = 9,9274494 - 10$$

$$C = 32^\circ 12' 15'',1.$$

Ferner § 30:

$$\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = \frac{100 + 49 - 169}{2 \cdot 10 \cdot 7}$$

$$\cos A = -\frac{20}{140} \quad \text{Vergleicht man diese Gleichung mit}$$

$\cos(180^\circ - a) = -\cos a$ (s. § 32), so ist $A = 180^\circ - a$, wenn $\frac{20}{140} = \cos a$. Folglich sucht man aus $\cos a = \frac{20}{140}$ den Winkel a

und findet alsdann $A = 180^\circ - a$.

$$\lg 20 = 1,3010300$$

$$\lg 140 = 2,1461280$$

$$\lg \cos a = 9,1549020 - 10$$

$$a = 81^\circ 47' 12'',4$$

$$A = 180^\circ - 81^\circ 47' 12'',4$$

$$= 98^\circ 12' 47'',6$$

Die Winkel sind also

$$A = 98^\circ 12' 47'',6$$

$$B = 49^\circ 34' 57'',3$$

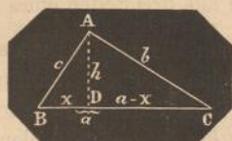
$$C = 32^\circ 12' 15'',1$$

$$A + B + C = 180^\circ.$$

34.

Aufgabe. Eine Formel zu finden, nach welcher man aus den drei gegebenen Seiten a, b, c eines Dreiecks den Flächeninhalt F desselben berechnen kann.

Auflösung. Obgleich diese Aufgabe in jedem Lehrbuche der Elementar-Geometrie schon vorkommt, so darf sie doch hier bei der Berechnung der verschiedenen Teile des Dreiecks nicht fehlen.



Setzt man die erst zu findende unbekannte Höhe des Dreiecks $AD = h$ und $BD = x$, so ist:

$$h^2 = c^2 - x^2 = (c + x)(c - x)$$

und wenn man hierin den § 30 für x gefundenen Ausdruck $\left(x = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2a}\right)$ substituiert:

$$h^2 = \left(c + \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2a}\right) \left(c - \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2a}\right)$$

$$h^2 = \frac{2ac + a^2 + c^2 - b^2}{2a} \cdot \frac{2ac - a^2 - c^2 + b^2}{2a}$$

$$h^2 = \frac{(a+c)^2 - b^2}{2a} \cdot \frac{b^2 - (a-c)^2}{2a}$$

$$h^2 = \frac{(a+c+b)(a+c-b)(b+a-c)(b-a+c)}{4a^2}$$

$$h = \frac{\sqrt{(a+b+c)(a+b-c)(a+c-b)(b+c-a)}}{2a}$$

Multipliziert man diesen für die Höhe gefundenen Ausdruck mit der halben Grundlinie $\left(\frac{a}{2}\right)$, so erhält man die merkwürdige und wichtige Formel für den Flächeninhalt, nämlich:

$$F = \frac{1}{4} \sqrt{(a+b+c)(a+b-c)(a+c-b)(b+c-a)}.$$

Um sie für die numerische Rechnung noch etwas bequemer zu formen, setze man die Summe der drei Seiten = s , nämlich:

$$a + b + c = s = 2 \cdot \frac{1}{2}s, \text{ mithin:}$$

$$a + b - c = 2 \cdot \frac{1}{2}s - 2c = 2 \left(\frac{1}{2}s - c\right)$$

$$a + c - b = 2 \left(\frac{1}{2}s - b\right)$$

$$b + c - a = 2 \left(\frac{1}{2}s - a\right).$$

Dies in obige Formel substituiert, kommt:

$$F = \sqrt{\frac{1}{2}s \left(\frac{1}{2}s - a\right) \left(\frac{1}{2}s - b\right) \left(\frac{1}{2}s - c\right)}.$$

Es sei z. B.:

Gegeben:	so ist:	Logarithmen:
$a = 13 \text{ m}$	$\frac{1}{2}s = 15$	1,1760913
$b = 10$	$\frac{1}{2}s - a = 2$	0,3010300
$c = 7$	$\frac{1}{2}s - b = 5$	0,6989700
$s = 30$	$\frac{1}{2}s - c = 8$	0,9030900
		3,0791813 : 2
		$\log F = 1,5395906$
		$F = 34,641 \square \text{m.}$

35.

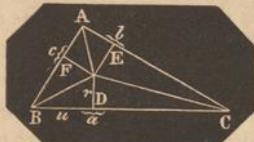
Ogleich die § 30 entwickelte Formel zur Berechnung eines Winkels aus den drei Seiten eines Dreiecks, der sogenannte *Cosinus*-Satz, theoretisch wichtig ist, so ist sie doch für die logarithmische Rechnung, wenn die Seiten durch große Zahlen gegeben sind, sehr unbequem, und wir wollen deshalb, für diesen rein praktischen Zweck, noch eine besondere, für die numerische Rechnung bequemere Formel ableiten.

Denkt man sich die drei Winkel des Dreiecks halbiert, vom gemeinschaftlichen Durchschnittspunkt der Halbierungslinien Perpendikel auf die drei Seiten gefällt, und bezeichnet diese gleichen Perpendikel mit r (Geometrie § 76), den als bekannt anzusehenden Flächeninhalt mit F , so hat man:

$$\frac{ar}{2} + \frac{br}{2} + \frac{cr}{2} = F, \text{ woraus:}$$

$$r = \frac{2F}{a + b + c}.$$

Setzt man noch $BD = u$, so ist (weil $BF = BD$, $AF = AE$ und $CE = CD$, also $CD + AF = AC = b$):



$2u + 2b = a + b + c$, hieraus:

$$u = \frac{a + c - b}{2}.$$

Nun ist $tg \frac{1}{2} B = \frac{r}{u} = \frac{2F}{a + b + c} \cdot \frac{2}{a + c - b}$. Hierin für F seinen Wert aus vorhergehendem Paragraph gesetzt:

$$tg \frac{1}{2} B = \frac{\sqrt{(a + b + c)(a + b - c)(a + c - b)(b + c - a)}}{(a + b + c)(a + c - b)}$$

$$tg \frac{1}{2} B = \sqrt{\frac{(a + b + c)(a + b - c)(a + c - b)(b + c - a)}{(a + b + c)^2 (a + c - b)^2}}$$

$$tg \frac{1}{2} B = \sqrt{\frac{(a + b - c)(b + c - a)}{(a + b + c)(a + c - b)}}$$

Oder, wenn man Kürze halber wieder, wie in § 34, $a + b + c = s$ setzt:

$$tg \frac{1}{2} B = \sqrt{\frac{(\frac{1}{2}s - a)(\frac{1}{2}s - c)}{\frac{1}{2}s \cdot (\frac{1}{2}s - b)}}.$$

Beispiel. Es sei wieder, wie in § 33:

gegeben:	so ist:	$\log (\frac{1}{2}s - a) = 0,3010300$
$a = 13$	$\frac{1}{2}s = 15$	$\log (\frac{1}{2}s - c) = 0,9030900$
$b = 10$	$\frac{1}{2}s - a = 2$	<u>1,2041200</u>
$c = 7$	$\frac{1}{2}s - b = 5$	$\log \frac{1}{2}s = -1,1760913$
$s = 30$	$\frac{1}{2}s - c = 8$	$\log (\frac{1}{2}s - b) = 0,6989700$
		<u>1,8750613</u>

1,2041200

1,8750613

0,3290587 - 1 = 1,3290587 - 2, mithin:

$$\log tg \frac{1}{2} B = 9,6645293 - 10, \text{ also } \frac{1}{2} B = 24^\circ 47' 28'', 6 \text{ u. } B = 40^\circ 34' 57'', 2.$$

Ebenso findet man die Winkel A und C aus:

$$tg \frac{1}{2} A = \sqrt{\frac{(\frac{1}{2}s - b)(\frac{1}{2}s - c)}{\frac{1}{2}s \cdot (\frac{1}{2}s - a)}}$$

$$tg \frac{1}{2} C = \sqrt{\frac{(\frac{1}{2}s - a)(\frac{1}{2}s - b)}{\frac{1}{2}s \cdot (\frac{1}{2}s - c)}}$$

Anmerkung. Mit dem \cos des halben Winkels wird die Berechnung noch etwas einfacher (s. u. § 63a).

auf folgende Weise: Man setze erst 0 als Ganze und das Decimalzeichen, hänge darauf dem Zähler eine Null an und dividiere mit dem Nenner, so giebt der Quotient die Anzahl der vollen Zehntel an, welche der Bruch enthält (an dessen Stelle man aber eine Null setzen muß, wenn der Bruch keine Zehntel enthält), dem Rest hänge man wieder eine Null an, und dividiere abermals durch den Nenner, so erhält man Hundertel, und so fahre man fort bis die Division entweder aufgeht, oder bis man so viele Decimalen bestimmt hat, als es die Genauigkeit der Rechnung verlangt. Mehr als sieben Decimalstellen sind höchst selten erforderlich. Manchmal genügen schon zwei, drei oder fünf. Die letzte Decimale pflegt man um eine Einheit zu vergrößern, wenn die folgende eine 5 oder darüber ist. Wollte man von dem Bruche 0,8468 nur die drei ersten Decimalstellen beibehalten, so würde 0,847 den wahren Wert genauer darstellen als 0,846, ersterer ist nur um $\frac{2}{100000}$ zu groß, letzterer aber um $\frac{8}{100000}$ zu klein. Läßt sich der Nenner des in einen Decimalbruch umzuformenden Bruchs in die einfachen Faktoren 2 und 5 auflösen, wie $\frac{3}{8} = \frac{3}{2 \cdot 2 \cdot 2}$; $\frac{3}{20} = \frac{3}{2 \cdot 2 \cdot 5}$ &c., so muß die Division, wenn man sie soweit treiben wollte, jedesmal ein Ende nehmen; läßt sich aber der Nenner nicht in die einfachen Faktoren 2 und 5 auflösen, wie $\frac{5}{6} = \frac{5}{2 \cdot 3}$; $\frac{4}{15} = \frac{4}{3 \cdot 5}$ &c., so kann die Division auch niemals aufgehen (317). Beispiele:

$$\frac{3}{16} = 0,1875; \frac{7}{8} = 0,875; \frac{6}{117} = 0,0028 \dots$$

Man sage nämlich: 16 in 3 Ganze giebt 0 Ganze, 16 in 30 Zehntel giebt 1 Zehntel und 14 als Rest, 16 in 140 Hundertel giebt 8 Hundertel &c.

Der Grund dieses Verfahrens ist leicht einzusehen, denn ob man z. B. nach (§ 48) Zähler und Nenner des Bruchs $\frac{3}{16}$ erst mit einer Rangzahl multipliziert, und dann wieder durch den alten Nenner abkürzt und den dadurch entstehenden Bruch nach (§ 51) ohne Nenner schreibt, oder ob man dem Zähler die Nullen nach und nach anhängt, das ist einerlei. Man hat z. B.

$$\frac{3}{16} = \frac{3000}{16.1000} = \frac{187 \frac{8}{16}}{1000} = 0,187.$$

Anmerkungen. 1) Ist der umzuformende Bruch unecht, so muß man nämlich erst die Ganzen herausziehen und diese statt der Null vor das Decimalzeichen setzen, z. B. $\frac{21}{8} = 2,625$; $2\frac{3}{4} = 2,75$ &c.

2) Wenn man einem Decimalbruch rechts noch beliebig viele Nullen anhängt, so wird dadurch der Wert desselben nicht geändert, indem dies ebenso gleichgültig ist, als wenn man einer ganzen Zahl noch Nullen vorsetzt. So ist z. B. $0,54 = 0,540 = 0,5400$ &c. Man kann also, wenn es die Gleichförmigkeit fordert, mehreren Decimalbrüchen durch angehängte Nullen leicht gleich viele Decimalstellen geben, d. h. sie gleichnamig machen.

3) Wenn beim Verwandeln eines gewöhnlichen Bruchs in einen Decimalbruch die Division kein Ende nimmt, so müssen, wenn die Division weit genug getrieben wird, notwendig einige Decimalstellen immer in derselben

Auflösung. Die Rechnung wird am leichtesten, wenn man erst die beiden andern Winkel A, B, und dann die dritte Seite sucht. Der eben bewiesene Satz (§ 36) giebt uns:

$$\operatorname{tg} \frac{A-B}{2} = \frac{a-b}{a+b} \cdot \operatorname{tg} \frac{A+B}{2}.$$

Nach dieser Formel findet man, da $\frac{A+B}{2} = \frac{180^\circ - C}{2}$ bekannt ist, $\frac{A-B}{2}$ dann aus der halben Summe und halben Differenz, die Winkel A und B selbst. Es ist nämlich:

$$\frac{A+B}{2} = 90 - \frac{1}{2}C = 35^\circ 23' 6''; \quad a+b = 51612,06; \quad a-b = 9389,28$$

$$\log \operatorname{tg} \frac{A+B}{2} = 9,8514229 - 10 \quad \frac{A}{2} + \frac{B}{2} = 35^\circ 23' 6''$$

$$\log(a-b) = 3,9726323 \quad \frac{A}{2} - \frac{B}{2} = 7^\circ 21' 45''$$

$$\hline 3,8240552$$

$$\log(a+b) = 4,7127512 \quad A = 42^\circ 44' 51''$$

$$\log \operatorname{tg} \frac{A-B}{2} = 9,1113040 - 10 \quad B = 28^\circ 1' 21''.$$

Die Seite c findet man jetzt nach dem *Sinus-Satz*:

$$\frac{c}{a} = \frac{\sin C}{\sin A} \quad \log \sin C = 9,9750658 - 10$$

$$\log a = 4,4843094$$

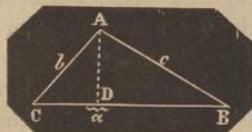
$$\frac{c \sin C}{a \sin A} = \frac{a \sin C}{\sin A} \quad \hline 4,4593752$$

$$\log \sin A = 9,8317217 - 10$$

$$\log c = 4,6276535$$

$$c = 42428,08.$$

38 a.



Will man aus zwei Seiten a , b und dem eingeschlossenen Winkel C die übrigen Stücke direkt berechnen, so kann man dies zwar auch, aber die Formeln fallen für die numerische Rechnung

sehr unbequem aus, weshalb man sie auch in der Regel nicht anwendet, sondern wie in § 37 verfährt.

1) Zur direkten Bestimmung der Seite c folgt aus dem *Cosinus-Satz* (§ 30), $\cos C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}$, folglich

$$2ab \cdot \cos C = a^2 + b^2 - c^2,$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cdot \cos C \text{ und daher}$$

$$c = \sqrt{a^2 + b^2 - 2ab \cos C}.$$

Zu berücksichtigen ist, daß das Glied $2ab \cos C$ für einen stumpfen Winkel C nicht subtrahiert, sondern addiert wird, weil der \cos eines solchen Winkels negativ ist (s. §§ 30 u. 32). Wäre daher $C = 90^\circ + \gamma$, so ist $-2ab \cdot \cos C = -2ab \cdot \cos(90^\circ + \gamma) = -2ab \cdot (-\sin \gamma)$ [s. § 32] $= +2ab \sin \gamma$, oder es ist

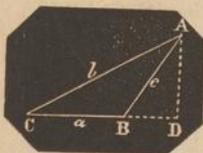
$$c = \sqrt{a^2 + b^2 + 2ab \sin \gamma}.$$

2) Zur Bestimmung des Winkels B aus 2 Seiten a, b und dem von ihnen eingeschlossenen Winkel C hat man (das Perpendikel AD gefällt), $\operatorname{tg} B = \frac{AD}{BD}$ oder, da $AD = b \sin C$ und $CD = b \cos C$, also $BD = a - b \cdot \cos C$

$$\operatorname{tg} B = \frac{b \sin C}{a - b \cos C}$$

$$\text{oder: } \operatorname{cot} B = \frac{a - b \cos C}{b \sin C},$$

wobei wieder das Vorzeichen von $\cos C$ zu beachten ist. Wäre der zu bestimmende Winkel B stumpf, so fällt das Perpendikel AD außerhalb des Dreiecks. In diesem Falle ist dann $CD > a$, d. i. $b \cos C > a$ und deshalb in obigen Formeln die Größe: $a - b \cos C = BD$, in sich negativ. Nimmt man aber, während der Rechnung,



BD als positiv, so geben die obigen Formeln die *tang* und *cot* des Nebenwinkels, durch dessen Subtraktion von 180° man den gesuchten stumpfen Winkel B hat. Damit also obige Formeln beide Fälle zugleich umfassen, dringt sich hier wieder die Notwendigkeit auf, auch die Begriffe der *tangente* und *cotangente* zu erweitern und auch auf stumpfe Winkel auszudehnen, so daß also die *tangenten* und ebenso die *cotangenten* zweier Nebenwinkel an Größe vollkommen gleich, aber entgegengesetzt, nämlich von stumpfen Winkeln negativ sind. Es ist z. B. $\operatorname{tg} 120^\circ = -\operatorname{tg} 60^\circ$; $\operatorname{cot} 120^\circ = -\operatorname{cot} 60^\circ$. Allgemein, wenn a irgend einen Winkel bedeutet:

$$\begin{aligned} \operatorname{tg}(180^\circ - a) &= -\operatorname{tg} a & \operatorname{cot}(180^\circ - a) &= -\operatorname{cot} a \\ \text{oder } \operatorname{tg} a &= -\operatorname{tg}(180^\circ - a) & \operatorname{cot} a &= -\operatorname{cot}(180^\circ - a). \end{aligned}$$

und wenn man $a = 90^\circ + b$ setzt (vergl. § 32):

$$\operatorname{tg}(90^\circ + b) = -\operatorname{cot} b \quad \operatorname{cot}(90^\circ + b) = -\operatorname{tg} b.$$

38 b.

Um aus 2 Seiten b und c (s. die beiden Fig. zu § 27) und einem Gegenwinkel C die 3. Seite $BC = a$ unmittelbar zu finden, fälle man das Perpendikel AD , welches entweder innerhalb oder außerhalb des Dreiecks fällt. In beiden Fällen (s. die beiden Figuren) ist

$$\frac{CD}{b} = \cos C, \quad \frac{AD}{b} = \sin C,$$

$$\text{folglich } CD = b \cos C, \quad AD = b \sin C.$$

$$\text{Ferner } BD = \sqrt{c^2 - AD^2} = \sqrt{c^2 - b^2 \sin^2 C}.$$

$$\text{Für die 1. Figur ist nun } a = CD + BD,$$

$$\text{für die 2. Figur } a = CD - BD.$$

Beide für a gefundenen Formeln lassen sich mithin schreiben:

$$\star a = CD \pm BD = b \cos C \pm \sqrt{c^2 - b^2 \sin^2 C}.$$

Beide Auflösungen sind möglich, wenn

$$\sqrt{c^2 - b^2 \sin^2 C} < b \cos C,$$

$$\text{d. i. } c^2 - b^2 \sin^2 C < b^2 \cos^2 C,$$

$$c^2 < b^2 \sin^2 C + b^2 \cos^2 C,$$

$$c^2 < b^2 (\sin^2 C + \cos^2 C),$$

$$c^2 < b^2 \cdot 1,$$

also wenn $c < b$.

Nur 1 Auflösung (mit der positiv genommenen Wurzel) ist möglich, wenn

$$\sqrt{c^2 - b^2 \sin^2 C} > b \cos C,$$

$$\text{also wenn } c > b.$$

(Die Ableitung wie auf der linken Seite.)

38 c.

Um den Flächeninhalt aus 2 Seiten a und b und dem von diesen eingeschlossenen Winkel C zu berechnen (s. 1. Fig. des § 38 a), findet man zunächst Höhe $AD = b \sin C$ und dann

$$\text{Flächeninhalt} = \frac{BC \cdot AD}{2} = \frac{a \cdot b \sin C}{2}, \text{ oder}$$

der Flächeninhalt ist das halbe Produkt aus 2 Seiten und dem *sinus* des von ihnen eingeschlossenen Winkels.

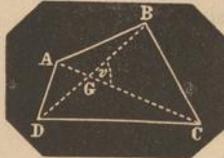
Aufgabe. Es sei $b = 67$ Meter, $c = 89$ Meter, $\angle A = 123^\circ 45'$. Wie groß ist der Flächeninhalt?

Auflösung. Nach vorstehendem Satze ist der

$$\begin{aligned} \text{Flächeninhalt} &= \frac{67 \cdot 89 \cdot \sin 123^\circ 45'}{2} = 2981,5 \sin (90^\circ + 33^\circ 45') \\ &= 2981,5 \cos 33^\circ 45' \text{ (s. § 32)} = 2479,027 \text{ m.} \end{aligned}$$

Hiermit ist die eigentliche ebene Trigonometrie, welche nur die Regeln verlangte, aus gegebenen Bestimmungsstücken eines Dreiecks, die dadurch bestimmten, nicht durch Zeichnung, sondern durch Rechnung zu finden, im allgemeinen entwickelt. Es fehlen nur noch 2 in besondern Fällen anwendbare Sätze (§ 63 a, I und II).

39.



Aufgabe. Es sind die beiden Diagonalen eines Vierecks gegeben $AC = d$, $BD = d'$, sowie der Winkel v , den sie miteinander bilden; man soll hieraus den Flächeninhalt des Vierecks bestimmen.

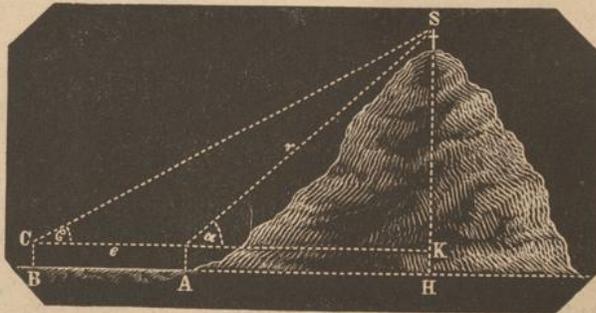
Auflösung. Denkt man von B und D auf $AC = d$ die Perpendikel p und p' gefällt, so ist erstlich $p = BG \sin v$ und $p' = DG \cdot \sin v$, mithin $F = \frac{1}{2}d \cdot BG \sin v + \frac{1}{2}d \cdot DG \sin v$ und hieraus, weil $BG + DG = d'$:

$$F = \frac{1}{2}dd' \sin v.$$

40 a.

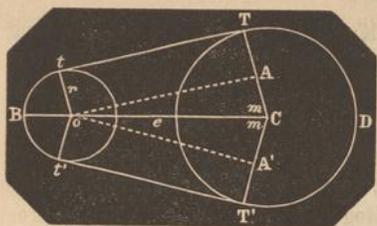
Aufgabe. Die Höhe $SH = h$ eines Turmes (Berges) zu bestimmen.

Auflösung. Man messe zuerst eine horizontale Standlinie $AB = e$, und dann mittelst eines Winkelmessers, dessen



Limbus vertikal gestellt werden kann, die beiden Winkel α und β , dann ist der Winkel bei S $= \alpha - \beta$, und man hat zuerst aus $\frac{r}{e} = \frac{\sin \beta}{\sin(\alpha - \beta)}$, $r = \frac{e \sin \beta}{\sin(\alpha - \beta)}$, dann $SK = r \sin \alpha = \frac{e \sin \alpha \cdot \sin \beta}{\sin(\alpha - \beta)}$, wozu nun noch die Höhe BC des Instruments addiert werden muß.

40 b.



Aufgabe. Es sind die Radien zweier Rollen gegeben, $R = 3 \text{ m}$, $r = 1 \text{ m}$, sowie der Abstand ihrer Mittelpunkte $CO = e = 6 \text{ m}$. Man sucht die erforderliche Länge l eines darum zu legenden Riemens.

Auflösung. Weil der Riemen in den Endpunkten der beiden umschlungenen Bögen die Rollen berührt, so sind die Winkel bei T, t rechte. Zieht man $OA \parallel tT$, so ist $CA = R - r$ und man hat zur Bestimmung des unbekanntes Winkels m :

$$\cos m = \frac{AC}{CO} = \frac{R-r}{e}, \text{ woraus } m = 70^\circ 31' 43'', 6$$

$$\text{oder } m = 70^\circ, 52878.$$

Da nun $\angle tOB = m$, $tBt' = 2m$ und

$360^\circ : \angle tBt' = \text{Umfang des Kreises O} : \text{Bog. } tBt'$, d. i.

$360^\circ : 2m = 2\pi r : \text{Bog. } tBt'$, so ist

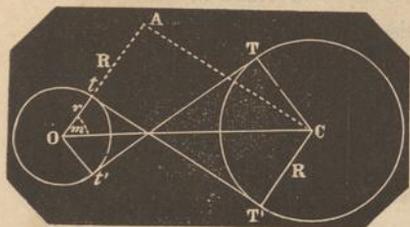
$$\text{Bog. } tBt' = \frac{\pi r m}{90^\circ}, \text{ der entsprechende Bog. } TT' = \frac{\pi R m}{90^\circ}, \text{ daher}$$

$$\text{Bog. } TDT' = 2\pi R - \frac{\pi R m}{90^\circ}, \text{ ferner}$$

$$Tt = OA = e \sin m, \text{ folglich}$$

$$l = 2e \sin m + \frac{\pi r m}{90^\circ} + 2\pi R - \frac{R m}{90^\circ}, \text{ oder}$$

$$l = 2e \sin m + \pi \left[2R - \frac{m}{90^\circ} (R - r) \right] = 25,24 \text{ Meter.}$$



Findet eine Kreuzung des Riemens statt, so ist offenbar:

$$\cos m = \frac{OA}{OC} = \frac{R+r}{e}$$

$$m = 48^\circ 11' 23''$$

$$l = 2e \sin m + \pi \left[2(R+r) - \frac{m}{90^\circ} (R+r) \right], \text{ oder}$$

$$l = 2e \sin m + \pi (R+r) \left(2 - \frac{m}{90^\circ} \right) = 27,35 \text{ Meter.}$$

40 c.

Aufgabe. Die Erde, als Kugel betrachtet, sei der Umfang eines größten Kreises (Äquators) = 5400 Meilen, mithin der Radius desselben $r = 859,4367$ Meilen (6377390 Meter) und ein Bogen von einem Grade = 15 Meilen (1 Meile = 7420,44 Meter). Wie lang ist hiernach die Sehne c eines Bogens von einem Grade und die mit der Sehne parallele, zwischen den verlängerten Radien enthaltene Tangente T dieses Bogens?

Auflösung. Man findet leicht:

$$c = 2r \sin 30' = 14,99981 \text{ Meilen} = 111305,2 \text{ Meter,}$$

$$T = 2r \operatorname{tg} 30' = 15,00038 \text{ Meilen} = 111309,2 \text{ Meter.}$$

Es ist mithin die Sehne nur um 1,4 Meter kürzer und die Tangente nur um 2,6 Meter länger, als der Bogen. Dies zeigt, daß man in vielen Fällen bedeutende Stücke von der Erdoberfläche als eben betrachten kann.

40 d.

Aufgabe. Wie groß ist der Radius r' eines Parallelkreises, dessen geographische Breite $b = 53^\circ$, und wie groß ist die Länge s eines Grades dieses Parallelkreises, wenn der Radius des Äquators $r = 859,4367$ Meilen, ein Grad des Äquators also = 15 Meilen?

Auflösung. In der Fig. zu § 7 bedeute A den Äquator, B den Pol, $\alpha = 53^\circ$ geogr. Breite, dann ist $QM = CP$ der Radius r' des Parallelkreises. Da nun

$$CP = CM \cos \alpha, \text{ so ist}$$

$$r' = 859,4367 \cdot \cos 53^\circ = 517,222 \text{ Meilen.}$$

Der Umfang des Parallelkreises (dessen Rad. = QM) ist = $2\pi r'$, daher ein Grad desselben

$$s = \frac{2\pi r'}{360} = \frac{\pi}{180} \cdot r' = 9,027225 \text{ Meilen.}$$

Fünftes Buch.

