Beiträge zur Theorie der statischen Elektricität

Zehfuss, Johann Georg

Frankfurt a.M., 1865

Art. 10

Art. 10.

Bei Berechnung der Induction in s. g. abgeleiteten Körpern pflegt man die Potentialfunction gleich Null zu setzen für alle Punkte der Oberfläche. Es soll gezeigt werden, dass die Nichtberücksichtigung des mit A verbundenen Erdkörpers unrichtige Resultate erzeugt Wenn also a den Ort der inducirenden Masse M, und Q die im abgeleiteten Zustande auf A befindliche inducirte Gesammtmasse bedeutet, so gelten für den alleinigen Körper A die Grundgleichungen:

$$
\begin{array}{llllll}
-\,iQ:A + & k_1 + & k_2 + & k_3 + & \dots\ k_i & = 0 \\
 & & 1_2 k_2 + & 1_3 k_3 + & \dots\ 1_i\, k_i & = -iMa_1:A \\
 & 2_1 k_1 & & +\, 2_3 k_3 + & \dots\ 2_i\, k_i & = -iMa_2:A \\
 & 3_1 k_1 + & 3_2 k_2 & & + \dots & = -iMa_3:A \\
 & 4_1 k_1 + & 4_2 k_2 + & 4_3 k_3 & \dots & = -iMa_4:A \\
 & \cdot & \cdot & \cdot\ \ \cdot & \cdot\ \ \cdot & \cdot\ \ \cdot\ \ \cdot \\
 & \cdot & \cdot & \cdot\ \ \cdot & \cdot\ \ \cdot & \cdot\ \ \cdot\ \ \cdot \\
 & i_1 k_1 + & i_2 k_2 + & i_3 k_3 + & \dots & = -iMa_i:A
\end{array}
$$

Hieraus folgt

$$
Q = M.\ \lim. \left|
\begin{array}{lllllll}
 & 1 & 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\
a_1 & & 1_2 & 1_3 & 1_4 & \dots & 1_i \\
a_2 & 2_1 & & 2_3 & 2_4 & \dots & 2_i \\
a_3 & 3_1 & 3_2 & & 3_4 & \dots & 3_i \\
a_4 & 4_1 & 4_2 & 4_3 & & \dots & 4_i \\
 \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
 \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & e_i \\
a_i & i_1 & i_2 & i_3 & \dots & i_e &
\end{array}
\right| : A \ \dots\dots\ (25)
$$

also, falls die reciproken Entfernungen $a_1, a_2, a_3 \dots$ bei etwas weit entferntem M verhältnissmässig wenig von der mittleren reciproken Entfernung $1:a$ zwischen M und A abweichen:

$$Q = \frac{M}{a} \lim . \begin{vmatrix} & 1 & 1 & 1 & 1 & \ldots 1 \\ 1 & & 1_2 & 1_3 & 1_4 & \ldots 1_i \\ 1 & 2_1 & & 2_3 & 2_4 & \ldots 2_i \\ 1 & 3_1 & 3_2 & & 3_4 & \ldots 3_i \\ 1 & 4_1 & 4_2 & 4_3 & & \ldots 4_i \\ . & . & . & . & & .\ . \\ . & . & . & . & & .\ . \\ 1 & i_1 & i_2 & i_3 & & \ldots \end{vmatrix} : \Lambda$$

oder

$$Q = \frac{M}{a} \lim \frac{\Omega}{\Lambda}.$$

Nach (20) ist aber der letzte Grenzwerth gleich dem negativen Betrage derjenigen Masse M_1, welche bei freier Ausbreitung auf dem isolirten Körper A eine der Einheit gleiche constante Potentialfunction erzeugt. Mithin wäre

$$Q = -\frac{M}{a} M^1,$$

also z. B. auf einer Kugel vom Halbmesser r:

$$Q = -M . \frac{r}{a}.$$

Ebenso entspringt aus den vorigen Grundgleichungen

$$k_1 = -\frac{M}{A} \lim . \frac{i}{\Lambda} \begin{vmatrix} a_1 & 1_2 & 1_3 & 1_4 & \ldots & 1_i \\ a_2 & & 2_3 & 2_4 & \ldots & 2_i \\ a_3 & 3_2 & & 3_4 & \ldots & 3_i \\ a_4 & 4_2 & 4_3 & & \ldots & 4_i \\ . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . \\ a_i & i_2 & i_3 & i_4 & \ldots & \end{vmatrix}$$

Sind nun wegen beträchtlicher Entfernung der Masse M die reciproken Distanzen a_1, a_2, a_3 ... verhältnissmässig ziemlich gleich, so kann man wieder allgemein

$$a_i = \frac{1}{a} + \frac{\alpha_i}{a^2}$$

setzen, wobei a und α dieselbe Bedeutung haben, wie in Art. 9. Hiernach entstünde

$$k_1 = -\frac{M}{a\,A} \lim \frac{i\,\Pi}{\Lambda} - \frac{M}{a^2 A} \lim \frac{i}{\Lambda} \begin{vmatrix} \alpha_1 & 1_2 & 1_3 & \dots & 1_i \\ \alpha_2 & & 2_3 & \dots & 2_i \\ \alpha_3 & 3_2 & & \dots & 3_i \\ . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . \\ \alpha_i & i_2 & i_3 & \dots & \end{vmatrix}$$

Nach (19) repräsentirte nun der erste Theil dieses Ausdruckes die Dichte, welche in dem Punkte 1 auf dem isolirten Körper A bei freier Ausbreitung seines durch Induction hervorgerufenen elektrischen Gehaltes entstehen würde. Der zweite Theil, welcher eine um eine Einheit höhere Potenz von a im Nenner enthält, als der erste, wird bei grossen Werthen von a den ersten nicht wesentlich modificiren. Wir hätten also das Resultat gewonnen, dass sich die auf einer abgeleiteten Fläche A durch Induction Seitens einer hinreichend entfernten Masse M hervorgerufene Elektricität ebenso ausbreitet, als befände sie sich ausserhalb des Einflusses von M auf der isolirten Fläche A was der Erfahrung augenscheinlich widerstreitet.

