Eléments de la théorie mathématique de la capillarité

Delsaulx, P. Joseph

Bruxelles, 1865

Chapitre troisième

urn:nbn:de:bsz:31-272374

CHAPITRE TROISIÈME.

DIVERS ÉQUILIBRES ET MOUVEMENTS CAPILLAIRES.

Nous allons rassembler dans ce chapitre les phénomènes capillaires qui nous paraîtront les plus intéressants et en même temps les plus propres à montrer toute la portée des principes établis dans les deux chapitres précédents.

I

ÉQUILIBRE DE PLUSIEURS LIQUIDES SUPERPOSÉS, DANS UN TUBE CAPILLAIRE CYLINDRIQUE A BASE DE CERCLE (1).

Supposons qu'on ait plongé par son extrémité inférieure un tube capillaire cylindrique à base de cercle, dans un liquide qui le mouille et de densité ρ'; et qu'ensuite on ait introduit à la partie supérieure du même tube, un deuxième liquide capable aussi de le mouiller et de densité ρ. La surface capillaire supérieure sera absolument la même que si le tube plongeait dans le liquide introduit; mais aux points de contact, les deux liquides auront une surface capillaire commune différente de la première et différente aussi de celle que prendrait dans le tube capillaire le premier liquide s'il était seul.

Nous nous proposons de déterminer la nature de cette surface commune, en supposant le tube capillaire assez

(1) LAPLACE, *Mécanique céleste*, 2e supplément au livre Xe, pp. 26 et suiv.

étroit pour qu'on puisse regarder sans erreur sensible les deux surfaces capillaires comme des segments de sphère.

Considérons pour cela un canal infiniment étroit dirigé suivant l'axe du tube et recourbé à la partie inférieure de manière à aboutir au niveau horizontal du liquide extérieur, et estimons positivement les forces moléculaires qui le sollicitent dans le sens de la pesanteur, et négativement celles qui le sollicitent en sens contraire.

A la surface capillaire supérieure, la pression moléculaire du liquide supérieur sur lui-même agit de haut en bas dans le canal infinitésimal et est égale à

$$A - M$$

c'est-à-dire, en représentant par r le rayon du tube et par ω l'angle de raccordement de ce liquide, à

$$A - \frac{\pi \rho^2 H}{r} \cos \omega.$$

A la surface commune, dont nous représenterons l'angle de raccordement par θ, la pression moléculaire du même liquide sur lui-même agit de bas en haut et est égale à

$$-\left(A + \frac{\pi \rho^2 H}{r} \cos \theta\right).$$

L'action moléculaire du liquide inférieur sur le liquide supérieur agit de haut en bas, et est égale à

$$A_1 + \frac{\pi \rho \rho' H_1}{r} \cos \theta.$$

L'action du liquide inférieur sur lui-même agit aussi de haut en bas, et est égale à

$$A' - \frac{\pi \rho'^2 H'}{r} \cos \theta.$$

L'action du liquide supérieur sur le liquide inférieur agit de bas en haut, et est égale à

$$-\left(A_1 - \frac{\pi \rho \rho' H_1}{r} \cos \theta\right).$$

De sorte que l'action totale de haut en bas est égale à

$$A' + \pi \frac{2 \rho \rho' H_1 - \rho^2 H - \rho'^2 H'}{r} \cos \theta - \pi \frac{\rho^2 H}{r} \cos \omega.$$

Si le liquide inférieur était seul dans le tube capillaire, le poids du liquide déplacé serait le même que celui qui est soulevé dans les circonstances actuelles, ainsi que nous l'avons montré dans le premier chapitre, et l'action moléculaire de haut en bas serait égale à,

$$A' - \frac{\pi \rho'^2 H'}{r} \cos \omega'.$$

Ces deux forces sont donc égales, et on a

$$\frac{\rho'^2 H'}{r} \cos \omega' = \frac{\rho^2 H}{r} \cos \omega - \frac{2\rho\rho' H_1 - \rho^2 H - \rho'^2 H'}{r} \cos \theta$$

ou

$$\cos \theta = \frac{\rho^2 H \cos \omega - \rho'^2 H' \cos \omega'}{2\rho\rho' H_1 - \rho^2 H - \rho'^2 H'}.$$

L'angle θ détermine le segment sphérique qui constitue la surface capillaire commune aux deux liquides.

