

Badische Landesbibliothek Karlsruhe

Digitale Sammlung der Badischen Landesbibliothek Karlsruhe

Beiträge zur Theorie der statischen Elektrizität

Zehfuss, Johann Georg

Frankfurt a.M., 1865

Art. 4

[urn:nbn:de:bsz:31-272352](https://nbn-resolving.org/urn:nbn:de:bsz:31-272352)

und (7), oder der Gleichgewichtszustand, ein Verschwinden der ersten Variation von W bedingt, so ist doch die Gleichung (3) oder $\delta W = 0$ nicht hinreichend, nothwendig ein Minimum zu constatiren. Man weiss, es wird hierzu noch der Nachweis erfordert, dass die zweite Variation $\delta^2 W$ stets positiv sei. Dieser Nachweis soll in einem der nächsten Artikel geführt werden.

Art. 4.

Die in Rede stehende zweite Variation von W ist

$$2 \delta^2 W = \sum_i \sum_j \iint \frac{\delta k_i \delta k_j}{r_{i,j}} ds_i ds_j,$$

und geht offenbar aus dem unter (2) aufgeführten Werthe von W hervor, indem man k mit δk vertauscht. Also kann $\delta^2 W$ als das Potential einer den Körpern A zugetheilten Elektrizitätsmenge angesehen werden, deren Dichte durch die willkürliche Variation von k ausgedrückt ist. Soll also gezeigt werden, dass unter diesen Umständen $\delta^2 W$ stets positiv ist, so genügt es, den allgemeinen Satz zu beweisen:

Bei jeder stetigen gleichartigen oder ungleichartigen Vertheilung ist das Potential der den beliebigen isolirten Leitern (1) zugetheilten Elektrizitätsmengen auf sich selbst, eine positive Grösse, die Fluida mögen nun auf den Grenzflächen oder auch im Innern der einzelnen Körper sich befinden, einerlei ob Gleichgewicht vorhanden sei oder nicht.

Ich schliesse hierbei nur den Fall aus, dass positive und negative Theilchen gleichförmig durcheinandergemengt vorkämen; man könnte sich nämlich alsdann ein nicht weiter wirksames neutrales Fluidum denken, und ausserdem einen resultirenden Ueberschuss von Theilchen einerlei Gattung. Indem wir also nach dem Vorgange der Natur dem Fluidum eine im allgemeinen stetige Vertheilung ohne plötzlichen Wechsel des positiven und negativen Zu-

standes beilegen, hat jedes kleine Theilchen bekanntlich noch ein positives Potential auf sich selbst, was nicht stattfindet, wenn man den allgemeinen Ausdruck desselben

$$\sum \frac{M_i M_j}{r_{i,j}}$$

auf discrete für sich untheilbare Punkte anwendet. Denken wir uns z. B. drei elektrische Punkte, deren gegenseitige Abstände = 1, und deren Massen = +M, -M, -M, so ist das Potential auf sich selbst = -M² - M² + M², also negativ, weil die an sich unstatthaften Potentiale der mathematischen Punkte auf sich selbst nicht mitgerechnet wurden.

Ehe nun die Begründung des oben ausgesprochenen Hauptsatzes erfolgt, bedarf ich des von Green*) entdeckten Satzes:

$$-\int ds \bar{v} \frac{d\bar{v}}{d\omega} - \iiint dx dy dz \, v \nabla v = \iiint dx dy dz \left[\left(\frac{dv}{dx} \right)^2 + \left(\frac{dv}{dy} \right)^2 + \left(\frac{dv}{dz} \right)^2 \right] \dots\dots (8)$$

in welchem sich das einfache Integral über die gesammte Grenzfläche eines Körpers, das dreifache über das ganze Innere desselben erstreckt. V möge die Potentialfunction von Massen bedeuten, welche nach Belieben innerhalb, ausserhalb oder auf den Grenzflächen vertheilt sind, ω die nach dem Inneren des Körpers gerichtete Normale. Da die Giltigkeit dieses Satzes für mehrfach zusammenhängende Körper von Helmholtz**) in Zweifel gezogen wird, so musste es mir natürlich daran gelegen sein, die Begründung desselben zu revidiren, da ohne dessen Bestehen das Verhalten der Elektrizität in mehrfach zusammenhängenden Körpern eine exceptionelle Stellung einnehmen würde.

*) An Essay etc, §. 3.

**) Ueber Integrale der hydrodynamischen Gleichungen, welche den Wirbelbewegungen entsprechen, Crelle's Journal. Band 55.

