Beiträge zur Theorie der statischen Elektricität

Zehfuss, Johann Georg

Frankfurt a.M., 1865

Art. 9

urn:nbn:de:bsz:31-272352

Art 9.

Es möge nun zur Betrachtung der Induction, welche Seitens eines isolirten in a befindlichen elektrischen Massenpunktes M auf einer Fläche A erfolgt, übergegangen, zuvor jedoch der hierhergehörige von Green*) aufgestellte Lehrsatz bewiesen werden: Die Potentialfunction V in irgend einem Punkte b, herrührend von der aus dem Punkte a durch die Masse M inducirten Oberfläche A ist ebensogross als die Potentialfunction in a, herrührend von der durch dieselbe in b befindliche Masse M hervorgebrachten Induction von A.

Die Grundgleichungen sind hier offenbar, wenn x dasselbe bedeutet wie in Art. 7:

$$
\begin{array}{rl}
x_1 + x_2 + x_3 \ldots + x_i & = 0 \\
-V + b_1 x_1 + b_2 x_2 + b_3 x_3 \ldots b_i x_i & = 0 \\
-C + 1_2 x_2 + 1_3 x_3 \ldots 1_i x_i & = -a_1 M \\
-C + 2_1 x_1 + 2_3 x_3 \ldots 1_i x_i & = -a_2 M \\
-C + 3_1 x_1 + 3_2 x_2 \ldots 3_i x_i & = -a_3 M \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots & \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots & \\
-C + i_1 x_1 + i_2 x_2 + i_3 x_3 \ldots & = -a_i M,
\end{array}
$$

wo C den constanten Werth der Potentialfunction auf den Grenzflächen vorstellt. Daraus ergibt sich

$$
V = \frac{M}{\Omega}\left|\begin{array}{ccccccc}
 & & 1 & 1 & 1 & \ldots & 1 \\
 & & b_1 & b_2 & b_3 & \ldots & b_i \\
1 & a_1 & & 1_2 & 1_3 & \ldots & 1_i \\
1 & a_2 & 2_1 & & 2_3 & \ldots & 2_i \\
1 & a_3 & 3_1 & 3_2 & & \ldots & 3_i \\
. & . & . & . & . & . & . \\
. & . & . & . & . & . & e_i \\
1 & a_i & i_1 & i_2 & \ldots i_{\bullet} & &
\end{array}\right| \quad \ldots\ldots \quad (22)
$$

*) l. c. §. 6.

wobei Ω dieselbe Bedeutung hat, wie in (18), also unabhängig von a und b ist. Da aber in der vorigen Determinante die Zeilen mit den bezüglichen Colonnen vertauscht werden können, so ändert sich ihr Werth nicht, wenn man die Buchstaben a und b untereinander verwechselt, was zu beweisen war. Ich habe indessen diesen Satz nur angeführt, um die Biegsamkeit zu zeigen, welche die Potentialtheorie gewinnt, sobald sie mit derjenigen der Determinanten verbunden wird.

Das zu Eingang dieses Artikels erwähnte Problem der Induction eines isolirten Leiters A durch einen einzigen in a befindlichen Massenpunkt M gibt zu folgenden Grundgleichungen Veranlassung, in denen — Q die gegebene algebraische Summe des elektrischen Gehalts des isolirten Leiters vorstellt:

$$\begin{array}{llllll}
 & k_1 & +k_2 & +k_3 & \dots k_i & = -iQ \quad :A \\
-iV:A+ & & k_2 1_2 & +k_3 1_3 + & \dots k_i 1_i & = -ia_1 M:A \\
-iV:A & +k_1 2_1 & & +k_2 2_3 + & \dots k_i 2_i & = -ia_2 M:A \\
-iV:A & +h_1 3_1 & +k_2 3_2 & & \dots k_i 3_i & = -ia_3 M:A \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
-iV:A & +k_1 i_1 & +k_2 i_3 \dots & & & = -ia_i M:A
\end{array}$$

Daraus ergibt sich

$$k_1 = -\frac{M}{A} \lim. \frac{i}{\Omega} \begin{vmatrix}
 & \frac{Q}{M} & 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\
1 & a_1 & 1_2 & 1_3 & 1_4 & \dots & 1_i \\
1 & a_2 & & 2_3 & 2_4 & \dots & 2_i \\
1 & a_3 & 3_2 & & 3_4 & \dots & 3_i \\
1 & a_4 & 4_2 & 4_3 & & \dots & 4_i \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & e_i \\
1 & a_i & i_2 & i_3 & \dots & & i_e
\end{vmatrix}$$