II

SUSPENSION DES LIQUIDES DANS LES TUBES CYLINDRIQUES A BASE DE CERCLE.

Lorsqu'on retire avec précaution un tube capillaire du liquide qui le mouille et dans lequel il était plongé par son extrémité inférieure, ou qu'on introduit directement ce liquide par l'extrémité supérieure, on voit se former à la partie inférieure du tube une goutte liquide dont la convexité peut être plus ou moins prononcée. La hauteur et le volume de la colonne soulevée croissent avec cette convexité.

M. Bertrand a fait connaître une expression remarquable de la limite supérieure du volume soulevé (1). On peut parvenir au résultat indiqué par le savant géomètre de la manière suivante.

Soient, V la limite supérieure du volume soulevé dont il s'agit, et V' celui qui serait soulevé si le tube plongeait par son extrémité inférieure dans le liquide.

Il est facile de voir qu'en représentant par p le périmètre de la section inférieure du tube, on a

$$g\rho V = 2\alpha . p.$$

D'un autre côté,

$$g\rho V' = (2\alpha - \alpha') p.$$

On a donc

$$\frac{V}{V'} = \frac{2\alpha}{2\alpha - \alpha'}.$$

Mais nous avons vu que

$$2\alpha - \alpha' = \alpha' \cos \omega$$

et que, par conséquent,

$$2\alpha = \alpha' (1 + \cos \omega);$$

on a donc finalement

$$\frac{V}{V'} = 1 + \frac{1}{\cos \omega}.$$

(1) *Journal de mathématiques pures et appliquées*, t. XIII, p. 205.

Le volume soulevé lorsque le tube est suspendu verticalement et que les deux extrémités sont à l'air libre, est donc *tout au plus* égal au volume V' multiplié par le facteur $\left(1 + \frac{1}{\cos\omega}\right)$.

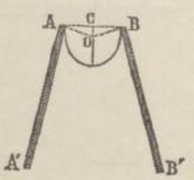
Scholie. Il a été démontré par Gauss, Poisson et M. Bertrand, que l'angle de raccordement est constant tout autour de la surface capillaire dans un tube cylindrique à section quelconque, et qu'il ne dépend que de la nature du tube et de celle du liquide. Si on tient compte de cette remarque, la démonstration qui précède de particulière devient générale, sans qu'il soit besoin d'y rien changer.

III

ASCENSION ET DÉPRESSION DES LIQUIDES DANS LES TUBES CONIQUES (1).

Nous supposerons le tube assez étroit pour qu'on puisse regarder la surface capillaire comme se confondant sensiblement avec un segment de sphère.

Lorsque la surface capillaire est tangente aux parois du tube, r étant le rayon de la section d'affleurement et φ le demi-angle au sommet du cône, la variation de niveau est donnée par l'équation



$$h = \frac{k^2}{r} \cos\varphi.$$

Lorsque la surface capillaire fait avec la paroi du tube un angle ω, la variation de niveau est donnée

(1) *Annales de chimie et de physique*, 3e série, t. LI, pp. 407, 433 et suiv.

par l'équation

$$h = \frac{k^2}{r} \cos(\varphi \pm \omega).$$

Ces formules peuvent s'appliquer aux lames indéfinies dont le plan bissecteur serait vertical; il suffirait d'y remplacer r par la distance D des deux lames aux points d'affleurement.

Dans le cas, par exemple, d'un tube conique et d'une surface capillaire concave tangente aux parois du tube, on a de plus, r' étant le rayon de la section du tube qui correspond au niveau du liquide extérieur,

$$\frac{r' - r}{h} = tg\,\varphi,$$

et, par conséquent,

$$\frac{r'}{h} - \frac{k^2 \cos\varphi}{h^2} = tg\,\varphi.$$

Cette équation donne

$$h^2\, tg\,\varphi - r'h + k^2 \cos\varphi = 0$$

et

$$h = \frac{r'}{2\, tg\,\varphi} \pm \frac{1}{2\, tg\,\varphi} \sqrt{r'^2 - 4\, k^2 \sin\varphi}.$$

On voit par là que l'équilibre de la colonne soulevée est impossible lorsqu'on plonge le tube assez profondément pour que l'on ait

$$r' < 2\, k \sqrt{\sin\varphi};$$

le liquide doit alors monter jusqu'au haut du tube.

