Mechanische Wärme-Theorie

Holtzmann, Karl Heinrich Alexander

Stuttgart, 1866

Kreisprocesse

urn:nbn:de:bsz:31-272364

Das Verhältniss dieser beiden lebendigen Kräfte ist daher

$$\frac{2c}{3(c_1-c)} = \frac{2}{3\left(\frac{c_1}{c}-1\right)}.$$

Dies gibt für die einfachen Gase, für welche $\frac{c_1}{c}$ denselben Werth zu haben scheint (diesen Werth 1,411 gesetzt) 1,622, so dass also für die lebendige Kraft der Drehung der Atome 0,622 von der lebendigen Kraft des Fortschreitens bleibt, unabhängig von der Temperatur und dem Volumen des Gases.

Kreisprocesse.

Carnot's Satz.

15. Ich gehe nun zur Betrachtung der Gleichung (7). Es ist dort ein Körper von der Masse Eins betrachtet, welcher anfänglich das Volum v und die Temperatur θ hat, indem er unter dem allseitigen Zuge S steht. Lässt man diesen Körper sich um dv ausdehnen und erhält dabei die Temperatur, indem man Wärme zuführt, welche durch dQ_1 bezeichnet sein soll, so wird hierbei die Arbeit Sdv auf den Körper verwendet.

Erhöht man jetzt die Temperatur des Körpers um $d\theta$, und lässt dabei das Volum desselben unverändert $v + dv$, so ist hierzu die Wärmemenge $(c + \frac{dc}{dv}dv)\,d\theta$ erforderlich, wenn c die specifische Wärme des Körpers bei dem constanten Volum v ist.

Durch beide Operationen ist das Volumen des Körpers auf $v + dv$ und die Temperatur auf $\theta + d\theta$ gebracht.

Erhöht man dagegen zuerst die Temperatur des Körpers von θ auf $\theta + d\theta$, indem man das Volum v unverändert lässt, so ist hierzu die Wärmemenge $c\,d\theta$ erforderlich, und der Zug an der Oberfläche des Körpers muss hierbei von S auf $S + \frac{dS}{d\theta}d\theta$ gebracht werden. Dehnt man nun den Körper um dv aus und führt so viel Wärme dQ_2 zu, dass die Temperatur $\theta + d\theta$ bleibt, so leistet hierbei der Zug an der Oberfläche die Arbeit

$$(S + \frac{dS}{d\theta} d\theta) \, dv.$$

Durch diesen zweiten Process ist nun wieder der Körper vom Volum v und der Temperatur θ auf $v + dv$ und $\theta + d\theta$ gebracht worden, und es muss also die das erste Mal zugeführte Wärme plus der in Wärme ausgedrückten auf den Körper verwendeten Arbeit gleich sein mit der Summe dieser beiden Grössen beim zweiten Processe, d. h. es muss

$$dQ_1 + (c + \frac{dc}{dv} dv) \, d\theta + ASdv = cd\theta + dQ_2 + A(S + \frac{dS}{d\theta} d\theta) \, dv$$

sein, oder

$$dQ_1 + \frac{dc}{dv} dv \, d\theta - dQ_2 - A \frac{dS}{d\theta} d\theta \, dv = 0.$$

Diese Gleichung stimmt aber mit der Gleichung (7) überein. Es ist nämlich dQ_1 die Wärmemenge, welche dem Körper zugeführt werden muss, um das Volumen bei constanter Temperatur θ von v auf $v + dv$ zu bringen, was mit den in Nro. 10 gebrauchten Bezeichnungen $\frac{dQ}{dv} dv$ ist.

Ferner ist $c = \frac{dQ}{d\theta}$ und also $\frac{dc}{dv} = \frac{d\frac{dQ}{d\theta}}{dv}$;

dQ_2 ist $\left(\frac{dQ}{dv} + \frac{d\frac{dQ}{dv}}{d\theta} d\theta\right) dv$; und mit diesen Bezeichnungen geht die obige Gleichung in die Gleichung (7) über.

Bei der obigen Rechnung ist zu bemerken, dass man in einzelnen Gliedern bis zu den zuletzt allein übrig bleibenden unendlich Kleinen der zweiten Ordnung gegangen ist; dies hätte streng genommen in allen Gliedern geschehen sollen. Es ist aber leicht ersichtlich, dass sich die hier weggelassenen Glieder dieser Ordnung durch Subtraction in dem Endresultate wieder aufheben.