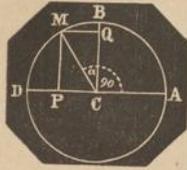
Goniometrie.

41.

Jede mathematische Wissenschaft enthält schon in sich, und ohne daß die ersten Begründer derselben sie absichtlich hineingelegt hätten, die Keime zu einer neuen, und dies ist der Grund, weshalb die mathematischen Wissenschaften niemals zum eigentlichen Schlusse kommen, sondern immerfort wachsen. Der erste Begründer der Trigonometrie hatte die trigonometrischen Funktionen *sin*, *cos* etc. ursprünglich nur zu dem Zwecke berechnet, um durch ihre Vermittelung die in den beiden vorhergehenden Büchern aufgestellten trigonometrischen Probleme zu lösen, welches auch nach den dort gegebenen allgemeinen Regeln vollkommen geschehen ist.

Es konnte nun aber wohl nicht lange unbemerkt bleiben, daß unter den trigonom. Funktionen eines oder auch mehrerer Winkel merkwürdige Beziehungen stattfinden, deren Kenntniss nicht allein die eigentliche Trigonometrie unterstützt und erleichtert, sondern auch in anderen, namentlich höheren Teilen der Mathematik, ja selbst bei rein arithmetischen Untersuchungen von großer Wichtigkeit ist. Der Inbegriff dieser Beziehungen oder Formeln bildet für sich einen eigenen Teil der Trigonometrie, welchen man, wie schon § 2 bemerkt worden ist, Goniometrie nennt, und wir wollen nun die praktisch wichtigsten Sätze derselben, welche das Bedürfnis nach und nach zu entdecken genötigt hat, hier erst einzeln mitteilen und sie dann, zur leichtern Übersicht und Nachschlagung, in § 100 zusammenstellen. Um Gewandtheit in den vielfachen Anwendungen der Goniometrie zu erlangen, ist es durchaus erforderlich, die mit einem Sternchen bezeichneten Formeln auswendig zu wissen.

42.



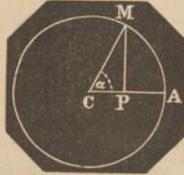
Es sei ein stumpfer Winkel $MCA = 90 + a$, dann ist, $CM = 1$ gesetzt, $MP = \sin(90 + a)$ (§ 7) und CP negativ genommen, $= \cos(90 + a)$ (§ 32), da aber $MP = CQ$ und (für $CM = 1$), $CQ = \cos a$, ferner $CP = MQ$ und $MQ = \sin a$, so haben wir hier die zwei in der Folge als Beweismittel dienenden kleinen Formeln:

$$\sin(90 + a) = \cos a$$

$$\cos(90 + a) = -\sin a.$$

Anmerkung. Auf den Nutzen dieser praktischen Formeln ist schon am Schlusse der §§ 21 u. 32 hingewiesen worden.

43.



Lehrsatz. Bedeutet a einen beliebigen Winkel, spitz oder stumpf, so finden unter seinen trigonometrischen Funktionen folgende vier wichtige Beziehungen statt. Es ist nämlich immer:*)

$$* 1) \sin^2 a + \cos^2 a = 1$$

$$* 3) \frac{\sin a}{\cos a} = \operatorname{tg} a$$

$$* 2) \operatorname{tg} a \cdot \operatorname{cot} a = 1$$

$$* 4) \frac{\cos a}{\sin a} = \operatorname{cot} a.$$

Beweis. Es ist:

$$\sin a = \frac{MP}{CM} \text{ also } \sin^2 a = \frac{MP^2}{CM^2} \dots\dots (1)$$

$$\cos a = \frac{CP}{CM} \text{ also } \cos^2 a = \frac{CP^2}{CM^2} \dots\dots (2).$$

Beide Ausdrücke (1) und (2) addiert, kommt:

$$\sin^2 a + \cos^2 a = \frac{MP^2}{CM^2} + \frac{CP^2}{CM^2} = \frac{MP^2 + CP^2}{CM^2} = \frac{CM^2}{CM^2} = 1.$$

$$\text{Ferner: } \frac{\sin a}{\cos a} = \frac{MP}{CM} : \frac{CP}{CM} = \frac{MP}{CP} = \operatorname{tg} a \text{ (§ 2),}$$

$$\text{ebenso: } \frac{\cos a}{\sin a} = \frac{CP}{CM} : \frac{MP}{CM} = \frac{CP}{MP} = \operatorname{cot} a.$$

*) Statt $\sin a \cdot \sin a = (\sin a)^2$ schreibt man $\sin^2 a$.

Aus den beiden letztern Formeln $tg a = \frac{\sin a}{\cos a}$ und $cot a = \frac{\cos a}{\sin a}$

folgt durch Multiplikation derselben $tg a \cdot cot a = \frac{\sin a}{\cos a} \cdot \frac{\cos a}{\sin a} = 1$.

Nimmt man $CM = 1$, so ist schon MP der *sinus* und CP der *cosinus* von a , und man kann dann die drei zuerst bewiesenen Formeln unmittelbar aus der Figur ablesen.

Anmerkung. Die im 2. Teile des § 38 a enthaltene Formel

$$cot B = \frac{a}{b \sin C} - \frac{b \cos C}{b \sin C}$$
 geht nun über in

$$cot B = \frac{a}{b \sin C} - cot C.$$

44.

Aufgabe. Aus einer trigonometrischen Funktion eines Winkels jede der 3 übrigen zu berechnen und gewisse, die tg und cot enthaltende Ausdrücke zu vereinfachen.

Auflösung. Aus Formel 1 des § 43 folgt unmittelbar:

$$(5) \quad \begin{cases} \sin^2 a = 1 - \cos^2 a & \cos^2 a = 1 - \sin^2 a \\ \sin a = \sqrt{1 - \cos^2 a} & \cos a = \sqrt{1 - \sin^2 a}. \end{cases}$$

Aus Formel 2 des § 43 folgt:

$$(6) \quad tg a = \frac{1}{cot a} \quad cot a = \frac{1}{tg a}.$$

Anstatt mit $tg a$ oder $cot a$ zu multiplizieren, kann man also durch $cot a$ oder $tg a$ dividieren. (Vergl. die Anmerk. in § 19b.)

Anstatt $tg x = \frac{a}{bcd}$ wird man daher auch $cot x = \frac{bcd}{a}$ setzen.

Ferner ist $1 + tg^2 a = 1 + \left(\frac{MP}{CP}\right)^2$ [s. letzte Fig.] = $\frac{CP^2 + MP^2}{CP^2}$

$$= \frac{CM^2}{CP^2} = 1 : \left(\frac{CP}{CM}\right)^2, \text{ d. i.}$$

$$(7) \quad \begin{cases} 1 + tg^2 a = \frac{1}{\cos^2 a} \text{ oder } \sqrt{1 + tg^2 a} = \frac{1}{\cos a}. \text{ Folglich auch} \\ \cos^2 a = \frac{1}{1 + tg^2 a} \text{ oder } \cos a = \frac{1}{\sqrt{1 + tg^2 a}}. \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \text{Ebenso } 1 + \cot^2 a &= 1 + \frac{(\text{CP})^2}{(\text{MP})^2} = \frac{\text{MP}^2 + \text{CP}^2}{\text{MP}^2} = \frac{\text{CM}^2}{\text{MP}^2} \\ &= 1 : \left(\frac{\text{MP}}{\text{CM}}\right)^2, \text{ d. i.} \end{aligned}$$

$$(8) \quad \begin{cases} 1 + \cot^2 a = \frac{1}{\sin^2 a} \text{ oder } \sqrt{1 + \cot^2 a} = \frac{1}{\sin a}. \text{ Folglich auch} \\ \sin^2 a = \frac{1}{1 + \cot^2 a} \text{ oder } \sin a = \frac{1}{\sqrt{1 + \cot^2 a}}. \end{cases}$$

$$\text{Aus } \frac{\sin a}{\cos a} = \text{tg } a \text{ folgt } \sin a = \text{tg } a \cdot \cos a = \text{tg } a \cdot \frac{1}{\sqrt{1 + \text{tg}^2 a}} \text{ oder}$$

$$(9) \quad \sin a = \frac{\text{tg } a}{\sqrt{1 + \text{tg}^2 a}}$$

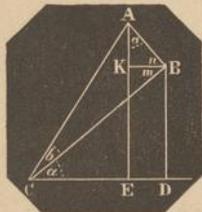
$$\text{Aus } \frac{\cos a}{\sin a} = \cot a \text{ folgt } \cos a = \cot a \cdot \sin a = \cot a \cdot \frac{1}{\sqrt{1 + \cot^2 a}} \text{ oder}$$

$$(10) \quad \cos a = \frac{\cot a}{\sqrt{1 + \cot^2 a}}$$

$$(11) \quad \text{tg } a = \frac{\sin a}{\cos a} = \frac{\sin a}{\sqrt{1 + \sin^2 a}} \text{ oder } = \frac{\sqrt{1 - \cos^2 a}}{\cos a}$$

$$(12) \quad \cot a = \frac{\cos a}{\sin a} = \frac{\cos a}{\sqrt{1 - \cos^2 a}} \text{ oder } = \frac{\sqrt{1 - \sin^2 a}}{\sin a}$$

45.



Aufgabe. Aus den *sinus* und *cosinus* zweier Winkel, a und b , den *sinus* und *cosinus* von der Summe beider Winkel zu finden.*)

Auflösung. Man lege die beiden Winkel a, b , deren Summe wir vorläufig noch kleiner als 90° annehmen, an einander, so daß $\angle \text{ACD} = a + b$. Von A fälle man die beiden Perpendikel AB, AE und von B die beiden Perpendikel BD, BK , dann ist $\angle \text{BAK} = \angle \text{BCD} = a$ (denn $m = a$, als Wechs. Winkel, $m + n = 90^\circ$ und $\angle \text{BAK} + n = 90^\circ$, also $\angle \text{BAK} = m = a$). Aus dem bei B rechtwinkligen Dreieck $\underline{\text{ABC}}$ folgt:

$$\frac{\text{AB}}{\text{AC}} = \sin b \text{ und } \frac{\text{BC}}{\text{AC}} = \cos b, \text{ also:}$$

$$(1) \text{ AB} = \text{AC} \cdot \sin b \text{ und } (2) \text{ BC} = \text{AC} \cdot \cos b.$$

*) $\sin(a + b)$ ist nicht zu verwechseln mit $\sin a + \sin b$.

Aus dem bei K rechtwinkligen Dreieck \underline{ABK} folgt:
 $\frac{AK}{AB} = \cos a$ und $\frac{BK}{AB} = \sin a$. In beide Ausdrücke den für AB
 gefundenen Wert substituiert, kommt: $\frac{AK}{AC \cdot \sin b} = \cos a$ und

$\frac{BK}{AC \cdot \sin b} = \sin a$, hieraus:

$$\frac{AK}{AC} = \cos a \cdot \sin b \dots\dots (3)$$

$$\frac{BK}{AC} = \sin a \cdot \sin b \dots\dots (4).$$

Aus dem rechtwinkligen Dreieck \underline{BCD} hat man: $\frac{BD}{BC} = \sin a$
 und $\frac{CD}{BC} = \cos a$, oder für BC den Wert aus (2) gesetzt:

$\frac{BD}{AC \cdot \cos b} = \sin a$, und $\frac{CD}{AC \cdot \cos b} = \cos a$. Hieraus:

$$\frac{BD}{AC} = \sin a \cdot \cos b \dots\dots (5)$$

$$\frac{CD}{AC} = \cos a \cdot \cos b \dots\dots (6).$$

Addiert man die Gleichungen (3) und (5), so hat man:

$$\left(\text{weil } \frac{AK}{AC} + \frac{BD}{AC} = \frac{AK + BD}{AC} = \frac{AE}{AC} = \sin \angle ACD = \sin (a + b) \right)$$

$$* (13) \sin (a + b) = \sin a \cdot \cos b + \cos a \cdot \sin b.$$

Subtrahiert man (4) und (6), so erhält man [weil
 $\frac{CD}{AC} - \frac{BK}{AC} = \frac{CD - BK}{AC} = \frac{CE}{AC} = \cos (a + b)$]:

$$* (14) \cos (a + b) = \cos a \cdot \cos b - \sin a \cdot \sin b.$$

46.

Um zu zeigen, daß die beiden oben gefundenen wichtigen
 Formeln:

$$\sin (a + b) = \sin a \cdot \cos b + \cos a \cdot \sin b \dots\dots (1)$$

$$\cos (a + b) = \cos a \cdot \cos b - \sin a \cdot \sin b \dots\dots (2)$$

auch für den Fall gelten, wo $a + b > 90$ ist, sei

1) $a = 90^\circ$, dann giebt die linke Seite der ersten Formel
 $\sin (90 + b) = \cos b$ (§ 42); setzt man aber auf der rechten Seite
 auch $a = 90$, so giebt diese, weil $\sin 90 = 1$ und $\cos 90 = 0$ (§ 7),
 offenbar dasselbe, nämlich $\cos b$, wie es sein muß. Setzt man
 in der zweiten Formel $a = 90^\circ$, so geben beide Seiten dasselbe
 Resultat, nämlich:

$$\cos(90 + b) = \cos 90 \cdot \cos b - \sin 90 \cdot \sin b$$

$$\text{oder: } -\sin b = 0 \cdot \cos b - 1 \cdot \sin b \quad (\S 42 \text{ und } \S 7)$$

$$\text{d. i. } -\sin b = -\sin b.$$

2) Seien a und b beide spitz, aber $a + b > 90^\circ$. Setzt man nun $a = 90 - m$, $b = 90 - n$, mithin $a + b = 180 - (m + n)$, so ist $m + n < 90$. Substituiert man statt a und b ihre Ausdrücke, $90 - m$ und $90 - n$ in die erste Formel, so erhält man linker Hand: $\sin(180 - [m + n])$ oder $\sin(m + n)$ (§ 21). Auf der rechten Seite kommt:

$$\begin{aligned} \sin(90 - m) \cdot \cos(90 - n) + \cos(90 - m) \sin(90 - n) \\ = \cos m \cdot \sin n + \sin m \cdot \cos n \quad (\S 5). \end{aligned}$$

Dies ist aber die Entwicklung von $\sin(m + n)$, wofür, weil $m + n < 90$, die Formel giltig ist. Beide Seiten geben also dasselbe Resultat. Die Substitution in die zweite Formel giebt auf der linken Seite (§ 32):

$$\cos[180 - (m + n)] = -\cos(m + n) = -(\cos m \cdot \cos n - \sin m \cdot \sin n).$$

Die rechte Seite giebt (§ 5) $\cos(90 - m) \cdot \cos(90 - n) - \sin(90 - m) \sin(90 - n) = \sin m \cdot \sin n - \cos m \cdot \cos n$, also ganz dasselbe, wie auf der linken Seite. Linker Hand (Formel 2) ist $\cos(a + b)$ in sich negativ. Dies ist aber auch mit dem Betrage rechter Hand der Fall, weil für $a + b > 90$ auch $\cos a \cdot \cos b < \sin a \cdot \sin b$.

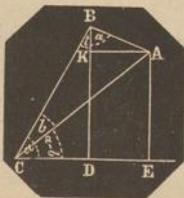
3) Sei $a > 90$. Setze $a = 90 + m$, dann giebt die Substitution in die erste Formel:

$$\begin{aligned} \sin(90 + m + b) = \sin(90 + m) \cos b + \cos(90 + m) \sin b, \text{ oder } \S 42: \\ \cos(m + b) = \cos m \cdot \cos b - \sin m \cdot \sin b. \end{aligned}$$

Die zweite Formel giebt für $a = 90 + m$:

$$\begin{aligned} \cos(90 + m + b) = \cos(90 + m) \cos b - \sin(90 + m) \sin b, \text{ oder } \S 42: \\ -\sin(m + b) = -\sin m \cdot \cos b - \cos m \cdot \sin b \\ \sin(m + b) = \sin m \cdot \cos b + \cos m \cdot \sin b. \end{aligned}$$

Wir erhalten also auch für $a > 90$ auf beiden Seiten der Formel (1) und (2) dasselbe Resultat.



47.

Um die ebenso wichtigen Formeln für die *sinus* und *cosinus* der Differenz zweier Winkel, $\sin(a - b)$ und $\cos(a - b)$, zu finden, sei $\angle BCE = a$ und $\angle BCA = b$, also $\angle ACE = a - b$, ferner AB senkrecht auf BC , und BD , AE senkrecht auf CE , sowie AK senk-

recht auf BD, dann ist $\angle ABK + t = \angle BCD + t = 90$, also $\angle ABK = \angle BDC = a$. Nun ist: $\frac{AB}{AC} = \sin b$ und $\frac{BC}{AC} = \cos b$, also: (I) $AB = AC \cdot \sin b$ und (II) $BC = AC \cdot \cos b$.

Aus dem rechtwinkligen Dreieck BCD hat man:

$$\frac{BD}{BC} = \sin a \text{ und } \frac{CD}{BC} = \cos a, \text{ oder für BC seinen Wert aus (II)}$$

gesetzt $\frac{BD}{AC \cdot \cos b} = \sin a$ und $\frac{CD}{AC \cdot \cos b} = \cos a$, hieraus:

$$(III) \frac{BD}{AC} = \sin a \cdot \cos b \text{ und (IV) } \frac{CD}{AC} = \cos a \cdot \cos b.$$

Aus dem rechtwinkligen Dreieck ABK hat man: $\frac{BK}{AB} = \cos a$ und $\frac{AK}{AB} = \sin a$ oder für AB seinen Wert aus (I) gesetzt,

$$\frac{BK}{AC \cdot \sin b} = \cos a \text{ und } \frac{AK}{AC \cdot \sin b} = \sin a, \text{ hieraus:}$$

$$(V) \frac{BK}{AC} = \cos a \cdot \sin b \text{ und (VI) } \frac{AK}{AC} = \sin a \cdot \sin b.$$

Subtrahiert man die Gleichungen (III) und (V), so erhält man, weil $\frac{BD}{AC} - \frac{BK}{AC} = \frac{BD - BK}{AC} = \frac{AE}{AC} = \sin(a - b)$

$$* (15) \sin(a - b) = \sin a \cdot \cos b - \cos a \cdot \sin b.$$

Addiert man die Gleichungen (IV) und (VI) und bemerkt, daß: $\frac{CD}{AC} + \frac{AK}{AC} = \frac{CD + AK}{AC} = \frac{CE}{AC} = \cos(a - b)$, so hat man:

$$* (16) \cos(a - b) = \cos a \cdot \cos b + \sin a \cdot \sin b.$$

Die allgemeine Gültigkeit der beiden Formeln 15 und 16, für den Fall, daß a oder beide, a und b , > 90 sind, wird wieder wie in § 46 bewiesen.

Setzt man in (15) $a = 0$, so ergibt sich:

$$\sin(0 - b) = 0 \cdot \cos b - 1 \cdot \sin b, \text{ d. i.}$$

$$(17) \sin(-b) = -\sin b. \text{ Oder:}$$

Multipliziert man den Winkel eines Sinus mit -1 , so hat man das Vorzeichen des Sinus zu ändern. Daher auch

$$(18) \sin(a - b) = -\sin(b - a).$$

Setzt man in (16) $a = 0$, so erhält man:

$$\cos(0 - b) = 1 \cdot \cos b + 0 \cdot \sin b, \text{ d. i.}$$

$$(19) \cos(-b) = \cos(+b).$$

Der Cosinus ändert sich also nicht, wenn man den Winkel beliebig mit -1 multipliziert. Daher ist auch

$$(20) \cos(a - b) = \cos(b - a).$$

48.

Die übrigen Formeln der Goniometrie kann man nun alle, ohne eine Figur nötig zu haben, aus den vorhergehenden ableiten. Dividiert man die Gleichungen 13 und 14 (§ 45) durcheinander, so hat man:

$$\frac{\sin(a+b)}{\cos(a+b)} = \frac{\sin a \cdot \cos b + \cos a \cdot \sin b}{\cos a \cdot \cos b - \sin a \cdot \sin b}$$

Dividiert man rechter Hand Zähler und Nenner durch $\cos a \cdot \cos b$ und bemerkt, daß $\frac{\sin a \cdot \cos b}{\cos a \cdot \cos b} = \frac{\sin a}{\cos a} = \operatorname{tg} a$, etc. (§ 43), so kommt:

$$* (21) \operatorname{tg}(a+b) = \frac{\operatorname{tg} a + \operatorname{tg} b}{1 - \operatorname{tg} a \cdot \operatorname{tg} b}$$

Auf gleiche Weise geben die Formeln 15 und 16 (§ 47):

$$* (22) \operatorname{tg}(a-b) = \frac{\operatorname{tg} a - \operatorname{tg} b}{1 + \operatorname{tg} a \cdot \operatorname{tg} b}$$

Löst man in gleicher Weise $\frac{\cos(a+b)}{\sin(a+b)}$ auf und kürzt den Bruch durch $\sin a \cdot \sin b$, so erhält man:

$$(23) \operatorname{cot}(a+b) = \frac{\operatorname{cot} a \cdot \operatorname{cot} b - 1}{\operatorname{cot} a + \operatorname{cot} b}$$

Ebenso folgt aus 16 und 15:

$$(24) \operatorname{cot}(a-b) = \frac{\operatorname{cot} a \cdot \operatorname{cot} b + 1}{\operatorname{cot} b - \operatorname{cot} a}$$

Formel 22 geht mit $a = 0$ über in

$$\operatorname{tg} b = \frac{\operatorname{tg} 0 - \operatorname{tg} b}{1 + \operatorname{tg} 0 \cdot \operatorname{tg} b} \text{ und da } \operatorname{tg} 0 = 0 \text{ (s. § 8):}$$

$$(25) \begin{cases} \operatorname{tg}(-b) = -\operatorname{tg} b \text{ und daher auch (vergl. 17 und 18)} \\ \operatorname{tg}(a-b) = -\operatorname{tg}(b-a). \end{cases}$$

*) Diese, sowie auch die folgenden Formeln, gelten natürlich so gut wie die, woraus sie abgeleitet, sowohl für stumpfe als spitze Winkel.

Aus (25) folgt $\frac{1}{\operatorname{tg}(-b)} = -\frac{1}{\operatorname{tg} b}$, d. i.

$$(26) \begin{cases} \cot(-b) = -\cot b \text{ und folglich auch} \\ \cot(a-b) = -\cot(b-a). \end{cases}$$

49.

Setzt man in den 4 Formeln 13, 14, 21 und 23 $b = a$, so erhält man:

$$* (27) \begin{cases} \sin 2a = 2 \sin a \cdot \cos a \text{ und folglich auch} \\ \sin a \cdot \cos a = \frac{\sin 2a}{2} \\ \cos 2a = \cos^2 a - \sin^2 a \\ \operatorname{tg} 2a = \frac{2 \operatorname{tg} a}{1 - \operatorname{tg}^2 a} \\ \cot 2a = \frac{1}{2} \left(\cot a - \frac{1}{\cot a} \right) = \frac{1}{2} (\cot a - \operatorname{tg} a), \end{cases}$$

oder auch, wenn man a statt $2a$, mithin $\frac{1}{2}a$ statt a setzt:

$$* (28) \begin{cases} \sin a = 2 \sin \frac{1}{2}a \cos \frac{1}{2}a \\ \cos a = \cos^2 \frac{1}{2}a - \sin^2 \frac{1}{2}a \\ (29) \begin{cases} \operatorname{tg} a = \frac{2 \operatorname{tg} \frac{1}{2}a}{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{1}{2}a} \\ \cot a = \frac{1}{2} (\cot \frac{1}{2}a - \operatorname{tg} \frac{1}{2}a). \end{cases} \end{cases}$$

Setzt man $b = 2a$, so erhält man:

$$\sin 3a = \sin a \cos 2a + \cos a \sin 2a$$

oder, weil $\cos 2a = \cos^2 a - \sin^2 a = 1 - \sin^2 a - \sin^2 a = 1 - 2\sin^2 a$,

und $\sin 2a = 2 \sin a \cdot \cos a$, auch:

$$\sin 3a = \sin a (1 - 2 \sin^2 a) + \cos a \cdot 2 \sin a \cdot \cos a$$

$$\sin 3a = \sin a - 2 \sin^3 a + 2 \sin a \cdot \cos^2 a$$

$$\sin 3a = \sin a - 2 \sin^3 a + 2 \sin a (1 - \sin^2 a)$$

$$(30) \sin 3a = \sin a - 4 \sin^3 a. *$$

50.

Es ist: $1 = \cos^2 \frac{1}{2}a + \sin^2 \frac{1}{2}a$ (§ 43, 1)

und $\cos a = \cos^2 \frac{1}{2}a - \sin^2 \frac{1}{2}a$ (§ 49, 29).

Die Addition und Subtraktion dieser beiden Gleichungen geben folgende zwei wichtige Formeln:

*) Die Ableitung der Formeln, welche die *sinus* und *cosinus* von höhern Vielfachen eines Winkels durch Potenzen dieser Funktionen und umgekehrt ausdrücken, gehört in die höhere Analysis.

$$* \begin{cases} (31) & 1 + \cos a = 2 \cos^2 \frac{1}{2}a \\ (32) & 1 - \cos a = 2 \sin^2 \frac{1}{2}a. \end{cases}$$

Aus (31) und (32) folgt $\cos^2 \frac{1}{2}a = \frac{1 + \cos a}{2}$ und $\sin^2 \frac{1}{2}a = \frac{1 - \cos a}{2}$ oder:

$$(33) \begin{cases} \cos \frac{1}{2}a = \sqrt{\frac{1 + \cos a}{2}} \\ \sin \frac{1}{2}a = \sqrt{\frac{1 - \cos a}{2}}. \end{cases}$$

Dividiert man (32) durch (31), so erhält man:

$$tg^2 \frac{1}{2}a = \frac{1 - \cos a}{1 + \cos a} = \frac{(1 - \cos a)(1 + \cos a)}{(1 + \cos a)^2} = \frac{\sin^2 a}{(1 + \cos a)^2}$$

$$\text{und auch } tg^2 \frac{1}{2}a = \frac{1 - \cos a}{1 + \cos a} = \frac{(1 - \cos a)^2}{(1 + \cos a)(1 - \cos a)} = \frac{(1 - \cos a)^2}{\sin^2 a}$$

$$(34) \quad tg \frac{1}{2}a = \sqrt{\frac{1 - \cos a}{1 + \cos a}} = \frac{\sin a}{1 + \cos a} = \frac{1 - \cos a}{\sin a} \quad (\text{und dies nach } \S 43) = \frac{1}{\sin a} - \cot a.$$

Aus (34) folgt $\frac{1}{tg \frac{1}{2}a} = \sqrt{\frac{1 + \cos a}{1 - \cos a}} = \frac{1 + \cos a}{\sin a}$ d. i. (§ 44, 6):

$$(35) \quad \cot \frac{1}{2}a = \sqrt{\frac{1 - \cos a}{1 + \cos a}} = \frac{1 + \cos a}{\sin a} = \frac{1}{\sin a} + \cot a \quad (\text{s. } \S 43).$$

$\frac{1 + \cos a}{\cos a} = \frac{1 + \cos a}{\sin a} \cdot \frac{\sin a}{\cos a}$ geht nun mit (35) über in:

$$(36) \quad \frac{1 + \cos a}{\cos a} = \cot \frac{a}{2} \cdot tg a.$$

$$\frac{1 - \cos a}{\cos a} = \frac{1 - \cos a}{\sin a} \cdot \frac{\sin a}{\cos a} \quad \text{wird mit (34):}$$

$$(37) \quad \frac{1 - \cos a}{\cos a} = tg \frac{a}{2} \cdot tg a.$$

51.

