Beiträge zur Theorie der statischen Elektricität

Zehfuss, Johann Georg

Frankfurt a.M., 1865

Art. 2

urn:nbn:de:bsz:31-272352

jenige, welche Seitens der elektrischen Hauptfläche auf sie zurück ausgeübt wird, unberücksichtigt bleiben muss.

2) Es werden anfänglich nur gleichartige Vertheilungen betrachtet, d. h. solche, bei welchen auf der ganzen leitenden Oberfläche keine Abwechselung des positiven und negativen Zustandes eintritt.

3) Das Minimum von W wird nur für den Fall bestimmt, dass das Fluidum sich gänzlich auf der Oberfläche, nicht auch im Innern des leitenden Körpers befinde.

Im Nachfolgenden soll nun zunächst die allgemeine Untersuchung des Minimalwerthes des Potentials beliebiger, verschiedenen isolirten leitenden Körpern, zugetheilter positiver oder negativer elektrischer Massen auf sich selbst unter Berücksichtigung allgegenseitiger Induction ausgeführt werden.

Art. 2.

Ich denke mir demnach eine beliebige Anzahl m gegenseitig isolirter leitender Körper von willkührlicher Gestalt und Grösse

$$A_1, A_2, A_3, \ldots A_i, \ldots A_m. \ldots.. (1)$$

Nur die unendliche Ausdehnung sei hierbei, als in der Natur nicht existirend, ausgeschlossen. Denn ist auch die Zahl der Naturdinge sehr gross, so ist sie doch bestimmt, also unmöglich von unbestimmt unendlicher Grösse. Die Körper A können alle Leiter des ganzen Universums bedeuten.

Es möge allgemein k_1 die nach mechanischem Maasse gemessene elektrische Dichte an einer beliebigen Stelle des Körpers A_1 bezeichnen, einerlei ob dadurch die Dichtigkeit im Innern oder an der Oberfläche ausgedrückt würde, so dass die elektrische Masse eines Raum- oder auch Flächentheilchens ds_1 durch

$$k_i\, ds_i$$

zu bezeichnen wäre.

Das Potential W der vorhandenen Elektricität auf sich selbst nach mechanischem Maasse gemessen, ist nun gleich der Hälfte*) der Summe aller Producte je zweier Massetheilchen dividirt durch ihre gegenseitige Entfernung. Wenn demnach i und j irgend zwei verschiedene oder auch gleiche Indices der Reihe $A_1, A_2, \ldots A_m$ vorstellen, so haben wir offenbar

$$2\,W = \Sigma_i\, \Sigma_j \int\!\!\int \frac{k_i\, k_j}{r_{i,j}}\, ds_i\, ds_j \; \ldots\ldots (2)$$

wo in Folge des doppelten Summenzeichens jeder der beiden Indices i und j nach und nach alle Werthe 1, 2, 3 ... m durchlaufen, das eine Integralzeichen aber sich über alle Elemente des i^{ten}, das andere über alle Elemente des j^{ten} Körpers erstrecken soll, und $r_{i,j}$ die gegenseitige Entfernung der Elemente ds_i und ds_j vorstellt.

Um das Minimum des Ausdruckes (2) hinsichtlich k zu bestimmen, hat man nach den Regeln der Variationsrechnung seine Variation

$$\Sigma_i\, \Sigma_j \int\!\!\int \frac{k_i\, \delta\, k_j}{r_{i,j}}\, ds_i\, ds_j + \Sigma_i\, \Sigma_j \int\!\!\int \frac{k_j\, \delta\, k_i}{r_{i,j}}\, ds_i\, ds_j \; \ldots (3)$$

zunächst gleich Null zu setzen. Da aber die einzelnen darin vorkommenden Variationen δk nicht unabhängig sind, indem wegen der Unveränderlichkeit der jedem einzelnen isolirten Leiter zukommenden gesammten Elektricitätsmenge M für jeden Index i, j die Gleichung

$$\int k\, ds - M = o$$

gilt, so müssen nach den Regeln der Variationsrechnung

*) Nach einer Erinnerung von Clausius (Pogg. Ann. LXXXIX, 568), deren Nothwendigkeit indessen schon Gauss scheint ausdrücken zu wollen, (l. c.) wo er Art. 31 nicht $\int (V - U)\, m\, ds$, sondern $\int (V - 2\,U)\, m\, ds$ schreibt.

