Beiträge zur Theorie der statischen Elektricität

Zehfuss, Johann Georg

Frankfurt a.M., 1865

Art. 8

Zweite Abtheilung.

Mathematische Ausdrücke über die Vertheilung der statischen Elektricität.

Art. 8.

Die thatsächliche Vorausbestimmung der Vertheilung der Massen M auf den Oberflächen der m Körper A für jede beliebige Form und gegenseitige Lage der Letzteren ist ein bis jetzt ungelöstes Problem. Im nachfolgenden werde ich zeigen, wie seine Auflösung auf diejenigen bestimmten mathematischen Ausdrücke zurückführbar ist, welche von Cauchy „Determinanten" genannt worden sind. Wenn auch die numerische Auswerthung der dabei erscheinenden Determinanten bis jetzt häufig unthunlich sein wird, so lassen sich doch im Anschlusse an die biegsamen Formen derselben eine Menge allgemeiner Sätze über die elektrische Vertheilung daraus ableiten. Es möge daher genügen, ein paar Schritte auf der Brücke zweier seither getrennt gewesenen mathematischen Theorien zu thun, das Weitere dem ferneren Ausbaue der Determinantentheorie überlassend.

Wenn sonst in den meisten Fällen die durch die Variationsrechnung gefundenen Werthe unbekannter Functionen k sich direct oder durch eine Differentialgleichung explicite darstellen, so ist diessmal das Resultat in einer unendlichen Anzahl von Gleichungen (4) enthalten, welche k unter dem bestimmten Integralzeichen einschliessen. Die explicite Darstellung der Lösung kann also nur durch weitere Verfolgung der Gleichungen (4) erlangt werden. Der einzuschlagende Weg ist im vorigen Artikel vorgezeichnet, und beruht auf der Auflösung eines Systems linearer Gleichungen mit unzählig vielen Unbekannten.

Der Einfachheit halber soll das Problem der Vertheilungsbestimmung nun zunächst betrachtet werden für den Fall eines einzigen mit der elektrischen Masse M versehenen Leiters, auf welchen keine weitere Massen inducirend einwirken.

Ich denke mir seine Grenzflächen A in eine unendlichgrosse Anzahl i gleicher Theile getheilt. Die etwa in ihren Schwerpunkten concentrirt gedachten elektrischen Massen der einzelnen Theilchen mögen durch

$$\frac{A}{i}k_1,\ \frac{A}{i}k_2,\ \frac{A}{i}k_3,\ \ldots \frac{A}{i}k_i$$

ausgedrückt sein, wo k die Dichte bezeichnet. Die gegenseitige in die Einheit dividirte Entfernung des t^{ten} Theilchen's vom u^{ten} sei nach einer Bezeichnung von Leibnitz*) durch das Zeichen

$$t_u$$

vorgestellt, so dass z. B. die reciproke Entfernung des 1^{ten} und 2^{ten} Theilchens gleich 1_2 oder 2_1 wäre. Die Gleichungen, welche eine constante Potentialfunction $\overline{V}$ und die constante Gesammtmasse M ausdrücken, würden sich, wie man leicht sieht, auch auf räumlichen Massenvertheilungen anwenden lassen.

---

*) Brief an Marquis de l'Hospital vom 28. April 1693, S. Leibnitz, mathematische Schriften, herausgegeben von Gerhardt. Band II, Seite 239.

Diese Grundgleichungen heissen:

$$\left.\begin{array}{llllll}
k_1 & +k_2 & +k_3 & +k_4 & \ldots +k_i & = i\,M:A \\
 & k_2 1_2 & +k_3 1_3 & +k_4 1_4 & + \ldots +k_i 1_i & = i\,V:A \\
k_1 2_1 & & +k_3 2_3 & +k_4 2_4 & \ldots +k_i 2_i & = i\,V:A \\
k_1 3_1 & +k_2 3_2 & & +k_4 3_4 & \ldots +k_i 3_i & = i\,V:A \\
k_1 4_1 & +k_2 4_2 & +k_3 4_3 & . & \ldots +k_i 4_i & = i\,V:A \\
. & . & . & . & . \quad . & . \; . \; . \\
. & . & . & . & . \quad . & . \; . \; . \\
k_1 i_1 & +k_2 i_2 & +k_3 i_3 & . \;.\; . & k_e i_e & = i\,V:A
\end{array}\right\} \ldots (15)$$

wo e den der Zahl i vorangehenden Index (i — 1) bezeichnet. Hieraus ergeben sich, wenn der Kürze halber die Determinanten

$$\begin{vmatrix}
 & 1_2 & 1_3 & 1_4 & \ldots & 1_i \\
2_1 & & 2_3 & 2_4 & & 2_i \\
3_1 & 3_2 & & 3_4 & & 3_i \\
4_1 & 4_2 & 4_3 & & \ldots & 4_i \\
. & . & . & . & \ldots & . \\
. & . & . & . & \ldots & i_e \\
i_1 & i_2 & i_3 & \ldots & i_e &
\end{vmatrix} = \Lambda \ldots\ldots (16)$$