Es ist hier ein Beispiel gegeben, wie ein Körper auf zwei verschiedenen Wegen von dem durch v und θ characterisirten Zustand in den durch $v + dv$ und $\theta + d\theta$ gegebenen gebracht werden kann, und man sieht, dass man auf beiden Wegen eine verschiedene äussere Arbeit auf ihn verwenden muss, wesshalb auch die zugeführten

Wärmemengen um das Aequivalent jener Arbeitsdifferenz verschieden sind.

Lässt man die betrachteten Operationen in der Weise auf einander folgen, dass man zuerst das Volum um dv sich ändern lässt mit Beibehaltung der Temperatur θ, dass dann die Temperatur erhöht wird, mit Beibehaltung des Volums; wird hierauf das Volum bei der höheren Temperatur um dv durch Zusammendrücken vermindert, und endlich die Temperatur durch Entziehung von Wärme bei demselben Volum auf die frühere θ gebracht, so ist der Körper, mit welchem diese Operationen vorgenommen wurden, schliesslich wieder in seinem Anfangszustande, es ist aber die Arbeit $\frac{dS}{d\theta}\, dv\, d\theta$ verwendet worden, und die äquivalente Wärmemenge dafür gewonnen worden. Zugleich ist hierbei die Wärmemenge $dQ_1 + c d\theta$ dem Körper bei der Temperatur θ zugeführt, und die in den unendlich Kleinen der ersten Ordnung gleichgrosse Wärmemenge $dQ_2 + c d\theta$ bei der Temperatur $\theta + d\theta$ wieder von dem betrachteten Körper weggenommen worden, also die Wärmemenge $dQ_1 + c d\theta$ von der Temperatur θ auf die $\theta + d\theta$ gebracht worden.

Nimmt man die angegebenen vier Operationen in umgekehrter Ordnung vor, so wird Arbeit gewonnen, die äquivalente Wärmemenge verschwindet und eine bestimmte Wärmemenge geht von dem wärmeren zu dem kälteren Körper über.

Ein ähnlicher Vorgang zeigt sich bei unsern Dampfmaschinen. Das in den Dampfkessel gebrachte Speisewasser wird auf die Temperatur im Kessel gebracht, beim Zurücktreten des Kolbens im Dampfcylinder wird bei nahe constant bleibender Temperatur Dampf gebildet, welcher den grösseren dargebotenen Raum erfüllt; dabei wird Arbeit nach aussen abgegeben. Wird nun der in den Dampfcylinder gebrachte Dampf condensirt, so gibt er Wärme nach aussen an das kältere Condensationswasser ab; der Kolben geht bei geringerem Drucke durch denselben Raum, den er zuerst bei höherem Drucke durchlaufen hat, zurück und treibt hierbei das entsprechende Quantum Speisewasser wieder in den Kessel, worauf Alles im anfänglichen Zustande ist. Die Wärmemenge, welche während eines solchen Kreislaufes dem Wasser und Dampf im Kessel mitgetheilt wird, wird zum Theil verwendet, um die gewonnene Arbeit zu leisten, der Rest, welcher bei weitem der grössere Theil ist, wird dem Condensationswasser mitgetheilt und kommt nur zum kleinsten Theile im Speisewasser wieder in den Kessel. Man verbraucht also hier einen Theil Wärme zu der hervorzubringenden Arbeit, einen weit grösseren Theil bringt man aber von der Temperatur des Kessels auf die des abfliessenden Condensationswassers.

S. Carnot hat im Jahr 1824 Kreisprocesse, wie den oben betrachteten, einer allgemeineren Untersuchung unterworfen, wobei er der damaligen Anschauung gemäss annahm, die Wärmemenge, welche auf einen Körper verwendet wird, werde ihm wieder unverändert entzogen, wenn der Körper in seinen ursprünglichen Zustand gebracht werde, und die hierbei gewonnene oder verwendete Arbeit sei die Folge oder Ursache des Uebergangs der Wärme von einem wärmeren Körper zu einem kälteren im ersten, oder von einem kälteren zu einem wärmeren Körper im zweiten Falle.

