Beiträge zur Theorie der statischen Elektricität

Zehfuss, Johann Georg

Frankfurt a.M., 1865

Erste Abtheilung. Allgemeine Sätze über das elektrische Potential

urn:nbn:de:bsz:31-272352

Erste Abtheilung.

Allgemeine Sätze über das elektrische Potential.

Art. I.

Der unsterbliche *Gauss* hat in seiner Abhandlung: „*Allgemeine Lehrsätze in Beziehung auf die im verkehrten Verhältniss des Quadrats der Entfernung wirkenden Anziehungs- und Abstossungskräfte*"*) Art. 30 einen Satz ausgesprochen, der bedeutender Erweiterungen fähig ist, indem er als specieller Fall einer weit allgemeineren Eigenschaft der elektrischen Vertheilung im Gleichgewichtszustande aufgefasst werden kann. Dieser Satz, welchen *Gauss* als eines der Ziele seiner Schrift bezeichnet, lautet:

Wenn V die Potentialfunction der auf eine geschlossene Fläche vertheilten Massen bedeutet, und k die Dichte im Flächenelement ds, so ist das über die ganze Oberfläche erstreckte Integral ∫Vkds ein Minimum, wenn V in jedem Punkt der Fläche einerlei Werth besitzt. Im Sinne der Elektricitätslehre würde diess offenbar heissen: Auf der Ober-

---

*) Resultate aus den Beobachtungen des magnetischen Vereins 1839.

fläche eines Körpers ist das elektrische Fluidum im Gleichgewichte, sobald $\int V k d s$ ein Minimum geworden ist.

Der Ausdruck

$$W = {}^1/_2 \int V k d s$$

ist nichts anderes als das was später Helmholtz*) das Potential einer elektrischen Masse auf sich selbst nennt, ein Ausdruck, dessen Zusammenhang mit der Summe von Arbeit oder aequivalenter Wärmemenge, welche eine elektrische Entladung hervorzubringen vermag, von ihm und Clausius**) zuerst deutlich gezeigt wurde.

Es schien mir von Interesse, zu versuchen, ob sich nicht Eigenschaften des elektrischen Ruhezustandes auffinden liessen, indem man sich allgemein die Aufgabe setzte, diejenige Vertheilung der Elektricität zu bestimmen, bei welcher das für andere Zweige der Physik so wichtige Potential der Elektricität auf sich selbst ein Minimum wäre, dabei aber diejenigen Beschränkungen fallen liesse, unter welchen Gauss den erwähnten Satz aufgestellt hat. Als solche Beschränkungen können bezeichnet werden:

1) Man betrachtet nicht die gegenseitige Einwirkung der auf mehreren getrennten Leitern befindlichen oder aus der Ferne in ihnen durch Induction geweckten Elektricität, sondern nur das auf der Oberfläche eines einzigen Körpers befindliche Fluidum.

In Art. 36 der citirten Schrift hebt zwar Gauss diese Einschränkung anscheinend theilweise auf, indem er den Einfluss ausserhalb befindlicher Massen berücksichtigt. Allein man bemerkt sogleich, dass daselbst letztere, wenn die Untersuchung ihre Giltigkeit bewahren soll, als unbeweglich oder in isolirte mathematische Punkte vertheilt vorausgesetzt werden, sodass ihre gegenseitige Induction, sowie die-

*) Erhaltung der Kraft.

**) Poggendorf's Annalen der Physik, LXXXVI, 337.

jenige, welche Seitens der elektrischen Hauptfläche auf sie zurück ausgeübt wird, unberücksichtigt bleiben muss.

2) Es werden anfänglich nur gleichartige Vertheilungen betrachtet, d. h. solche, bei welchen auf der ganzen leitenden Oberfläche keine Abwechselung des positiven und negativen Zustandes eintritt.

3) Das Minimum von W wird nur für den Fall bestimmt, dass das Fluidum sich gänzlich auf der Oberfläche, nicht auch im Innern des leitenden Körpers befinde.

Im Nachfolgenden soll nun zunächst die allgemeine Untersuchung des Minimalwerthes des Potentials beliebiger, verschiedenen isolirten leitenden Körpern, zugetheilter positiver oder negativer elektrischer Massen auf sich selbst unter Berücksichtigung allgegenseitiger Induction ausgeführt werden.

Art. 2.

Ich denke mir demnach eine beliebige Anzahl m gegenseitig isolirter leitender Körper von willkührlicher Gestalt und Grösse

$$A_1, A_2, A_3, \ldots A_i, \ldots A_m. \ldots.. (1)$$

Nur die unendliche Ausdehnung sei hierbei, als in der Natur nicht existirend, ausgeschlossen. Denn ist auch die Zahl der Naturdinge sehr gross, so ist sie doch bestimmt, also unmöglich von unbestimmt unendlicher Grösse. Die Körper A können alle Leiter des ganzen Universums bedeuten.