Setzt man in den Formeln 13, 14, 15, 16, 21, 22, 23, 24 $a = 45^\circ$, und beachtet, daß $\sin 45 = \cos 45 = \frac{1}{\sqrt{2}}$ und $tg 45 = \cot 45 = 1$, so hat man:

$$(38) \quad \sin(45 + b) = \frac{1}{\sqrt{2}} (\cos b + \sin b)$$

$$(39) \quad \sin(45 - b) = \frac{1}{\sqrt{2}} (\cos b - \sin b)$$

$$(40) \quad \cos(45 + b) = \frac{1}{\sqrt{2}} (\cos b - \sin b)$$

$$(41) \quad \cos(45 - b) = \frac{1}{\sqrt{2}} (\cos b + \sin b)$$

$$(42) \quad \operatorname{tg}(45 + b) = \frac{1 + \operatorname{tg} b}{1 - \operatorname{tg} b}$$

$$(43) \quad \operatorname{tg}(45 - b) = \frac{1 - \operatorname{tg} b}{1 + \operatorname{tg} b}$$

$$(44) \quad \operatorname{cot}(45 + b) = \frac{\operatorname{cot} b - 1}{\operatorname{cot} b + 1}$$

$$(45) \quad \operatorname{cot}(45 - b) = \frac{\operatorname{cot} b + 1}{\operatorname{cot} b - 1}$$

52.

Durch Addition und Subtraktion der beiden Gleichungen:

$$\sin(a + b) = \sin a \cos b + \cos a \sin b$$

$$\sin(a - b) = \sin a \cos b - \cos a \sin b$$

erhält man:

$$(46) \quad \sin(a + b) + \sin(a - b) = 2 \sin a \cdot \cos b$$

$$(47) \quad \sin(a + b) - \sin(a - b) = 2 \cos a \cdot \sin b$$

oder, indem man $a + b = p$ und $a - b = q$, folglich $a = \frac{p + q}{2}$

und $b = \frac{p - q}{2}$ setzt:

$$(48) \quad \sin p + \sin q = 2 \sin \frac{p + q}{2} \cdot \cos \frac{p - q}{2}$$

$$(49) \quad \sin p - \sin q = 2 \cos \frac{p + q}{2} \cdot \sin \frac{p - q}{2}$$

Durch Addition und Subtraktion der beiden Gleichungen:

$$\cos(a + b) = \cos a \cdot \cos b - \sin a \cdot \sin b$$

$$\cos(a - b) = \cos a \cdot \cos b + \sin a \cdot \sin b$$

erhält man:

$$(50) \quad \cos(a + b) + \cos(a - b) = 2 \cos a \cdot \cos b$$

$$(51) \quad \cos(a - b) - \cos(a + b) = 2 \sin a \cdot \sin b$$

oder, indem man wieder $a + b = p$ und $a - b = q$ setzt:

$$(52) \quad \cos p + \cos q = 2 \cdot \cos \frac{p+q}{2} \cdot \cos \frac{p-q}{2}$$

$$(53) \quad \cos q - \cos p = 2 \cdot \sin \frac{p+q}{2} \cdot \sin \frac{p-q}{2}$$

Durch diese 4 wichtigen Formeln: 48, 49, 52, 53 kann man also die Summen und Differenzen zweier *sinus* oder *cosinus* in Produkte verwandeln. Dividiert man noch (49) durch (48), so erhält man:

$$\frac{\sin p - \sin q}{\sin p + \sin q} = \frac{\cos \frac{p+q}{2} \cdot \sin \frac{p-q}{2}}{\sin \frac{p+q}{2} \cdot \cos \frac{p-q}{2}}$$

oder, indem man rechter Hand Zähler und Nenner durch $\cos \frac{p+q}{2} \cdot \cos \frac{p-q}{2}$ dividiert:

$$(54) \quad \frac{\sin p - \sin q}{\sin p + \sin q} = \frac{\operatorname{tg} \frac{p-q}{2}}{\operatorname{tg} \frac{p+q}{2}}$$

Setzt man in Formel 48: $q = 90^\circ - p$, so entsteht mit Rücksicht auf § 5:

$$\begin{aligned} \sin p + \cos p &= 2 \sin \frac{p + (90^\circ - p)}{2} \cos \frac{2p - 90^\circ}{2} \\ &= 2 \sin 45^\circ \cos (p - 45^\circ) \text{ oder (s. Formel 20)} \\ &= 2 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \cos (45^\circ - p), \text{ d. i. (s. § 5):} \end{aligned}$$

$$(55) \quad \begin{cases} \sin p + \cos p = \sqrt{2} \cdot \sin (45^\circ + p). \text{ In gleicher Weise er-} \\ \sin p - \cos p = \sqrt{2} \cdot \cos (45^\circ + p). \text{ giebt sich aus Formel 49:} \end{cases}$$

53.

Setzt man in (48) und (49) $p = 90^\circ$, so ist mit Rücksicht auf § 5:

$$(56) \quad 1 + \sin q = 2 \sin (45 + \frac{1}{2}q) \cos (45 - \frac{1}{2}q) = 2 \sin^2 (45 + \frac{1}{2}q)$$

$$(57) \quad 1 - \sin q = 2 \cos (45 + \frac{1}{2}q) \sin (45 - \frac{1}{2}q) = 2 \cos^2 (45 + \frac{1}{2}q).$$

Es ist $\frac{\sin a + \sin b}{\cos a - \cos b} = \frac{\sin a \cos b + \cos a \sin b}{\cos a \cos b}$, d. i.

$$(58) \quad \operatorname{tg} a \pm \operatorname{tg} b = \frac{\sin (a \pm b)}{\cos a \cos b}$$

Ebenso wird aus $\frac{\cos a}{\sin a} \pm \frac{\cos b}{\sin b} = \frac{\sin b \cos a \pm \cos b \sin a}{\sin a \sin b}$, d. i.

$$(59) \quad \cot a \pm \cot b = \frac{\sin(b \pm a)}{\sin a \sin b}.$$

Mit $b = 90^\circ - a$ geht 58 (1. Formel) über in

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} a + \operatorname{tg}(90^\circ - a) &= \frac{\sin(a + 90^\circ - a)}{\cos a \sin a} = 1 : (\cos a \sin a) \\ &= 1 : \frac{\sin 2a}{2} \quad (\text{s. Formel 27}) \quad \text{oder} \end{aligned}$$

$$(60) \quad \operatorname{tg} a + \cot a = \frac{2}{\sin 2a}.$$

Multipliziert man die letzte Formel von (27) mit 2, so erhält man:

$$(61) \quad \begin{cases} \cot a - \operatorname{tg} a = 2 \cot 2a; \text{ oder} \\ \operatorname{tg} a - \cot a = -2 \cot 2a. \end{cases}$$

Dividiert man in (58) die erste Formel durch die zweite, so entsteht:

$$(62) \quad \frac{\operatorname{tg} a + \operatorname{tg} b}{\operatorname{tg} a - \operatorname{tg} b} = \frac{\sin(a + b)}{\sin(a - b)}.$$

Dividiert man (55) durch $\cos p$, so entsteht:

$$(63) \quad 1 + \operatorname{tg} p = \frac{\sqrt{2} \cdot \sin(45^\circ + p)}{\cos p} \quad \text{und}$$

$$(64) \quad 1 - \operatorname{tg} p = \frac{\sqrt{2} \cdot \cos(45^\circ + p)}{\cos p}.$$

(55) durch $\sin p$ dividiert, giebt:

$$(65) \quad 1 + \cot p = \frac{\sqrt{2} \cdot \sin(45^\circ + p)}{\sin p}$$

$$(66) \quad 1 - \cot p = -\frac{\sqrt{2} \cdot \cos(45^\circ + p)}{\sin p}.$$

Nach Formel 61 ist

$$\operatorname{tg} a (\cot a - \operatorname{tg} a) = \operatorname{tg} a \cdot 2 \cot 2a, \text{ d. i.}$$

$$\operatorname{tg} a \cdot \cot a - \operatorname{tg}^2 a = 2 \operatorname{tg} a \cot 2a, \text{ oder}$$

$$(67) \quad 1 - \operatorname{tg}^2 a = 2 \operatorname{tg} a \cot 2a.$$

In gleicher Weise:

$$\cot a (\operatorname{tg} a - \cot a) = \cot a \cdot (-2 \cot 2a), \text{ oder}$$

$$(68) \quad 1 - \cot^2 a = -2 \cot a \cot 2a.$$

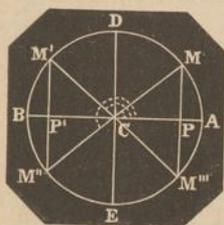
Durch ähnliche Kombinationen könnte man solcher goniometrischen Formeln leicht noch mehrere finden, wir glauben jedoch an vorstehenden vollkommen genug zu haben.

Sechstes Buch.

Ausdehnung der Begriffe *sinus*, *cosinus* etc. auf überstumpfe und negative Winkel.

54.

Die vielfache Anwendung, welche die Goniometrie in der höheren und angewandten Mathematik findet, hat es notwendig gemacht, die Begriffe der trigonometrischen Funktionen auch auf überstumpfe Winkel oder eigentlich auf beliebig große Kreisbögen, ja selbst auf mehrere ganze Umläufe eines Kreises auszudehnen, und obgleich wir hier, sowie im Vorhergehenden (§§ 21 und 30), die Notwendigkeit dieser Begriffserweiterung nach und nach herbeiführen und fühlbar machen könnten und beim mündlichen Unterricht auch thun würden, so können und wollen wir hier doch, Kürze halber, die bisher befolgte heuristische Methode verlassen, weil der Anfänger jetzt darauf vorbereitet ist, und wir an geeigneter Stelle auf die Notwendigkeit der Begriffserweiterung aufmerksam machen werden.



Die in Frage kommenden Winkel zeigt nebenstehende Figur. Der Punkt A bedeute den Nullpunkt, Punkt D = 90° , B = 180° , E = 270° und schreitet man so fort, so gelangt man zu A = 360° , D = 450° u. s. w. Man unterscheidet daher 4 Quadranten: der erste von A bis D (0 bis 90°), der zweite von D bis B (90° bis 180°), der dritte von B bis E (180° bis 270°), der vierte von E bis A (270° bis 360°). Da der Bogen die Größe des Winkels bestimmt, so wird $\angle ACM$ durch den Bogen AM, $\angle ACD$ ($= 90^\circ$) durch den Bogen AD, der überstumpfe $\angle ACM''$ durch den über D gehenden Bogen AM'' u. s. w. bestimmt. Der

die Schenkel des zu messenden Winkels ist also unveränderlich CA, der andere (CM oder CD, CM', CM''...) bestimmt die Größe des Winkels. Wir unterscheiden daher für jeden gegebenen Winkel einen unbeweglichen Schenkel (CA) und einen beweglichen (CM, CD...).

Setzt man den Radius $CM = CA = 1$, so ist, wie schon bekannt, MP der *sinus*, CP der *cosinus* des $\angle ACM$. Ferner ist M'P' der *sin* des stumpfen Winkels ACM' (siehe § 22), CP' der *cos* des $\angle ACM'$ (s. § 30).

Die beiden sich rechtwinklig schneidenden Durchmesser AB und DE sind mithin für die Bestimmung des *sin* und *cos* wesentlich, denn die *sinus* MP und M'P' sind Senkrechte auf jenen (AB), die *cos* PC und P'C Senkrechte auf letzteren (DE). Den 0° und 180° verbindenden Durchmesser AB nennt man die Hauptachse (Abscissenachse), den 90° und 270° verbindenden Durchmesser: Nebenachse (Ordinatenachse).

Es ist mithin der *sinus* die vom Endpunkte des beweglichen Schenkels auf die Hauptachse gefällte Senkrechte (oder, wenn AC nicht = 1: die vom Endpunkte des beweglichen Schenkels auf die Hauptachse gefällte Senkrechte dividiert durch den Radius). Z. B.:

$$\sin \angle ACM = MP \text{ (denn } \frac{MP}{CM} = \frac{MP}{1} = MP);$$

$$\sin \angle ACM' = M'P'.$$

Der bewegliche Schenkel des überstumpfen Winkels ACM'' ist CM'', der Endpunkt desselben (in der Peripherie): M'', die von diesem auf die Hauptachse gefällte Senkrechte: M''P', folglich

$$\sin \angle ACM'' = M''P'.$$

Ebenso: \sin des überstumpfen $\angle ACM''' = M'''P'$.

Die trigonometrischen Funktionen der Winkel von 0 bis 90° (z. B. MP als *sin*, PC als *cos*) sind selbstverständlich positiv. Da nun für die Sinus zweierlei Senkrechte in Betracht kommen: die Senkrechten oberhalb der Hauptachse (z. B. MP) und die Senkrechten unterhalb der Hauptachse (z. B. M'P'), letztere aber den ersteren entgegengesetzt liegen, so müssen letztere (M'P', M''P) negativ sein; weil MP (und mithin auch M'P) positiv ist. Oder:

Die Sinus des 1. und 2. Quadrant (MP, M'P) sind positiv,
 „ „ „ 3. „ 4. „ (M'P', M''P) „ negativ.

Da die Senkrechten (PC, P'C) auf die Nebenachse DE die Cosinus vorstellen und der *sin* des überstumpfen Winkels ACM'' = M''P' ist, so ist P'C der *cos* des überstumpfen Winkels ACM''. Ebenso ist der *cos* des überstumpfen Winkels ACM''' = PC.

Die auf DE senkrecht stehenden Linien PC und P'C liegen entgegengesetzt, folglich ist die dem positiven PC entgegengesetzte P'C negativ und mithin sind

die *cos* des 1. und 4. Quadrant (= PC) positiv,
 „ „ „ 2. „ 3. „ (= P'C) negativ.

Die Tangenten und Cotangenten der Winkel außerhalb des 1. Quadrant könnten zwar auch durch geometrische Tangenten (siehe AT und BV in § 7) bestimmt werden, aber es genügt zu wissen, daß $tg = \frac{\sin}{\cos}$, $cot = \frac{\cos}{\sin}$, z. B. $tg 240^\circ = \frac{\sin 240^\circ}{\cos 240^\circ}$. Für den 1. Quadrant sind die *sin* und *cos* positiv, folglich ist auch $\frac{\sin}{\cos}$ und $\frac{\cos}{\sin}$ positiv, oder die

Tangenten und Cotangenten des 1. Quadr. sind positiv.

Für den 2. Quadr. ist der *sin* positiv, der *cos* negativ, folglich $\frac{\sin}{\cos}$ und $\frac{\cos}{\sin}$ negativ, oder die

Tangenten und Cotangenten des 2. Quadr. sind negativ.

Für den 3. Quadr. sind *sin* und *cos* negativ, daher ihr Quotient positiv, oder die

Tangenten und Cotangenten des 3. Quadr. sind positiv.

Für den 4. Quadr. ist der *sin* negativ, der *cos* positiv, daher ihr Quotient negativ, oder die

Tangenten und Cotangenten des 4. Quadr. sind negativ.

55.

Durch vorstehende Sätze führt man die trigonometrischen Funktionen außerhalb des 1. Quadrant auf solche des ersten zurück.

Es ist $\sin ACM' = M'P'$, d. i. $\sin (180^\circ - \angle BCM') =$ der positiven Linie M'P'. Da nun auch $M'P' = \sin BCM'$, so ist $\sin (180^\circ - \angle BCM') = \sin BCM'$, oder

$$I. \sin (180^\circ - a) = \sin a.$$

Der Sinus des überstumpfen Winkels ACM'' ist = der negativen Linie M''P'. Denkt man sich dieselbe absolut, so ist

$\sin (180^\circ + \angle BCM'') = -M''P'$. Da nun $M''P' = \sin BCM''$, so ist $\sin (180^\circ + \angle BCM'') = -\sin BCM''$, oder

$$\text{II. } \sin (180^\circ + a) = -\sin a.$$

Der Sinus des überstumpfen Winkels ACM''' ist = der neg. Linie $M'''P$; d. i. $\sin (360^\circ - \angle ACM''') = -M'''P$. Da nun $M'''P = \sin \angle ACM'''$, so ist $\sin (360^\circ - \angle ACM''') = -M'''P$, oder

$$\text{III. } \sin (360^\circ - a) = -\sin a.$$

Setzt man $a = 90^\circ - b$, so geht Formel I über in $\sin [180^\circ - (90^\circ - b)] = \sin (90^\circ - b)$, d. i.

$$\text{IV. } \sin (90^\circ + b) = \cos b.$$

Aus III wird mit $a = 90^\circ - b$: $\sin [360^\circ - (90^\circ - b)] = -\sin (90^\circ - b)$, d. i.

$$\text{V. } \sin (270^\circ + b) = -\cos b.$$

Ferner ist $\cos ACM'$ = der negativen Linie $P'C$, oder $\cos (180^\circ - \angle BCM') = -P'C$. Da nun $P'C = \cos BCM'$, so ist $\cos (180^\circ - \angle BCM') = -\cos BCM'$, oder

$$\text{VI. } \cos (180^\circ - a) = -\cos a.$$

In gleicher Weise geht $\cos ACM'' = -P'C$ über in $\cos (180^\circ + \angle BCM'') = -\cos BCM''$, oder

$$\text{VII. } \cos (180^\circ + a) = -\cos a.$$

$\cos ACM''' = PC$ (positiv) wird $\cos (360^\circ - \angle ACM''') = \cos ACM'''$, oder

$$\text{VIII. } \cos (360^\circ - a) = \cos a.$$

Mit $a = 90^\circ - b$ wird aus VI und VIII:

$$\text{IX. } \cos (90^\circ + b) = -\sin b.$$

$$\text{X. } \cos (270^\circ + b) = \sin b.$$

$$\text{tg } (90^\circ + b) = \frac{\sin (90^\circ + b)}{\cos (90^\circ + b)} = \frac{+\cos b}{-\sin b}, \text{ d. i.}$$

$$\text{XI. } \text{tg } (90^\circ + b) = -\cot b.$$

In gleicher Weise ergeben sich aus $\text{tg} = \frac{\sin}{\cos}$ und $\cot = \frac{\cos}{\sin}$ die nachstehenden Formeln:

$$\text{XII. } \text{tg } (180^\circ - a) = -\text{tg } a$$

$$\text{XIII. } \text{tg } (180^\circ + a) = \text{tg } a$$

$$\text{XIV. } \text{tg } (270^\circ + b) = -\cot b$$

$$\text{XV. } \text{tg } (360^\circ - a) = -\text{tg } a$$

$$\text{XVI. } \cot (90^\circ + b) = -\text{tg } b$$

$$\text{XVII. } \cot (180^\circ - a) = -\cot a$$

$$\text{XVIII. } \cot (180^\circ + a) = \cot a$$

$$\text{XIX. } \cot (270^\circ + b) = -\text{tg } b$$

$$\text{XX. } \cot (360^\circ - a) = -\cot a.$$

Wird der Winkel größer als 360° , so wiederholen sich die vorhergehenden Werte mit ihren Vorzeichen, so daß $\sin(360^\circ + a) = \sin a$, $\cos(360^\circ + a) = \cos a$ u. s. w. Oder:

$$\text{XXI.} \quad \begin{cases} \sin(n \cdot 360^\circ + a) = \sin a \\ \cos(n \cdot 360^\circ + a) = \cos a \\ \text{tg}(n \cdot 360^\circ + a) = \text{tg} a \\ \text{cot}(n \cdot 360^\circ + a) = \text{cot} a. \end{cases}$$

56.

Betrachtet man die Drehung von A in der Richtung nach D positiv, so muß die entgegengesetzte Richtung, von A nach E, die negativen Winkel erzeugen. Geht man daher von A bis M''', so erhält man den negativen $\angle ACM'''$ und da der \sin desselben = der neg. Linie M'''P, so ist, $\angle ACM'''$ und M'''P absolut genommen, $\sin(-\angle ACM''') = -M'''P$, oder, weil M'''P = \sin des pos. $\angle ACM'''$:

$$\sin(-a) = -\sin a.$$

In gleicher Weise erhält man die schon in anderer Weise in § 47 und 48 entwickelten Formeln: $\cos(-a) = \cos(+a)$, $\text{tg}(-a) = -\text{tg} a$, $\text{cot}(-a) = -\text{cot} a$.

57.

Die Formeln der §§ 55 und 56 mögen nun noch in eine Regel zusammengefaßt werden, die sich ungemein leicht behalten und anwenden läßt.

I. Ist der gegebene Winkel ein 2gliedriger Ausdruck, bei welchem das 1. Glied Endpunkt der Hauptachse (also 0° , 180° , 360° , 540° ..., überhaupt ein Vielfaches von 180°), das 2. Glied ein spitzer Winkel ist, so behält man das positiv genommene 2. Glied mit der gegebenen Funktion allein, für welche nur noch nach § 54 das Vorzeichen zu bestimmen ist.

Z. B.: $\text{tg}(180^\circ - a)$? „ $180^\circ - a$ “ weggelassen, bleibt $\text{tg} a$. Da der gegebene Winkel $180^\circ - a$ vor 180° , also im 2. Quadrant liegt und die tg im 2. Quadr. negativ ist, so hat man:

$$\text{tg}(180^\circ - a) = -\text{tg} a.$$

$\sin(180^\circ + a) = \dots \sin a$. Da $180^\circ + a$ im 3. Quadr., wo der \sin negativ ist, so hat man:

$$\sin(180^\circ + a) = -\sin a.$$

$\cos(360^\circ - a) = \dots \cos a$. Da $360^\circ - a$ im 4. Quadr. und der \cos daselbst positiv, so ist

$$\cos(360^\circ - a) = + \cos a.$$

$\cot(-a) = \cot(0^\circ - a) = \dots \cot a$. Da $-a$ im 4. Quadr., wo die \cot negativ, so ist

$$\cot(-a) = - \cot a.$$

II. Ist der gegebene Winkel ein 2gliedriger Ausdruck, bei welchem das 1. Glied Endpunkt der Nebenachse (also 90° , 270° , $450^\circ \dots$, überhaupt ein ungeradzahliges Vielfache von 90°) ist, so verfährt man ganz wie in I, nur ändert man die Funktion in ihre Kofunktion um (s. § 5).

Z. B.: $\cos(270^\circ - x) = \dots \sin x$. Der \cos ist im 2. Quadr. *finis 2.* negativ, folglich ist $\cos(270^\circ - x) = - \sin x$.

$tg(90^\circ + x) = \dots \cot x$. Im 2. Quadr. ist die tg negativ, daher

$$= - \cot x.$$

$\sin(270^\circ + a) = \dots \cos a$. Der \sin ist im 4. Quadr. negativ, folglich

$$= - \cos a.$$

$\cot(90^\circ - u) = \dots tg u$. Im 1. Quadr. ist die \cot positiv, daher

$$= + tg u.$$

$tg(x - 270^\circ)$? Nach § 48, Nr. 25 ist dies zunächst $= -tg(270^\circ - x)$ und nach vorstehender Regel II $= -[+ \cot x] = - \cot x$.

III. Alle Winkel, welche größer als 90° sind, denkt man sich am besten in der Form $90^\circ + a$, $180^\circ + a$, $270^\circ + a$ u. s. w. Z. B.: $tg 146^\circ 17' 28'',37 = tg(90^\circ + 56^\circ 17' 28'',37) = - \cot 56^\circ 17' 28'',37$.

Weniger einfach wäre $tg 146^\circ 17' 28'',37 = tg(180^\circ - 33^\circ 42' 31'',63) = -tg 33^\circ 42' 31'',63$.

$\sin 207^\circ 51' = \sin(180^\circ + 27^\circ 51') = - \sin 27^\circ 51'$.

$\cos 349^\circ 25' 47'',8 = \cos(270^\circ + 79^\circ 25' 47'',8) = \sin 79^\circ 25' 47'',8$.

IV. Vorstehende Sätze benutzt man zugleich, um aus der gegebenen Größe einer Funktion die zugehörigen, stets in 2 verschiedenen Quadranten liegenden Winkel zu finden.

1. Beispiel. Es sei aus $tg x = \frac{3}{4}$ der $\angle x$ zu bestimmen. Offenbar liegt x im 1. und 3. Quadrant, da in diesen die tg positiv ($+\frac{3}{4}$) ist. Die Tafeln geben mit $lg tg x = lg \frac{3}{4} = lg 0,75 = 9,8750613 - 10$ unmittelbar jenen 1. Winkel: $36^\circ 52' 11'',6$. Da der andere Winkel im 3. Quadr. liegt, so setze man $x = 180^\circ + y$,

wo y ein spitzer Winkel. Nun ist $tg x = tg(180^\circ + y) = tg y = \frac{3}{4}$.
Daher $y = 36^\circ 52' 11'',6$ und folglich $x = 180^\circ + y = 180^\circ + 36^\circ 52' 11'',6 = 216^\circ 52' 11'',6$.

2. Beispiel. $\cos x = -\frac{6}{7}$. Die gesuchten Winkel liegen im 2. und 3. Quadrant, in welchen der \cos negativ ist. Mithin ist $x = 180^\circ \mp y$ und folglich $\cos x = \cos(180^\circ \mp y) = -\cos y = -\frac{6}{7}$, woraus sich für den spitzen Winkel

$$\cos y = \frac{6}{7}$$

$$\text{oder } \lg \cos y = \lg \frac{6}{7} = 9,9330533 - 10,$$

$$\text{folglich } y = 31^\circ 0' 9'',6.$$

Daher $x = 180^\circ \mp 31^\circ 0' 9'',6$ oder

$$x_1 = 148^\circ 59' 50'',4 \quad \text{und} \quad x_2 = 211^\circ 0' 9'',6.$$

58.

Wächst der Bogen AM (oder Winkel MCP) von 0 bis 90° , so wächst offenbar (CM = 1 gesetzt) der \sinus gleichzeitig von 0 bis DC = 1, der \cosinus dagegen nimmt ab von CA = 1 bis 0.

Wächst der Bogen von 90 bis 180° , so nimmt sein \sinus wieder ab, von DC = 1 bis 0, der \cosinus aber wächst im negativen Sinne von 0 bis CB = -1.

Wächst der Bogen von 180 bis 270° , so wächst wieder der \sinus im negativen Sinne von 0 bis CE = -1, der \cosinus aber nimmt ab von CB = -1 bis 0.

Wächst der Bogen endlich von 270 bis 360° , so nimmt der \sinus ab, von CE = -1 bis 0, der \cosinus dagegen wächst von 0 bis CA = 1, so dafs also:

$$\begin{array}{ll} \sin 0^\circ = 0 & \cos 0^\circ = 1 \\ \sin 90^\circ = 1 & \cos 90^\circ = 0 \\ \sin 180^\circ = 0 & \cos 180^\circ = -1 \\ \sin 270^\circ = -1 & \cos 270^\circ = 0 \\ \sin 360^\circ = 0 & \cos 360^\circ = 1. \end{array}$$

tg und cot von 0° bis 90° können wie die nachstehenden Werte entwickelt werden, sind aber schon § 8 bestimmt worden.

$$tg 180^\circ = \frac{\sin 180^\circ}{\cos 180^\circ} = \frac{0}{-1} = -0.$$

$$tg 270^\circ = \frac{\sin 270^\circ}{\cos 270^\circ} = \frac{-1}{0} = -\infty.$$

In gleicher Weise: $tg 360^\circ = 0$; $cot 180^\circ = -\infty$; $cot 270^\circ = -0$; $cot 360^\circ = \infty$.