Weil man nun etwa zuerst durch Operationen, wie sie oben beschrieben sind, welche man mit einem Körper A vornimmt, eine gewisse Arbeit W gewinnen kann, indem man die Wärme Q von der Temperatur θ auf θ_1 herabsinken lässt, so muss, wenn man die Operationen in umgekehrter Folge mit einem zweiten Körper B vornimmt, das Hinüberschaffen der Wärme Q von einem Körper von der Temperatur θ_1 zu einem andern von der Tempenatur θ die vorher gewonnene Arbeit W gerade wieder in Anspruch nehmen. Denn durch die beiden auf einander folgenden Kreisprocesse sind schliesslich die Wärmemengen wieder auf ihre Temperatur gebracht und die beiden Körper A und B sind in den anfänglichen Zuständen. Wären die gewonnene und die verwendete Arbeit W nicht gleich, so hätte man die Differenz der Arbeit ohne einen Aufwand gewonnen oder, wenn sie negativ ist, ohne irgend eine Wirkung verloren. Beides aber ist undenkbar. Daher ergibt sich der Carnot'sche Satz: Die Arbeit, welche die Wärme liefern kann, ist unabhängig von den Körpern, welche zur Hervorbringung der Arbeit der Wärme gebraucht werden; die Grösse dieser Arbeit ist allein abhängig von den Temperaturen der Körper, zwischen welchen schliesslich die Wärme übergegangen ist. (Réflexions sur la puissance du feu. Paris 1824. p. 58.) Clapeyron hat später die wenig beachtete Arbeit Carnots reproducirt, indem er dieselbe in die Sprache der

Analysis übersetzte und einzelne Theile theils weiter erläuterte, theils weiter ausdehnte.

Nach den Ansichten, welche wir jetzt über das Wesen der Wärme haben, ist die Ursache der bei den oben betrachteten Kreisprocessen gewonnenen Arbeit nicht der Uebergang der Wärme von einem wärmeren zu einem kälteren Körper, sondern die Umwandlung einer Quantität Wärme, lebendiger Kraft, in Arbeit, und diese Umwandlung ist hierbei nur begleitet von einem Uebergange einer andern Wärmemenge von einem wärmeren zu einem kälteren Körper. Wie hierbei dieser Uebergang zu betrachten und wie der oben mitgetheilte Carnot'sche Satz zu modificiren sei, hat Clausius gelehrt. Wir gehen zu dieser Betrachtung über.

Clausius' Modification des Satzes.

16. Ein Körper k wird durch verschiedene Operationen, bei denen er theils Spannungen ausgesetzt, theils erwärmt wird, durch verschiedene Zustände schliesslich wieder in seinen Anfangszustand gebracht, und zwar durch folgende 6 Operationen:

1) Der Körper k wird von der Temperatur θ auf die niedrigere θ_1 gebracht, indem er einer Spannung ausgesetzt wird, ohne dass Wärme dem Körper von der Umgebung zufliesse oder dahin abströme. Es wird hierbei das Volum und die Temperatur des Körpers sich ändern und eine äussere Arbeit auf ihn verwendet werden müssen.

2) Der Körper k werde nun mit einem zweiten Körper k_1 von der constanten Temperatur θ_1 in Berührung gebracht und ausgedehnt, wobei durch Zuströmen von Wärme von dem Körper k_1 die Temperatur von k auf θ_1 erhalten wird. Die hierbei zuströmende Wärmemenge sei Q_1; zugleich wird eine weitere äussere Arbeit auf den Körper übertragen.

3) Man trenne nun den Körper k_1 von k und lasse den letztern noch weiter sich ausdehnen, ohne dass Wärme von aussen zuströmt oder dahin abgegeben werde. Hierbei sinke die Temperatur auf θ_2; die Ausdehnung bedingt eine weitere auf den Körper übertragene Arbeit.

4) Man setze nun den Körper k mit einem dritten Körper k_2 von der constanten Temperatur θ_2 in Berührung und lasse ihn sich

zusammenziehen, wozu der an ihm angebrachte Zug passend vermindert werden muss. Damit die Temperatur hierbei θ_2 bleibe, muss der Körper Wärme an k_2 abgeben, und zugleich wird durch die Zusammenziehung eine Arbeit nach aussen abgegeben. Man setze diese Operation so lange fort, bis die an k_2 abgegebene Wärmemenge wieder Q_1 betrage.

5) Man trenne den Körper k von k_2 und lasse ihn weiter sich zusammenziehen, ohne dass Wärme von aussen zu- oder dahin abströme, und setze dies fort, bis die Temperatur, welche hierbei steigt, die anfängliche θ geworden ist. Bei dieser Operation wird wieder Arbeit nach aussen abgegeben.