Es möge allgemein k_1 die nach mechanischem Maasse gemessene elektrische Dichte an einer beliebigen Stelle des Körpers A_1 bezeichnen, einerlei ob dadurch die Dichtigkeit im Innern oder an der Oberfläche ausgedrückt würde, so dass die elektrische Masse eines Raum- oder auch Flächentheilchens ds_1 durch

$k_i \, ds_i$

zu bezeichnen wäre.

Das Potential W der vorhandenen Elektricität auf sich selbst nach mechanischem Maasse gemessen, ist nun gleich der Hälfte *) der Summe aller Producte je zweier Massetheilchen dividirt durch ihre gegenseitige Entfernung. Wenn demnach i und j irgend zwei verschiedene oder auch gleiche Indices der Reihe $A_1, A_2, \ldots A_m$ vorstellen, so haben wir offenbar

$$2W = \Sigma_i \Sigma_j \int\int \frac{k_i k_j}{r_{i,j}} ds_i \, ds_j \ldots\ldots (2)$$

wo in Folge des doppelten Summenzeichens jeder der beiden Indices i und j nach und nach alle Werthe $1, 2, 3 \ldots m$ durchlaufen, das eine Integralzeichen aber sich über alle Elemente des i^{ten}, das andere über alle Elemente des j^{ten} Körpers erstrecken soll, und $r_{i,j}$ die gegenseitige Entfernung der Elemente ds_i und ds_j vorstellt.

Um das Minimum des Ausdruckes (2) hinsichtlich k zu bestimmen, hat man nach den Regeln der Variationsrechnung seine Variation

$$\Sigma_i \Sigma_j \int\int \frac{k_i \, \delta k_j}{r_{i,j}} ds_i \, ds_j + \Sigma_i \Sigma_j \int\int \frac{k_j \, \delta k_i}{r_{i,j}} ds_i \, ds_j \ldots (3)$$

zunächst gleich Null zu setzen. Da aber die einzelnen darin vorkommenden Variationen δk nicht unabhängig sind, indem wegen der Unveränderlichkeit der jedem einzelnen isolirten Leiter zukommenden gesammten Elektricitätsmenge M für jeden Index i, j die Gleichung

$$\int k \, ds - M = o$$

gilt, so müssen nach den Regeln der Variationsrechnung

*) Nach einer Erinnerung von Clausius (Pogg. Ann. LXXXIX, 568), deren Nothwendigkeit indessen schon Gauss scheint ausdrücken zu wollen, (l. c.) wo er Art. 31 nicht $\int(V - U)\, m \, ds$, sondern $\int(V - 2U)\, m \, ds$ schreibt.

behufs Elimination der abhängigen Variationen die mit passenden constanten Factoren — C multiplicirten Variationen dieser Bedingungsgleichungen

$$\delta\left[-\Sigma_i\, M_i\left(\int k_i ds_i - M_i\right) - \Sigma_j\, M_j\left(\int k_j\, ds_j - M_j\right)\right]$$
$$= - \Sigma_i\, M_i \int dk_i\, ds_i - \Sigma_j\, M_j \int dk_j\, ds_j$$

zuvor dem Ausdrucke (3) beigefügt werden, so dass im Ganzen entsteht

$$\Sigma_i \int ds_i \left[\Sigma_j \frac{k_j\, ds_j}{r_{i,j}} - M_i\right] dk_i$$
$$+ \Sigma_j \int ds_j \left[\Sigma_i \int \frac{k_i\, ds_i}{r_{i,j}} - M_j\right] \delta\, k_j = 0$$

In dieser Gleichung sind nun die Cœfficienten aller Variationen zu anulliren, wonach sich ergibt

$$\Sigma_j \int \frac{k_j\, ds_j}{r_{i,j}} = C_i\ ,\ \Sigma_i \int \frac{k_i\, ds_i}{r_{i,j}} = C_j \ldots\ldots (4)$$

zwei Gleichungen, die genau dasselbe sagen, weil sowohl i als j jeden Werth aus der Reihe der vorhandenen Indices vorstellen. In Folge derselben ist aber offenbar der Minimalwerth von W dadurch bedingt, dass die Potentialfunction der gesammten Elektricität im Inneren wie an der Oberfläche jedes einzelnen Leiters A_i einer Constanten C_i gleich wird, deren Werth indessen für die Theile zweier verschiedenen isolirten Leiter im Allgemeinen ein anderer sein kann. Die Gleichungen (4) lassen sich demnach auch kurz durch

$$V_i = \text{Const.} \ldots\ldots (5)$$

ausdrücken.