Jetzt bleibt uns noch zu beweisen übrig, daß die im Vorhergehenden aufgeführten und in § 100 zusammengestellten Formeln, welche bisher nur für Winkel < 180 bewiesen sind, auch für diese Begriffserweiterung der trigonometrischen Funktionen allgemein gültig sind, sowie auch, weshalb für Bögen oder Winkel über 180° die trigonometrischen Funktionen die in den §§ 54 und 55 vorläufig festgesetzten Vorzeichen, der allgemeinen Gültigkeit der Formeln halber, notwendig erhalten müssen.

Daß die Formeln $\sin 0 = 0$ bis $\cot 360^\circ = 0$ in § 100 für alle noch so große Bögen gelten, ist, mit Berücksichtigung der Vorzeichen, klar, es fragt sich also nur, ob auch die Fundamentalformeln:

$$\sin(a + b) = \sin a \cos b + \cos a \sin b \dots\dots (1)$$

$$\cos(a + b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b \dots\dots (2)$$

allgemein gültig sind. Daß diese beiden Formeln für $a + b > 90$ gelten, ist bereits § 46 bewiesen.

Es seien nun beide Winkel a und b stumpf, folglich $a + b > 180^\circ$, aber noch $a + b < 270^\circ$, und wir müssen nun zeigen, daß die rechten Seiten beider Formeln ganz dasselbe geben, wie die linken Seiten, indem wir den *sinus* und *cosinus* von dem überstumpfen Winkel $a + b$ an Größe und Vorzeichen so nehmen, wie in § 55 festgesetzt worden.

Man setze $a = 90 + p$ und $b = 90 + q$ (wo p und q spitze Winkel sind und auch $p + q < 90$), so giebt die Substitution von $90 + p$ und $90 + q$ in die erste Formel:

$$\sin(180 + p + q) = \sin(90 + p) \cdot \cos(90 + q) + \cos(90 + p) \cdot \sin(90 + q).$$

Aus dieser Gleichung folgt aber, vermöge §§ 55 und 42:

$$-\sin(p + q) = -\cos p \cdot \sin q - \sin p \cdot \cos q$$

$$-\sin(p + q) = -(\sin p \cdot \cos q + \cos p \cdot \sin q),$$

was also vollkommen stimmt und zugleich, wenn man die erste Formel auf überstumpfe Winkel ausdehnen will, die Notwendigkeit zeigt, den *sinus* eines solchen Winkels als negativ zu nehmen, weil die rechte Seite der ersten Formel ein negatives Resultat giebt.

Dieselbe Substitution in die zweite Gleichung giebt:

$$\cos(180 + p + q) = \cos(90 + p) \cos(90 + q) - \sin(90 + p) \sin(90 + q),$$

hieraus, zufolge §§ 55 und 42:

$$\begin{aligned} -\cos(p+q) &= +\sin p \cdot \sin q - \cos p \cdot \cos q \\ -\cos(p+q) &= -(\cos p \cdot \cos q - \sin p \cdot \sin q), \end{aligned}$$

was also wieder vollkommen stimmt.

Ebenso beweist man die Giltigkeit der beiden Grundformeln für die Fälle, wo erstens a stumpf und $b=90^\circ$, zweitens a stumpf und b spitz ist, indem man beide mal $90+p$ für a substituiert.

Sind endlich a und b stumpf und $a+b > 270^\circ$, so setze $a=180-p$, $b=180-q$ und beachte, daß $\sin[360-(p+q)] = -\sin(p+q)$; $\cos[360-(p+q)] = \cos(p+q)$ und $\sin(180-p) = \sin p$; $\cos(180-p) = -\cos p$. Die übrigen besondern Fälle sind hiernach leicht zu behandeln, sowie auch die beiden Formeln für $\sin(a-b)$ und $\cos(a-b)$, für den Fall, wo a und b beliebig groß, oder auch $b > a$ ist.

60.

Die Einteilung des Kreisumfanges in 360° ist eine vollkommen willkürliche. Das Messen der Winkel mittelst dieser Grade ist daher auch weniger rationell, als wenn es (wie in der höhern Mathematik) durch die der Einheit gleichgesetzten Hauptlinie des Kreises, d. i. durch den $= 1$ gesetzten Radius geschieht. Für diesen Wert ist der Durchmesser des Kreises $= 2$ und daher der Umfang $= 2\pi = 6,283185307$.

Rationell würde man mithin

statt 360° : „in Teilen des Halbmessers“ 2π ,

„ 1° : $\frac{2\pi}{360}$ oder $\frac{\pi}{180}$ zu setzen haben.

Um also einen durch Grade ausgedrückten Winkel (oder Bogen) in Teilen des Halbmessers auszudrücken, hat man die Zahl der Grade mit $\frac{\pi}{180} = 0,0174532925$ zu multiplizieren.

$$\text{Beispiele. } \sin 90^\circ = \sin\left(90 \cdot \frac{\pi}{180}\right) = \sin \frac{\pi}{2} = \sin \frac{3,14159\dots}{2} = \sin 1^\circ,5707963.$$

$$\cos 180^\circ = \cos\left(180 \cdot \frac{\pi}{180}\right) = \cos \pi.$$

$$\text{tg } 30^\circ = \text{tg}\left(30 \cdot \frac{\pi}{180}\right) = \text{tg} \frac{\pi}{6}.$$

$$\begin{aligned} \cot 17^\circ 19' 23'' &= \cot 17,323056 = \cot\left(17,323056 \cdot \frac{\pi}{180}\right) \\ &= \cot(17,323056 \cdot 0,0174532925) = \cot 0,3023444. \end{aligned}$$

Oder (s. Bruhns, S. 608):

$$\text{für } 17^{\circ} = 0,29670597$$

$$\text{„ } 19' = 0,00552688$$

$$\text{„ } 23'' = 0,00011151$$

$$\hline 0,30234436.$$

Umgekehrt ist 2π in Teilen des Halbmessers = 360° ,

$$\text{daher } 1 \text{ „ „ „ „ } = \frac{180^{\circ}}{\pi}.$$

Um also den in Teilen des Halbmessers ausgedrückten Bogen (oder Winkel) durch Grade wiederzugeben, hat man jene Zahl mit $\frac{180^{\circ}}{\pi} = 57^{\circ},295779513$ zu multiplizieren.

Beispiele. $\cos \frac{\pi}{2} = \cos \left(\frac{\pi}{2} \cdot \frac{180^{\circ}}{\pi} \right) = \cos 90^{\circ} = 0.$

$$\sin 1,3579 = \sin \left(1,3579 \cdot \frac{180^{\circ}}{\pi} \right) = \sin (1,3579 \cdot 57^{\circ},2957795)$$

$$= \sin 77^{\circ},80193 = \sin 77^{\circ} 48' 6'',95 \text{ und daher}$$

$$\lg \sin 1,3579 = \lg \sin 77^{\circ} 48' 6'',95 = 9,9900825 - 10 \text{ (s. Bruhns, S. 411).}$$

Der Bogen, welcher dem Radius, also der Zahl 1 gleich ist, umfaßt daher $1 \cdot \frac{180}{\pi}$ Grade = $57^{\circ},29578$.

Da $\sin 0^{\circ}$, $\sin 180^{\circ}$, $\sin 360^{\circ}$ (d. i. $\sin 2 \cdot 180^{\circ}$), $\sin 3 \cdot 180^{\circ}$ u. s. w. = 0, so ist in Teilen des Halbmessers $\sin 0$, $\sin \pi$, $\sin 2\pi$, ... allgemein (wenn $k = 0, 1, 2, 3, \dots$)

$$\sin k\pi = 0.$$

Aus $\cos 0^{\circ}$, $\cos 360^{\circ}$, $\cos 2 \cdot 360^{\circ}$... oder $\cos 0$, $\cos 2\pi$, $\cos 4\pi$, folgt:

$$\cos 2k\pi = 1.$$

Aus $\cos 180^{\circ}$, $\cos (360^{\circ} + 180^{\circ})$, $\cos (2 \cdot 360^{\circ} + 180^{\circ})$... oder $\cos \pi$, $\cos 3\pi$, ... = -1 folgt:

$$\cos (2k + 1)\pi = -1.$$

Aus $\sin 90^{\circ}$, $\sin (360^{\circ} + 90^{\circ})$, ... oder $\sin \frac{\pi}{2}$, $\sin 5 \cdot \frac{\pi}{2}$, $\sin 9 \cdot \frac{\pi}{2}$, ... = 1 folgt:

$$\sin (4k + 1) \frac{\pi}{2} = 1.$$

Aus $\sin 270^{\circ}$, $\sin (360^{\circ} + 270^{\circ})$, ... oder $\sin 3 \cdot \frac{\pi}{2}$, $\sin 7 \cdot \frac{\pi}{2}$, ... = -1 folgt:

$$\sin (4k + 3) \frac{\pi}{2} = -1.$$

Aus $\cos 90^\circ$, $\cos 270^\circ$ (d. i. $\cos 3 \cdot 90^\circ$), $\cos 5 \cdot 90^\circ$, oder $\cos \frac{\pi}{2}$,
 $\cos 3 \cdot \frac{\pi}{2}$ = 0 folgt:

$$\cos (2k + 1) \frac{\pi}{2} = 0.$$

61.

Um anzudeuten, daß ein Bogen (resp. Winkel) genommen werden soll, der zu einer numerisch gegebenen Funktion gehört, schreibt man *arc* (d. i. *arcus* = Bogen) vor die Funktion. Z. B.: $\text{arc sin } \frac{1}{2} = 30^\circ$, oder in Teilen des Halbmessers $\text{arc sin } \frac{1}{2} = 0,523599$. Es ist also $\text{arc sin } \frac{1}{2}$ die Abkürzung von $\text{arc} (\text{sin} = \frac{1}{2})$ und bedeutet mithin den Bogen, dessen $\text{sin} = \frac{1}{2}$ ist.

Aus $\text{arc sin } x = y$ würde demnach $\text{sin } y = x$,
 aus $\text{arc tg } x = y$: $\text{tg } y = x$ folgen.

Ist umgekehrt $\cos y = x$, so ist $\text{arc cos } x = y$.

Ist ferner $\text{sin } y = x$, so ist $\cos y = \sqrt{1 - \text{sin}^2 y} = \sqrt{1 - x^2}$, daher

$$\text{arc sin } x = \text{arc cos } \sqrt{1 - x^2}.$$

Ist $\text{tg } y = x$, so ist $\cot y = \frac{1}{\text{tg } y} = \frac{1}{x}$, daher

$$\text{arc tg } x = \text{arc cot } \frac{1}{x}.$$

Aus $\text{sin} (a + b) = \text{sin } a \cos b + \cos a \text{ sin } b$

$$= \text{sin } a \sqrt{1 - \text{sin}^2 b} + \sqrt{1 - \text{sin}^2 a} \cdot \text{sin } b \text{ folgt daher}$$

$$\text{arc sin } x + \text{arc sin } y = \text{arc sin} (x\sqrt{1 - y^2} + y\sqrt{1 - x^2}).$$

Ebenso findet man:

$$\text{arc cos } x + \text{arc cos } y = \text{arc cos} [xy - \sqrt{(1 - x^2)(1 - y^2)}]$$

$$\text{arc tg } x + \text{arc tg } y = \text{arc tg } \frac{x + y}{1 - xy}$$

$$2 \text{arc tg } x = \text{arc tg } x + \text{arc tg } x = \text{arc tg } \frac{2x}{1 - x^2}.$$

62.

* Drückt man die mit einem Halbmesser = 1 beschriebenen Bögen statt in Sekunden in Längen (in Teilen des Halbmessers) aus, so zeigt sich, wie auch schon aus der unmittelbaren Betrachtung des Kreises folgt, daß die *sinus* zwar immer kleiner und die *tangenten* immer größer, als die zugehörigen Bögen sind, innerhalb eines kleinen Intervalls aber, etwa von $0''$ bis $100''$,

der Unterschied aller drei so gering ist, daß er erst in der achten Decimale sich zeigt, und daß man deshalb, innerhalb dieser Grenzen, statt der *sinus* (*tangenten*) die Bögen selbst (in Teilen des Halbmessers ausgedrückt) setzen kann, sowie auch das Verhältnis zweier solcher kleinen *sinus* durch das Verhältnis ihrer Bögen, gleichviel, ob in Längen oder in Sekunden ausgedrückt, darstellen kann. So ist z. B.:

$$\begin{aligned} \text{Bogen von } 1'' &= \frac{3,1415926}{180 \cdot 60 \cdot 60} \\ \log \text{ arc } 1'' &= 4,6855749 - 10 \\ \log \sin 1'' &= 4,6855749 - 10 \\ \log \sin 10'' &= 5,6855749 - 10 \\ \log \sin 30'' &= 6,1626961 - 10 \\ \text{arc } 1'' = \sin 1'' &= 0,000004848137 \dots \\ \sin 10'' &= 0,00004848137 \dots \\ \sin 30'' &= 0,0001454441 \dots \\ \frac{\sin 30''}{\sin 10''} &= \frac{0,000145 \dots}{0,000048 \dots} = \frac{30''}{10''} = 3. \end{aligned}$$

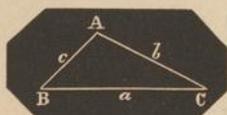
Da die Längen der Bögen der Anzahl ihrer Sekunden proportional sind, so erhält man die Länge eines mit dem Halbmesser = 1 beschriebenen und in Graden etc. gegebenen Bogens, indem man ihn erst auf Sekunden reduziert und die erhaltene Anzahl mit *arc* 1'' oder *sin* 1'' multipliziert. So ist z. B. der mit dem Halbmesser = 1 beschriebene Bogen von 30° in Länge = 30 · 60 · 60 · *arc* 1'' = 30 · 60 · 60 · *sin* 1'', mithin = 108000 · 0,000004848137 ··· = 0,523598796.

Umgekehrt wird also ein in Teilen des Halbmessers = 1 gegebener Bogen in Sekunden ausgedrückt, indem man ihn durch *sin* 1'' dividiert oder mit $\frac{1}{\sin 1''} = \frac{1}{0,000004848137} = 206265$ multipliziert. So viel Sekunden, nämlich 206265'' = 57° 17' 44'', 8, kommen also auf einen Bogen, dessen Länge = 1, gleich dem *radius* ist.

Siebentes Buch.

Anwendungen der Goniometrie.

63 a.



Die §§ 35 und 36 aus der Figur abgeleiteten Formeln hätte man, unter Voranstellung der Goniometrie, folgendermaßen etwas kürzer ableiten können, was jedoch dem Anfänger nicht so klar geworden sein würde.

So ergibt sich z. B. aus $\frac{a}{b} = \frac{\sin A}{\sin B}$ nach einem bekannten Proportionsatz:

$$\frac{a+b}{a-b} = \frac{\sin A + \sin B}{\sin A - \sin B}, \text{ d. i. (s. § 52, Formel 54)}$$

$$\frac{a+b}{a-b} = \frac{\operatorname{tg} \frac{1}{2}(A+B)}{\operatorname{tg} \frac{1}{2}(A-B)}, \text{ übereinstimmend mit § 36.}$$

Von besonderer Wichtigkeit aber sind die nachstehenden 2 Sätze.

I. Um aus drei Seiten eines Dreiecks einen Winkel, z. B. B zu finden, ist nach § 30:

$$\cos B = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac} \text{ hieraus (§ 50):}$$

$1 - \cos B = 1 - \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac}$	$1 + \cos B = 1 + \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac}$
$2 \sin^2 \frac{1}{2} B = \frac{2ac - a^2 - c^2 + b^2}{2ac}$	$2 \cos^2 \frac{1}{2} B = \frac{2ac + a^2 + c^2 - b^2}{2ac}$
$2 \sin^2 \frac{1}{2} B = \frac{b^2 - (a-c)^2}{2ac}$	$2 \cos^2 \frac{1}{2} B = \frac{(a+c)^2 - b^2}{2ac}$
$\sin^2 \frac{1}{2} B = \frac{(b+a-c)(b+c-a)}{4ac}$	$\cos^2 \frac{1}{2} B = \frac{(a+c+b)(a+c-b)}{4ac}$
$\sin \frac{1}{2} B = \sqrt{\frac{(a+b-c)(b+c-a)}{4ac}}$	$\cos \frac{1}{2} B = \sqrt{\frac{(a+b+c)(a+c-b)}{4ac}}$

Beide Gleichungen durcheinander dividiert:

$$\operatorname{tg} \frac{1}{2} B = \sqrt{\frac{(a+b-c)(b+c-a)}{(a+b+c)(a+c-b)}}$$

$$\operatorname{tg} \frac{1}{2} B = \sqrt{\frac{(\frac{1}{2}s-a)(\frac{1}{2}s-c)^*}{\frac{1}{2}s(\frac{1}{2}s-b)}}$$

Daher auch $\operatorname{cot} \frac{1}{2} B = \sqrt{\frac{\frac{1}{2}s(\frac{1}{2}s-b)}{(\frac{1}{2}s-a)(\frac{1}{2}s-b)}}$

Die für $\cos \frac{1}{2} B$ gültige Formel eignet sich in der Form

$$\cos \frac{1}{2} B = \sqrt{\frac{(a+c+b)(a+c-b)}{(2a) \cdot (2c)}}$$

vorzüglich für die numerische Berechnung eines Winkels. Es sei z. B. $a = 571,9$; $b = 923,2$; $c = 368,7$; $\angle B$?

$$\left. \begin{array}{l} a = 571,9 \\ c = 368,7 \end{array} \right\} \text{für den Nenner mit} \\ \text{2 zu multiplizieren.}$$

$$a + c = 940,6$$

$$b = 923,2$$

$$\text{Daher } a + c + b = 1863,8$$

$$a + c - b = 17,4$$

$$\cos \frac{B}{2} = \sqrt{\frac{1863,8 \cdot 17,4}{1143,8 \cdot 737,4}}$$

$$\operatorname{lg} 1863,8 = 3,2703993$$

$$\operatorname{lg} 17,4 = 1,2405492$$

$$\text{d. E. } \operatorname{lg} 1143,8 = 6,9416499$$

$$\text{d. E. } \operatorname{lg} 737,4 = 7,1322969$$

$$(8,5848953 - 10) : 2 \text{ oder}$$

$$(18,5848953 - 20) : 2$$

$$\operatorname{lg} \cos \frac{B}{2} = 9,2924477 - 10.$$

$$\frac{B}{2} = 78^\circ 41' 30'',48,$$

$$\text{daher } B = 157^\circ 23' 0'',96.$$

*) Wenn der *sinus* oder *cosinus* eines Winkels nahe = 1 ist, so ändern sich diese beiden Funktionen mit dem Wachsen des Winkels sehr langsam, wie die unmittelbare Betrachtung des Kreises oder auch die in den Tafeln ausgesetzten Differenzen zeigen. Wenn man also die Wahl hat, einen Winkel durch eine beliebige trigonometrische Funktion zu bestimmen, so wählt man immer die, welche die größten Differenzen hat, weil hier ein Fehler von ein paar Einheiten in der letzten Stelle des Logarithmen keinen großen Einfluss auf den dazu aufzuschlagenden Winkel übt. Die *tangenten* haben immer die größten Differenzen und bestimmen die Winkel also am genauesten.

II. Relation zwischen allen 6 Stücken des Dreiecks.

Aus $a : b = \sin A : \sin B$ folgt

$$a + b : b = \sin A + \sin B : \sin B$$

Ferner ist $b : c = \sin B : \sin C$, folglich

$$a + b : c = \sin A + \sin B : \sin C, \text{ d. i. } (\S 52 \text{ u. } \S 49)$$

$$a + b : c = 2 \sin \frac{A+B}{2} \cos \frac{A-B}{2} : 2 \sin \frac{C}{2} \cos \frac{C}{2}.$$

Nun ist $\sin \frac{A+B}{2} = \sin \frac{180^\circ - C}{2} = \sin \left(90^\circ - \frac{C}{2}\right) = \cos \frac{C}{2}$, folglich

$$a + b : c = 2 \cos \frac{C}{2} \cos \frac{A-B}{2} : 2 \sin \frac{C}{2} \cos \frac{C}{2}.$$

Das 2. Verhältnis durch $2 \cos \frac{C}{2}$ gekürzt:

$$\ast a + b : c = \cos \frac{A-B}{2} : \sin \frac{C}{2}.$$

Ebenso $a - b : b = \sin A - \sin B : \sin B$

$$b : c = \sin B : \sin C, \text{ daher}$$

$$a - b : c = 2 \sin \frac{A-B}{2} \cos \frac{A+B}{2} : 2 \sin \frac{C}{2} \cos \frac{C}{2}, \text{ oder,}$$

$$\text{weil } \cos \frac{A+B}{2} = \cos \frac{180^\circ - C}{2} = \sin \frac{C}{2}:$$

$$a - b : c = 2 \sin \frac{A-C}{2} \sin \frac{C}{2} : 2 \sin \frac{C}{2} \cos \frac{C}{2}.$$

Das 2. Verhältnis durch $2 \sin \frac{C}{2}$ gekürzt:

$$\ast a - b : c = \sin \frac{A-B}{2} : \cos \frac{C}{2}.$$

Diese Mollweide'schen (fälschlich: Gauß'schen) Formeln benutzt man bei Aufgaben, in welchen die Summe oder Differenz zweier Seiten oder die Differenz zweier Winkel gegeben ist.

Beispiel. Die Summe zweier Seiten = 357 Mtr., die 3. Seite $c = 313$ Mtr., die Differenz der beiden an dieser 3. Seite liegenden Winkel = $12^\circ 34' 56''$. Wie groß sind die übrigen Stücke?

Nach der 1. Formel ist

$$357 : 313 = \cos \frac{12^\circ 34' 56''}{2} : \sin \frac{C}{2}, \text{ folglich}$$

$$\sin \frac{C}{2} = \frac{313 \cos 6^\circ 17' 28''}{357}, \text{ woraus sich}$$

$$\frac{C}{2} = 60^\circ 37' 48'', 1$$

$$C = 121^\circ 15' 36'', 2 \text{ ergibt.}$$

Mithin ist $A + B = 180^\circ - 121^\circ 15' 36'',2 = 58^\circ 44' 23'',8$.

Daher $\frac{A}{2} + \frac{B}{2} = 29^\circ 22' 11'',9$

$\frac{A}{2} - \frac{B}{2} = 6^\circ 17' 28''$ (s. die Aufgabe). Daher

durch Addition: $A = 35^\circ 39' 39'',9$

„ Subtr.: $B = 23^\circ 4' 43'',9$.

Aus $a : c = \sin A : \sin C$ findet sich nun a , alsdann $b = 357 - a$.

63 b.

Aufgabe. Die Höhe eines Leuchtturmlichtes, L , über dem Niveau des Meeres ist $= h = 60$ m. Aus welcher Entfernung, e , kann es erblickt werden, wenn die Höhe des Auges A über demselben Niveau $= h' = 3,5$ m?

Antwort. Es kann nicht eher erblickt werden, als bis das Auge A in die Verlängerung der vom Punkte L an die Erde gezogenen Berührungslinie tritt. Verbindet man also die Punkte L , A und den Berührungspunkt T mit dem Mittelpunkt C , setzt $\angle LCT = \alpha$, $\angle ACT = \beta$ und den Radius r der Erde $= 6370000$ m, so hat man:

$$\cos \alpha = \frac{r}{r+h} \quad \text{und} \quad \cos \beta = \frac{r}{r+h'}$$

oder, weil bei dieser Art Aufgaben die Winkel α und β immer sehr klein sind, so erhält man nach § 63a Randanmerkung und § 50 (33) genauer:

$$\sin \frac{1}{2} \alpha = \sqrt{\frac{\frac{1}{2}h}{r+h}} \quad \text{und} \quad \sin \frac{1}{2} \beta = \sqrt{\frac{\frac{1}{2}h'}{r+h'}}$$

Aus den Winkeln α und β findet man dann leicht die zugehörigen Bögen, oder wenn ihre Summe der Länge der Tangente AL gleichgesetzt werden kann (§ 40c), gleich einfacher:

$$e = \sqrt{2rh + h^2} + \sqrt{2rh' + h'^2}, \quad \text{oder genau genug:}$$

$$e = \sqrt{2rh} + \sqrt{2rh'} = 34325,4 \text{ m} = 34\frac{1}{3} \text{ Kilom.}$$

Aufgabe. Wie groß ist die Fläche F der Erdzone von $\beta = 23\frac{1}{2}^\circ$ bis $\beta' = 66\frac{1}{2}^\circ$ der geographischen Breite? (Der Radius der Erde $r = 859,436$ Meilen.)

Antwort. Es ist die Höhe der Zone $= r \sin \beta' - r \sin \beta$ und folglich (Geometrie § 178) $F = 2r^2 \pi (\sin \beta' - \sin \beta)$, oder: § 52, 49

$$F = 4r^2 \pi \cos \frac{\beta' + \beta}{2} \cdot \sin \frac{\beta' - \beta}{2}$$

$$F = 2405456 \square \text{ Meilen.}$$

Trigonometrische (oder goniometrische) Gleichungen.

1. Aufgabe. $\sin(2x + 7^\circ) = \cos(x - 11^\circ)$;

Auflösung. $\sin(2x + 7^\circ) = \sin[90^\circ - (x - 11^\circ)]$, folglich
 $2x + 7^\circ = 90^\circ - (x - 11^\circ)$;
 $3x = 94^\circ$;
 $x = 31\frac{1}{3}^\circ$.

2. Aufgabe. $7 \operatorname{tg} x = 11 \sin x$; d. i.

$$\frac{7 \sin x}{\cos x} = 11 \sin x; \text{ durch } \sin x \text{ dividiert,}$$

$$\frac{7}{\cos x} = 11; \text{ folglich}$$

$$\cos x = \frac{7}{11} \text{ u. s. w. (s. § 57, IV).}$$

3. Aufgabe. $a \cos x = b \sin 2x$; d. i.

$$a \cos x = b \cdot 2 \sin x \cos x;$$

$$a = 2b \sin x;$$

$$\sin x = \frac{a}{2b}$$

4. Aufgabe. $\sqrt{5} \cdot \sin x + 11 \cos x = 37 \sin x$.

Haben alle Glieder der Gleichung den Faktor $\sin x$ oder $\cos x$, so dividiert man durch $\sin x$ oder $\cos x$. Hier durch $\sin x$ dividiert:

$$\sqrt{5} + 11 \cot x = 37$$

$$\cot x = \frac{37 - \sqrt{5}}{11} = \frac{37 - 2,236068}{11} \text{ u. s. w.}$$

5. Aufgabe. $\operatorname{tg} 2x = 7 \sin^2 x$.

Enthält die Gleichung den unbekanntem Winkel in verschiedenen Formen, so ist jede derselben durch eine und dieselbe Funktion (hier durch $\operatorname{tg} x$) auszudrücken. Daher (s. § 49, 27 und § 44, 9):

$$\frac{2 \operatorname{tg} x}{\sqrt{1 - \operatorname{tg}^2 x}} = 7 \cdot \frac{\operatorname{tg}^2 x}{1 + \operatorname{tg}^2 x}$$

Der bequemeren Rechnung wegen $\operatorname{tg} x = y$ gesetzt:

$$\frac{2y}{\sqrt{1 - y^2}} = \frac{7y^2}{1 + y^2}$$

Durch y dividiert, folglich vorläufig $y = 0$, d. i. $\operatorname{tg} x = 0$ oder $x = 0$ oder 180° u. s. w.

$$\frac{2}{\sqrt{1-y^2}} = \frac{7y}{1+y^2};$$

$$2 + 2y^2 = 7y\sqrt{1-y^2}.$$

Quadriert und $y^2 = z$ gesetzt, giebt:

$$z^2 - \frac{41z}{53} = -\frac{4}{53}. \quad \text{Daher}$$

$$1) z = y^2 = 0,65907 \text{ oder } \operatorname{tg}^2 x = 0,65907$$

$$\operatorname{tg} x = \pm \sqrt{0,65907} = \pm 0,81183,$$

woraus $x_1 = 39^\circ 4' 15''$; $x_2 = 219^\circ 4' 15''$;

$x_3 = -39^\circ 4' 15''$ oder $320^\circ 55' 45''$; $x_4 = 140^\circ 55' 45''$.

$$2) z = y^2 = 0,11451 \text{ oder } \operatorname{tg}^2 x = 0,11451,$$

woraus sich gleichfalls 4 Werte für x ergeben.