Wenn wir dieses Resultat zerlegen in einen von Q abhängigen und einen von diesem ursprünglichen Quantum unabhängigen Theil, so entsteht

$$k_1 = \frac{Q}{A} \lim . \frac{i\Pi}{\Omega} - \frac{M}{A} \lim . \frac{i}{\Omega} \begin{vmatrix} & & 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & a_1 & 1_2 & 1_3 & 1_4 & \dots & 1_i \\ 1 & a_2 & & 2_3 & 2_4 & \dots & 2_i \\ 1 & a_3 & 3_2 & & 3_4 & \dots & 3_i \\ 1 & a_4 & 4_2 & 4_3 & & \dots & 4_i \\ . & . & . & . & . & . & . \\ 1 & a_i & i_2 & i_3 & i_4 & \dots & \end{vmatrix} \quad \dots (23)$$

Der von Q abhängige Theil repräsentirt aber nach (21) geradezu diejenige Dichte, welche im Punkte 1 entstehen würde, wenn sich das elektrische Quantum — Q frei über den Leiter A ausbreitete. Der zweite mit einer Determinante versehene Theil drückt also die von Q unabhängige durch die Induction Seitens M entstehende Dichte aus.

Der elektrische Gesammtzustand der Fläche A besteht also aus der algebraischen Uebereinanderlagerung der aus freier Ausbreitung des Gehaltes Q und der durch Induction Seitens M auf der neutralen Fläche entstehenden Dichte.*)

Wenn der Punkt a ziemlich weit von dem inducirten Körper A entfernt ist, so dass die reciproken Distanzen a_1, a_2 ... nicht viel von der reciproken mittleren Entfernung 1 : a etwa des Schwerpunktes von A abweichen, so kann die letzte Determinante, wenn allgemein

$$a_i = \frac{1}{a - \alpha_i} = \frac{1}{a} + \frac{\alpha_i}{a^2}$$

gesetzt wird, offenbar nach Weglassung der den Gliedern der ersten Colonne proportionalen constanten Theile $\frac{1}{a}$ geschrieben werden

*) Munck af Rosenschöld, Poggendorff's Ann. LXIX.

$$k_1 = -\frac{1}{a^2}\cdot\frac{M}{A}\lim\frac{i}{\Omega}\left|\begin{array}{ccccccc} & & 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & \alpha_1 & 1_2 & 1_3 & 1_4 & \dots & 1_i \\ 1 & \alpha_2 & & 2_3 & 1_4 & \dots & 2_i \\ 1 & \alpha_3 & 3_2 & & 3_4 & \dots & 3_i \\ 1 & \alpha_4 & 4_2 & 4_3 & & \dots & 4_i \\ . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . \\ 1 & \alpha_i & i_2 & i_3 & \dots & i_e & \end{array}\right| \quad \dots (24)$$

In diesem Ausdrucke der Dichte der inducirten Elektricität im Punkte 1 bedeuten die Grössen $\alpha_1, \alpha_2, \dots$ offenbar die auf den Schwerpunkt bezogenen Abscissen der Punkte 1, 2, 3 des Körpers A, geschätzt nach der Richtung der Entfernung a der inducirenden Masse M Die letzte Formel zeigt überdiess, dass unter sonst gleichen Umständen die durch Induction entstandene Dichte auf einem isolirten Leiter dem Quadrate der Entfernung verkehrt proportional ist, sobald die inducirende Masse M hinlänglich weit von dem inducirten Körper entfernt ist.

Dehnen wir das Integral

$$\int k\,ds$$

über alle diejenigen Oberflächentheile von A aus, in welchen die Dichte mit k von einerlei Zeichen ist, so entsteht der Satz:

Die durch Induction Seitens einer Masse M in einem beliebig geformten Leiter A geschiedene Gesammtmenge elektrischen Fluidums ist dem Quadrate der mittleren Entfernung des Punktes M von A verkehrt proportional, wenn die inducirende Masse hinlänglich weit von A entfernt ist.