Es braucht wohl kaum bemerkt zu werden, dass diese gefundenen Bedingungen für den Minimalzustand von W mit denjenigen des elektrischen Ruhezustandes zusammenfallen; denn ist V im Inneren constant, so verschwinden die Componenten der das Fluidum bewegenden Kraft

$$\frac{dV}{dx}, \frac{dV}{dy}, \frac{dV}{dz}, \ldots\ldots (6)$$

und die Dichte im Inneren fällt gleich Null aus, das Fluidum kann sich also nur an den Grenzflächen befinden, da im Inneren der Laplace'sche Ausdruck

$$k = -\frac{1}{4\pi}\left[\frac{d^2V}{dx^2} + \frac{d^2V}{dy^2} + \frac{d^2V}{dz^2}\right] = -\frac{1}{4\pi} \nabla V \ldots\ldots (7)$$

für V = Const. verschwindet, wie dies schon Green*) aus der Constanz der Potentialfunction gefolgert hat.

Art. 3.

Ich muss hier sogleich hervorheben, dass die in (5) ausgesprochene für alle Theile des Körpers A_i geltende Gleichung nach der Beweisführung des vorigen Artikels für jede denkbare Form und gegenseitige Lage der einzelnen Leiter (1) gilt, dass insbesondere diese Körper mehrfachzusammenhängende Gestalten bilden**) also auch Hohlräume einschliessen dürfen, in welchen wiederum andere elektrische oder unelektrische Körper A_j eingeschlossen sein können. Einfachzusammenhängende Körper sind nämlich solche, welche durch jede einen zusammenhängenden Querschnitt erzeugende Ebene in zwei getrennte Theile zerfallen; dagegen heisst ein Körper n fach zusammenhängend, wenn mindestens n solcher Schnitte nöthig sind, ihn in zwei einfachzusammenhängende zu zerlegen. Ein einfaches Beispiel bildet eine hohle zu einem geschlossenen Ringe zusammengebogene Röhre, in welche eine sie von Innen nicht berührende Hohlkugel eingeschoben wäre, deren Hohlraum wiederum eine sie nicht berührende Kugel einschliesst.

*) An Essay on the application of mathematical Analysis to the theories of Elektricity and Magnetism, Crelle's Journal für Mathematik. Band 39.

**) Riemann, Crelle's Journal Band 54: Lehrsätze aus der analysis situs für die Theorie der Integrale von zweigliederigen vollständigen Differentialen.

In diesem Sinne wird der einzelne Leiter A_n einen zusammenhängenden Körper vorstellen, welcher von *einer* ein- oder mehrfach zusammenhängenden Aussenfläche umschlossen wird, aber *eine oder mehrere* ein- oder mehrfachzusammenhängende Innenflächen besitzen kann, die jedoch nie einander gegenseitig einschliessen. *Die zwischen Innen- und Aussenflächen befindliche leitende Substanz füllt den eigentlichen Raum des Körpers A_n aus,* während die von ihm eingeschlossenen nichtleitenden, oder theilweise mit anderen nicht berührenden eingeschlossenen leitenden Körpern erfüllten, Hohlräume nicht zu A_n zählen, ebensowenig als die eingeschlossenen Körper. Auf die so definirten Räume A erstreckt sich demnach die Gleichung (5). Falls der eingeschlossene Körper den einschliessenden von innen berührte, so würden beide nur einen einzigen ausmachen, dessen innere Oberfläche aus der inneren des einschliessenden und aus der äusseren des eingeschlossenen bestünde. Im Gegensatze zu den seitherigen Feststellungen halte ich es für physikalich unzulässig, sich blosse leitende *mathematische Flächen* zu denken, da sie nur eine Fiction des Geometers sind.

Der oft ausgesprochene Satz, dass sich im Inneren eines Leiters im Gleichgewichtszustande keine freie Elektricität befinde, ist dann nur auf die mit der leitenden Substanz ausgefüllten Räume, innerhalb deren zwar allerdings keine Experimente angestellt werden können, auszudehnen. Die *inneren Oberflächen* des einhüllenden Körpers sind nämlich allerdings elektrisch, sobald sich elektrische Körper in den Hohlräumen befinden. So kann z. B. eine Hohlkugel, deren äussere und innere Oberfläche bezüglich S und S^1 sein mögen, und in deren Centrum sich isolirt eine Kugel mit der Elektricitätsmenge μ befindet, nach ableitender Berührung auf S unelektrisch erscheinen, während sich auf der Innenfläche S^1 die elektrische Masse — M gleichförmig im Gleichgewichte ausgebreitet vorfindet.

Wenn nun auch das Verschwinden der Ausdrücke (6) und (7), oder der Gleichgewichtszustand, ein Verschwinden der ersten Variation von W bedingt, so ist doch die Gleichung (3) oder $\delta W = o$ nicht hinreichend, nothwendig ein Minimum zu constatiren. Man weiss, es wird hierzu noch der Nachweis erfordert, dass die zweite Variation $\delta^2 W$ stets positiv sei. Dieser Nachweis soll in einem der nächsten Artikel geführt werden.