6) Man bringe endlich den Körper k mit einem andern k_3 von der constanten Temperatur θ in Berührung und lasse den ersten sich ausdehnen, bis sein Volum wieder das anfängliche v geworden ist. Hierbei wird Wärme zufliessen, deren Menge Q sei, und zugleich wird Arbeit auf den Körper k verwendet.

Der Körper k ist durch diese 6 Operationen wieder in seinen ursprünglichen Zustand gebracht, die inneren Arbeiten werden sich ausgeglichen haben und die lebendige Kraft seiner Theilchen wird wieder die anfängliche sein. Es ist ihm die Wärmemenge $Q_1 - Q_1 + Q$ zugeführt worden, und dabei ist eine Summe von positiven und negativen Arbeiten auf ihn verwendet worden, welche gleich W sein soll. Damit ist nach Gleichung (1), in welcher $U = 0$ ist,

$$Q + AW = 0.$$

Ist Q positiv, so muss W negativ sein, d. h. es ist nicht eine Arbeit auf den Körper verwendet worden, sondern es ist Arbeit nach aussen abgegeben worden, welche der verwendeten Wärme äquivalent ist; die Wärmemenge Q ist in Arbeit umgesetzt worden. Damit dies erfolgt, muss die Wärmemenge Q_1 von dem Körper k_1 mit der Temperatur θ_1 auf den Körper k_2 mit der Temperatur θ_2 übergehen, von der höheren zur niedrigeren Temperatur.

Man kann nun den betrachteten Kreisprocess auch in der Weise umkehren, dass man den Körper k bei der Temperatur θ zuerst mit dem Körper k_3 von der Temperatur θ zusammenbringt und durch Verminderung der Zugkräfte k zusammenziehen lässt, bis die Wärmemenge Q von k auf k_3 übergegangen ist, wobei eine Arbeit nach aussen abgegeben wird, und dass man dann ebenso die Operationen 5, 4, 3, 2, 1 in umgekehrter Weise folgen lässt, wobei also in 4 die Wärmemenge Q_1 von k_2 bei der Temperatur θ_2 auf k übergeht und bei 2 dieselbe Wärmemenge von k bei der Temperatur θ_1 auf k_1 übergeht. Bei diesem Kreisprocesse wird schliesslich der Körper k wieder in seinem Anfangszustande sein, es wird die Arbeit W auf den Körper übertragen sein und dafür die äquivalente Wärmemenge Q gewonnen sein, zugleich aber die Wärmemenge Q_1 von dem kälteren Körper k_2 auf den wärmeren k_1 übergegangen sein.

Nimmt man statt des hier gebrauchten Körpers k einen andern L und lässt die Temperaturen und auch Q dasselbe sein, so muss auch nach obiger Gleichung die gewonnene oder verbrauchte Arbeit W dieselbe sein wie bei k. Würde nun bei dem mit L vorgenommenen Kreisprocesse die übergegangene Wärme Q_1 eine andere sein als bei dem Körper k, etwa grösser gleich Q_1', so könnte man mit k den beschriebenen Kreisprocess in der obigen Weise durchmachen, wobei die Wärmemenge Q verbraucht, die Arbeit — W gewonnen würde. Diese Arbeit könnte man dann auf den Körper L in der umgekehrten Weise verwenden, und würde dabei die früher verbrauchte Wärme Q wieder gewinnen, und alles wäre wie anfänglich, nur wäre bei dem ersten Kreisprocesse mit k die Wärmemenge Q_1 von der Temperatur θ_1 auf θ_2 herabgebracht, d. h. von dem wärmeren Körper k_1 auf den kälteren k_2 übergegangen, dagegen bei dem Processe mit L die grössere Wärmemenge Q_1' von dem kälteren Körper k_2 zu dem wärmeren θ_1, also nach Vollendung beider Processe ohne allen Aufwand an Arbeit oder Wärme eine gewisse Wärmemenge $Q_1' - Q_1$ von dem kälteren Körper zu dem wärmeren übergeführt worden. Dieselben beiden Kreisprocesse könnte man beliebig oft hinter einander wiederholen, und würde also dadurch eine beliebige Menge Wärme von dem kälteren Körper ohne allen Aufwand an Arbeit oder Wärme zu dem wärmeren Körper übergeführt haben.