behufs Elimination der abhängigen Variationen die mit passenden constanten Factoren — C multiplicirten Variationen dieser Bedingungsgleichungen

$$\delta\left[-\Sigma_i\, M_i\left(\int k_i ds_i - M_i\right) - \Sigma_j\, M_j\left(\int k_j\, ds_j - M_j\right)\right]$$
$$= -\Sigma_i\, M_i \int dk_i\, ds_i - \Sigma_j\, M_j \int dk_j\, ds_j$$

zuvor dem Ausdrucke (3) beigefügt werden, so dass im Ganzen entsteht

$$\Sigma_i \int ds_i \left[\Sigma_j \frac{k_j\, ds_j}{r_{i,j}} - M_i\right] dk_i$$
$$+ \Sigma_j \int ds_j \left[\Sigma_i \int \frac{k_i\, ds_i}{r_{i,j}} - M_j\right] \delta\, k_j = 0$$

In dieser Gleichung sind nun die Cœfficienten aller Variationen zu anulliren, wonach sich ergibt

$$\Sigma_j \int \frac{k_j\, ds_j}{r_{i,j}} = C_i\ ,\ \Sigma_i \int \frac{k_i\, ds_i}{r_{i,j}} = C_j\ \ldots\ldots (4)$$

zwei Gleichungen, die genau dasselbe sagen, weil sowohl i als j jeden Werth aus der Reihe der vorhandenen Indices vorstellen. In Folge derselben ist aber offenbar der Minimalwerth von W dadurch bedingt, dass die Potentialfunction der gesammten Elektricität im Inneren wie an der Oberfläche jedes einzelnen Leiters A_i einer Constanten C_i gleich wird, deren Werth indessen für die Theile zweier verschiedenen isolirten Leiter im Allgemeinen ein anderer sein kann. Die Gleichungen (4) lassen sich demnach auch kurz durch

$$V_i = \text{Const.}\ \ldots\ldots (5)$$

ausdrücken.

Es braucht wohl kaum bemerkt zu werden, dass diese gefundenen Bedingungen für den Minimalzustand von W mit denjenigen des elektrischen Ruhezustandes zusammenfallen; denn ist V im Inneren constant, so verschwinden die Componenten der das Fluidum bewegenden Kraft

$$\frac{dV}{dx}, \frac{dV}{dy}, \frac{dV}{dz}, \ldots\ldots (6)$$

und die Dichte im Inneren fällt gleich Null aus, das Fluidum kann sich also nur an den Grenzflächen befinden, da im Inneren der Laplace'sche Ausdruck

$$k = -\frac{1}{4\pi}\left[\frac{d^2V}{dx^2} + \frac{d^2V}{dy^2} + \frac{d^2V}{dz^2}\right] = -\frac{1}{4\pi}\nabla V \ldots\ldots (7)$$

für V = Const. verschwindet, wie dies schon Green*) aus der Constanz der Potentialfunction gefolgert hat.

Art. 3.

Ich muss hier sogleich hervorheben, dass die in (5) ausgesprochene für alle Theile des Körpers A_i geltende Gleichung nach der Beweisführung des vorigen Artikels für jede denkbare Form und gegenseitige Lage der einzelnen Leiter (1) gilt, dass insbesondere diese Körper mehrfachzusammenhängende Gestalten bilden**) also auch Hohlräume einschliessen dürfen, in welchen wiederum andere elektrische oder unelektrische Körper A_j eingeschlossen sein können. Einfachzusammenhängende Körper sind nämlich solche, welche durch jede einen zusammenhängenden Querschnitt erzeugende Ebene in zwei getrennte Theile zerfallen; dagegen heisst ein Körper n fach zusammenhängend, wenn mindestens n solcher Schnitte nöthig sind, ihn in zwei einfachzusammenhängende zu zerlegen. Ein einfaches Beispiel bildet eine hohle zu einem geschlossenen Ringe zusammengebogene Röhre, in welche eine sie von Innen nicht berührende Hohlkugel eingeschoben wäre, deren Hohlraum wiederum eine sie nicht berührende Kugel einschliesst.

*) An Essay on the application of mathematical Analysis to the theories of Elektricity and Magnetism, Crelle's Journal für Mathematik. Band 39.

**) Riemann, Crelle's Journal Band 54: Lehrsätze aus der analysis situs für die Theorie der Integrale von zweigliederigen vollständigen Differentialen.