Art. 4.

Die in Rede stehende zweite Variation von W ist

$$2\,\delta^2 W = \Sigma_i\ \Sigma_j \int\!\!\int \frac{\delta k_i\ \delta k_j}{r_{i,j}}\, ds_i\, ds_j\,,$$

und geht offenbar aus dem unter (2) aufgeführten Werthe von W hervor, indem man k mit δk vertauscht. Also kann $\delta^2 W$ als das Potential einer den Körpern A zugetheilten Elektricitätsmenge angesehen werden, deren Dichte durch die willkührliche Variation von k ausgedrückt ist. Soll also gezeigt werden, dass unter diesen Umständen $\delta^2 W$ stets positiv ist, so genügt es, den allgemeinen Satz zu beweisen:

Bei jeder stetigen gleichartigen oder ungleichartigen Vertheilung ist das Potential der den beliebigen isolirten Leitern (1) zugetheilten Elektricitätsmengen auf sich selbst, eine positive Grösse, die Fluida mögen nun auf den Grenzflächen oder auch im Innern der einzelnen Körper sich befinden, einerlei ob Gleichgewicht vorhanden sei oder nicht.

Ich schliesse hierbei nur den Fall aus, dass positive und negative Theilchen gleichförmig durcheinandergemengt vorkämen; man könnte sich nämlich alsdann ein nicht weiter wirksames neutrales Fluidum denken, und ausserdem einen resultirenden Ueberschuss von Theilchen einerlei Gattung. Indem wir also nach dem Vorgange der Natur dem Fluidum eine im allgemeinen stetige Vertheilung ohne plötzlichen Wechsel des positiven und negativen Zustandes beilegen, hat jedes kleine Theilchen bekanntlich noch ein positives Potential auf sich selbst, was nicht stattfindet, wenn man den allgemeinen Ausdruck desselben

$$S\frac{M_i\, M_j}{r_{i,j}}$$

auf discrete für sich untheilbare Punkte anwendet Denken wir uns z. B. drei elektrische Punkte, deren gegenseitige Abstände $=1$, und deren Massen $=+M, -M, -M$, so ist das Potential auf sich selbst $=-M^2 - M^2 + M^2$, also negativ, weil die an sich unstatthaften Potentiale der mathematischen Punkte auf sich selbst nicht mitgerechnet wurden.

Ehe nun die Begründung des oben ausgesprochenen Hauptsatzes erfolgt, bedarf ich des von Green*) entdeckten Satzes:

$$-\int ds\, V \frac{dV}{d\omega} - \int\int\int dx\,dy\,dz\; V \nabla V =$$
$$\int\int\int dx\,dy\,dz \left[\left(\frac{dV}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dV}{dy}\right)^2 + \left(\frac{dV}{dz}\right)^2\right] \ldots\ldots\ldots (8)$$

in welchem sich das einfache Integral über die gesammte Grenzfläche eines Körpers, das dreifache über das ganze Innere desselben erstreckt. V möge die Potentialfunction von Massen bedeuten, welche nach Belieben innerhalb, ausserhalb oder auf den Grenzflächen vertheilt sind, ω die nach dem Inneren des Körpers gerichtete Normale. Da die Giltigkeit dieses Satzes für mehrfach zusammenhängende Körper von Helmholtz**) in Zweifel gezogen wird, so musste es mir natürlich daran gelegen sein, die Begründung desselben zu revidiren, da ohne dessen Bestehen das Verhalten der Elektricität in mehrfachzusammenhängenden Körpern eine exceptionelle Stellung einnehmen würde.

*) An Essay etc, §. 3.

**) Ueber Integrale der hydrodynamischen Gleichungen, welche den Wirbelbewegungen entsprechen, Crelle's Journal. Band 55.

Wir betrachten eine der X Axe parallele, den Körper A im allgemeinen mehrfach durchschneidenden Gerade als Axe eines Prismas von der Grundfläche d y d z. Aus der identischen Gleichung

$$\frac{d}{dx}\left(V\frac{dV}{dx}\right)=\left(\frac{dV}{dx}\right)^2+V\,\frac{d^2V}{dx^2}$$

ergibt sich, dass das Integral

$$\int\left[\left(\frac{dV}{dx}\right)^2+V\,\frac{d^2V}{dx^2}\right]dx,$$

ausgedehnt über diejenigen Stücke jener Geraden, welche **innerhalb** der zum Körper A zusammenhängend gehörigen, **mit leitender Substanz erfüllten Räume** liegen, gleich