6. Aufgabe. $a \sin(x-b) = \cos(x-d)$.

Auflösung. $a(\sin x \cos b - \cos x \sin b) = \cos x \cos d + \sin x \sin d$;
durch $\cos x$ dividiert:

$$a \cos b \operatorname{tg} x - a \sin b = \cos d + \sin d \operatorname{tg} x.$$

$$\operatorname{tg} x = \frac{a \sin b + \cos d}{a \cos b - \sin d}.$$

65.

Hilfswinkel. Weil die *tangenten* und *cotangenten* immer zwischen 0 und ∞ enthalten, die *sinus* und *cosinus* aber immer echte Brüche sind, so ist klar, daß man jede gegebene, noch so kleine oder große Zahl als *tangente* oder *cotangente* und jeden echten Bruch immer als *sinus* oder *cosinus* eines, mit Hilfe der Tafeln leicht zu bestimmenden Winkels betrachten kann.

Mit Rücksicht auf diese Eigenschaften der Funktionen berechnet man die unlogarithmischen Ausdrücke bequemer durch Einführung sogenannter Hilfswinkel (wenn man nicht die noch bequemeren Summen- und Differenzlogarithmen benutzen will).

Man unterscheidet hierbei 4 Fälle:

1. Fall. Es sei eine Summe von 2 zusammengesetzten Gliedern gegeben, die Form also $a + b$.

Man verwandle dieselbe in $a \left(1 + \frac{b}{a}\right)$ und setze $\frac{b}{a} = \operatorname{tg}^2 \varphi$
(oder auch $\frac{b}{a} = \cot^2 \varphi$). Aus der Gleichung $\operatorname{tg} \varphi = \sqrt{\frac{b}{a}}$ läßt

sich nun der Hilfwinkel φ bestimmen und jener Ausdruck wird alsdann $a(1 + tg^2 \varphi)$, d. i. der bequeme logarithmische Ausdruck $\frac{a}{\cos^2 \varphi}$ (s. § 44).

Es sei z. B. $x = \sqrt{d^2 + e^2}$ mit $d = 506,835$ und $e = 279,041$ zu berechnen. Da die direkte Ausführung sehr zeitraubend wäre, so schreibt man

$$x = \sqrt{d^2 \left(1 + \frac{e^2}{d^2}\right)} = d \sqrt{1 + \left(\frac{e}{d}\right)^2}$$

und setzt $\left(\frac{e}{d}\right)^2 = tg^2 \varphi$. Aus $tg \varphi = \frac{e}{d} = \frac{279,041}{506,835}$ ergibt sich $\varphi = 28^\circ 50' 7''$. Nun ist

$$x = d \sqrt{1 + tg^2 \varphi} = \frac{d}{\cos \varphi} \quad (\text{s. § 44}).$$

$$\begin{aligned} lg d &= 2,7048666 \\ lg \cos \varphi &= lg \cos 28^\circ 50' 7'' = 9,9425090 \\ lg x &= 2,7623576 \\ x &= 578,57227. \end{aligned}$$

2. Fall. Es sei eine Differenz aus 2 zusammengesetzten Gliedern gegeben, die Form also $a - b$.

Man verwandele dieselbe in $a\left(1 - \frac{b}{a}\right)$ und setze $\frac{b}{a} = \cos^2 \varphi$ (oder auch $\frac{b}{a} = \sin^2 \varphi$). Aus der Gleichung $\cos \varphi = \sqrt{\frac{b}{a}}$ findet man den Hilfwinkel φ und jener Ausdruck wird $a(1 - \cos^2 \varphi)$, d. i. der bequeme logarithmische Ausdruck $a \sin^2 \varphi$.

3. Fall. Ist das eine Glied eines zweiteiligen Ausdrucks (Summe oder Differenz) eine Funktion selbst, so ist es oft von Vorteil, nicht den 1. oder 2. Fall in Anwendung zu bringen, sondern das andere Glied in dieselbe Funktion eines Hilfwinkels zu verwandeln. Z. B.:

$$x = \frac{ad \sin b \sin e}{tg b - d \sin e}$$

Aus $tg \varphi = d \sin e$ bestimme man den Hilfwinkel φ und es ist alsdann

$$x = \frac{ad \sin b \sin e}{tg b - tg \varphi} = \frac{ad \sin b \sin e}{\sin(b - \varphi)} \quad (\text{s. § 55, Nr. 58}) = \frac{ad \sin b \sin e \cos b \cos \varphi}{\sin(b - \varphi) \cos b \cos \varphi}$$

Ein solches Resultat läßt sich oft noch durch Benutzung der für den Hilfwinkel aufgestellten Gleichung vereinfachen.

Aus $tg \varphi = d \sin e$ ergibt sich $d = \frac{tg \varphi}{\sin e}$. Dies substituiert,
 giebt $x = \frac{a \sin b \cos b \cos \varphi tg \varphi}{\sin(b - \varphi)} = \frac{a \sin 2b \sin \varphi}{2 \sin(b - \varphi)}$.

4. Fall. Ist das eine Glied eines zweiteiligen Ausdrucks mit dem \sin eines Winkels (z. B. mit $\sin \gamma$), das andere Glied mit dem \cos desselben Winkels (mit $\cos \gamma$) multipliziert, so hebt man so aus, daß entweder der \sin oder \cos dieses Winkels (z. B. $\sin \gamma$) allein stehen bleibt, um den hierdurch entstandenen, mit der Kofunktion (mit $\cos \gamma$) multiplizierten Faktor des andern Gliedes $= tg \varphi$ (oder $= cot \varphi$) zu setzen. Man schreibt hierauf statt $tg \varphi: \frac{\sin \varphi}{\cos \varphi}$, hebt den Nenner $\cos \varphi$ aus und es ergibt sich alsdann mit Benutzung der Formeln 13 bis 16 in §§ 45 und 47 ein einfacher logarithmischer Ausdruck.

1. Beispiel. $x = a \sin b \sin d + e tg b \cos d$.

Dafür $x = a \sin b \left(\sin d + \frac{e tg b \cos d}{a \sin b} \right)$, oder

$$x = a \sin b \left(\sin d + \frac{e \cos d}{a \cos b} \right).$$

Es sei $\frac{e}{a \cos b} = tg \varphi$, woraus sich der Hilfswinkel φ ergibt.

Alsdann ist $x = a \sin b (\sin d + tg \varphi \cos d)$, oder

$$x = a \sin b \left(\sin d + \frac{\sin \varphi \cos d}{\cos \varphi} \right)$$

$$x = \frac{a \sin b}{\cos \varphi} (\sin d \cos \varphi + \sin \varphi \cos d)$$

$$x = \frac{a \sin b \sin(d + \varphi)}{\cos \varphi} \quad (\text{s. § 45, Nr. 13}).$$

2. Beispiel. Aus der Gleichung

$$a \cos x - b \sin x = c$$

sei der Winkel x zu bestimmen.

Mit $a \cos x - b \sqrt{1 - \cos^2 x} = c$ (s. § 64, 5. Aufgabe) würde die Rechnung sehr zusammengesetzt. Man setze daher

$$a \left(\cos x - \frac{b \sin x}{a} \right) = c.$$

$\frac{b}{a} = tg \varphi$ gesetzt, aus welcher Gleichung sich der Hilfswinkel φ ergibt, erhält man:

$$a (\cos x - \operatorname{tg} \varphi \sin x) = c, \text{ d. i.}$$

$$a \left(\cos x - \frac{\sin \varphi}{\cos \varphi} \sin x \right) = c, \text{ oder}$$

$$\frac{a}{\cos \varphi} (\cos x \cos \varphi - \sin \varphi \sin x) = c, \text{ d. i.}$$

$$\frac{a \cos (x + \varphi)}{\cos \varphi} = c.$$

$$\cos (x + \varphi) = \frac{c \cdot \cos \varphi}{a}.$$

Setzt man $x + \varphi = y$, so ergibt sich aus

$$\cos y = \frac{c \cdot \cos \varphi}{a}$$

der Winkel y und aus $x + \varphi = y$ alsdann

$$x = y - \varphi.$$

66.

Aufgabe. Aus zwei Seiten und dem eingeschlossenen Winkel a, b, C eines Dreiecks die dritte Seite c zu finden.

Auflösung. Am besten berechnet man erst nach § 36 einen der beiden andern Winkel

A oder B, und dann nach der *Sinus-Regel* die Seite c . Man kann aber letztere auch mittelst eines Hilfwinkels folgendermaßen bestimmen. Zuerst hat man (30):

$$\cos C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}, \text{ hieraus:}$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C \text{ folgt:}$$

$$c^2 = a^2 + b^2 + 2ab - 2ab - 2ab \cos C$$

$$c^2 = (a + b)^2 - 2ab (1 + \cos C)$$

$$c^2 = (a + b)^2 - 2ab \cdot 2 \cos^2 \frac{1}{2}C$$

$$c^2 = (a + b)^2 \left[1 - \frac{4ab \cdot \cos^2 \frac{1}{2}C}{(a + b)^2} \right]$$

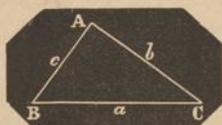
$$c^2 = (a + b)^2 [1 - \cos^2 v]$$

$$c = (a + b) \sin v, \text{ worin } \cos v = \frac{2 \cos \frac{1}{2}C \sqrt{ab}}{a + b}.$$

Zur Übung möge hierzu das Zahlenbeispiel § 37 dienen.

67 a.

Aufgabe. Es sind die Lagen dreier Punkte, N, B, O, oder das dadurch bestimmte Dreieck gegeben, von einem vierten Punkt, Z, aus (in derselben Ebene) hat man auf die drei Punkte visiert und die Winkel m und n gemessen. Man soll daraus die



Lage d
von dem
bleib ein
Die
turn in
kennt.
von
in Z
man such
Auf
und BO
beträgt,
s + y =
2
Aus der
d. i.
Fol
1/2

Lage dieses vierten Punktes Z, d. h. seine Entfernungen r, r', r'' von den drei Punkten N, B, O bestimmen.

Wir nehmen zu diesem sogenannten Pothenot'schen Problem ein Zahlenbeispiel aus Berghaus' Geographie.

Die Lage des Elisabeth-Turms in Breslau gegen den Rathaus-turm in Neumarkt und den Turm der Kirche zu Ohlau ist bekannt. Es beträgt nämlich die Entfernung

von Breslau nach Neumarkt $BN = a = 8227,32$ Ruten,

„ Breslau nach Ohlau $BO = b = 7014,23$ „

der Winkel $NBO = B = 145^\circ 39' 50'',5$

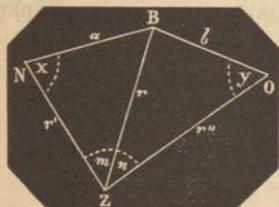
in Zobten wurde gemessen: $\angle m = 52^\circ 44' 22'',2$

$\angle n = 38^\circ 37' 38'',3$,

man sucht die Entfernungen r, r', r'' .

Auflösung. Man suche erst die beiden Winkel $BNZ = x$ und $BOZ = y$. Da die Summe der Winkel jedes Vierecks 360° beträgt, so ist $x + y = 360^\circ - (B + m + n) = 122^\circ 58' 9'',$ also $\frac{x + y}{2} = 61^\circ 29' 4'',5$. Nun ist:

$$(1) \frac{\sin y}{\sin n} = \frac{r}{b} \text{ und } (2) \frac{\sin m}{\sin x} = \frac{a}{r}.$$



Multipliziert man (1) und (2), so ist

$$\frac{\sin m \cdot \sin y}{\sin n \cdot \sin x} = \frac{a}{b} \text{ oder}$$

$$\frac{\sin y}{\sin x} = \frac{a \cdot \sin n}{b \cdot \sin m} = \operatorname{tg} v \dots (Y)$$

wo der Hilfswinkel v leicht zu finden und als bekannt anzusehen ist.

Aus der Gleichung $\frac{\sin y}{\sin x} = \operatorname{tg} v$ folgt nun:

$$1 - \frac{\sin y}{\sin x} = 1 - \operatorname{tg} v \text{ und } 1 + \frac{\sin y}{\sin x} = 1 + \operatorname{tg} v,$$

$$\text{d. i. } \frac{\sin x - \sin y}{\sin x} = 1 - \operatorname{tg} v, \quad \frac{\sin x + \sin y}{\sin x} = 1 + \operatorname{tg} v$$

$$\frac{\sin x - \sin y}{\sin x + \sin y} = \frac{1 - \operatorname{tg} v}{1 + \operatorname{tg} v}$$

$$\frac{\operatorname{tg} \frac{1}{2}(x - y)}{\operatorname{tg} \frac{1}{2}(x + y)} = \operatorname{tg}(45^\circ - v) \quad (\S\S 51 \text{ und } 52).$$

Folglich $\operatorname{tg} \frac{x - y}{2} = \operatorname{tg} \frac{x + y}{2} \cot(45^\circ + v)$, [§ 5] oder

$$\operatorname{tg} \frac{x - y}{2} = \operatorname{tg} 61^\circ 29' 4'',5 \cdot \cot(45^\circ + v), \text{ worin } \operatorname{tg} v = \frac{a \cdot \sin n}{b \cdot \sin m}$$

$lg a = 3,9152584$	$lg tg 61^{\circ} 29' \dots = 0,2649570$
$lg \sin n = 9,7953599$	$lg \cot (45^{\circ} + v) = 8,6198293$
d. E. $lg b = 6,1540200$	$lg tg \frac{x-y}{2} = 8,8847863$
d. E. $lg \sin m = 0,0991463$	$\frac{x-y}{2} = 4^{\circ} 23' 9'', 2.$
$lg tg v = 9,9637846$	
$v = 42^{\circ} 36' 49'', 8$	
$45^{\circ} + v = 87^{\circ} 36' 49'', 8$	

Mithin ist: $x = 65^{\circ} 52' 13'', 7$ und $y = 57^{\circ} 5' 55'', 3$.

Nachdem nun x und y gefunden, hat man aus (1):

$$r = b \frac{\sin y}{\sin n} \text{ oder auch } r = a \frac{\sin x}{\sin m},$$

$$\text{dann: } \frac{r'}{a} = \frac{\sin(x+m)}{\sin m}, \text{ woraus: } r' = a \cdot \frac{\sin(x+m)}{\sin m}.$$

$$\text{Ferner ist: } \frac{r''}{b} = \frac{\sin(y+n)}{\sin n}, \text{ woraus: } r'' = b \cdot \frac{\sin(y+n)}{\sin n}$$

$lgb = 3,8459800$	$lga = 3,9152584$	$lgb = 3,8459800$
$lg \sin y = 9,9240764$	$lg \sin(x+m) = 9,9434449$	$lg \sin(y+n) = 9,9978276$
$lg' \sin n = 0,2046401$	$lg' \sin m = 0,0991463$	$lg' \sin n = 0,2046401$
$lgr = 3,9746965$	$lgr' = 3,9578496$	$lgr'' = 4,0484477$
$r = 9434,01$	$r' = 9075,06$	$r'' = 11180,15.$

Anmerkung. Man hätte x aus Y (s. oben) auch durch

$$\frac{\sin(122^{\circ} 58' 9'' - x)}{\sin x} = \frac{a \sin n}{b \sin m}, \text{ oder}$$

$$\frac{\sin 122^{\circ} \cos x - \cos 122^{\circ} \sin x}{\sin x} = \frac{a \sin n}{b \sin m}, \text{ d. i.}$$

$$\sin 122^{\circ} \cot x - \cos 122^{\circ} = \frac{a \sin n}{b \sin m}$$

finden können.

67 b.

* Durch Benutzung eines Hilfswinkels lassen sich bequeme Formeln zur Berechnung der reellen Wurzeln x' , x'' einer verwickelten quadratischen Gleichung aufstellen. Man erhält nämlich, unter Berücksichtigung der Vorzeichen von p und q , aus:

$$(1) x^2 + px = q$$

$$x = -\frac{1}{2}p \pm \frac{1}{2}\sqrt{p^2 + 4q} \cdot \frac{p}{b^v}$$

$$x = -\frac{1}{2}p \pm \frac{1}{2}p \sqrt{1 + \frac{4q}{p^2}}.$$

Setzt man jetzt $tg u = \frac{2\sqrt{q}}{p}$, so ist (§ 44, 7):

$$x = \frac{1}{2}p \left(-1 + \frac{1}{\cos u} \right) = \frac{1}{2}p \left(\frac{-\cos u + 1}{\cos u} \right).$$

Die beiden reellen Wurzeln sind also:

$$x' = \frac{1}{2}p \cdot \frac{1 - \cos u}{\cos u} = p \cdot \frac{\sin^2 \frac{1}{2}u}{\cos u},$$

$$x'' = -\frac{1}{2}p \cdot \frac{1 + \cos u}{\cos u} = -p \cdot \frac{\cos^2 \frac{1}{2}u}{\cos u}.$$

Aus $tg u = \frac{2\sqrt{q}}{p}$ folgt $p = \frac{2\sqrt{q}}{tg u} = 2\sqrt{q} \cdot \frac{\cos u}{\sin u}$.

Wird dieser Wert von p substituiert, so ist:

$$x' = 2\sqrt{q} \cdot \frac{\sin^2 \frac{1}{2}u}{\sin u} = 2\sqrt{q} \cdot \frac{\sin^2 \frac{1}{2}u}{2 \sin \frac{1}{2}u \cos \frac{1}{2}u}, \text{ oder}$$

$$x' = tg \frac{1}{2}u \cdot \sqrt{q} \text{ und } x'' = -\frac{\sqrt{q}}{tg \frac{1}{2}u}.$$

Auf dieselbe Weise findet man aus:

$$(2) \quad x^2 - px = q,$$

wenn wiederum $tg u = \frac{2\sqrt{q}}{p}$ gesetzt wird:

$$x' = -tg \frac{1}{2}u \cdot \sqrt{q} \text{ und } x'' = \frac{\sqrt{q}}{tg \frac{1}{2}u}.$$

Ferner hat man aus:

$$(3) \quad x^2 + px = -q$$

$$x = -\frac{1}{2}p \pm \frac{1}{2}p \sqrt{1 - \frac{4q}{p^2}}.$$

Ist nun $4q < p^2$, so sind beide Wurzeln reell und negativ.

Um sie zu erhalten, setze man: $\sin v = \frac{2\sqrt{q}}{p}$, so ist:

$$x = -\frac{1}{2}p (1 \mp \cos v),$$

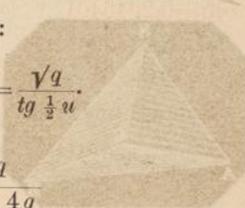
mithin, indem man hierin den Wert von $p = \frac{2\sqrt{q}}{\sin v}$ substituiert, die beiden Wurzeln:

$$x' = -tg \frac{1}{2}v \cdot \sqrt{q} \text{ und } x'' = -\frac{\sqrt{q}}{tg \frac{1}{2}v}.$$

Ebenso findet man, wenn $4q < p^2$ und wiederum $\sin v = \frac{2\sqrt{q}}{p}$ gesetzt wird, aus:

$$(4) \quad x^2 - px = -q$$

$$x' = \frac{\sqrt{q}}{tg \frac{1}{2}v} \text{ und } x'' = tg \frac{1}{2}v \cdot \sqrt{q}.$$



Zweiter Teil.

Sphärische Trigonometrie.

Achtes Buch.

68.

Man denke sich von einem Punkte, S, drei gerade Linien ausgehend, wovon SA, SB in der Ebene des Papiers liegen mögen, die dritte Linie SC aber darüber hervortritt. Denkt man sich durch je zwei Linien eine Ebene gelegt, so entsteht bekanntlich eine körperliche Ecke, das sogenannte körperliche Dreieck,*) welches folgende sechs Bestandteile enthält: 1) die drei Kantenwinkel, welche

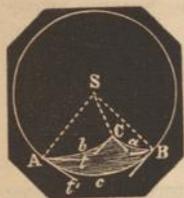


je zwei der von S ausgehenden drei Linien miteinander bilden, und 2) die drei Flächenwinkel, welche je zwei der drei Ebenen miteinander bilden.***) Man setze die drei Kantenwinkel $BSC = a$, $ASC = b$ und den unteren $ASB = c$ und bezeichne die gegenüber liegenden drei Flächenwinkel mit den gleichlautenden Buchstaben A, B, C, dann ist die allgemeine Aufgabe der sphärischen Trigonometrie: allgemeine Formeln zu finden, nach welchen man aus beliebig gegebenen drei Winkeln des körperlichen Dreiecks die drei übrigen (insofern sie durch erstere drei bestimmt sind) berechnen kann.

*) Die Ecke einer dreiseitigen Pyramide.

***) Man muß sich hier die beiden durch $\angle ASC$ und $\angle BSC$ gelegten Ebenen dachförmig gegen die untere durch $\angle ASB$ gelegte Ebene aufgerichtet denken. Anfänger mögen sich diese Figur versinnlichen, was durch zweimalige Brechung eines Stück Papiers geschehen kann.

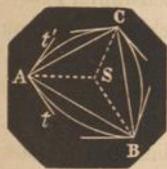
Denkt man sich aus S mit einem beliebigen Radius, SA , zwischen den Schenkeln der drei Kantenwinkel a, b, c des körperlichen Dreiecks Kreisbögen BC, AC, AB beschrieben, so enthalten diese Bögen, in Graden ausgedrückt, ebenso viel Grade als die zugehörigen Kantenwinkel an der Spitze S und können also statt dieser gesetzt und mit denselben Buchstaben a, b, c bezeichnet werden. Dies pflegt man in der Regel zu thun,



und da die drei Bögen a, b, c weil mit demselben Radius beschrieben, offenbar einen Teil von der Oberfläche einer Kugel, deren Mittelpunkt S und deren Radius $SA (= SB = SC)$ ist, einschließen und Bögen größten Kreises sind, so nennt man ein solches krummliniges Dreieck auf der Oberfläche einer Kugel (Sphäre) schicklicher Kugeldreieck oder sphärisches Dreieck, daher denn auch der Titel: sphärische Trigonometrie.

Unter Bögen oder Seiten eines sphärischen Dreiecks muß man sich also nicht Längen, sondern immer die Winkel am Mittelpunkt der zugehörigen Kugel denken, welche die von den Endpunkten der Bögen dahin gezogenen Radien (Kanten) miteinander bilden, mit anderen Worten: man muß in einem sphärischen Dreieck die Seiten (welche stets Bögen größten Kreises sein müssen) immer in Graden ausgedrückt denken.

Zieht man aus dem Durchschnittspunkt A zweier Seiten (Bögen) BA, CA eines sphärischen Dreiecks die beiden Tangenten



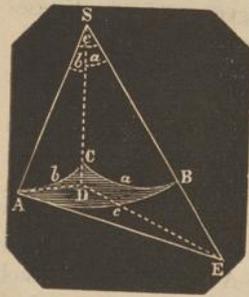
At, At' an dieselben, mithin senkrecht auf dem Radius SA der Kugel, und zwar die eine in der Ebene ASB , die andere in der Ebene ASC , so stellt der Winkel $tAt' = A$ den Neigungswinkel der beiden Bögen BA, CA gegeneinander dar.

Ebenso an den beiden anderen Punkten B, C , und diese drei Winkel A, B, C , welche, wenn man sich das körperliche Dreieck S, ABC (vergl. Fig. zu § 69) denkt, offenbar die Flächenwinkel desselben sind, sind die eigentlichen Winkel des sphärischen Dreiecks ABC , weil man zur Abkürzung des Vortrags die drei anderen Winkel a, b, c die Seiten des sphärischen Dreiecks nennt. Vergleicht man die Winkel des sphärischen

Dreiecks mit den Winkeln des Sehnendreiecks, so erhellt leicht, daß die Summe der drei (Flächen-) Winkel A, B, C eines sphärischen Dreiecks immer größer als zwei und kleiner als sechs rechte Winkel ist. Auch ist klar, daß die Summe zweier Seiten (Kantenwinkel) immer größer ist, als die dritte, und jede Seite (Kantenwinkel) kleiner, als 180° ist. Weil nämlich größte Kreise sich halbieren (Geometrie § 175), so folgt, daß, wenn man durch den einen Endpunkt eines solchen Halbkreises einen Bogen größten Kreises legt, er, verlängert, notwendig auch durch den anderen Endpunkt gehen muß und mit ersterem Halbkreise ein sogenanntes Kugelzweieck bildet. Es kann folglich keine Seite in einem sphärischen Dreieck $= 180^\circ$ sein. Verlängert man die Endpunkte dieser zwei Bögen größten Kreises legen, welche sich innerhalb des Zweiecks schneiden und mit ersterer Seite, $> 180^\circ$, ein Dreieck bilden, welches einen einspringenden oder überstumpfen Winkel hat; solche Dreiecke lassen wir jedoch unberücksichtigt.

71.

Aufgabe. Eine Formel zu finden, nach welcher man aus den drei Seiten a, b, c eines sphärischen Dreiecks ABC einen Winkel, z. B. A , berechnen kann.



Auflösung. Da der sphärische Winkel A nichts anderes ist, als die Neigung der beiden Ebenen ASC und ASB gegeneinander, so errichten wir auf ihrer Durchschnittslinie SA , im Punkte A , die beiden Perpendikel AE und AD , wovon das erstere in der unteren Ebene ASB liegt und den verlängerten Radius SB in E trifft,*) das andere in der dachförmig dagegen aufstehenden Ebene ASC liegt und den verlängerten Radius SC in D trifft, so daß also $\angle SAE = 90^\circ$ und auch $\angle SAD = 90^\circ$, dann ist der Winkel $DAE = A$ der gesuchte (Geometrie § 155).

*) Die Fälle, wo $AE \parallel SB$ oder $AD \parallel SC$ ist, oder wo ein, zwei oder alle drei Winkel, a, b, c , rechte, oder stumpfe wären, können wir als spezielle Fälle aus den allgemeinen Gleichungen ableiten. Die Schlüsse bleiben übrigens ganz dieselben, wenn z. B. der Winkel ASB stumpf wäre und der Fußpunkt A der beiden Perpendikel AE, AD auf der Verlängerung von AS über S hinaus angenommen werden müßte.