Lorsqu'on ne plonge pas le tube aussi profondément, et que l'on prend garde que la relation

$$r' > 2\, k \sqrt{\sin\varphi}$$

soit vérifiée, il y a deux positions d'équilibre de la colonne liquide également possibles, l'une

$$h' = \frac{r'}{2\,tg\,\varphi} - \frac{1}{2\,tg\,\varphi}\sqrt{r'^2 - 4\,k^2 \sin\varphi}$$

qui correspond à un *équilibre stable,* l'autre

$$h'' = \frac{r'}{2\,tg\,\varphi} + \frac{1}{2\,tg\,\varphi}\sqrt{r'^2 - 4\,k^2 \sin\varphi}$$

qui correspond à un *équilibre instable.*

En effet, on a

$$\frac{dh}{dr'} = \frac{1}{2\,tg\,\varphi}\left[1 \pm \frac{r'}{\sqrt{r'^2 - 4\,k^2 \sin\varphi}}\right].$$

Cette équation montre que h'' varie dans le même sens que r', tandis que h' varie en sens contraire. Il s'ensuit que si on déplace un tant soit peu la colonne liquide, soit dans un sens, soit dans un autre, en produisant une aspiration, par exemple, ou une compression, à la partie supérieure du tube, h'' ne pourra pas revenir à sa position primitive, et que le contraire arrivera pour la colonne h'.

IV

ÉQUILIBRE D'UNE GOUTTE LIQUIDE DANS UN TUBE CONIQUE.

Une goutte liquide qui mouille les parois d'un tube conique suffisamment étroit est terminée, comme on sait, par deux segments sphériques concaves de rayons différents. Dans ce cas, lorsque l'angle de raccordement est nul, les pressions moléculaires qui correspondent à chacun des ménisques, sont, en prenant pour unité de poids celui de l'unité de volume du liquide et en représentant par r et r' les rayons des sections aux points d'affleurement,

$$A - \frac{k^2}{r} \cos \varphi \qquad \text{et} \qquad A - \frac{k^2}{r'} \cos \varphi.$$

Admettons que l'on ait écrit les rayons r et r' dans l'ordre de leurs distances au sommet du cône, et que l'on ait conséquemment

$$r' > r.$$

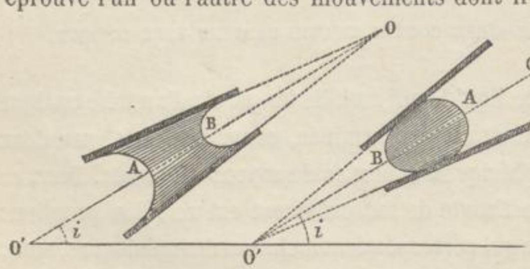
Il est évident que la pression moléculaire qui correspond à la section r est plus petite que celle qui correspond à la section r', et que la goutte liquide s'avancera vers le sommet du tube, tant que la différence des actions moléculaires ne sera pas contre-balancée par l'action de la gravité.

Lorsque la goutte liquide ne mouille pas le tube, les segments sphériques qui la terminent sont convexes; les pressions moléculaires sont respectivement égales à

$$A + \frac{k^2}{r} \cos \varphi \qquad \text{et} \qquad A + \frac{k^2}{r'} \cos \varphi;$$

et la goutte liquide s'éloigne dans ce cas du sommet du tube, jusqu'à ce que l'action des forces qui la sollicitent soit contre-balancée par celle de la gravité.

Supposons maintenant que la goutte liquide après avoir éprouvé l'un ou l'autre des mouvements dont il vient d'être



question ait atteint sa position d'équilibre.