$$\Sigma\,\varepsilon\,V\frac{dV}{dx}$$

ist, wobei für $V\frac{dV}{dx}$ dessen Werthe für die aufeinanderfolgenden Schnittpunkte der Geraden mit den Grenzflächen von A zu setzen sind, und ε im ersten, dritten fünften .... Schnittpunkte gleich -1, im zweiten, vierten ... dagegen gleich $+1$ zu setzen ist. Indem wir nun auf alle solche der X Axe parallel laufende Prismata von der Grundfläche d y d z, in welche der ganze Körper A durch geeignete unendlichkleine Aenderungen von y und z zerlegt werden kann, den letzten Satz anwenden, erhalten wir durch Integration nach y und z zwischen den geeigneten Grenzen

$$\int\!\!\int\!\!\int\left[\left(\frac{dV}{dx}\right)^2+V\,\frac{d^2V}{dx^2}\right]dx\,dy\,dz=\Sigma\int\!\!\int V\,\varepsilon\,\frac{dV}{dx}\,dy\,dz.$$

Nun ist aber offenbar $dy\,dz = -\varepsilon\,ds.\cos\xi$, wenn ξ den Winkel bedeutet, der zwischen der positiven Richtung der X Axe und der nach dem Inneren des Körpers A von der Grenzfläche aus als positiv gezählten Normalen begriffen ist. Mithin ist, wenn wir der Kürze halber $dx\,dy\,dz =$ dA setzen:

$$\int\!\!\int\!\!\int\left(\frac{dV}{dx}\right)^2 dA = -\int\!\!\int\!\!\int V\frac{d^2V}{dx^2}dA - \Sigma\int\!\!\int V\frac{dV}{dx}\cos\xi\,ds,$$

wobei sich das doppelte Integralzeichen auf alle Grenzflächen bezieht. Analog entsteht, wenn das seither zur Unterscheidung einzelner Theile beibehaltene Zeichen Σ weggelassen wird:

$$\int\left(\frac{dV}{dy}\right)^2 dA = -\int V\frac{d^2V}{dy^2}dA - \int\!\!\int V\frac{dV}{dy}\cos\upsilon\,ds,$$

$$\int\left(\frac{dV}{dz}\right)^2 dA = -\int V\frac{d^2V}{dz^2}dA - \int\!\!\int V\frac{dV}{dz}\cos\zeta\,ds,$$

woraus sich durch Addition der unter (8) angeführte Satz ergibt, wenn man bedenkt. dass

$$\frac{dV}{dx}\cos\xi + \frac{dV}{dy}\cos\upsilon + \frac{dV}{dz}\cos\zeta = \frac{dV}{d\omega}.$$

Man sieht, dass keine Zweifel gegen die vorstehende Beweisführung zu erheben sind, so lange es sich um die stetigen Vertheilungen handelt, welche wir in der Natur vorfinden. Die von Green stabilirten Ausnahmsfälle, wo plötzlich mathematische isolirte elektrische Punkte auftreten, sind also gleichfalls nicht als hierhergehörig zu betrachten, wiewohl er bekannte Sätze daraus ableitet*).

Die Werthe von ∇V sind bei stetigen Vertheilungen im Inneren stets endlich und bestimmt; unbestimmt aber endlich sind sie**) nur an den elektrischen Grenzflächen; ihr Einfluss auf die über die Innenräume erstreckten Integrale fällt also gegen denjenigen der im Inneren unendlich reichlicher vertretenen Werthe von ∇V gänzlich weg.

Ueber den Werth von $\frac{dV}{d\omega}$ könnte nur in solchen Fäl-

*) Green, l. c. §. 3, 4...
**) Gauss, l. c. Art. 8.

len mehrfachzusammenhängender Körper ein Zweifel entstehen, wo der mehrfache Zusammenhang sich auf eine mathematische Berührung, den Uebergang zwischen Zusammenhängen und Nichtzusammenhängen reducirte. Allein man wird zugeben, dass auch dieser Fall in der Natur nicht existirt, indem die daselbst stattfindenden Berührungen für das elektrische Fluidum immer noch in messbarer Ausdehnung leitend hergestellt sind.

Art. 5.

Mittelst des Green'schen Satzes ist es nun nicht schwer zu beweisen, dass wenn beliebige positive oder negative elektrische Quanta beliebig vielen und willkührlich gelegenen oder geformten isolirten Körpern $A_1, A_2, \ldots A_m$ zugetheilt sind, das Potential der gesammten in diesen Körpern und auf ihren Oberflächen vertheilten Elektricität auf sich selbst eine positive Grösse sei, einerlei ob Gleichgewicht stattfindet oder nicht.