Denkt man noch DE gezogen, so hat man aus dem Dreieck DAE:

$$\cos A = \frac{AD^2 + AE^2 - DE^2}{2 \cdot AD \cdot AE} \quad (\S 30).$$

Ebenso hat man aus dem gegen ASE dachförmig aufstehenden Dreieck DSE, in welchem der Kantenwinkel DSE = a ist (§ 69):

$$\cos a = \frac{SD^2 + SE^2 - DE^2}{2 \cdot SD \cdot SE}.$$

Hieraus den Wert von DE^2 gezogen und in die erste Gleichung substituiert, kommt:

$$\cos A = \frac{2SD \cdot SE \cdot \cos a - (SD^2 - AD^2) - (SE^2 - AE^2)}{2AD \cdot AE}.$$

Die beiden Dreiecke DAS, EAS sind bei A rechtwinklig, SD und SE die Hypotenusen, daher $SD^2 - AD^2 = AS^2$, ebenso $SE^2 - AE^2 = AS^2$, mithin:

$$\cos A = \frac{2 \cdot SD \cdot SE \cdot \cos a - 2 \cdot AS^2}{2AD \cdot AE}$$

$$\cos A = \frac{SD}{AD} \cdot \frac{SE}{AE} \cdot \cos a - \frac{AS}{AD} \cdot \frac{AS}{AE}.$$

Nun ist in dem bei A rechtwinkligen Dreieck SAD, $\frac{AD}{SD} = \sin b$,

mithin $\frac{SD}{AD} = \frac{1}{\sin b}$; ferner: $\frac{AS}{AD} = \cot b = \frac{\cos b}{\sin b}$. Im rechtwink-

ligen Dreieck SAE ist $\frac{AE}{SE} = \sin c$, also: $\frac{SE}{AE} = \frac{1}{\sin c}$; ferner:

$\frac{AS}{AE} = \cot c = \frac{\cos c}{\sin c}$; dies substituiert, hat man:

$$\cos A = \frac{\cos a - \cos b \cdot \cos c}{\sin b \cdot \sin c}.$$

In dieser Gleichung ist von Lineargrößen keine Spur mehr vorhanden. Für die beiden andern Winkel B und C ist offenbar ebenso:

$$\cos B = \frac{\cos b - \cos a \cdot \cos c}{\sin a \cdot \sin c}$$

$$\cos C = \frac{\cos c - \cos a \cdot \cos b}{\sin a \cdot \sin b}.$$

Wäre, als specieller Fall, jede der drei Seiten des sphärischen Dreiecks, $a, b, c, = 90^\circ$, so wäre $\cos A = 0, \cos B = 0, \cos C = 0$, also auch $\angle A = \angle B = \angle C = 90^\circ$; sind alle drei Seiten $a, b, c, > 90^\circ$, so sind auch alle drei Winkel A, B, C stumpf, weil dann ihre *cosinus* negativ.

Die vorstehenden Formeln, nach welchen man aus den drei Seiten eines sphärischen Dreiecks die Winkel berechnen kann, sind zwar die Fundamentalformeln der ganzen sphärischen Trigonometrie, indem alle übrigen daraus abgeleitet werden können, für die logarithmische Rechnung sind sie aber etwas unbequem und wir wollen deshalb noch eine für die numerische Rechnung bequemere daraus ableiten. Man hat aus:

$$\cos A = \frac{\cos a - \cos b \cdot \cos c}{\sin b \cdot \sin c}$$

$$1 - \cos A = 1 - \frac{\cos a - \cos b \cdot \cos c}{\sin b \cdot \sin c}$$

$$2 \sin^2 \frac{1}{2} A = \frac{\sin b \cdot \sin c - \cos a + \cos b \cdot \cos c}{\sin b \cdot \sin c}$$

$$2 \sin^2 \frac{1}{2} A = \frac{\cos(b-c) - \cos a}{\sin b \cdot \sin c}, \text{ also } (\S 52, 53):$$

$$2 \sin^2 \frac{1}{2} A = \frac{2 \sin \frac{a+b-c}{2} \cdot \sin \frac{a+c-b}{2}}{\sin b \cdot \sin c}$$

$$\sin \frac{1}{2} A = \sqrt{\frac{\sin \frac{a+b-c}{2} \cdot \sin \frac{a+c-b}{2}}{\sin b \cdot \sin c}} \dots \dots (1)$$

$$1 + \cos A = 1 + \frac{\cos a - \cos b \cdot \cos c}{\sin b \cdot \sin c}$$

$$2 \cos^2 \frac{1}{2} A = \frac{\sin b \cdot \sin c + \cos a - \cos b \cdot \cos c}{\sin b \cdot \sin c}$$

$$2 \cos^2 \frac{1}{2} A = \frac{\cos a - \cos(b+c)}{\sin b \cdot \sin c} (\S 52)$$

$$2 \cos^2 \frac{1}{2} A = \frac{2 \sin \frac{a+b+c}{2} \cdot \sin \frac{b+c-a}{2}}{\sin b \cdot \sin c}$$

$$\cos \frac{1}{2} A = \sqrt{\frac{\sin \frac{a+b+c}{2} \cdot \sin \frac{b+c-a}{2}}{\sin b \cdot \sin c}} \dots \dots (2)$$

$$\operatorname{tg} \frac{1}{2} A = \sqrt{\frac{\sin \frac{a+b-c}{2} \cdot \sin \frac{a+c-b}{2}}{\sin \frac{a+b+c}{2} \cdot \sin \frac{b+c-a}{2}}} \dots \dots (3)$$

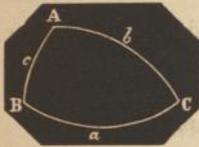
Von diesen drei Formeln ist die letztere vorzuziehen, weil die Tangenten immer die größten Differenzen haben. Sie läßt sich aber noch etwas vereinfachen. Setzt man nämlich:

$$a + b + c = s, \text{ also } \frac{a + b + c}{2} = \frac{1}{2}s; \quad \frac{a + b - c}{2} = \frac{1}{2}s - c \text{ etc., so ist:}$$

$$\operatorname{tg} \frac{1}{2} A = \sqrt{\frac{\sin(\frac{1}{2}s - b) \cdot \sin(\frac{1}{2}s - c)}{\sin \frac{1}{2}s \cdot \sin(\frac{1}{2}s - a)}}$$

Zahlenbeispiele hierzu siehe § 91.

73.



Lehrsatz. In jedem sphärischen Dreieck verhalten sich die *sinus* der Winkel, wie die *sinus* der gegenüber liegenden Seiten. In Zeichen:

$$\frac{\sin A}{\sin B} = \frac{\sin a}{\sin b}; \quad \frac{\sin A}{\sin C} = \frac{\sin a}{\sin c}; \quad \frac{\sin B}{\sin C} = \frac{\sin b}{\sin c}$$

Beweis. Es folgt aus $\cos A = \frac{\cos a - \cos b \cdot \cos c}{\sin b \cdot \sin c}$ (§ 71):

$$1 - \cos^2 A = 1 - \frac{(\cos a - \cos b \cdot \cos c)^2}{\sin^2 b \cdot \sin^2 c}$$

$$\sin^2 A = \frac{\sin^2 b \cdot \sin^2 c - \cos^2 a + 2 \cos a \cdot \cos b \cdot \cos c - \cos^2 b \cdot \cos^2 c}{\sin^2 b \cdot \sin^2 c}$$

Nun ist aber $\sin^2 b \cdot \sin^2 c = (1 - \cos^2 b)(1 - \cos^2 c) = 1 - \cos^2 b - \cos^2 c + \cos^2 b \cdot \cos^2 c$. Letzterer Ausdruck statt $\sin^2 b \cdot \sin^2 c$ gesetzt, kommt:

$$\sin^2 A = \frac{1 - \cos^2 a - \cos^2 b - \cos^2 c + 2 \cos a \cdot \cos b \cdot \cos c}{\sin^2 b \cdot \sin^2 c}$$

In dieser Gleichung ist der Zähler rechter Hand offenbar eine symmetrische Funktion von a, b, c (d. h. die Verwechslung dieser Größen bringt keine Veränderung hervor); setzen wir ihn Kürze halber $= z^2$, so ist:

$$\sin A = \frac{z}{\sin b \cdot \sin c} \dots \dots \dots (1).$$

Werden die beiden anderen Gleichungen:

$$\cos B = \frac{\cos b - \cos a \cdot \cos c}{\sin a \cdot \sin c} \text{ und } \cos C = \frac{\cos c - \cos a \cdot \cos b}{\sin a \cdot \sin b}$$

ebenso behandelt, so kommt, was auch ohne Rechnung klar ist, indem der Zähler rechter Hand, weil eine symmetrische Funktion von a, b, c , in beiden Fällen offenbar ganz derselbe, wie in (1) ist:

$$\sin B = \frac{z}{\sin a \cdot \sin c} \dots\dots (2) \quad \sin C = \frac{z}{\sin a \cdot \sin b} \dots\dots (3).$$

Die Gleichungen 1, 2, 3 paarweise durcheinander dividiert, kommt, wie behauptet, $\frac{\sin A}{\sin B} = \frac{\sin a}{\sin b}$ etc., oder auch, weil die Seiten doch in Graden ausgedrückt (Winkel) sind, so geschrieben:

$$\frac{\sin A}{\sin a} = \frac{\sin B}{\sin b} = \frac{\sin C}{\sin c}.$$

74.

Aufgabe. Eine allgemeine Formel zu finden, nach welcher man aus den drei Winkeln A, B, C eines sphärischen Dreiecks eine Seite, z. B. a , berechnen kann.

Auflösung. Die drei Fundamentalgleichungen (§ 71):

$$\cos A = \frac{\cos a - \cos b \cdot \cos c}{\sin b \cdot \sin c}$$

$$\cos B = \frac{\cos b - \cos a \cdot \cos c}{\sin a \cdot \sin c}$$

$$\cos C = \frac{\cos c - \cos a \cdot \cos b}{\sin a \cdot \sin b}$$

enthalten die drei gegebenen Größen, A, B, C und drei unbekannte a, b, c . Um die Unbekannte a zu finden, eliminieren wir die beiden andern b, c , oder nur $\cos b, \cos c$, indem, zufolge § 73, $\frac{\sin b}{\sin a} = \frac{\sin B}{\sin A}$ und $\frac{\sin c}{\sin a} = \frac{\sin C}{\sin A}$, mithin $\sin b$ durch $\sin a \cdot \frac{\sin B}{\sin A}$ und $\sin c$ durch $\sin a \cdot \frac{\sin C}{\sin A}$ ersetzt werden kann.

Reduzieren wir, um zuerst $\cos b$ zu eliminieren, jede der drei Gleichungen auf $\cos b$, so kommt:

$$\cos b = \frac{\cos a - \sin b \cdot \sin c \cdot \cos A}{\cos c}$$

$$\cos b = \frac{\cos a \cdot \cos c + \sin a \cdot \sin c \cdot \cos B}{\cos c}$$

$$\cos b = \frac{\cos c - \sin a \cdot \sin b \cdot \cos C}{\cos a}$$

Diese für $\cos b$ gefundenen Ausdrücke paarweise gleich gesetzt, geben folgende zwei neue Gleichungen:

$$\frac{\cos a - \sin b \cdot \sin c \cdot \cos A}{\cos c} = \cos a \cdot \cos c + \sin a \cdot \sin c \cdot \cos B \dots (1)$$

$$\frac{\cos c - \sin a \cdot \sin b \cdot \cos C}{\cos a} = \cos a \cdot \cos c + \sin a \cdot \sin c \cdot \cos B \dots (2).$$

Um aus diesen beiden Gleichungen $\cos c$ zu eliminieren, reduziere man jede auf $\cos c$. Die erste giebt:

$$\begin{aligned}\cos a - \sin b \cdot \sin c \cdot \cos A &= \cos a \cdot \cos^2 c + \sin a \cdot \sin c \cdot \cos c \cdot \cos B \\ \cos a (1 - \cos^2 c) - \sin b \cdot \sin c \cdot \cos A &= \sin a \cdot \sin c \cdot \cos c \cdot \cos B \\ \cos a \cdot \sin^2 c - \sin b \cdot \sin c \cdot \cos A &= \sin a \cdot \sin c \cdot \cos c \cdot \cos B \\ \cos c &= \frac{\cos a \cdot \sin c - \sin b \cdot \cos A}{\sin a \cdot \cos B}.\end{aligned}$$

Aus der Gleichung (2) folgt:

$$\begin{aligned}\cos c - \sin a \cdot \sin b \cdot \cos C &= \cos^2 a \cdot \cos c + \sin a \cdot \cos a \cdot \sin c \cdot \cos B \\ \cos c (1 - \cos^2 a) - \sin a \cdot \sin b \cdot \cos C &= \sin a \cdot \cos a \cdot \sin c \cdot \cos B \\ \cos c \cdot \sin^2 a - \sin a \cdot \sin b \cdot \cos C &= \sin a \cdot \cos a \cdot \sin c \cdot \cos B \\ \cos c &= \frac{\cos a \cdot \sin c \cdot \cos B + \sin b \cdot \cos C}{\sin a}.\end{aligned}$$

Die beiden für $\cos c$ erhaltenen Ausdrücke gleich gesetzt, geben:

$$\frac{\cos a \cdot \sin c - \sin b \cdot \cos A}{\sin a \cdot \cos B} = \frac{\cos a \cdot \sin c \cdot \cos B + \sin b \cdot \cos C}{\sin a}.$$

Aus dieser Endgleichung folgt:

$$\begin{aligned}\cos a \cdot \sin c - \sin b \cdot \cos A &= \cos a \cdot \sin c \cdot \cos^2 B + \sin b \cdot \cos B \cdot \cos C \\ \cos a \cdot \sin c (1 - \cos^2 B) &= \sin b \cdot \cos A + \sin b \cdot \cos B \cdot \cos C \\ \cos a \cdot \sin c \cdot \sin^2 B &= \sin b (\cos A + \cos B \cdot \cos C) \\ \cos a &= \frac{\sin b \cdot \cos A + \cos B \cdot \cos C}{\sin c \cdot \sin^2 B}.\end{aligned}$$

Nach § 73 kann man aber $\frac{\sin B}{\sin C}$ statt $\frac{\sin b}{\sin c}$ setzen, mithin ist auch, nach gehöriger Reduktion:

$$\cos a = \frac{\cos A + \cos B \cdot \cos C}{\sin B \cdot \sin C}$$

$$\text{ebenso: } \cos b = \frac{\cos B + \cos A \cdot \cos C}{\sin A \cdot \sin C}$$

$$\cos c = \frac{\cos C + \cos A \cdot \cos B}{\sin A \cdot \sin B}.$$

75.

Vorstehende Formeln, welche mit den Grundformeln eine auffallende Ähnlichkeit haben, sind aber, ebenso wie jene, für die logarithmische Rechnung etwas unbequem. Auf dieselbe

Weise aber, wie in § 72, lassen sich bequemere daraus ableiten. Man hat nämlich aus:

$$\begin{aligned} \cos a &= \frac{\cos A + \cos B \cdot \cos C}{\sin B \cdot \sin C} \\ 1 - \cos a &= 1 - \frac{\cos A + \cos B \cdot \cos C}{\sin B \cdot \sin C} \\ 2 \sin^2 \frac{1}{2} a &= \frac{\sin B \cdot \sin C - \cos A - \cos B \cdot \cos C}{\sin B \cdot \sin C} \\ 2 \sin^2 \frac{1}{2} a &= -\frac{(\cos A + \cos B \cdot \cos C - \sin B \cdot \sin C)}{\sin B \cdot \sin C} \\ 2 \sin^2 \frac{1}{2} a &= -\left\{ \frac{\cos A + \cos (B + C)}{\sin B \cdot \sin C} \right\} \\ 2 \sin^2 \frac{1}{2} a &= -\frac{2 \cos \frac{A+B+C}{2} \cdot \cos \frac{B+C-A}{2}}{\sin B \cdot \sin C} \quad (\S 52, 52.) \\ \sin \frac{1}{2} a &= \sqrt{\frac{-\cos \frac{A+B+C}{2} \cdot \cos \frac{B+C-A}{2}}{\sin B \cdot \sin C}} \dots\dots (1). \end{aligned}$$

Das Imaginäre dieser Formel ist nur scheinbar, denn da (§ 70) $A + B + C > 180^\circ$ und $< 540^\circ$, so ist auch $\frac{A+B+C}{2} > 90^\circ$ und $< 270^\circ$ und folglich $\cos \frac{A+B+C}{2}$ immer eine negative Gröfse, welche durch das davor stehende notwendige Minus-Zeichen positiv gemacht wird.

Ferner hat man auch:

$$\begin{aligned} 1 + \cos a &= 1 + \frac{\cos A + \cos B \cdot \cos C}{\sin B \cdot \sin C} \\ 2 \cos^2 \frac{1}{2} a &= \frac{\sin B \cdot \sin C + \cos A + \cos B \cdot \cos C}{\sin B \cdot \sin C} \\ 2 \cos^2 \frac{1}{2} a &= \frac{\cos A + \cos (B - C)}{\sin B \cdot \sin C} \\ 2 \cos^2 \frac{1}{2} a &= \frac{2 \cos \frac{A+B-C}{2} \cdot \cos \frac{A+C-B}{2}}{\sin B \cdot \sin C} \\ \cos \frac{1}{2} a &= \sqrt{\frac{\cos \frac{A+B-C}{2} \cdot \cos \frac{A+C-B}{2}}{\sin B \cdot \sin C}} \dots\dots (2). \end{aligned}$$

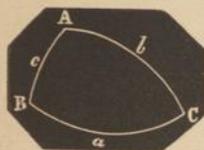
Dividirt man (1) durch (2), so erhält man die praktisch immer sichere Formel:

$$\operatorname{tg} \frac{1}{2} a = \sqrt{\frac{-\cos \frac{A+B+C}{2} \cdot \cos \frac{B+C-A}{2}}{\cos \frac{A+B-C}{2} \cdot \cos \frac{A+C-B}{2}}}$$

oder, wenn man wieder $A + B + C = S$ setzt, kürzer:

$$\operatorname{tg} \frac{1}{2} a = \sqrt{\frac{-\cos \frac{1}{2} S \cdot \cos (\frac{1}{2} S - A)}{\cos (\frac{1}{2} S - B) \cdot \cos (\frac{1}{2} S - C)}}$$

76.



Aufgabe. Eine Gleichung zwischen vier aufeinander folgenden Stücken eines sphärischen Dreiecks, z. B. für A, c, B, a zu finden, so daß man, wenn irgend drei davon gegeben sind, das vierte danach berechnen kann.

Auflösung. Die Elimination von $\cos b$ aus den beiden Grundformeln

$$\left. \begin{aligned} \cos A &= \frac{\cos a - \cos b \cdot \cos c}{\sin a \cdot \sin c} \\ \cos B &= \frac{\cos b - \cos a \cdot \cos c}{\sin a \cdot \sin c} \end{aligned} \right\} \text{ giebt § 74:}$$

$$\cos a \cdot \cos c + \sin a \cdot \sin c \cdot \cos B = \frac{\cos a - \sin b \cdot \sin c \cdot \cos A}{\cos c}$$

$$\cos a \cdot \cos^2 c + \sin a \cdot \sin c \cdot \cos c \cdot \cos B = \cos a - \sin b \cdot \sin c \cdot \cos A$$

$$\sin a \cdot \sin c \cdot \cos c \cdot \cos B = \cos a (1 - \cos^2 c) - \sin b \cdot \sin c \cdot \cos A$$

$$\sin a \cdot \cos c \cdot \cos B = \cos a \cdot \sin c - \sin b \cdot \cos A$$

$$\cos c \cdot \cos B = \frac{\cos a}{\sin a} \cdot \sin c - \frac{\sin b}{\sin a} \cdot \cos A$$

$$\cos c \cdot \cos B = \cot a \cdot \sin c - \frac{\sin B}{\sin A} \cdot \cos A \quad (\text{§ 73})$$

$$\cot A \sin B + \cos B \cdot \cos c = \cot a \cdot \sin c.$$

Obgleich sich diese Formel, um danach aus drei gegebenen Größen die vierte zu finden, durch Einführung eines Hilfswinkels für die logarithmische Rechnung bequemer machen läßt, so werden wir doch für diesen praktischen Zweck noch bequemere Formeln finden, und legen ihr deshalb auch nur eine theoretische Wichtigkeit bei.

Zufolge der § 72 gefundenen Gleichungen ist:

$$1, \sin \frac{1}{2} A = \sqrt{\frac{\sin \frac{a+b-c}{2} \cdot \sin \frac{a+c-b}{2}}{\sin b \cdot \sin c}}$$

$$2, \sin \frac{1}{2} B = \sqrt{\frac{\sin \frac{b+c-a}{2} \cdot \sin \frac{a+b-c}{2}}{\sin a \cdot \sin c}}$$

$$3, \sin \frac{1}{2} C = \sqrt{\frac{\sin \frac{a+c-b}{2} \cdot \sin \frac{b+c-a}{2}}{\sin a \cdot \sin b}}$$

$$4, \cos \frac{1}{2} A = \sqrt{\frac{\sin \frac{a+b+c}{2} \cdot \sin \frac{b+c-a}{2}}{\sin b \cdot \sin c}}$$

$$5, \cos \frac{1}{2} B = \sqrt{\frac{\sin \frac{a+b+c}{2} \cdot \sin \frac{a+c-b}{2}}{\sin a \cdot \sin c}}$$

$$6, \cos \frac{1}{2} C = \sqrt{\frac{\sin \frac{a+b+c}{2} \cdot \sin \frac{a+b-c}{2}}{\sin a \cdot \sin b}}$$

Multipliziert man die erste Gleichung mit der fünften und dividiert durch die sechste etc., wie nachfolgend durch $\frac{(1) \cdot (5)}{(6)}$ etc. angedeutet, so kommt:

$$\frac{(1) \cdot (5)}{(6)}; \frac{\sin \frac{1}{2} A \cdot \cos \frac{1}{2} B}{\cos \frac{1}{2} C} = \frac{\sin \frac{a+c-b}{2}}{\sin c} \dots\dots (7)$$

$$\frac{(2) \cdot (4)}{(6)}; \frac{\cos \frac{1}{2} A \cdot \sin \frac{1}{2} B}{\cos \frac{1}{2} C} = \frac{\sin \frac{b+c-a}{2}}{\sin c} \dots\dots (8)$$

$$\frac{(4) \cdot (5)}{(3)}; \frac{\cos \frac{1}{2} A \cdot \cos \frac{1}{2} B}{\sin \frac{1}{2} C} = \frac{\sin \frac{a+b+c}{2}}{\sin c} \dots\dots (9)$$

$$\frac{(1) \cdot (2)}{(3)}; \frac{\sin \frac{1}{2} A \cdot \sin \frac{1}{2} B}{\sin \frac{1}{2} C} = \frac{\sin \frac{a+b-c}{2}}{\sin c} \dots\dots (10).$$

Durch paarweise Addition und Subtraktion dieser vier Gleichungen erhält man mit Berücksichtigung der Formeln in § 45, § 47, § 52 (48 und 49), § 49 (28):

$$(7) + (8); \frac{\sin \frac{A+B}{2}}{\cos \frac{1}{2}C} = \frac{2 \sin \frac{1}{2}c \cdot \cos \frac{a-b}{2}}{2 \sin \frac{1}{2}c \cdot \cos \frac{1}{2}c} = \frac{\cos \frac{a-b}{2}}{\cos \frac{1}{2}c} \dots (11)$$

$$(7) - (8); \frac{\sin \frac{A-B}{2}}{\cos \frac{1}{2}C} = \frac{2 \cos \frac{1}{2}c \cdot \sin \frac{a-b}{2}}{2 \sin \frac{1}{2}c \cdot \cos \frac{1}{2}c} = \frac{\sin \frac{a-b}{2}}{\sin \frac{1}{2}c} \dots (12)$$

$$(9) - (10); \frac{\cos \frac{A+B}{2}}{\sin \frac{1}{2}C} = \frac{2 \cos \frac{a+b}{2} \cdot \sin \frac{1}{2}c}{2 \sin \frac{1}{2}c \cdot \cos \frac{1}{2}c} = \frac{\cos \frac{a+b}{2}}{\cos \frac{1}{2}c} \dots (13)$$

$$(9) + (10); \frac{\cos \frac{A-B}{2}}{\sin \frac{1}{2}C} = \frac{2 \sin \frac{a+b}{2} \cdot \cos \frac{1}{2}c}{2 \sin \frac{1}{2}c \cdot \cos \frac{1}{2}c} = \frac{\sin \frac{a+b}{2}}{\sin \frac{1}{2}c} \dots (14).$$

78.

Aus den vier letzteren Formeln folgt nun, daß:

$$\sin \frac{A+B}{2} \cdot \cos \frac{1}{2}c = \cos \frac{1}{2}C \cdot \cos \frac{a-b}{2}$$

$$\cos \frac{A+B}{2} \cdot \cos \frac{1}{2}c = \sin \frac{1}{2}C \cdot \cos \frac{a+b}{2}$$

$$\sin \frac{A-B}{2} \cdot \sin \frac{1}{2}c = \cos \frac{1}{2}C \cdot \sin \frac{a-b}{2}$$

$$\cos \frac{A-B}{2} \cdot \sin \frac{1}{2}c = \sin \frac{1}{2}C \cdot \sin \frac{a+b}{2}$$

Diese vier merkwürdigen, von Gaußs gefundenen Gleichungen, von welchen jede alle sechs Stücke des sphärischen Dreiecks enthält und von welchen in der *theoria motus* so vielfacher Gebrauch gemacht ist, hat seinerseits Delambre auch gefunden,*) jedoch ihre Wichtigkeit ganz übersehen. Sie dienen nämlich dem Astronomen, der oft sphärische Dreiecke zu berechnen hat, zur Kontrolle. Hierauf hat zuerst Gaußs aufmerksam gemacht und ihren Nutzen hervorgehoben.**)

Anmerkung. Weil sowohl jeder Winkel als jede Seite im sphärischen Dreieck immer kleiner als 180° , mithin auch $\sin \frac{1}{2}C$ und $\cos \frac{1}{2}c$ immer positiv ist, so folgt aus der zweiten Formel, nämlich aus:

$$\cos \frac{A+B}{2} \cdot \cos \frac{1}{2}c = \sin \frac{1}{2}C \cdot \cos \frac{a+b}{2},$$

*) *Connaissance des temps* 1808.

**) Göttinger Gelehrten-Anzeigen 1811, S. 1984.

dafs $\cos \frac{A+B}{2}$ und $\cos \frac{a+b}{2}$ immer einerlei Vorzeichen haben, mithin die Summe zweier Seiten mit der Summe der beiden ihnen gegenüber liegenden Winkel immer gleichartig ist, d. h.: beiderlei Summen sind gleichzeitig über, unter oder genau $= 180^\circ$. In Zeichen, wenn:

$$A + B \geq 180^\circ, \text{ so ist zugleich auch } a + b \geq 180^\circ.$$

Nach diesem wichtigen Satze kann man oftmals entscheiden, ob ein sphärisches Dreieck durch gegebene Stücke bestimmt oder zweideutig ist.

79.

Dividiert man die vorstehenden vier Gleichungen paarweise durcheinander, so erhält man die schon früher auf anderem Wege von Napier gefundenen und nach ihm benannten Gleichungen (Napier'schen Analogien):

$$\left. \begin{aligned} \operatorname{tg} \frac{A+B}{2} &= \cot \frac{1}{2} C \cdot \frac{\cos \frac{a-b}{2}}{\cos \frac{a+b}{2}} \\ \operatorname{tg} \frac{A-B}{2} &= \cot \frac{1}{2} C \cdot \frac{\sin \frac{a-b}{2}}{\sin \frac{a+b}{2}} \\ \operatorname{tg} \frac{a+b}{2} &= \operatorname{tg} \frac{1}{2} c \cdot \frac{\cos \frac{A-B}{2}}{\cos \frac{A+B}{2}} \\ \operatorname{tg} \frac{a-b}{2} &= \operatorname{tg} \frac{1}{2} c \cdot \frac{\sin \frac{A-B}{2}}{\sin \frac{A+B}{2}} \end{aligned} \right\}$$

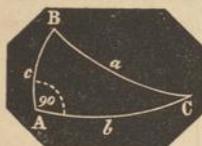
Das erste Paar dieser Gleichungen ist immer anzuwenden, wenn von einem sphärischen Dreieck zwei Seiten und der eingeschlossene Winkel, das zweite Paar dagegen, wenn eine Seite und die beiden anliegenden Winkel gegeben sind.

Neuntes Buch.

Rechtwinkliges sphärisches Dreieck.

80.

Erklärung. In einem bei A rechtwinkligen sphärischen Dreieck, ABC, heißen die den rechten Winkel einschließenden Seiten b und c Katheten und die ihm gegenüber liegende Seite a die Hypotenuse. Es ist leicht einzusehen, daß beim rechtwinkligen sphärischen Dreieck der Fall vorkommen kann, wo die Hypotenuse kleiner ist, als jede der beiden Katheten. (Man denke sich nur



auf einem Erdglobus A als Pol und die Katheten b , c als Meridiane und beide über den Äquator hinaus verlängert, die Endpunkte dann durch einen Bogen größten Kreises verbunden.)