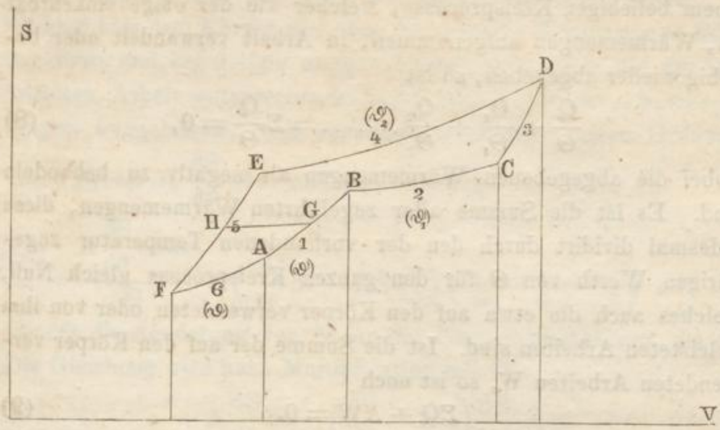
Dies scheint aber unmöglich zu sein, und wir nehmen daher an, dass $Q_1' = Q_1$ sei, welches auch die Körper k und L sind, was wir in dem Satze aussprechen: Es wird immer, wenn die Wärmemenge Q in Arbeit umgesetzt wird, zugleich eine bestimmte Wärmemenge Q_1 von der Temperatur θ_1 auf die niedrigere Temperatur θ_2

übergeführt, und dabei ist Q_1 zwar von θ_1 und θ_2 abhängig, nicht aber von der Art des Körpers, welcher bei dieser Verwandlung von Wärme in Arbeit verwendet wird, wenn nur dieser Körper schliesslich in seinem Anfangszustande sich befindet. Umgekehrt kann man durch Verwandlung einer bestimmten Arbeit in die Wärmemenge Q zugleich dieselbe Wärmemenge Q_1 der niedrigeren Temperatur θ_2 auf die höhere θ_1 überführen. Beide Fälle kann man in einen zusammenfassen, wenn man im ersten auch negative Wärmemengen zulässt, wobei man bei dem Uebergange der Wärme auch Q_1 immer positiv sein lassen kann, dann aber den Wärmeübergang von θ_2 nach θ_1 einführen muss.

Die Wärmemenge Q, welche bei der Temperatur θ dem Körper k zuströmen muss, um bei ihrem Umsatze in Arbeit von dem Uebergange der Wärmemenge Q_1 von der Temperatur θ_1 auf θ_2 begleitet zu sein, hängt von der Temperatur θ ab. Ist Q' die Wärmemenge, welche bei der Temperatur θ' zuströmend, bei ihrer Verwandlung in Arbeit von demselben Uebergange von Q_1 von der Temperatur θ_1 auf θ_2 begleitet ist, so wird man den ersten Kreisprocess wie oben vornehmen können und ihn in dem wiederholten (1) soweit fortsetzen können, bis die Temperatur des Körpers k nun θ' geworden ist. Reiht man nun einen zweiten Kreisprocess in umgekehrter Ordnung an, indem man Arbeit auf den Körper verwendet und dabei die Wärmemenge Q' bei der Temperatur θ' gewinnt, wobei die Wärmemenge Q_1 von θ_2 auf θ_1 gebracht wird, so wird durch beide Processe die Wärmemenge $Q - Q'$ in Arbeit verwandelt sein, und die Wärmemenge Q' von θ auf θ' übergegangen sein.

Man kann sich das graphisch versinnlichen, wenn man die Volumen des Körpers als Abscissen und die jedesmaligen Spannungen als Ordinaten aufträgt. Dabei erhält man für den ersten Kreisprocess die Figur ABCDEF und den Inhalt dieser Figur als die gewonnene Arbeit; für den zweiten erhält man die Figur GHEDCBG und den Inhalt dieser Figur als die geleistete Arbeit; AGHF ist dann die durch beide Processe gewonnene Arbeit und $Q - Q'$ die verwendete Wärme, während Q' von θ auf θ' übergegangen ist, alles andere sich aber wieder in demselben anfänglichen Zustande befindet. Es geht daraus hervor, dass die Menge der Wärme Q, welche in Arbeit umgesetzt wird, wenn die Wärme Q_1 von θ_1 auf