Jedes körperliche System macht zunächst einen Theil des Universums aus, kann also eingeschlossen gedacht werden in einer ungemein grossen Kugel. Zwischen den an den universellen Raum anstossenden äusseren Grenzflächen der nicht zu den Eingeschlossenen gehörigen Leitern und der inneren Oberfläche jener grossen Kugel befindet sich nun ein mit Höhlungen versehener Raum, auf welchen wir den Green'schen Satz (8) anwenden wollen. Nun ist die Potentialfunction aller Massen ΣM in der unendlichgrossen Entfernung R offenbar gleich

$$\frac{\Sigma M}{R},$$

also an der Kugelfläche

$$\frac{dV}{d\omega} = -\frac{dV}{dR} = \frac{\Sigma M}{R^2},$$

und $$\int V \frac{dV}{d\omega} ds = \frac{4\pi M^2}{R},$$

welche Ausdrücke für $R = \infty$ offenbar beide verschwinden. Von den Oberflächenintegralen des fraglichen Raumes bleiben daher nur die auf die inneren Grenzflächen, nämlich die Aussenflächen der nicht eingeschlossenen Körper A, Bezug habenden übrig. Wenn also x, y, z Punkte des erwähnten äusseren Raumes vorstellen, so liefert der Green'sche Satz (8), wenn Σ sich auf alle äussere Grenzflächen bezieht,

$$\Sigma \left\{ - \int \overline{V} \frac{d\overline{V}}{d\omega} d\sigma \right\} - \int V \nabla V dA$$
$$= \int \left[\left(\frac{dV}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dV}{dy}\right)^2 + \left(\frac{dV}{dz}\right)^2 \right] dA \ldots. (9)$$

Aber in den an den unendlichen Raum angrenzenden Leitern A lassen sich im Allgemeineu äussere und innere Grenzflächen unterscheiden, zwischen welchen sich leitende Substanzen befinden. Hierauf folgen im Allgemeinen weiter nach Innen wieder Räume, welche keine leitende Materie enthalten, in welchen wiederum andere leitende Räume eingeschlossen sein können u. s. f. Ich unterscheide daher einschliessende Räume 0ter, Iter, IIter, IIIter etc. Ordnung, deren Jeder Räume aller nachfolgenden Ordnungen einschliessen kann, und von welchen die ungeraden mit leitender Materie ausgefüllt sind, die geraden nicht.

Man kann nun auf alle diese Räume den Green'schen Satz (8) anwenden, und die entstehenden Resultate, deren erstes in (9) gegeben ist, sämmtlich addiren. So würde z. B. die betreffende Formel für die Räume der ersten Ordnung, also die an den universellen Raum direct angrenzenden Leiter heissen

$$\Sigma \left\{ - \int \overline{V}_1 \frac{d\overline{V}}{d\omega_1} d\sigma - \int \overline{V}_1' \frac{d\overline{V}_1'}{d\omega_1'} - \int V_1 \nabla_1 dA \right\}$$
$$= \Sigma \int \left[\left(\frac{dV_1}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dV_1}{dy}\right)^2 + \left(\frac{dV_1}{dz}\right) \right] dA \ldots.. (10)$$

wobei sich die oberen Accente allemal auf die inneren Grenzflächen beziehen. Beim Addiren aller so entstehenden Gleichungen ist zu bemerken, dass in den zu beiden Seiten einer Oberfläche angrenzenden Räumen die Potentialfunction als eine stetige Function an der Fläche selbst einerlei Werth hat, so dass z. B.

$$\overline{V} = \overline{V}_1 = \overline{V}_{01}, \quad \overline{V}_1' = \overline{V}_2 = \overline{V}_{12}, \quad \overline{V}_2' = \overline{V}_3 = \overline{V}_{23}, \text{ etc.}$$

gesetzt werden kann. Indem wir die Summe aller solcher auf die Räume der verschiedenen Ordnungen bezüglichen Formeln wie (9), (10) ... bilden, findet sich ferner, dass die darin vorkommenden Raumintegrale den ganzen unendlichen Raum erschöpfen, während sich die Oberflächenintegrale auf die beiden Seiten aller vorhandenen Grenzflächen erstrecken. Es ergibt sich sonach die Summe

$$-\Sigma\int \overline{V}_{01}\left[\frac{d\,\overline{V}}{d\,\omega}+\frac{d\,\overline{V}}{d\,\omega_1}\right]ds - \Sigma\int \overline{V}_{12}\left[\frac{d\,\overline{V}_1}{d\,\omega_1'}+\frac{d\,\overline{V}_2}{d\,\omega_2}\right]ds$$
$$-\Sigma\int \overline{V}_{23}\left[\frac{d\,\overline{V}_2}{d\,\omega_2'}+\frac{d\,\overline{V}_3}{d\,\omega_3}\right]ds \ldots . - \int V\,\nabla V\,dA$$
$$= \int\left[\left(\frac{d\,V}{d\,x}\right)^2+\left(\frac{d\,V}{d\,y}\right)^2+\left(\frac{d\,V}{d\,z}\right)^2\right]dA' \ldots \quad (11)$$