Das rechtwinklige Dreieck kommt bei Anwendungen der sphärischen Trigonometrie am häufigsten vor und deshalb wollen wir noch die besonderen Formeln für dasselbe aufstellen. Es ist klar, daß diese besonderen Formeln aus den vorhin gefundenen allgemeinen sehr leicht abgeleitet werden können und viel einfacher sein werden.

81.

Die vorhin gefundenen allgemeinen Formeln, in welchen der Winkel A vorkommt, sind:

$$\cos A = \frac{\cos a - \cos b \cdot \cos c}{\sin b \cdot \sin c}$$

$$\frac{\sin a}{\sin A} = \frac{\sin b}{\sin B} = \frac{\sin c}{\sin C}$$

$$\cos a = \frac{\cos A + \cos B \cdot \cos C}{\sin B \cdot \sin C}$$

$$\cos b = \frac{\cos B + \cos A \cdot \cos C}{\sin A \cdot \sin C}$$

$$\cos c = \frac{\cos C + \cos A \cdot \sin B}{\sin A \cdot \sin B}$$

7*

$$\begin{aligned} \cot A \cdot \sin B + \cos B \cdot \cos c &= \cot a \cdot \sin c \\ \cot A \cdot \sin C + \cos C \cdot \cos b &= \cot a \cdot \sin b \\ \cot B \cdot \sin A + \cos A \cdot \cos c &= \cot b \cdot \sin c \\ \cot C \cdot \sin A + \cos A \cdot \cos b &= \cot c \cdot \sin b. \end{aligned}$$

82.

Setzt man nun in allen diesen vorstehenden Formeln $A = 90^\circ$ und beachtet, daß $\cos 90^\circ = 0$; $\sin 90^\circ = 1$ und $\cot 90^\circ = 0$, so erhält man die folgenden sechs, viel einfacheren Formeln für das bei A rechtwinklige sphärische Dreieck ABC:

$$\cos a = \cos b \cdot \cos c \dots (1)$$

$$\sin a = \frac{\sin b}{\sin B} = \frac{\sin c}{\sin C} \dots (2)$$

$$\cos a = \cot B \cdot \cot C \dots (3)$$

$$\left. \begin{aligned} \cos b &= \frac{\cos B}{\sin C} \\ \cos c &= \frac{\cos C}{\sin B} \end{aligned} \right\} \dots (4)$$

$$\left. \begin{aligned} \cos B &= \cot a \cdot \operatorname{tg} c \\ \cos C &= \cot a \cdot \operatorname{tg} b \end{aligned} \right\} \dots (5)$$

$$\left. \begin{aligned} \cot B &= \cot b \cdot \sin c \\ \cot C &= \cot c \cdot \sin b \end{aligned} \right\} \dots (6)$$

83.

Nach vorstehenden sechs Formeln kann man also, wenn von einem rechtwinkligen sphärischen Dreieck, ABC (außer dem rechten Winkel A) irgend zwei Stücke gegeben sind, jedes der drei anderen leicht finden. Wäre z. B. b und C gegeben und B gesucht, so folgt aus der vierten Formel: $\cos B = \cos b \cdot \sin C$. Um jedoch diese für den praktischen Astronomen und Steuermann wichtigen Formeln leichter behalten und anwenden zu können, merke man sich folgende, schon von Napier gegebene leichte Gedächtnisregel.

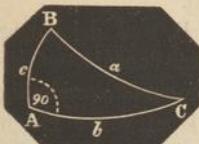
Wenn man den rechten Winkel A außer acht läßt, so sind je drei der übrigen fünf Stücke so geordnet, daß immer ein Stück die Mitte bildet, und dann die beiden anderen Stücke entweder unmittelbar zu beiden Seiten mit dem Mittelstücke verbunden oder noch durch ein Stück vom Mittel getrennt sind, wobei aber, wie gesagt, der rechte Winkel nicht mitzählt, die beiden Katheten also, als nicht durch ihn getrennt, sondern als

unmittelbar an einander liegend zu betrachten sind. Hat man diese Ordnung unter irgend drei Stücken im sphärischen Dreieck herausgefunden, so lautet die einfache Regel: Es ist allemal der *cosinus* der Mitte gleich dem Produkt aus den *sinus* der beiden getrennten, und auch gleich dem Produkt aus den *cotangenten* der beiden verbundenen Stücke, wobei aber statt der trigonometrischen Funktion einer Kathete immer ihre Kofunktion gesetzt werden muß.

Dafs in dieser leicht zu behaltenden Gedächtnisregel alle in § 82 aufgestellten sechs Formeln für das rechtwinklige sphärische Dreieck wirklich enthalten sind, wollen wir jetzt nachweisen, und dabei zugleich diese Regel einüben.

84.

Aufgabe. Eine Gleichung zwischen den drei Seiten a , b , c eines sphärischen Dreiecks zu finden.



Auflösung. Die Hypotenuse a ist hier offenbar die Mitte, die Kathete b durch den Winkel C und die Kathete c durch den Winkel B davon getrennt. Daher nach obiger Regel: $\cos a = \sin b \cdot \sin c$, also, weil b und c Katheten sind, und statt der trigonometrischen Funktionen derselben nach der Vorschrift ihre Kofunktionen gesetzt werden sollen, so erhält man die Formel (1) § 82, nämlich:

$$\cos a = \cos b \cdot \cos c.$$

Aus dieser unzweideutigen Formel folgt, dafs, wenn $\cos b$ und $\cos c$ einerlei Vorzeichen haben, die Hypotenuse $< 90^\circ$ ist.

85.

Aufgabe. Eine Gleichung zwischen zwei Katheten b , c und einem schiefen Winkel B zu finden.

Auflösung. Weil der rechte Winkel nicht mitzählt, so ist hier offenbar c die Mitte, B und b sind unmittelbar damit verbunden, daher: $\cos c = \cot B \cdot \cot b$, mithin weil b und c Katheten sind:

$$\sin c = \cot B \cdot \operatorname{tg} b, \text{ hieraus:}$$

$$\cot B = \frac{\sin c}{\operatorname{tg} b} (= \sin c \cdot \cot b) \dots [\text{§ 82, (6)}].$$

Diese Formel zeigt, dafs, weil alle Winkel und Seiten $< 180^\circ$, also $\sin c$ immer positiv ist, $\cot B$ und $\cot b$ immer einerlei Vor-

zeichen haben, mithin im rechtwinkligen sphärischen Dreieck ein Winkel und die ihm gegenüber liegende Seite, z. B. B und b , immer gleichartig sind, d. h. wenn:

$$B \leq 90^\circ, \text{ auch } b \leq 90^\circ.$$

Durch obige Formel: $\cot B = \sin c \cdot \cot b$ ist also sowohl B als b vollkommen bestimmt. Die aus B und b zu berechnende Kathete c aber $\left(\sin c = \frac{\cot B}{\cot b} = \frac{\operatorname{tg} b}{\operatorname{tg} B} \right)$ bleibt zweideutig, wenn man nicht weiß, ob der ihr gegenüber liegende Winkel C spitz oder stumpf ist.

86.

Aufgabe. Man suche eine Gleichung zwischen der Hypotenuse a , der Kathete b und dem Winkel B .

Auflösung. Weil der rechte Winkel nicht mitzählt, so ist hier b die Mitte, a durch C , und B durch c davon getrennt, daher: $\cos b = \sin a \cdot \sin B$, mithin, weil b eine Kathete ist:

$$\sin b = \sin a \cdot \sin B \quad [\S 82, (2)].$$

Durch diese Formel sind die Größen b und B , weil gleichartig, vollkommen bestimmt (§ 85). Was aber die durch ihren *sinus* gegebene Hypotenuse a betrifft, so ist sie im allgemeinen zweideutig. Weil jedoch $A + B$ oder (weil $A = 90^\circ$), $90 + B$ mit $a + b$ gleichartig ist, so sind die besonderen Fälle, wo a bestimmt ist, folgende:

1) Wenn $B = 90^\circ$, also auch $b = 90^\circ$, so ist auch $a = 90^\circ$.

2) Sei $B < 90^\circ$, also auch $b < 90^\circ$ und auch $a + b < 180^\circ$. Gibt es nun von den beiden Werten von a nur einen, der zu b addiert $< 180^\circ$ giebt, so ist a bestimmt.

3) Sei $B > 90^\circ$, also auch $a + b > 180^\circ$. Gibt es nun unter den beiden Werten für a nur einen, der zu b addiert $> 180^\circ$ giebt, so ist a bestimmt, sonst nicht.

87.

Aufgabe. Eine Gleichung zwischen den zwei schiefen Winkeln B , C und einer Kathete b zu finden.

Auflösung. Hier ist B die Mitte, von welcher C durch a und b durch c getrennt ist, daher $\cos B = \sin C \cdot \sin b$, mithin, weil b eine Kathete ist:

$$\cos B = \sin C \cdot \cos b \quad [\S 82, (4)].$$

Durch diese Formel sind B und b vollkommen bestimmt, C aber bleibt zweideutig.

88.

Aufgabe. Eine Gleichung zwischen der Hypotenuse a und den zwei schiefen Winkeln B und C zu finden.

Auflösung. Hier ist a die Mitte, B und C damit verbunden, mithin :

$$\cos a = \cot B \cdot \cot C \quad [\S 82, (3)].$$

89.

Aufgabe. Eine Gleichung zwischen a , c , B zu finden.

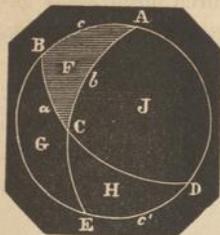
Auflösung. Hier ist B die Mitte, a und c damit verbunden, daher $\cos B = \cot a \cdot \cot c$, oder, weil c eine Kathete ist :

$$\cos B = \cot a \cdot \operatorname{tg} c \quad [\S 82 (5)].$$

Man sieht also, daß diese leichte Gedächtnisregel wirklich alle sechs in § 82 für das rechtwinklige sphärische Dreieck aufgestellten Formeln umfaßt.

90.

Flächeninhalt eines sphärischen Dreiecks.



Lehrsatz. Bezeichnet F den Flächeninhalt eines sphärischen Dreiecks, ABC , und r den *radius* der zugehörigen Kugel, so ist :

$$F = \frac{A + B + C - 180}{180} \cdot \pi r^2.$$

Beweis. Der leichtern Vorstellung halber nehme man eine Kugel zur Hand und zeichne darauf ein sphärisches Dreieck, ABC , verlängere je zwei Bögen desselben vorwärts und rückwärts, bis sie sich abermals schneiden, so wird dadurch die ganze Oberfläche der Kugel in acht Dreiecke geteilt, wovon jedoch hier nur die auf der oberen Hälfte liegenden vier, F, G, H, J , zu sehen sind. Weil nun jeder größte Kreis $ABEDA$ die Kugel halbiert und zwei größte Kreise wie ABE, ACE sich gegenseitig halbieren, so ist klar, daß die vier Dreiecke F, G, H, J wirklich die halbe Kugeloberfläche ($2\pi r^2$) einnehmen; ferner, daß die Verlängerung der beiden Seiten a, b über A und B hinaus, mit c ein Dreieck, H' , auf der anderen Seite der Kugel bilden, welches dem Dreieck H , wenn auch symmetrisch, doch an Größe vollkommen gleich ist, weil sie aus gleichgroßen Bögen gebildet sind. (So ist z. B. $c' = c$, weil beide zu Bogen BE addiert einen Halbkreis geben.)

Nun ist der Streifen der Kugeloberfläche, welchen die beiden Halbkreise ABE und ACE einschließen, das sogenannte Kugelzweieck, der eben so viele Teil von der ganzen Kugeloberfläche, als es der sphärische Winkel A von 360° ist, daher:

$$F + G = \frac{A}{360} \cdot 4\pi r^2 \dots\dots\dots(1).$$

Ebenso ist der Flächeninhalt der von den beiden Halbkreisen BAD, BCD gebildeten Zweiecks, nämlich:

$$F + J = \frac{B}{360} \cdot 4\pi r^2 \dots\dots\dots(2).$$

Ferner bildet das Dreieck F mit dem auf der anderen Seite der Kugel liegenden Dreieck H' ein Kugelzweieck, dessen Fläche $F + H' = \frac{C}{360} \cdot 4\pi r^2$, daher, weil $H = H'$

$$F + H = \frac{C}{360} \cdot 4\pi r^2 \dots\dots\dots(3).$$

Addiert man die Gleichungen, so ist:

$$3F + G + H + J = \frac{A + B + C}{360} \cdot 4\pi r^2.$$

Zieht man hiervon $F + G + H + J = 2\pi r^2$ ab, so ist:

$$2F = \frac{A + B + C}{360} \cdot 4\pi r^2 - 2\pi r^2$$

$$F = \left(\frac{A + B + C}{180} - 1 \right) \pi r^2$$

$$F = \frac{A + B + C - 180}{180} \cdot \pi r^2$$

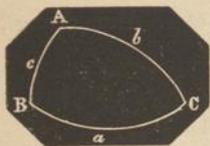
oder, wenn man den Überschufs der drei sphärischen Winkel A, B, C über 180° , den sogenannten „sphärischen Excefs“ mit e bezeichnet:

$$F = \frac{e}{180} \cdot \pi r^2.$$

Zehntes Buch.

Beispiele zur numerischen Berechnung eines sphärischen Dreiecks.

91.



Aufgabe. Es sind alle drei Seiten eines sphärischen Dreiecks gegeben:

$$a = 72^{\circ} 14' 26'', \quad b = 110^{\circ} 18' 20'', \quad c = 48^{\circ} 50' 42''.$$

Man suche die Winkel A, B, C.

Auflösung. Zuzufolge § 72 hat man:

$$\operatorname{tg} \frac{1}{2} A = \sqrt{\frac{\sin(\frac{1}{2}s - b) \sin(\frac{1}{2}s - c)}{\sin \frac{1}{2}s \cdot \sin(\frac{1}{2}s - a)}}$$

$$\operatorname{tg} \frac{1}{2} B = \sqrt{\frac{\sin(\frac{1}{2}s - a) \sin(\frac{1}{2}s - c)}{\sin \frac{1}{2}s \cdot \sin(\frac{1}{2}s - b)}}$$

$$\operatorname{tg} \frac{1}{2} C = \sqrt{\frac{\sin(\frac{1}{2}s - a) \sin(\frac{1}{2}s - b)}{\sin \frac{1}{2}s \cdot \sin(\frac{1}{2}s - c)}}$$

$$a = 72^{\circ} 14' 26'' \quad \frac{1}{2}s = 115^{\circ} 41' 44''$$

$$b = 110 \cdot 18 \cdot 20 \quad \frac{1}{2}s - a = 43 \cdot 27 \cdot 18$$

$$c = 48 \cdot 50 \cdot 42 \quad \frac{1}{2}s - b = 5 \cdot 23 \cdot 24$$

$$s = 231 \cdot 23 \cdot 28 \quad \frac{1}{2}s - c = 66 \cdot 51 \cdot 2$$

$$\log \sin(\frac{1}{2}s - b) = 8,9728253$$

$$\log \sin \frac{1}{2}s = 0,9547781$$

$$\log \sin(\frac{1}{2}s - c) = 9,9635435$$

$$\log \sin(\frac{1}{2}s - a) = 9,8374525$$

$$\hline 18,9363688$$

$$\hline 19,7922306$$

$$19,7922306$$

$$0,1441382 - 1 \quad (:2 \text{ [Algebra § 281]})$$

$$\log \operatorname{tg} \frac{1}{2} A = 9,5720691 - 10$$

$$\frac{1}{2} A = 20^{\circ} 28' 15'', 9.$$

Ebenso findet man $\frac{1}{2} B$ und $\frac{1}{2} C$, mithin ist:

$$A = 40^{\circ} 56' 31'', 8; \quad B = 139^{\circ} 48' 35'', 4; \quad C = 31^{\circ} 12' 13'', 5.$$

92.

Aufgabe. Es sind zwei Seiten, b , c , und ein Gegenwinkel, B , gegeben. Man sucht den anderen Gegenwinkel C . Es sei z. B. $b = 110^\circ 18' 20''$, $c = 48^\circ 50' 42''$, $B = 139^\circ 48' 35'', 4$.

Auflösung. In diesem Falle gebraucht man immer die Regel der vier *sinus*. Diese giebt: $\frac{\sin C}{\sin B} = \frac{\sin c}{\sin b}$, hieraus:

$$\sin C = \frac{\sin c}{\sin b} \cdot \sin B.$$

Anmerkung. Da hier der Winkel C durch seinen *sinus* bestimmt wird und deshalb sowohl spitz als stumpf sein kann, so ist klar, daß durch zwei Seiten und einen Gegenwinkel im allgemeinen ein sphärisches Dreieck nicht bestimmt ist (vergl. § 29).

Weil aber $B + C$ mit $b + c$ gleichartig ist (§ 78 Anmerkung), so können wir jedoch folgendes festsetzen:

1) Ist $b + c = 180^\circ$, so ist auch $B + C = 180^\circ$, mithin:

$$C = 90^\circ, \text{ wenn } B = 90^\circ$$

$$C > 90^\circ \quad \text{„} \quad B < 90^\circ$$

$$C < 90^\circ \quad \text{„} \quad B > 90^\circ.$$

2) Ist $b + c < 180^\circ$, also auch $B + C < 180^\circ$, so ist:

$$C < 90^\circ, \text{ wenn } B \geq 90^\circ.$$

Ist aber $B < 90^\circ$, so ist C unbestimmt. Kann jedoch C nur auf eine Weise so genommen werden, daß $B + C < 180^\circ$, so ist C bestimmt.

3) Ist endlich $b + c > 180^\circ$, also auch $B + C > 180^\circ$, so ist:

$$C > 90^\circ, \text{ wenn } B \leq 90^\circ.$$

Wäre aber $B > 90^\circ$, so ist C wieder unbestimmt, es sei denn, daß C nur auf eine Weise so genommen werden kann, daß $B + C > 180^\circ$.

$$\log \sin B = 9,8097796$$

$$\log \sin c = 9,8767558$$

$$19,6865354$$

$$\log \sin b = 9,9721358$$

$$\log \sin C = 9,7143996$$

$$C = 31^\circ 12' 13'', 5.$$

93.

Aufgabe. Es sind alle drei Winkel gegeben, zum Beispiel $A = 40^\circ 56' 31'',8$, $B = 139^\circ 48' 35'',4$, $C = 31^\circ 12' 13'',5$. Man sucht die Seiten.

Auflösung. Nach § 75 hat man:

$$\operatorname{tg} \frac{1}{2} a = \sqrt{\frac{-\cos \frac{1}{2} S \cdot \cos (\frac{1}{2} S - A)}{\cos (\frac{1}{2} S - B) \cos (\frac{1}{2} S - C)}}$$

$$\operatorname{tg} \frac{1}{2} b = \sqrt{\frac{-\cos \frac{1}{2} S \cdot \cos (\frac{1}{2} S - B)}{\cos (\frac{1}{2} S - A) \cos (\frac{1}{2} S - C)}}$$

$$\operatorname{tg} \frac{1}{2} c = \sqrt{\frac{-\cos \frac{1}{2} S \cdot \cos (\frac{1}{2} S - C)}{\cos (\frac{1}{2} S - A) \cos (\frac{1}{2} S - B)}}$$

$$A = 40^\circ 56' 31'',8 \quad \frac{1}{2} S = 105^\circ 58' 40'',4$$

$$B = 139^\circ 48' 35'',4 \quad \frac{1}{2} S - A = 65^\circ 2' 8'',6$$

$$C = 31^\circ 12' 13'',5 \quad \frac{1}{2} S - B = -33^\circ 49' 55'',$$

$$S = 211^\circ 57' 20'',7 \quad \frac{1}{2} S - C = 74^\circ 46' 26'',9$$

$$\log -\cos \frac{1}{2} S = 9,4397531 \quad \log \cos (\frac{1}{2} S - B) = 9,9194308 \quad (\S 56)$$

$$\log \cos (\frac{1}{2} S - A) = 9,6253671 \quad \log \cos (\frac{1}{2} S - C) = 9,4193355$$

$$19,0651202$$

$$19,3387663$$

$$19,3387663$$

$$0,7263539 - 1 \quad (:2)$$

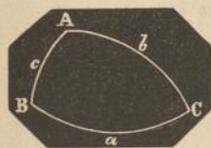
$$0,8631769 - 1$$

$$\log \operatorname{tg} \frac{1}{2} a = 9,8631769 - 10$$

$$\frac{1}{2} a = 36^\circ 7' 13'',$$

Ebenso findet man nach den beiden anderen Formeln $\frac{1}{2} b$ und $\frac{1}{2} c$ und daraus dann: $a = 72^\circ 14' 26''$; $b = 110^\circ 18' 20''$; $c = 48^\circ 50' 42''$.

94.



Aufgabe. Es sind zwei Winkel, A und B, und eine Gegenseite, a , gegeben. Man sucht die andere Gegenseite b .

Auflösung. Aus der Sinus-Regel

$$\frac{\sin b}{\sin a} = \frac{\sin B}{\sin A} \quad \text{folgt:}$$

$$\sin b = \frac{\sin a \cdot \sin B}{\sin A}$$

Die Fälle, wo die durch ihren *sinus* gefundene Seite b bestimmt ist, ergeben sich wieder aus § 78, Anmerkung. Es ist nämlich:

1, Wenn $A + B = 180^\circ$, also auch $a + b = 180^\circ$:

$$b \begin{matrix} \leq \\ > \end{matrix} 90, \text{ wenn } a \begin{matrix} \geq \\ < \end{matrix} 90.$$

2, Wenn $A + B < 180^\circ$, so ist:

$$b < 90, \text{ wenn } a \geq 90.$$

Wäre $a < 90^\circ$, so kann b sowohl spitz als stumpf sein etc.

3, Wenn $A + B > 180^\circ$, so ist:

$$b > 90, \text{ wenn } a \leq 90.$$

Wäre $a > 90$, so kann b sowohl spitz als stumpf sein etc.

95.

Aufgabe. Von einem sphärischen Dreieck sind zwei Seiten und der eingeschlossene Winkel a, b, C gegeben, zum Beispiel $a = 72^\circ 14' 26''$, $b = 110^\circ 18' 20''$, $C = 31^\circ 12' 13''$, 5. Man sucht die übrigen Stücke c, A, B .

Auflösung. In diesem Falle gebraucht man immer die Napier'schen Gleichungen und berechnet zuerst die Winkel A und B . Nach § 79 ist, wenn man, weil $b > a$, um negative Winkel zu vermeiden, a mit b und A mit B verwechselt:

$$\operatorname{tg} \frac{B+A}{2} = \cot \frac{1}{2} C \cdot \frac{\cos \frac{b-a}{2}}{\cos \frac{b+a}{2}}$$

$$\operatorname{tg} \frac{B-A}{2} = \cot \frac{1}{2} C \cdot \frac{\sin \frac{b-a}{2}}{\sin \frac{b+a}{2}}$$

$$\log \cot \frac{1}{2} C = 10,5540220$$

$$\log \cot \frac{1}{2} C = 10,5540220$$

$$\log \cos \frac{b-a}{2} = 9,9755852$$

$$\log \sin \frac{b-a}{2} = 9,5133567$$

$$\hline 20,5296072$$

$$\hline 20,0673787$$

$$\log \cos \frac{b+a}{2} = 8,3466888 \text{ (n)}$$

$$\log \sin \frac{b+a}{2} = 9,9998928$$

$$\log \operatorname{tg} \frac{B+A}{2} = 12,1829184 \text{ (n)}$$

$$\log \operatorname{tg} \frac{B-A}{2} = 10,0674859$$

$$\frac{B+A}{2} = 90^\circ 22' 33'', 6$$

$$A = 40^\circ 56' 31'', 8$$

$$\frac{B-A}{2} = 49 \cdot 26 \cdot 1, 8$$

mithin:

$$B = 139 \cdot 48 \cdot 35, 4$$

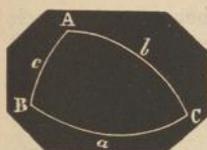
Die Seite c findet man jetzt nach der Sinus-Regel:

$$\frac{\sin c}{\sin C} = \frac{\sin a}{\sin A}, \text{ woraus:}$$

$$\sin c = \frac{\sin C \cdot \sin a}{\sin A}.$$

Ob die völlig bestimmte Seite c spitz oder stumpf ist, entscheidet man nach der Regel, daß $a + c$ mit $A + C$ und $b + c$ mit $B + C$ immer gleichartig ist. Hier ist also $c = 48^\circ 50' 42''$. Weil nämlich $A + C < 180$, so muß $c < 90^\circ$ sein.

96.



Aufgabe. Von einem sphärischen Dreieck, ABC , ist eine Seite, c , und die beiden anliegenden Winkel A, B gegeben; man sucht die übrigen Stücke C, a, b .

Auflösung. In diesem Falle gebrauche man immer die Napier'schen Gleichungen und suche zuerst die beiden Seiten a, b . Man hat:

$$\operatorname{tg} \frac{a+b}{2} = \operatorname{tg} \frac{1}{2} c \cdot \frac{\cos \frac{A-B}{2}}{\cos \frac{A+B}{2}}$$

$$\operatorname{tg} \frac{a-b}{2} = \operatorname{tg} \frac{1}{2} c \cdot \frac{\sin \frac{A-B}{2}}{\sin \frac{A+B}{2}}.$$

Den völlig bestimmten Winkel C findet man nun nach der Sinus-Regel, nämlich:

$$\sin C = \frac{\sin c}{\sin a} \sin A = \frac{\sin c}{\sin b} \cdot \sin B.$$

Ob C spitz oder stumpf ist, entscheidet man nach der Regel, daß $A + C$ mit $a + c$ und $B + C$ mit $b + c$ gleichartig ist.

97.

Aufgabe. Es sind von vier aufeinander folgenden Stücken, A, b, C, a , eines sphärischen Dreiecks zwei Seiten, a, b , und ein Gegenwinkel, A , gegeben; man sucht den andern Winkel C .

Auflösung. Statt den Winkel C vermittelst der Formel:

$$\cot A \cdot \sin C + \cos C \cdot \cos b = \cot a \cdot \sin b$$

direkt oder durch Einführung eines Hilfswinkels zu berechnen, ist es bequemer, zuerst nach der Sinus-Regel den zweiten Gegenwinkel B zu suchen, nämlich:

$$\sin B = \frac{\sin b}{\sin a} \cdot \sin A;$$

alsdann findet man den Winkel C nach der ersten oder zweiten Napier'schen Formel:

$$\cot \frac{1}{2} C = \frac{\sin \frac{a+b}{2}}{\sin \frac{a-b}{2}} \cdot \operatorname{tg} \frac{A-B}{2}.$$

Wollte man auch noch die Seite c haben, so ist nach Formel 3 oder 4, § 79:

$$\operatorname{tg} \frac{1}{2} c = \frac{\sin \frac{A+B}{2}}{\sin \frac{A-B}{2}} \cdot \operatorname{tg} \frac{a-b}{2}.$$

Anmerkung. Die Fälle, wo der zuerst zu findende Winkel B bestimmt oder zweideutig ist, ergeben sich daraus, daß $A+B$ mit $a+b$ gleichartig ist.

Will man aber zuerst C mittelst eines Hilfswinkels, φ , nach der Formel:

$$\cot A \cdot \sin C + \cos C \cdot \cos b = \cot a \cdot \sin b$$

berechnen, so verfähre man nach § 65 (4. Fall).