θ_2 übergeht, von der Temperatur θ abhängt, bei welcher die Wärme dem Körper zugeführt wird. Da die Wärmemengen Q und Q_1 ein-



ander bei denselben Temperaturen θ, θ_1 und θ_2 proportional sein werden, so kann man diesen Satz durch die Gleichung

$$Q\,f(\theta) = Q_1\,F(\theta_1, \theta_2)$$

aussprechen, wo f und F Functionszeichen sind. Ebenso hat man

$$Q'\,f(\theta') = Q_1\,F(\theta_1, \theta_2)$$

und also

$$Q\,f(\theta) = Q'\,f(\theta').$$

Dann aber hat man nach dem obigen

$$(Q - Q')\,f(\theta) = Q'\,F(\theta, \theta')$$

oder, wenn man hier $Q'\,f(\theta')$ für $Q\,f(\theta)$ setzt,

$$f(\theta') - f(\theta) = F(\theta, \theta'),$$

womit die erste der Gleichungen wird

$$Q\,f(\theta) = Q_1\,f(\theta_2) - Q_1\,f(\theta_1)$$

und hier muss $f(\theta)$ eine für alle Körper gleiche Function der Temperatur θ sein. Bezeichnet man diese der Einfachheit wegen mit $\frac{1}{\Theta}$, so wird die Gleichung

$$\frac{Q}{\Theta} + \frac{Q_1}{\Theta_1} - \frac{Q_1}{\Theta_2} = 0.$$

Diese Gleichung kann man so betrachten: Bei dem obigen Kreisprocesse wurden die Wärmemengen Q und Q_1 bei den Temperaturen θ und θ_1 dem Körper zugeführt, dagegen die Wärmemenge Q_1 bei der Temperatur θ_2 wieder abgeleitet. Sind also bei einem beliebigen Kreisprocesse, welcher wie der obige umkehrbar ist, Wärmemengen aufgenommen, in Arbeit verwandelt oder beliebig wieder abgegeben, so ist

$$\frac{Q}{\Theta} + \frac{Q_1}{\Theta_1} + \frac{Q_2}{\Theta_2} \ldots\ldots = \Sigma \frac{Q}{\Theta} = 0, \tag{8}$$

wobei die abgegebenen Wärmemengen als negativ zu behandeln sind. Es ist die Summe aller zugeführten Wärmemengen, diese jedesmal dividirt durch den der vorhandenen Temperatur zugehörigen Werth von Θ für den ganzen Kreisprocess gleich Null, welches auch die etwa auf den Körper verwendeten oder von ihm geleisteten Arbeiten sind. Ist die Summe der auf den Körper verwendeten Arbeiten W, so ist noch

$$\Sigma Q + AW = 0. \tag{9}$$

Bei der obigen Ableitung ist vorausgesetzt, dass die Wärmeübergänge immer bei constanter Temperatur geschehen; wäre dies nicht der Fall, so könnte man obige Gleichung durch

$$\int \frac{dQ}{\Theta} = 0 \tag{10}$$

ersetzen.

Bestimmung der Function, welche die Abhängigkeit der in Arbeit umgesetzten Wärme von der Temperatur des erwärmten Körpers gibt.

17. Es handelt sich nun zunächst darum, die Function Θ zu bestimmen. Leitet man zu dem Körper k von der Masse 1 zuerst bei der constanten Temperatur θ die Wärmemenge

$$dQ = \frac{dU}{dv} dv - ASdv$$

und lässt dann ohne Wärme-Zu- oder Abfluss die Temperatur um $d\theta$ steigen; lässt man dann die Temperatur vom Anfangszustande ausgehend zuerst um $d\theta$ steigen, und bringt dann bei der Temperatur $\theta + d\theta$ Wärme zu, bis das Volum $v + dv$ wird, wozu in den unendlich Kleinen der ersten Ordnung wieder das oben angegebene dQ erforderlich ist; so ist der Körper auf beiden Wegen in denselben Endzustand gebracht, und wenn man die zweite Operation in umgekehrter Weise an die erste anschliesst, also zuerst die