Nun ist aber die Dichte elektrischer Massen im Innern eines Körpers

$$k = -\frac{1}{4\,\pi}\nabla V,$$

und an seiner Grenzfläche *)

$$k_{m,\,m+1} = -\frac{1}{4\,\pi}\left(\frac{d\,\overline{V}_m}{d\omega_m'}\right) + \frac{d\,\overline{V}_{m+1}}{d\,\omega_{m+1}}\Bigg) \ldots\ldots \quad (13)$$

Dividiren wir daher beiderseits die Gleichung (11) durch $4\,\pi$, so erhalten wir

*) Green, l. c. §. 4.
Clausius: Die Potentialfunction.

$$\Sigma \int \overline{V}_{01} k_{01} d s_{01} + \Sigma \int \overline{V}_{12} k_{12} d s_{12} + \Sigma \int \overline{V}_{23} k_{23} d s_{23} \ldots$$
$$+ \int V k d A = \frac{1}{4 \pi} \int \left[\left(\frac{d V}{d x} \right)^2 + \left(\frac{d V}{d y} \right)^2 + \left(\frac{d V}{d z} \right)^2 \right] d A .$$

Die linke Seite dieser Gleichung drückt aber offenbar das Doppelte des Potentials der in den Körpern A vorhandenen sowie der durch sie im ganzen Universum inducirten Elektricität auf sich selbst aus. Nennen wir dasselbe W, so folgt endlich

$$W = \frac{1}{8 \pi} \int \left[\left(\frac{d V}{d x} \right)^2 + \left(\frac{d V}{d y} \right)^2 + \left(\frac{d V}{d z} \right)^2 \right] d A. \ldots (13).$$

womit der Eingangs dieses Artikels erwähnte Satz erwiesen ist.

In dieser Formel erstreckt sich das Integralzeichen über den ganzen unendlichen Raum, und die unter demselben stehende Parenthese enthält offenbar das Quadrat P^2 der in (xyz) wirkenden Kraft. Wir können dieselbe also auch folgendermassen schreiben:

$$W = \frac{1}{8 \pi} \int P^2 d A. \ldots\ldots (14).$$

Indem wir nun auf die zu Anfang des vorigen Artikels gemachte Bemerkung recurriren, ergibt sich also jetzt im Hinblick auf die Formel (14) mit Evidenz der Satz:

Sind beliebige Elektricitätsmengen den willkührlich gelegenen und geformten Leitern $A_1, A_2, \ldots A_m$ zugetheilt, so erreicht unter dem Einflusse allgegenseitiger Induction das Potential der gesammten Elektricität auf sich selbst seinen Minimalwerth, sobald der Gleichgewichtszustand eintritt. Auch befindet sich alsdann das Fluidum nur auf den äusseren und inneren Grenzflächen der Leiter.

Art. 6.

Nach Helmholtz und Clausius (l. c.) stellt der Ausdruck W die gesammte Leistung einer elektrischen Anhäufung hinsichtlich mechanischer Arbeit oder aequivalenter Wärmeerzeugung dar, welche durch Entladung der elektrischen Massen hervorgebracht werden können. Unter Entladung verstehe ich hier nicht blos den speciellen Fall gänzlicher gegenseitiger Neutralisation, die nur eintreten würde, wenn die algebraische Summe aller Massen $= 0$ wäre, auch soll dabei nicht an eine plötzliche leitende Verbindung aller leitenden Oberflächen gedacht werden; sondern jede etwa unter theilweiser Verbindung einzelner Leiter vor sich gehende Vertheilung, welche mit einem den Umständen angemessenen Gleichgewichtszustande endigt, heisse eine Entladung. Dabei ist natürlich der Act allgegenseitiger Induction, selbst in zuvor neutralen nahe befindlichen Leitern mit einbegriffen.

Wenn in solchem Zustande der Entladung oder des Gleichgewichtes das Potential der gesammten Elektricität, welches vor der Entladung $= W_0$ gewesen sein möge, gleich W gesetzt wird, so hat sich der Werth der durch die ursprünglich gegebene Zusammenstellung der elektrischen Körper A repräsentirten disponibelen Arbeit um

$$W_0 - W$$

vermindert, es ist also eine positive Arbeit geleistet worden, da W als Minimum kleiner als W_0 sein muss.

Die durch elektrische Entladung geleistete Arbeit ist also ein Maximum, da W im Minimalzustande angekommen ist, ein Satz der sich auch folgendermassen ausdrücken liesse: Jede Entladung ist den Umständen gemäss so vollständig als möglich, oder: Unter allen denkbaren Arten der elektrischen Ausgleichung erzeugt die in der Natur vor sich gehende die grösste Wärmemenge.

Art. 7.

Die Schlusssätze der beiden vorigen Artikel erfordern eine nothwendige Ergänzung durch den Nachweis, dass der Minimalzustand von W unter den gemachten gänzlich allgemeinen Voraussetzungen nur durch eine einzige den Umständen angemessene Vertheilungsart der Elektricität erreichbar ist.