$$\begin{vmatrix}
1 & 1_2 & 1_3 & 1_4 & \ldots & 1_i \\
1 & & 2_3 & 2_4 & \ldots & 2_i \\
1 & 3_2 & & 3_4 & \ldots & 3_i \\
1 & 4_2 & 4_3 & & \ldots & 4_i \\
. & . & . & . & \ldots & . \\
. & . & . & . & \ldots & e_i \\
1 & i_1 & i_2 & i_3 & \ldots & i_e
\end{vmatrix} = \Pi \ldots\ldots (17)$$

$$\begin{vmatrix}
 & 1 & 1 & 1 & 1 & \ldots & 1 \\
1 & & 1_2 & 1_3 & 1_4 & \ldots & 1_i \\
1 & 2_1 & & 2_3 & 2_4 & \ldots & 2_i \\
1 & 3_1 & 3_2 & & 3_4 & \ldots & 3_i \\
1 & 4_1 & 4_2 & 4_3 & & \ldots & 4_i \\
. & . & . & . & . & \ldots & . \\
. & . & . & . & . & \ldots & e_i \\
1 & i_1 & i_2 & i_3 & \ldots & i_e &
\end{vmatrix} = \Omega \ldots\ldots (18)$$

gesetzt werden, folgende Werthe der Unbekannten:

$$k_1 = \frac{V}{A} \quad \text{lim. } i\, \frac{\Pi}{\Lambda} \; \ldots\ldots\ldots \; (19)$$

$$V = -M \,\text{lim. } \frac{\Lambda}{\Omega} \; \ldots\ldots \; (20)$$

$$k_1 = -\frac{M}{A} \,\text{lim. } i\, \frac{\Pi}{\Omega} \; \ldots\ldots\ldots \; (21)$$

Es genügt hier offenbar, den Werth von k_1 ausgedrückt zu haben, da sich für die Dichten anderer Punkte ganz analoge Formeln ergeben. Dieselben Ausdrücke würden auch noch ihre Giltigkeit bewahren, wenn man sich unter A:i das Volumelement, unter k die Dichte im Inneren vorstellte, und die i Indices auf alle gleiche Volumelemente des Körpers A vertheilte. In diesem Falle müsste, da k bei Annahme des Newton'schen Gesetzes für innere Punkte verschwindet, die Potentialdeterminante Π den Werth Null erhalten, so oft der Index von k einem inneren Punkte zukäme Dieser und ähnliche Sätze lassen sich freilich nicht geradezu aus dem Anblicke der Potentialdeterminanten ableiten; es würde dazu theilweise der Berücksichtigung von Relationen zwischen den reciproken Entfernungen beliebiger Raumpunkte bedürfen, deren Uebertragung auf die Potentialdeterminanten Schwierigkeiten haben möchte. So findet nach Cayley*) zwischen den Quadraten (rs) der gegenseitigen Entfernungen von fünf Raumpunkten folgende Relation statt

$$\begin{vmatrix} & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & & 12 & 13 & 14 & 15 \\ 1 & 21 & & 23 & 24 & 25 \\ 1 & 31 & 32 & & 34 & 35 \\ 1 & 41 & 42 & 43 & & 45 \\ 1 & 51 & 52 & 53 & 54 & \end{vmatrix} = 0.$$

*) Baltzer, Theorie der Determ.

Hinsichtlich des Baues der Potentialdeterminanten Λ, Π, Ω, ist hervorzuheben, dass darin, falls benachbarte Indices zugleich benachbarten Flächentheilchen entsprechen, was jedoch nicht nothwendig der Fall zu sein braucht, unendlichgrosse Glieder verschiedener Ordnungen vorkommen, wie z B.

$$i_1\, 1_2\, 2_3 \ldots h_n \ldots i_e, \text{ und } i_n\, 1_2\, 2_3 \ldots h_1 \ldots i_e,$$

wo h und n etwa $= \frac{1}{2}$ i sein mögen. Zum Vortheil für die numerische Auswerthung scheinen die Glieder niederer Ordnung vernachlässigt werden zu können. Allein dass dem nicht so ist, stellt sich heraus, wenn man bedenkt, dass letztere in unendlich grösserer Anzahl vorhanden sind.

Für die Giltigkeit mancher der nachfolgenden Schlüsse ist schon die blosse Form der Potentialdeterminanten entscheidend. Es wird nicht nöthig sein, diese Fälle besonders hervorzuheben, in welchen also auch von Newton'schen abweichende Abstossungsgesetze angenommen werden dürfen.

Als eine leichte Folge der Formeln dieses Artikels lässt sich noch bemerken, dass auf jeder Isopotentialfläche gegebener elektrischer Massen keine Vertheilung durch Induction Seitens dieser Massen eintritt. Denn setzt man, um für diesen Fall die Grundgleichungen zu bilden, in dem System (15) anstatt V überall V — C, wo C die auf der ganzen Fläche constante Potentialfunction jener Massen bedeutet, und die algebraische Summe der Massen $M = o$, so ergibt die Formel (21), dass $k = o$. So wird z. B. auf einer Kugelfläche oder einem Stücke derselben keine Induction eintreten, wenn auf einer durch den Mittelpunkt gehenden Geraden innerhalb und ausserhalb der Kugel zwei entgegengesetzte Massenpunkte so placirt werden, dass sie mit den Eintreffpunkten der Centrallinie in die Kugelfläche zwei conjugirte harmonische Punkte bilden und ihre Massen sich verhalten, wie ihre Abstände von den nächsten Punkten der Oberfläche.