Alors le petit filet central dont la section peut être prise pour unité de surface, est sollicité dans le sens AO par la force moléculaire

$$k^2 \cos \varphi \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r'}\right) \text{ (1)}$$

et dans le sens OA par la composante de son poids suivant cette direction. En représentant par $2l$ la longueur de la goutte, et par i l'angle d'inclinaison de l'axe du tube sur l'horizontale, la valeur de cette composante est

$$2l \sin i.$$

On a donc l'équation

$$2l \sin i = k^2 \cos \varphi \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r'}\right).$$

En appelant x la distance $\dfrac{\mathrm{OA}+\mathrm{OB}}{2}$, on a aussi

$$tg\, \varphi = \frac{r}{x-l} = \frac{r'}{x+l} = \frac{r'-r}{2\,l}$$

et, par conséquent,

$$r' - r = 2l\, tg\, \varphi \qquad \text{et} \qquad rr' = x^2 tg^2\, \varphi$$

en négligeant l devant x;
on a, par suite,

$$2l \sin i = k^2 \cos \varphi \frac{2l}{x^2 tg\, \varphi}$$

ou

$$\sin i = \frac{k^2 \cos^2 \varphi}{x^2 \sin \varphi}$$

ou encore,

$$\sin i = \frac{\dfrac{k^2 \cos \varphi}{r''}}{x}.$$

(1) *Leçons de physique*, par M. Desains, t. I, p. 607.

en posant

$$r'' = x \, tg \, \varphi,$$

La première valeur de sin i fait voir que le sinus de l'inclinaison du tube sur l'horizon est à peu près en raison inverse du carré de la distance du centre de la goutte liquide au sommet du tube lors de l'équilibre. Ce résultat a été vérifié par Newton (1).

La seconde montre que le sinus de l'inclinaison est encore sensiblement égal à une fraction dont le numérateur est la hauteur à laquelle le liquide s'élèverait dans un tube cylindrique de même rayon que la section moyenne de la goutte liquide, et dont le dénominateur est égal à la distance du centre de la goutte au sommet du tube lors de l'équilibre.

Tous ces résultats sont applicables, ainsi qu'il a été dit plus haut, aux lames formant entre elles un angle très-aigu et dont l'intersection commune est horizontale.

V

SUSPENSION DES CORPS LÉGERS A LA SURFACE DES LIQUIDES DE MOINDRE DENSITÉ.

Les corps de petites dimensions peuvent flotter à la surface des liquides qui ne les mouillent pas, alors même que la pesanteur spécifique de ces derniers est moindre que celle du solide.

En effet, il faut et il suffit pour cela, que le poids du corps

(1) *Optique*, question 31.

soit égal à la poussée du liquide ; en d'autres termes, b étant la base de poussée du corps supposé cylindrique, h sa hauteur, ρ sa densité, ρ' la densité du liquide et h' l'élévation de son niveau extérieur au-dessus de la base b ; il suffit que l'on ait

$$bhg\rho = bh'g\rho'$$

ou

$$h\rho = h'\rho'.$$

Il est seulement essentiel de remarquer, que la mobilité du liquide étant un obstacle pour que h' diffère considérablement de h, ρ ne pourra jamais différer beaucoup de ρ'.

VI

ATTRACTION DES CORPS LÉGERS (1).

Il est facile de se rendre compte d'un des phénomènes capillaires les plus intéressants, savoir de l'attraction des corps légers, à l'aide des principes que nous avons établis.

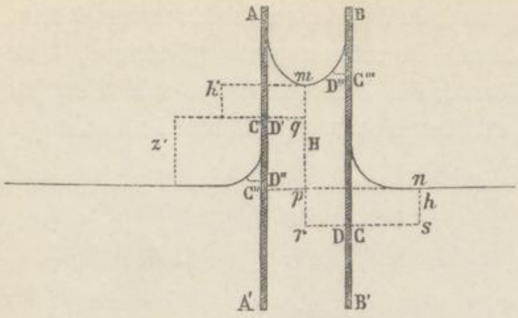
Nous considérerons d'abord les corps qui peuvent être mouillés par les liquides dans lesquels ils sont plongés.

Soient AA' et BB' deux lames verticales très-rapprochées l'une de l'autre et qui peuvent être rendues mobiles à un moment donné.

Ces lames supportent en chacun de leurs points des pressions qu'il est aisé d'évaluer.

---

(1) LAPLACE, *Mécanique céleste*, 1er supplément au livre Xe, pp. 41 et suiv.



Soient P la pression atmosphérique estimée en colonne d'eau, H la hauteur de la colonne mr, et h celle de la colonne ns.