Untersuchen wir daher in diesem Artikel, ob die den Minimalzustand bedingenden Gleichungen (5) durch eine oder mehrere Vertheilungen befriedigt werden können.

Es ergab sich schon aus (7), dass über die Dichte im Inneren der leitenden Substanzen im Minimalzustande kein Zweifel obwalten kann, indem sie daselbst gleich Null ist. Daher kann allein noch die Frage entstehen, ob es eine nur auf den Grenzflächen angebrachte Massenanordnung oder mehrere dergleichen gebe, durch welche auf jeder Grenzfläche eine constante Potentialfunction erzeugt wird.

Indessen, sollte selbst diese alle Massen auf die Grenzflächen verweisende Beschränkung wegfallen, dennoch würde man aus dem Wesen der nachfolgenden Beweisführung erkennen, dass sie ebensowohl für den Fall von Massen im Inneren giltig bleiben würde.

Der constante Werth C einer solchen Potentialfunction würde selbstverständlich für die äussere wie für alle innere Grenzflächen des nämlichen Leiters A der nämliche sein, wie im Inneren desselben, dagegen würde er in den nichtleitenden Zwischenräumen variiren, bis er auf den Oberflächen der nächstbefindlichen Leiter wieder je einen im Allgemeinen von C verschiedenen, jedoch constanten Werth erlangte. Die inneren Hohlflächen letzter Ordnung, in welchen also keine weitere leitende Körper eingeschlossen sind, enthalten gar keine Elektricität, und die constante Potentialfunction hat in der leitenden Substanz wie in dem inneren Hohlraume und an der Grenzfläche beider einerlei Grösse.

Denn an der Grenzfläche findet zunächst die Gleichung statt $\overline{V} = C$; aber nach dem auf den letzten Hohlraum angewandten Satz in Art. 25 der cit. Gauss'schen Schrift, in Folge dessen die Potentialfunction von Massen, welche nicht innerhalb eines von einer Fläche umschlossenen Raumes liegen, der Potentialfunction auf der Fläche gleich ist, sobald letzteres constant ausfällt, ist auch $V = C$, und daher die Dichte an der Grenzfläche nach (12) gleich Null.

Den fraglichen Nachweis der Eindeutigkeit der Vertheilung im Gleichgewichtszustande anlangend, denke man sich nun die Gesammtheit aller leitenden Oberflächen in eine unendlich grosse Anzahl i unter sich gleicher Flächenstückchen zertheilt. Wird die in einem derselben enthaltene, der Dichte proportionale Masse $= x$ gesetzt, und die gegebenen reciproken Entfernungen der übrigen Oberflächentheilchen von dem ersten derselben gleich $b_1, c_1, d_1, \ldots l_1$, so ist der Werth der Potentialfunction aller Massen im fraglichen Puncte der Fläche A_1 offenbar

$$b_1\, x_2 + c_1\, x_3 + d_1\, x_4 + \ldots + l_1\, x_i = V_1,$$

wo V_1 die allen Grenzflächen des Körpers A_1 angehörige constante Potentialfunction bedeutet. Eine der vorigen analogen Gleichung lässt sich aber für jedes der i_1 Flächenelemente, welche den Grenzflächen des Körpers A_1 zukommen, anschreiben, sodass im Ganzen i_1 solcher Gleichungen entstehen, denen sich noch folgende $(i_1 + 1)$te beifügen lässt:

$$x_1 + x_2 + x_3 \ldots + x_{i_1} = M_1.$$

wo M_1 die als gegeben angenommene dem Leiter A_1 zugehörige Elektricitätsmenge bedeutet. Es existiren also $(i_1 + 1)$ Gleichungen ersten Grades zwischen den unbekannten $x_1, \ldots x_i$ und V_1.

Allein eben solche $(i_2 + 1)$ Gleichungen werden zwischen $x_1 \ldots x_i$ für die i_2 Elemente von A_2 und die Potentialfunction V_2, sowie die Masse M_2 des Leiters A_2 entstehen; desgleichen (i_3+1) Gleichungen zwischen $x_1 \ldots x_i$ für die i_3 zu A_3 gehörigen Elemente und der zugehörigen constanten Potentialfunction V_3 etc., so dass demnach, wenn die allen einzelnen Körpern A zukommenden Massen $M_1, M_2, \ldots M_m$ gegeben sind, zwischen den $i+m$ Unbekannten

$$x_1\, x_2 \ldots x_i;\quad V_1, V_2 \ldots V_m$$

in der That eine Anzahl

$$i_1+1+i_2+1+\ldots i_m+1=i+m$$

Gleichungen ersten Grades existiren, welche im Allgemeinen alle Unbekannten eindeutig bestimmen.
