Mechanische Wärme-Theorie

Holtzmann, Karl Heinrich Alexander

Stuttgart, 1866

Bestimmung der Function, welche die Abhängigkeit der in Arbeit umgesetzten Wärme von der [...]

urn:nbn:de:bsz:31-272364

peraturen θ und θ_1 dem Körper zugeführt, dagegen die Wärmemenge Q_1 bei der Temperatur θ_2 wieder abgeleitet. Sind also bei einem beliebigen Kreisprocesse, welcher wie der obige umkehrbar ist, Wärmemengen aufgenommen, in Arbeit verwandelt oder beliebig wieder abgegeben, so ist

$$\frac{Q}{\Theta} + \frac{Q_1}{\Theta_1} + \frac{Q_2}{\Theta_2} \ldots\ldots = \Sigma \frac{Q}{\Theta} = 0, \tag{8}$$

wobei die abgegebenen Wärmemengen als negativ zu behandeln sind. Es ist die Summe aller zugeführten Wärmemengen, diese jedesmal dividirt durch den der vorhandenen Temperatur zugehörigen Werth von Θ für den ganzen Kreisprocess gleich Null, welches auch die etwa auf den Körper verwendeten oder von ihm geleisteten Arbeiten sind. Ist die Summe der auf den Körper verwendeten Arbeiten W, so ist noch

$$\Sigma Q + AW = 0. \tag{9}$$

Bei der obigen Ableitung ist vorausgesetzt, dass die Wärmeübergänge immer bei constanter Temperatur geschehen; wäre dies nicht der Fall, so könnte man obige Gleichung durch

$$\int \frac{dQ}{\Theta} = 0 \tag{10}$$

ersetzen.

Bestimmung der Function, welche die Abhängigkeit der in Arbeit umgesetzten Wärme von der Temperatur des erwärmten Körpers gibt.

17. Es handelt sich nun zunächst darum, die Function Θ zu bestimmen. Leitet man zu dem Körper k von der Masse 1 zuerst bei der constanten Temperatur θ die Wärmemenge

$$dQ = \frac{dU}{dv} dv - ASdv$$

und lässt dann ohne Wärme-Zu- oder Abfluss die Temperatur um $d\theta$ steigen; lässt man dann die Temperatur vom Anfangszustande ausgehend zuerst um $d\theta$ steigen, und bringt dann bei der Temperatur $\theta + d\theta$ Wärme zu, bis das Volum $v + dv$ wird, wozu in den unendlich Kleinen der ersten Ordnung wieder das oben angegebene dQ erforderlich ist; so ist der Körper auf beiden Wegen in denselben Endzustand gebracht, und wenn man die zweite Operation in umgekehrter Weise an die erste anschliesst, also zuerst die

Wärme dQ bei der Temperatur $\theta + d\theta$ entzieht und dann die Temperatur um $d\theta$ sinken lässt, so hat man einen der obigen Kreisprocesse vollführt. Für ihn muss also die Gleichung (8) gelten. Es ist aber hier dem Körper die oben bezeichnete Wärmemenge bei θ zugeführt und bei $\theta + d\theta$ weggenommen, wozu noch die der geleisteten Arbeit entsprechende Wärmemenge kommt, welche in obigem weggelassen, weil unendlich klein der zweiten Ordnung. Diese Arbeit ist $\frac{dS}{d\theta} d\theta dv$ und man hat also

$$+\frac{A\frac{dS}{d\theta} d\theta\, dv}{\Theta} + \left(\frac{dU}{dv} dv - AS\, dv\right)\left(\frac{1}{\Theta} - \frac{1}{\Theta + d\Theta}\right) = 0,$$

wo $d\Theta$ die Aenderung von Θ für die Temperaturerhöhung um $d\theta$. Die Gleichung wird nach Multiplication mit Θ

$$+ A\frac{dS}{d\theta} d\theta + \left(\frac{dU}{dv} - AS\right)\frac{d\Theta}{\Theta} = 0.$$

Da aber $\frac{dS}{d\theta} = \frac{dS}{d\Theta}\frac{d\Theta}{d\theta}$ ist, so kann man diese Gleichung auch schreiben

$$+ A\frac{dS}{d\Theta} + \left(\frac{dU}{dv} - AS\right)\cdot\frac{1}{\Theta} = 0. \tag{12}$$

Für vollkommene Gase ist $S = -p$ und $\frac{dU}{dv} = 0$, was zunächst gibt

$$-\frac{dp}{p} + \frac{d\Theta}{\Theta} = 0$$

oder mit $pv = \frac{R}{s}(a + \theta)$, und mit Beachtung, dass das obige dp aus $\frac{dS}{d\theta}$, also der Ableitung bei constantem v entstanden ist

$$-\frac{d\theta}{a + \theta} + \frac{d\Theta}{\Theta} = 0,$$

woraus $\Theta = B(a + \theta)$, wo B eine beliebige Constante ist. Beachtet man, dass Θ in der Gleichung, aus welcher es bestimmt wurde, in allen Gliedern im Nenner vorkommt und ausserdem nicht, so sieht man, dass B auch weggelassen werden kann, und somit haben wir

$$\Theta = a + \theta, \tag{13}$$

welche Relation für alle Körper dieselbe sein muss.

Mit dieser Gleichung wird die an die Stelle von (10) getretene Gleichung (12)

$$A\,(a+\theta)\,\frac{dS}{d\theta} = -\left(\frac{dU}{dv} - AS\right). \tag{14}$$

Man kann diese Formel noch etwas abändern, wodurch sie geeignet wird, die Spannungsänderungen anzugeben, welche bei Volums- und Temperaturänderungen eintreten. Setzt man aus (5) für $\frac{dU}{dv} - AS$ seinen Werth, so erhält man

$$A\,(a+\theta)\,\frac{dS}{d\theta} = -\frac{c_1 - c}{v\delta} \tag{15}$$

und dann aus (6)

$$A\,(a+\theta)\,\frac{dS}{dv} = +\frac{c_1 - c}{v^2\delta^2}. \tag{16}$$

Damit wird die Spannungsänderung, welche eine Volumsänderung dv und eine gleichzeitige Temperaturänderung $d\theta$ begleitet,

$$dS = \frac{c_1 - c}{v^2\delta^2 A\,(a+\theta)}\,(dv - v\delta\,d\theta). \tag{17}$$

Will man die Spannungsänderung, welche eintritt, wenn Wärme weder zu- noch abfliesst, so hat man mit dieser Gleichung die letzte Bedingung zu verbinden. Diese ist aber

$$0 = c\,d\theta + \left(\frac{dU}{dv} - AS\right)dv$$

oder

$$0 = c\,d\theta + \frac{c_1 - c}{v\delta}\,dv.$$

Eliminirt man aus dieser Gleichung und (15) entweder $d\theta$ oder dv, so erhält man

$$dS = \frac{c_1 - c}{v^2\delta^2 A\,(a+\theta)} \cdot \frac{c_1}{c}\,dv \tag{18}$$

und

$$dS = -\frac{c_1 - c}{v\delta A\,(a+\theta)}\,d\theta, \tag{19}$$

wo die erste Gleichung die Spannungsvermehrung für die Volumsvergrösserung dv, und die zweite die Spannungsvermehrung für die Temperaturerhöhung $d\theta$ gibt, oder auch beides umgekehrt.