Wärme dQ bei der Temperatur $\theta + d\theta$ entzieht und dann die Temperatur um $d\theta$ sinken lässt, so hat man einen der obigen Kreisprocesse vollführt. Für ihn muss also die Gleichung (8) gelten. Es ist aber hier dem Körper die oben bezeichnete Wärmemenge bei θ zugeführt und bei $\theta + d\theta$ weggenommen, wozu noch die der geleisteten Arbeit entsprechende Wärmemenge kommt, welche in obigem weggelassen, weil unendlich klein der zweiten Ordnung. Diese Arbeit ist $\frac{dS}{d\theta} d\theta dv$ und man hat also

$$+\frac{A\frac{dS}{d\theta}d\theta\,dv}{\Theta} + \left(\frac{dU}{dv}dv - AS\,dv\right)\left(\frac{1}{\Theta} - \frac{1}{\Theta + d\Theta}\right) = 0,$$

wo $d\Theta$ die Aenderung von Θ für die Temperaturerhöhung um $d\theta$. Die Gleichung wird nach Multiplication mit Θ

$$+A\frac{dS}{d\theta}d\theta + \left(\frac{dU}{dv} - AS\right)\frac{d\Theta}{\Theta} = 0.$$

Da aber $\frac{dS}{d\theta} = \frac{dS}{d\Theta}\frac{d\Theta}{d\theta}$ ist, so kann man diese Gleichung auch schreiben

$$+A\frac{dS}{d\Theta} + \left(\frac{dU}{dv} - AS\right)\frac{1}{\Theta} = 0. \tag{12}$$

Für vollkommene Gase ist $S = -p$ und $\frac{dU}{dv} = 0$, was zunächst gibt

$$-\frac{dp}{p} + \frac{d\Theta}{\Theta} = 0$$

oder mit $pv = \frac{R}{s}(a + \theta)$, und mit Beachtung, dass das obige dp aus $\frac{dS}{d\theta}$, also der Ableitung bei constantem v entstanden ist

$$-\frac{d\theta}{a+\theta} + \frac{d\Theta}{\Theta} = 0,$$

woraus $\Theta = B(a + \theta)$, wo B eine beliebige Constante ist. Beachtet man, dass Θ in der Gleichung, aus welcher es bestimmt wurde, in allen Gliedern im Nenner vorkommt und ausserdem nicht, so sieht man, dass B auch weggelassen werden kann, und somit haben wir

$$\Theta = a + \theta, \tag{13}$$

welche Relation für alle Körper dieselbe sein muss.

Mit dieser Gleichung wird die an die Stelle von (10) getretene Gleichung (12)

$$A(a+\theta)\frac{dS}{d\theta} = -\left(\frac{dU}{dv} - AS\right). \tag{14}$$

Man kann diese Formel noch etwas abändern, wodurch sie geeignet wird, die Spannungsänderungen anzugeben, welche bei Volums- und Temperaturänderungen eintreten. Setzt man aus (5) für $\frac{dU}{dv} - AS$ seinen Werth, so erhält man

$$A(a+\theta)\frac{dS}{d\theta} = -\frac{c_1 - c}{v\delta} \tag{15}$$

und dann aus (6)

$$A(a+\theta)\frac{dS}{dv} = +\frac{c_1 - c}{v^2\delta^2}. \tag{16}$$

Damit wird die Spannungsänderung, welche eine Volumsänderung dv und eine gleichzeitige Temperaturänderung $d\theta$ begleitet,

$$dS = \frac{c_1 - c}{v^2\delta^2 A(a+\theta)}(dv - v\delta\, d\theta). \tag{17}$$

Will man die Spannungsänderung, welche eintritt, wenn Wärme weder zu- noch abfliesst, so hat man mit dieser Gleichung die letzte Bedingung zu verbinden. Diese ist aber

$$0 = c\, d\theta + \left(\frac{dU}{dv} - AS\right)dv$$

oder

$$0 = c\, d\theta + \frac{c_1 - c}{v\delta}\, dv.$$

Eliminirt man aus dieser Gleichung und (15) entweder $d\theta$ oder dv, so erhält man

$$dS = \frac{c_1 - c}{v^2\delta^2 A(a+\theta)} \cdot \frac{c_1}{c}\, dv \tag{18}$$

und

$$dS = -\frac{c_1 - c}{v\delta A(a+\theta)}\, d\theta, \tag{19}$$

wo die erste Gleichung die Spannungsvermehrung für die Volumsvergrösserung dv, und die zweite die Spannungsvermehrung für die Temperaturerhöhung $d\theta$ gibt, oder auch beides umgekehrt.