Aus vorstehender Gleichung folgt:

$$\frac{\cot A}{\cos b} \cdot \sin C + \cos C = \cot a \cdot \operatorname{tg} b,$$

setzt man nun: $\frac{\cot A}{\cos b} = \cot \varphi$, so hat man, weil $\cot \varphi = \frac{\cos \varphi}{\sin \varphi}$

$$\frac{\cos \varphi}{\sin \varphi} \cdot \sin C + \cos C = \cot a \cdot \operatorname{tg} b$$

$$\sin C \cdot \cos \varphi + \cos C \sin \varphi = \cot a \cdot \operatorname{tg} b \cdot \sin \varphi$$

$$\sin (C + \varphi) = \cot a \cdot \operatorname{tg} b \cdot \sin \varphi.$$

Diese Formel ist dann brauchbar, wenn man, wie es in der Praxis der Fall ist, im voraus weiß, ob $\angle C$ spitz oder stumpf ist.

98.

Aufgabe. Von vier aufeinander folgenden Stücken, A, b, C, a, eines sphärischen Dreiecks sind zwei Winkel, A, C, und eine Gegenseite, a, gegeben; man sucht die zwischen liegende Seite b.

Auflösung. Man hat aus:

$$\cot A \cdot \sin C + \cos C \cdot \cos b = \cot a \cdot \sin b$$

$$\cot a \cdot \sin b - \cos C \cdot \cos b = \cot A \cdot \sin C$$

$$\frac{\cot a}{\cos C} \cdot \sin b - \cos b = \cot A \cdot \operatorname{tg} C$$

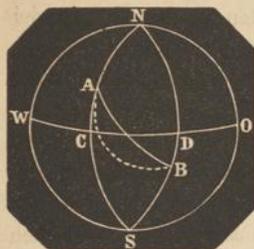
$$\cot \varphi \cdot \sin b - \cos b = \cot A \cdot \operatorname{tg} C$$

$$\cos \varphi \cdot \sin b - \cos b \cdot \sin \varphi = \cot A \cdot \operatorname{tg} C \cdot \sin \varphi$$

$$\sin (b - \varphi) = \cot A \cdot \operatorname{tg} C \cdot \sin \varphi,$$

worin φ durch $\cot \varphi = \frac{\cot a}{\cos C}$ (oder besser $\operatorname{tg} \varphi = \operatorname{tg} a \cdot \cos C$) gegeben.

99.



Aufgabe. Es sind die geographischen Breiten und Längen zweier Örter, A und B, auf der Erde gegeben, nämlich $AC = b$, $BD = -b'$; $WC = l'$, $WD = l$, man sucht die Entfernung der beiden Örter A und B, d. h. den zwischen ihnen enthaltenen Bogen größten Kreises $AB = x$.

Auflösung. Denkt man durch A und B die beiden Meridiane NAS , NBS gezogen, so entsteht das sphärische Dreieck ANB , in welchem der Winkel $N = l - l'$, die Seite $AN = 90 - b$ und die Seite $BN = 90 + b'$. Jetzt kann man nach § 95 verfahren. Will man aber die Seite $AB = x$ mittelst eines Hilfswinkels, φ , berechnen, so folgt aus:

$$\cos N = \frac{\cos AB - \cos AN \cdot \cos BN}{\sin AN \cdot \sin BN}$$

$$\cos (l - l') = \frac{\cos x - \cos (90 - b) \cdot \cos (90 + b')}{\sin (90 - b) \cdot \sin (90 + b')}$$

$$\cos (l - l') = \frac{\cos x + \sin b \cdot \sin b'}{\cos b \cdot \cos b'}$$

$$\cos x = \cos (l - l') \cdot \cos b \cdot \cos b' - \sin b \cdot \sin b'$$

$$\cos x = \sin b' \left[\frac{\cos (l - l') \cos b \cdot \cos b'}{\sin b'} - \sin b \right]$$

$$\cos x = \sin b' [\cos (l - l') \cos b \cdot \cot b' - \sin b]$$

$$\cos (l - l') \cot b' = \operatorname{tg} \varphi \text{ gesetzt:}$$

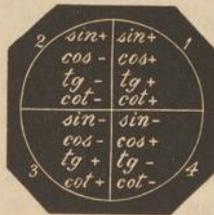
$$\begin{aligned} \cos x &= \sin b' \left[\frac{\sin \varphi \cdot \cos b}{\cos \varphi} - \sin b \right] \\ &= \frac{\sin b'}{\cos \varphi} [\sin \varphi \cdot \cos b - \cos \varphi \cdot \sin b] \\ \cos x &= \frac{\sin b' \cdot \sin(\varphi - b)}{\cos \varphi}, \text{ worin } \operatorname{tg} \varphi = \cos(l - l') \cot b'. \end{aligned}$$

Die Entfernung x findet man in Graden, die noch in Länge verwandelt werden, indem man auf einen Grad größtens Kreises 15 geographische Meilen rechnet.

Anmerkung. Dafs ein zwischen zwei Punkten, A, B, enthaltener Bogen größtens Kreises kleiner ist, als ein durch dieselben Punkte gelegter Bogen kleineren Kreises, erhellt leicht, wenn man den Bogen kleineren Kreises um die gemeinschaftliche Sehne gedreht und mit dem Bogen größtens Kreises in einerlei Ebene gebracht denkt, wo dann letzterer, weil mit einem größern Radius beschrieben, vom erstern offenbar umgeben, folglich auch kleiner sein muß.

100.

Zusammenstellung der goniometrischen Formeln.



$$\begin{aligned} \sec a &= \frac{1}{\cos a} & \operatorname{cosec} a &= \frac{1}{\sin a} \\ \sin 0 &= 0 & \sin 90 &= 1 \\ \cos 0 &= 1 & \cos 90 &= 0 \\ \operatorname{tg} 0 &= 0 & \operatorname{tg} 90 &= \infty \\ \operatorname{cot} 0 &= \infty & \operatorname{cot} 90 &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sin 180^\circ &= 0 & \sin 270^\circ &= -1 & \sin 360^\circ &= 0 \\ \cos 180^\circ &= -1 & \cos 270^\circ &= 0 & \cos 360^\circ &= 1 \\ \operatorname{tg} 180^\circ &= 0 & \operatorname{tg} 270^\circ &= -\infty & \operatorname{tg} 360^\circ &= \infty \\ \operatorname{cot} 180^\circ &= -\infty & \operatorname{cot} 270^\circ &= 0 & \operatorname{cot} 360^\circ &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sin k\pi &= 0 & \sin(4k+1)\frac{\pi}{2} &= 1 & \sin(4k+3)\frac{\pi}{2} &= -1 \\ \cos 2k\pi &= 1 & \cos(2k+1)\pi &= -1 & \cos(2k+1)\frac{\pi}{2} &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sin 30^\circ &= \cos 60^\circ = \frac{1}{2}; & \cos 30^\circ &= \sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}. \\ \operatorname{tg} 30^\circ &= \operatorname{cot} 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{3} & \operatorname{cot} 30^\circ &= \operatorname{tg} 60^\circ = \sqrt{3} \\ \sin 45^\circ &= \cos 45^\circ = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} & \operatorname{tg} 45^\circ &= \operatorname{cot} 45^\circ = 1. \end{aligned}$$

$$\begin{array}{ll} \sin(-a) = -\sin a & \sin(a-b) = -\sin(b-a) \\ \cos(-a) = \cos(+a) & \cos(a-b) = \cos(b-a) \\ \operatorname{tg}(-a) = -\operatorname{tg} a & \operatorname{tg}(a-b) = -\operatorname{tg}(b-a) \\ \operatorname{cot}(-a) = -\operatorname{cot} a & \operatorname{cot}(a-b) = -\operatorname{cot}(b-a) \end{array}$$

$$\begin{array}{lll} \sin(90-a) = \cos a & \sin(90+a) = \cos a & \sin(180-a) = \sin a \\ \cos(90-a) = \sin a & \cos(90+a) = -\sin a & \cos(180-a) = -\cos a \\ \operatorname{tg}(90-a) = \operatorname{cot} a & \operatorname{tg}(90+a) = -\operatorname{cot} a & \operatorname{tg}(180-a) = -\operatorname{tg} a \\ \operatorname{cot}(90-a) = \operatorname{tg} a & \operatorname{cot}(90+a) = -\operatorname{tg} a & \operatorname{cot}(180-a) = -\operatorname{cot} a \\ \sin(180+a) = -\sin a & \sin(270-a) = -\cos a & \sin(270+a) = -\cos a \\ \cos(180+a) = -\cos a & \cos(270-a) = -\sin a & \cos(270+a) = \sin a \\ \operatorname{tg}(180+a) = \operatorname{tg} a & \operatorname{tg}(270-a) = \operatorname{cot} a & \operatorname{tg}(270+a) = -\operatorname{cot} a \\ \operatorname{cot}(180+a) = \operatorname{cot} a & \operatorname{cot}(270-a) = \operatorname{tg} a & \operatorname{cot}(270+a) = -\operatorname{tg} a \\ \sin(360-a) = -\sin a & \sin(45^\circ - a) = \cos(45^\circ + a) \\ \cos(360-a) = \cos a & \cos(45-a) = \sin(45+a) \\ \operatorname{tg}(360-a) = -\operatorname{tg} a & \operatorname{tg}(45-a) = \operatorname{cot}(45+a) \\ \operatorname{cot}(360-a) = -\operatorname{cot} a & \operatorname{cot}(45-a) = \operatorname{tg}(45+a) \end{array}$$

$$* \sin^2 a + \cos^2 a = 1 \quad \sin^2 a = 1 - \cos^2 a \quad \cos^2 a = 1 - \sin^2 a$$

$$* \frac{\sin a}{\cos a} = \operatorname{tg} a \quad \frac{\cos a}{\sin a} = \operatorname{cot} a$$

$$* \operatorname{tg} a \cdot \operatorname{cot} a = 1 \quad \operatorname{tg} a = \frac{1}{\operatorname{cot} a} \quad \operatorname{cot} a = \frac{1}{\operatorname{tg} a}$$

$$1 + \operatorname{tg}^2 a = \frac{1}{\cos^2 a} \quad 1 + \operatorname{cot}^2 a = \frac{1}{\sin^2 a}$$

$$\sin a = \sqrt{1 - \cos^2 a} = \frac{\operatorname{tg} a}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 a}} = \frac{1}{\sqrt{1 + \operatorname{cot}^2 a}}$$

$$\cos a = \sqrt{1 - \sin^2 a} = \frac{1}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 a}} = \frac{\operatorname{cot} a}{\sqrt{1 + \operatorname{cot}^2 a}}$$

$$\operatorname{tg} a = \frac{\sin a}{\cos a} = \frac{\sqrt{1 - \cos^2 a}}{\cos a} = \frac{1}{\operatorname{cot} a}$$

$$\operatorname{cot} a = \frac{\sqrt{1 - \sin^2 a}}{\sin a} = \frac{\cos a}{\sqrt{1 - \cos^2 a}} = \frac{1}{\operatorname{tg} a}$$

$$* \sin(a \pm b) = \sin a \cdot \cos b \pm \cos a \cdot \sin b$$

$$* \cos(a \pm b) = \cos a \cdot \cos b \mp \sin a \cdot \sin b$$

$$* \operatorname{tg}(a \pm b) = \frac{\operatorname{tg} a \pm \operatorname{tg} b}{1 \mp \operatorname{tg} a \cdot \operatorname{tg} b}$$

$$* \operatorname{cot}(a \pm b) = \frac{\operatorname{cot} a \cdot \operatorname{cot} b \pm 1}{\operatorname{cot} a \pm \operatorname{cot} b}$$

$$* \sin 2a = 2 \sin a \cdot \cos a$$

$$* \cos 2a = \cos^2 a - \sin^2 a = 1 - 2 \sin^2 a = 2 \cos^2 a - 1$$

$$* \operatorname{tg} 2a = \frac{2 \operatorname{tg} a}{1 - \operatorname{tg}^2 a}$$

$$* \cot 2a = \frac{\cot^2 a - 1}{2 \cot a} = \frac{1}{2} (\cot a - \operatorname{tg} a).$$

$$* \sin a = 2 \sin \frac{a}{2} \cos \frac{a}{2}$$

$$* \sin a \cdot \cos a = \frac{\sin 2a}{2} \quad \sin \frac{a}{2} \cos \frac{a}{2} = \frac{\sin a}{2}$$

$$\sin 3a = 3 \sin a - 4 \sin^3 a \quad \cos 3a = 4 \cos^3 a - 3 \cos a$$

$$\operatorname{tg} 3a = \frac{3 \operatorname{tg} a - \operatorname{tg}^3 a}{1 - 3 \operatorname{tg}^2 a} \quad \cot 3a = \frac{\cot^3 a - 3 \cot a}{3 \cot^2 a - 1}$$

$$\sin \frac{a}{2} = \sqrt{\frac{1 - \cos a}{2}} = \frac{\sqrt{1 + \sin a} - \sqrt{1 - \sin a}}{2}$$

$$\cos \frac{a}{2} = \sqrt{\frac{1 + \cos a}{2}} = \frac{\sqrt{1 + \sin a} + \sqrt{1 - \sin a}}{2}$$

$$\operatorname{tg} \frac{a}{2} = \sqrt{\frac{1 - \cos a}{1 + \cos a}} = \frac{\sin a}{1 + \cos a} = \frac{1 - \cos a}{\sin a}$$

$$= \frac{1}{\sin a} - \cot a = \frac{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 a} - 1}{\operatorname{tg} a}$$

$$\cot \frac{a}{2} = \sqrt{\frac{1 + \cos a}{1 - \cos a}} = \frac{1 + \cos a}{\sin a} = \frac{\sin a}{1 - \cos a}$$

$$= \frac{1}{\sin a} + \cot a = \cot a + \sqrt{1 + \cot^2 a}.$$

$$\sin a + \sin b = 2 \sin \frac{a+b}{2} \cos \frac{a-b}{2} \quad \sin a - \sin b = 2 \cos \frac{a+b}{2} \sin \frac{a-b}{2}$$

$$\cos a + \cos b = 2 \cos \frac{a+b}{2} \cos \frac{a-b}{2} \quad \cos a - \cos b = 2 \sin \frac{b+a}{2} \sin \frac{b-a}{2}$$

$$\operatorname{tg} a \pm \operatorname{tg} b = \frac{\sin(a \pm b)}{\cos a \cos b} \quad \cot a \pm \cot b = \frac{\sin(b \pm a)}{\sin a \sin b}$$

$$\sin a + \cos a = \sqrt{2} \cdot \sin(45^\circ + a) \quad \sin a - \cos a = -\sqrt{2} \cdot \cos(45^\circ + a)$$

$$\operatorname{tg} a + \cot a = \frac{2}{\sin 2a} \quad \operatorname{tg} a - \cot a = -2 \cot 2a$$

$$\sin a + \operatorname{tg} a = 2 \operatorname{tg} a \cos^2 \frac{a}{2} \quad \sin a - \operatorname{tg} a = -2 \operatorname{tg} a \sin^2 \frac{a}{2}$$

$$\cos a + \cot a = 2 \cot a \sin^2 \left(45^\circ + \frac{a}{2}\right)$$

$$\cos a - \cot a = -2 \cot a \cos^2 \left(45^\circ + \frac{a}{2}\right)$$

$$1 + \sin a = 2 \sin^2 \left(45^\circ + \frac{a}{2}\right) \quad 1 - \sin a = 2 \cos^2 \left(45^\circ + \frac{a}{2}\right)$$

$$* 1 + \cos a = 2 \cos^2 \frac{a}{2} \quad 1 - \cos a = 2 \sin^2 \frac{a}{2}$$

$$1 + \operatorname{tg} a = \frac{\sqrt{2} \cdot \sin(45^\circ + a)}{\cos a} \quad 1 - \operatorname{tg} a = \frac{\sqrt{2} \cdot \cos(45^\circ + a)}{\cos a}$$

$$1 + \cot a = \frac{\sqrt{2} \cdot \sin(45^\circ + a)}{\sin a} \quad 1 - \cot a = \frac{\sqrt{2} \cdot \cos(45^\circ + a)}{\sin a}$$

$$\operatorname{tg}(45^\circ \pm a) = \frac{1 + \operatorname{tg} a}{1 \mp \operatorname{tg} a}$$

$$\frac{\sin a + \sin b}{\sin a - \sin b} = \operatorname{tg} \frac{a+b}{2} \cot \frac{a-b}{2} \quad \frac{\operatorname{tg} a + \operatorname{tg} b}{\operatorname{tg} a - \operatorname{tg} b} = \frac{\sin(a+b)}{\sin(a-b)}$$

$$\sin^2 a - \sin^2 b = \sin(a+b) \sin(a-b) \quad \cos^2 a - \cos^2 b = \sin(b+a) \sin(b-a)$$

$$\operatorname{tg}^2 a - \operatorname{tg}^2 b = \frac{\sin(a+b) \sin(a-b)}{\cos^2 a \cos^2 b} \quad \cot^2 a - \cot^2 b = \frac{\sin(b+a) \sin(b-a)}{\sin^2 a \sin^2 b}$$

$$1 - \sin^2 a = \cos^2 a$$

$$1 - \cos^2 a = \sin^2 a$$

$$1 - \operatorname{tg}^2 a = \frac{2 \operatorname{tg} a}{\operatorname{tg} 2a}$$

$$1 - \cot^2 a = -2 \cot a \cot 2a$$

$$\frac{1 + \cos a}{\cos a} = \operatorname{tg} a \cot \frac{a}{2}$$

$$\frac{1}{\cos a} + 1 = \operatorname{tg} a \cot \frac{a}{2}$$

$$\frac{1 - \cos a}{\cos a} = \operatorname{tg} a \operatorname{tg} \frac{a}{2}$$

$$\frac{1}{\cos a} - 1 = \operatorname{tg} a \operatorname{tg} \frac{a}{2}$$

$$\sin a \cos b = \frac{1}{2} \sin(a+b) + \frac{1}{2} \sin(a-b)$$

$$\sin a \sin b = \frac{1}{2} \cos(a-b) - \frac{1}{2} \cos(a+b)$$

$$\cos a \cos b = \frac{1}{2} \cos(a+b) + \frac{1}{2} \cos(a-b)$$

$$\operatorname{arc} \sin x \pm \operatorname{arc} \sin y = \operatorname{arc} \sin (x \sqrt{1-y^2} \pm y \sqrt{1-x^2})$$

$$\operatorname{arc} \cos x \pm \operatorname{arc} \cos y = \operatorname{arc} \cos [xy \mp \sqrt{(1-x)^2(1-y^2)}]$$

$$\operatorname{arc} \operatorname{tg} x \pm \operatorname{arc} \operatorname{tg} y = \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{x \pm y}{1 \mp xy}$$

$$\operatorname{arc} \cot x \pm \operatorname{arc} \cot y = \operatorname{arc} \cot \frac{xy \mp 1}{y \pm x}$$

$$\operatorname{arc} \sin(-x) = -\operatorname{arc} \sin x$$

$$\operatorname{arc} \cos(-x) = \pi \pm \operatorname{arc} \cos x$$

$$\operatorname{arc} \operatorname{tg}(-x) = -\operatorname{arc} \operatorname{tg} x$$

$$\operatorname{arc} \cot(-x) = -\operatorname{arc} \cot x$$



Im Verlage von Friedr. Brandstetter in Leipzig ist ferner erschienen:

Lübsen, H. B., Ausführliches Lehrbuch der Analysis zum Selbstunterricht und mit Rücksicht auf die Zwecke des praktischen Lebens. Siebente, verbesserte Auflage. gr. 8. (204 S.) 3,60 M.

—, **Ausführliches Lehrbuch der Arithmetik und Algebra** zum Selbstunterricht und mit Rücksicht auf die Zwecke des praktischen Lebens. Einundzwanzigste Auflage. gr. 8. (261 S.) 4 M.

—, **Einleitung in die Infinitesimal-Rechnung** zum Selbstunterricht. Mit Rücksicht auf das Notwendigste und Wichtigste. Mit 53 Figuren im Text. Sechste, verbesserte Auflage. gr. 8. (360 S.) 8 M.

—, **Ausführliches Lehrbuch der Elementargeometrie.** Ebene und körperliche Geometrie. Zum Selbstunterricht, mit Rücksicht auf die Zwecke des praktischen Lebens. Mit 193 Figuren im Text. Fünfundzwanzigste, verbesserte Auflage. gr. 8. (178 S.) 3 M.

—, **Ausführliches Lehrbuch der analytischen oder höheren Geometrie.** Zum Selbstunterricht, mit Rücksicht auf das Notwendigste und Wichtigste. Mit 122 Figuren im Text. Elfte Aufl. gr. 8. (210 S.) 4 M.

—, **Einleitung in die Mechanik.** Zum Selbstunterricht, mit Rücksicht auf die Zwecke des praktischen Lebens. Mit 162 Figuren im Text. Vierte Auflage. gr. 8. (309 S.) 6,80 M.

Ferner:

Schurig, Rich., Lehrbuch der Arithmetik zum Gebrauche an niederen und höheren Lehranstalten und beim Selbststudium. I. Teil. **Spezielle Zahlenlehre** (Ziffernrechnen). Zugleich ein Handbuch für Volksschullehrer. gr. 8. (286 S.) 3,60 M. II. Teil. **Allgemeine Zahlenlehre.** (Buchstabenrechnung). gr. 8. (430 S.) 6 M.

Kein gewöhnliches Lehrbuch der Arithmetik in der althergebrachten Form und den üblichen Unterrichtsmethoden sich anschliessend, sondern ein ganz eigenartiges Werk, zu welchem der Grundgedanke der durch langjährige Erfahrungen und Untersuchungen gewonnenen Überzeugung entspringen ist, dass die Lehren der Mathematik, insbesondere der Arithmetik, noch immer einer wahrhaft logischen Begründung, einer planmässigen Anordnung und einer für das stetige geschickte Fortschreiten des Lernenden geeigneten Darstellung ermangeln. Es steht daher mit Sicherheit zu erwarten, dass die von dem Herrn Verfasser dieses Buchs eingeführte methodische Vereinfachung des arithmetischen Lehrgebäudes und dessen Zurückführung auf möglichst wenige, in strenger Folge logisch fortentwickelte Sätze sich in kurzer Bahn brechen und eine allgemeine Einführung in den mathematischen Lehrkursus finden werden.

Der III. Teil, welcher unter der Presse sich befindet und mit dem das Werk seinen Abschluss findet, wird die Algebra nebst ihrer Anwendung auf die Analysis enthalten.

Löbe, Dr. M., Sammlung von Aufgaben aus der Arithmetik.

Für Gymnasien, Realschulen u. höhere Bürgerschulen. Zweite Aufl. 3 Hefte.

Heft I: Grundrechnungen mit ganzen, unbenannten und gleichbenannten Zahlen. — Grundrechnung mit ungleichbenannten Zahlen. 5 $\frac{1}{4}$ Bog. geh. 75 Pf.

Heft II: Rechnungen mit Decimalzahlen. — Rechnungen mit gemeinen Brüchen. 5 $\frac{1}{2}$ Bog. geh. 80 Pf.

Heft III: Prozentrechnung. — Verteilungs- und Mischungsrechnung. — Verhältnisse und Proportionen. 4 $\frac{3}{4}$ Bog. geh. 75 Pf.

—, **Auflösungen** zu den „Aufgaben aus der Arithmetik“
Heft 1—3. 3 $\frac{1}{4}$ Bog. geh. 1 M.

schienen:
um Selbst-
m Lebens.

Algebra
rationalen

istunter-
Mit 33
) 8 M.

Ebene
at auf die
Fünftai-

Höheren

igste mal
S.) 4 M.

ht, mit
Figuren

uche an
l Teil
cken für
Zahlen-

nd den
Werk, zu
weisen
rthmisch,
mit einer
graph. Be-
stimmte die
Klärung
von Zahlen
weisen
den Klä-

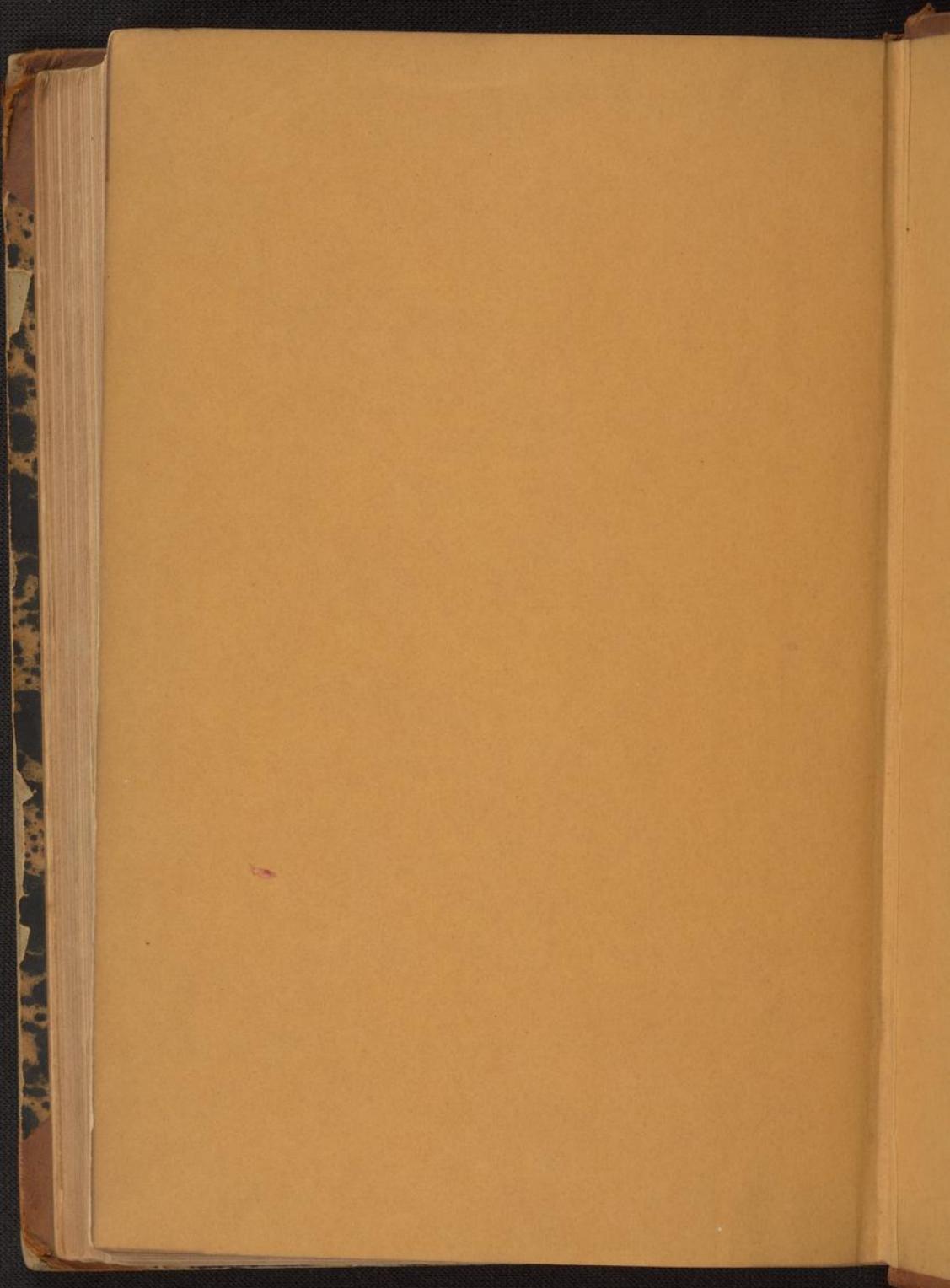
metik.

l Hefte.
annaten
i Bog.

meinen

ng. —

metik“



38 27733 2 031