Les pressions supportées par la lame BB' en deux points tels que C et D, sont :

Au point D,

$$P + (A - M) + H - A \qquad \text{ou} \qquad P + H - M;$$

au point C,

$$P + A + h - A \qquad \text{ou} \qquad P + h.$$

Ces deux pressions sont égales, attendu que l'on a

$$M = H - h.$$

On néglige dans ce calcul l'action réciproque exercée en chacun des deux points par la lame sur le liquide et par le liquide sur la lame, par la raison que cette action réciproque ne peut communiquer à la lame aucune tendance au mouvement.

Soient, h' la hauteur de la colonne mq et z' celle de pq.

Les pressions supportées par la lame AA' en deux points tels que C' et D', sont :
au point C',

$$P;$$

au point D',

$$P + (A - M) + h' - A \qquad \text{ou} \qquad P + h' - M \qquad \text{ou} \qquad P - z'.$$

Ces deux pressions sont inégales et l'excès de la première sur la seconde est égal au poids de la colonne z'.

Les pressions supportées par la lame AA' en deux points tels que C'' et D'', sont :
au point C'',

$$P + (A - M') - A \quad \text{ou} \quad P - M' \quad \text{ou} \quad P - h''$$

en appelant h'', l'élévation du point C'' au-dessus du niveau horizontal du liquide extérieur non soulevé ;
au point D'',

$$P + (A - M) + (H - h - h'') - A \quad \text{ou} \quad P - h''.$$

Ces deux pressions sont égales.

Les pressions supportées par la lame BB' en deux points tels que C''' et D''', sont :
au point C''',

$$P;$$

au point D''',

$$P + (A - M'') - A \quad \text{ou} \quad P - h'''.$$

en représentant par h''', l'élévation du point D''' au-dessus du plan horizontal du niveau du liquide extérieur.

Ces deux pressions sont inégales et l'excès de la première sur la seconde est égal au poids de la colonne liquide h'''.

La lame AA' est donc pressée en définitive de dehors en dedans sur l'unité de longueur, par une force totale égale au poids d'une colonne liquide, qui, l et l_1 étant les distances verticales au-dessus du niveau horizontal du liquide extérieur des lignes de l'affleurement intérieur et de l'affleurement extérieur, aurait pour base le rectangle

$$l - l_1$$

et pour hauteur, la demi-somme

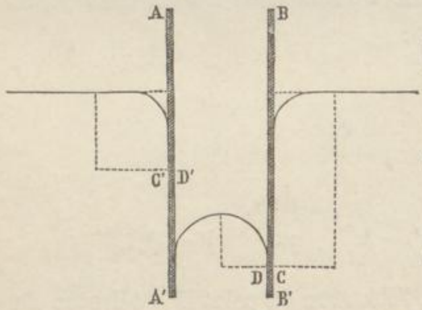
$$\frac{l+l_1}{2}.$$

Ce poids est égal à

$$\frac{l^2-l_1^2}{2}\rho g.$$

Les deux lames AA′ et BB′ tendent donc à se rapprocher, et elles se rapprocheront effectivement si on leur donne la mobilité qu'elles peuvent recevoir.

Considérons, en second lieu, les corps plongés dans les liquides qui ne peuvent pas les mouiller et conservons les notations précédentes.



Les pressions supportées par la lame BB′ en deux points tels que C et D, sont : au point C,

$$P+h;$$

au point D,

$$P+M+H.$$

Ces deux pressions sont égales, attendu que l'on a

$$M=h-H.$$

Les pressions supportées par la lame AA′ en deux points tels que C′ et D′, sont :
au point C′,

$$P+h';$$

au point D′,

$$P.$$

Ces pressions sont inégales, et l'excès de la première sur la seconde est égal au poids de la colonne h'.

La lame AA' est donc pressée de dehors en dedans sur l'unité de longueur, par le poids d'une colonne liquide qui aurait pour base le rectangle

$$l - l_1,$$

et pour hauteur

$$\frac{l + l_1}{2}.$$

Ce poids est égal à

$$\frac{l^2 - l_1^2}{2} \rho g.$$

Les deux lames AA' et BB' tendent donc à se rapprocher.

VII

RÉPULSION DES CORPS LÉGERS (1).

Lorsqu'une des lames est mouillée par le liquide, et que l'autre ne l'est pas, il y a généralement répulsion. L'explication de ce phénomène exige quelque développement. Nous le traiterons cependant le plus brièvement possible.