Wir betrachten eine der X Axe parallele, den Körper A im allgemeinen mehrfach durchschneidenden Gerade als Axe eines Prismas von der Grundfläche $dy dz$. Aus der identischen Gleichung

$$\frac{d}{dx} \left(v \frac{dV}{dx} \right) = \left(\frac{dV}{dx} \right)^2 + v \frac{d^2V}{dx^2}$$

ergibt sich, dass das Integral

$$\int \left[\left(\frac{dV}{dx} \right)^2 + v \frac{d^2V}{dx^2} \right] dx,$$

ausgedehnt über diejenigen Stücke jener Geraden, welche innerhalb der zum Körper A zusammenhängend gehörigen, mit leitender Substanz erfüllten Räume liegen, gleich

$$\sum \varepsilon v \frac{dV}{dx}$$

ist, wobei für $v \frac{dV}{dx}$ dessen Werthe für die aufeinanderfolgenden Schnittpunkte der Geraden mit den Grenzflächen von A zu setzen sind, und ε im ersten, dritten fünften . . . Schnittpunkte gleich -1 , im zweiten, vierten . . . dagegen gleich $+1$ zu setzen ist. Indem wir nun auf alle solche der X Axe parallel laufende Prismata von der Grundfläche $dy dz$, in welche der ganze Körper A durch geeignete unendlichkleine Aenderungen von y und z zerlegt werden kann, den letzten Satz anwenden, erhalten wir durch Integration nach y und z zwischen den geeigneten Grenzen

$$\iiint \left[\left(\frac{dV}{dx} \right)^2 + v \frac{d^2V}{dx^2} \right] dx dy dz = \sum \iint v \varepsilon \frac{dV}{dx} dy dz.$$

Nun ist aber offenbar $dy dz = -\varepsilon ds \cos \xi$, wenn ξ den Winkel bedeutet, der zwischen der positiven Richtung der X Axe und der nach dem Inneren des Körpers A von der Grenzfläche aus als positiv gezählten Normalen begriffen

ist. Mithin ist, wenn wir der Kürze halber $dx dy dz = dA$ setzen:

$$\iiint \left(\frac{dV}{dx} \right)^2 dA = - \iiint V \frac{d^2 V}{dx^2} dA - \sum \iint V \frac{dV}{dx} \cos \xi ds,$$

wobei sich das doppelte Integralzeichen auf alle Grenzflächen bezieht. Analog entsteht, wenn das seither zur Unterscheidung einzelner Theile beibehaltene Zeichen Σ weggelassen wird:

$$\iint \left(\frac{dV}{dy} \right)^2 dA = - \iint V \frac{d^2 V}{dy^2} dA - \iint V \frac{dV}{dy} \cos v ds,$$

$$\iint \left(\frac{dV}{dz} \right)^2 dA = - \iint V \frac{d^2 V}{dz^2} dA - \iint V \frac{dV}{dz} \cos z ds,$$

woraus sich durch Addition der unter (8) angeführte Satz ergibt, wenn man bedenkt, dass

$$\frac{dV}{dx} \cos \xi + \frac{dV}{dy} \cos v + \frac{dV}{dz} \cos z = \frac{dV}{d\omega}.$$

Man sieht, dass keine Zweifel gegen die vorstehende Beweisführung zu erheben sind, so lange es sich um die stetigen Vertheilungen handelt, welche wir in der Natur vorfinden. Die von Green stabilirten Ausnahmefälle, wo plötzlich mathematische isolirte elektrische Punkte auftreten, sind also gleichfalls nicht als hierhergehörig zu betrachten, wiewohl er bekannte Sätze daraus ableitet*).

Die Werthe von ∇V sind bei stetigen Vertheilungen im Inneren stets endlich und bestimmt; unbestimmt aber endlich sind sie**) nur an den elektrischen Grenzflächen; ihr Einfluss auf die über die Innenräume erstreckten Integrale fällt also gegen denjenigen der im Inneren unendlich reichlicher vertretenen Werthe von ∇V gänzlich weg.

Ueber den Werth von $\frac{dV}{d\omega}$ könnte nur in solchen Fäl-

*) Green, l. c. §. 3, 4. . .

**) Gauss, l. c. Art. 8.

len mehrfachzusammenhängender Körper ein Zweifel entstehen, wo der mehrfache Zusammenhang sich auf eine mathematische Berührung, den Uebergang zwischen Zusammenhängen und Nichtzusammenhängen reducirte. Allein man wird zugeben, dass auch dieser Fall in der Natur nicht existirt, indem die daselbst stattfindenden Berührungen für das elektrische Fluidum immer noch in messbarer Ausdehnung leitend hergestellt sind.

Art. 5.

Mittelst des Green'schen Satzes ist es nun nicht schwer zu beweisen, dass wenn beliebige positive oder negative elektrische Quanta beliebig vielen und willkürlich gelegenen oder geformten isolirten Körpern A_1, A_2, \dots, A_m zugetheilt sind, das Potential der gesammten in diesen Körpern und auf ihren Oberflächen vertheilten Elektrizität auf sich selbst eine positive Grösse sei, einerlei ob Gleichgewicht stattfindet oder nicht.

Jedes körperliche System macht zunächst einen Theil des Universums aus, kann also eingeschlossen gedacht werden in einer ungemein grossen Kugel. Zwischen den an den universellen Raum anstossenden äusseren Grenzflächen der nicht zu den Eingeschlossenen gehörigen Leitern und der inneren Oberfläche jener grossen Kugel befindet sich nun ein mit Höhlungen versehener Raum, auf welchen wir den Green'schen Satz (8) anwenden wollen. Nun ist die Potentialfunction aller Massen ΣM in der unendlichgrossen Entfernung R offenbar gleich

$$\frac{\Sigma M}{R},$$

also an der Kugelfläche

$$\frac{dV}{d\omega} = -\frac{dV}{dR} = \frac{\Sigma M}{R^2},$$