Die auf einem abgeleiteten Körper inducirte Elektricitätsmenge wäre nach obigen Formeln, als der verkehrten ersten Potenz der Entfernung der inducirenden Masse proportional, nicht im Vergleich zu setzen mit der Menge der auf dem isolirten Körper geschiedenen Fluida, welche letztere mit dem Quadrate der Entfernung abnimmt. Auch hier finden sich sonach Widersprüche mit den Erfahrungen von Coulomb, J. Müller*) u. A.

Aus der mehrfach citirten Gauss'schen Schrift**) geht hervor, dass die elektrische Gesammtmasse Q, die auf einer geschlossenen abgeleiteten Fläche durch Induction Seitens eines elektrischen Massenpunktes M entsteht, welcher sich innerhalb des von ihr umschlossenen Raumes befindet, genau gleich — Q ist. Bedeutet also a einen innerhalb einer geschlossenen Fläche liegenden Punkt, so muss nach (25) folgende eigenthümliche Relation zwischen zwei Potentialdeterminanten gelten:

$$\lim. \left| \begin{array}{cccccc} & 1 & 1 & 1 & \ldots & 1 \\ a_1 & & 1_2 & 1_3 & \ldots & 1_i \\ a_2 & 2_1 & & 2_3 & \ldots & 2_i \\ a_3 & 3_1 & 3_2 & & \ldots & 3_i \\ . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . \\ a_i & i_1 & i_2 & \ldots & & \end{array} \right| : \Lambda = -1, \ldots . \quad (26)$$

Ich bemerke, dass in den Formeln dieses und des vorigen Artikels die reciproken Entfernungen a_1, a_2, . . . z. B. für äussere etwas entfernte inducirende Massenpunkte bei beliebiger Flächenform allgemein vollständig nach fallenden Potenzen der mittleren Entfernung a entwickelt werden können. Von solchen Entwickelungen, die bei Kugelflächen bekanntlich auf Kugelfunctionen führen, haben wir oben nur die allerersten Glieder berücksichtigt, da die höheren hinsichtlich der allgemeinen Form des Resultates keine wesentlich andere Erscheinungen hervorbringen.

Man könnte an dem in diesem Artikel angewandten Begriffe einer sogenannten abgeleiteten Fläche Anstoss nehmen, sofern es hinsichtlich des ableitenden Drahtes nicht gleichzeitig sein kann, wie er gestaltet und

*) Lehrbuch der Physik, 1863, S. 120.

**) Art. 26, I. und Art. 27.

an welcher Stelle der Fläche A er angelegt ist. Dies ist allerdings richtig bei Drähten von solcher Dicke, dass die auf ihnen sich anhäufende entgegengesetzte Elektricitätsmenge noch wesentlich mit dazu beitragen muss, den Nullwerth der Potentialfunction auf der ganzen Oberfläche zu bedingen. Denkt man sich dagegen den Draht so unendlich dünn, dass die Anzahl der seiner Oberfläche zukommenden gleichen Flächenelemente verschwindend klein ist gegen die Gesammtzahl i aller Flächenelemente, so ist ersichtlich, dass auch in den obigen Potentialdeterminanten der Einfluss der dem Ableitungsdraht entsprechenden Glieder gegenüber dem Werthe der unendlich zahlreicheren übrigen Glieder zuletzt verschwinden muss. Die oben erwähnten Abweichungen rühren also von einer anderen Ursache her, welche darin zu suchen ist, dass man auf abgeleiteten Flächen die Potentialfunction einer wirklichen Null gleichzusetzen pflegt, anstatt ihr nur einen unbekannten sehr kleinen Werth zu verleihen, der seinen Einfluss wegen der unendlichgrossen Anzahl von Gleichungen doch zur Geltung bringt. Die Rechnung ist demnach ganz analog derjenigen für einen isolirten Körper anzustellen, der aus der Vereinigung von A mit dem Erdkörper entsteht, und führt dann zu richtigen Resultaten. Die durch mancherlei dabei zu berücksichtigende Umstände bedingte Weitläufigkeit verbietet jedoch, hier näher darauf einzugehen. Uebrigens behalten die in diesem Artikel gefundenen Formeln ihre volle Giltigkeit, sobald die Potentialfunction gänzlich Null ist, wie z. B. die Formel (26).

Art. II.

Es soll nun die elektrische Dichte an einem beliebigen Punkte des mit der Masse m belegten Leiters a betrachtet werden, auf welchen verschiedene andere Massen

$$M_1, M_2, M_3 \ldots$$

inducirend einwirken, die jedoch nicht, wie diess in den