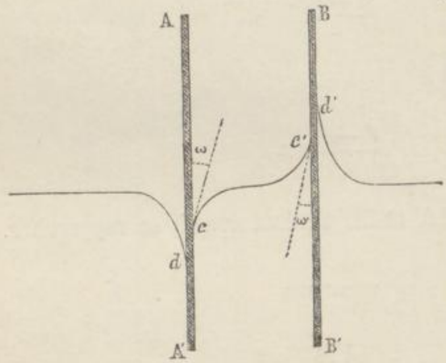
L'équation de la surface capillaire de révolution devient dans le cas de deux lames parallèles

$$z = \frac{k^2}{2} \frac{\frac{d^2z}{du^2}}{\left(1 + \frac{dz^2}{du^2}\right)^{\frac{3}{2}}};$$

(1) LAPLACE, *Mécanique céleste*, 2e supplément au livre Xe, pp. 39 et suiv.

et il est facile de voir que la courbe méridienne a nécessairement dans ce cas un point d'inflexion, lorsque les deux lames sont à une distance assez grande l'une de l'autre. Ce point est d'ailleurs au niveau du liquide extérieur, attendu qu'en un point d'inflexion le rayon de courbure de la section méridienne est en général infini.

Cela posé, supposons que le liquide soit déprimé près de la première lame et soulevé près de la seconde;



et soient : ω l'angle aigu de raccordement de la première lame,
ω' l'angle de raccordement de la seconde,
λ la dépression du point c au-dessous du niveau extérieur,
λ_1 celle du point d,
λ' l'élévation du point c' au-dessus du même niveau,
λ'_1 celle du point d'.

On a

$$zdz = \frac{k^2}{2}\,\frac{\frac{dz}{du}\,\frac{d^2z}{du^2}\,du}{\left(1+\frac{dz^2}{du^2}\right)^{\frac{3}{2}}}$$

et en intégrant,

$$\frac{z^2}{2} = \text{const} - \frac{k^2}{2}\,\frac{1}{\sqrt{1+\frac{dz^2}{du^2}}}.$$

Comme on doit avoir au point c

$$\frac{\lambda^2}{2} = \text{const} - \frac{k^2}{2}\sin\omega,$$

et au point c'

$$\frac{\lambda'^2}{2} = \text{const} - \frac{k^2}{2} \sin\omega' ;$$

il faut que

$$\lambda'^2 - \lambda^2 = k^2 (\sin\omega - \sin\omega')$$

et que

$$\frac{k^2}{\sqrt{1 + \frac{dz^2}{du^2}}} = \lambda^2 + k^2 \sin\omega - z^2.$$

En posant

$$k^2 Z = \lambda^2 + k^2 \sin\omega - z^2,$$

la dernière équation devient

$$du = \frac{Z\, dz}{\sqrt{1 - Z^2}}$$

ou

$$du = tg\varphi\, dz,$$

φ étant l'angle variable formé par la tangente à la courbe méridienne cc' avec la verticale.

Z, qui est toujours inférieur à l'unité, devient au point d'inflexion

$$\frac{\lambda^2 + k^2 \sin\omega}{k^2};$$

on a donc :

$$\lambda^2 + k^2 \sin\omega \leqq k^2 \qquad \text{et} \qquad \lambda'^2 + k^2 \sin\omega' \leqq k^2.$$

Mais il n'est pas possible d'avoir

$$\lambda^2 + k^2 \sin\omega = k^2 = \lambda'^2 + k^2 \sin\omega',$$

attendu qu'on aurait alors

$$k^2 (1 - Z) = z^2$$
$$k^2 (1 + Z) = 2k^2 - z^2$$

et partant,

$$du = \mp \frac{(k^2 - z^2)\, dz}{z\sqrt{2\, k^2 - z^2}}.$$

Or, cette dernière équation donne par l'intégration,

$$u = \frac{k}{2\sqrt{2}}\, l. \left[\frac{k\sqrt{2} + \sqrt{2\, k^2 - z^2}}{k\sqrt{2} - \sqrt{2\, k^2 - z^2}} \right] - \sqrt{2\, k^2 - z^2} + \text{const},$$

pour la partie de la courbe méridienne comprise entre la première lame et le point d'inflexion; c'est-à-dire, en remplaçant la constante par la valeur qu'elle doit avoir pour satisfaire à l'égalité

$$u = o \qquad \text{pour} \qquad z = \lambda:$$

$$u = \frac{k}{2\sqrt{2}} \left[l. \frac{k\sqrt{2} + \sqrt{2k^2 - z^2}}{k\sqrt{2} - \sqrt{2k^2 - z^2}} - l. \frac{k\sqrt{2} + \sqrt{2\, k^2 - \lambda^2}}{k\sqrt{2} - \sqrt{2\, k^2 - \lambda^2}} \right] + \sqrt{2\, k^2 - \lambda^2} - \sqrt{2\, k^2 - z^2}.$$

Cette valeur de u devenant infinie pour $z = o$, il faudrait donc en conclure que les deux lames sont à une distance infinie l'une de l'autre, ce qui est contraire à nos suppositions.

On a donc nécessairement, ainsi que nous l'avons dit,

$$\lambda^2 + k^2 \sin \omega < k^2 \qquad \text{et} \qquad \lambda'^2 + k^2 \sin \omega' < k^2,$$

et puisqu'on a

$$\lambda_1^2 + k^2 \sin \omega = k^2 \qquad \text{et} \qquad \lambda_1'^2 + k^2 \sin \omega' = k^2,$$

ainsi qu'il a été démontré à la fin du chapitre précédent, on a aussi :

$$\lambda < \lambda_1 \qquad \text{et} \qquad \lambda' < \lambda_1'.$$

La variation de niveau est donc moins forte aux points c et c', qu'aux points d et d'.

Cela posé, il résulte de l'examen qui a été fait dans l'article précédent, que la lame AA′ est pressée de dedans en dehors sur l'unité de longueur, par une colonne liquide dont le poids est égal à

$$\frac{\lambda_1^2 - \lambda^2}{2} \rho g,$$

en même temps que la lame BB′ est pressée de la même manière, du dedans au dehors, par le poids liquide

$$\frac{\lambda_1'^2 - \lambda'^2}{2} \rho g.$$

Ces deux pressions sont égales, puisque l'on a

$$\lambda'^2 - \lambda^2 = k^2 (\sin \omega - \sin \omega') = \lambda_1'^2 - \lambda_1^2 .$$

Si $\omega = \omega'$, le point d'inflexion se trouve à égale distance des deux lames et subsiste toujours, quel que soit le degré de rapprochement des parois en regard. Dans ce cas, il y a toujours répulsion des deux lames.

Si on a $\omega > \omega'$: d'une part, il est nécessaire que le point d'inflexion soit, dans ce cas, plus rapproché de la première lame que de la seconde, attendu que, l'angle φ obtenant les mêmes valeurs de part et d'autre du point d'inflexion pour les mêmes valeurs absolues de z, il s'ensuit que les différentielles du sont égales deux à deux de part et d'autre de ce point et qu'on a

$$\int_\lambda^0 du < \int_0^{\lambda'} du;$$

d'autre part, il est facile de voir que le point d'inflexion doit finir par se confondre avec la paroi de la première lame, si on rapproche indéfiniment les deux lames en regard.

En effet, on a tout à la fois

$$\lambda'^2 - \lambda^2 = k^2 (\sin\omega - \sin\omega')$$

et

$$du = tg\varphi\, dz;$$

la première équation exige que l'on ait constamment

$$\lambda'^2 > k^2 (\sin\omega - \sin\omega'),$$

tandis que la seconde, intégrée depuis la première lame jusqu'au point d'inflexion, demande que λ' soit du même ordre de grandeur que la distance des lames.

Il est évident que ces deux conditions, qui subsistent tant qu'il y a point d'inflexion, ne peuvent coexister quand on rapproche indéfiniment les deux lames, puisque λ' devrait être à la fois une quantité finie et une quantité infinitésimale.

Lorsque le point d'inflexion coïncide avec la lame AA', λ est égal à zéro.

A partir de ce moment, la courbe capillaire méridienne demeure concave dans toute son étendue, et λ qui croît à mesure qu'on diminue la distance des lames ne caractérise plus une dépression du liquide, mais bien une ascension.

La lame AA' est alors soumise à deux forces contraires, l'une qui agit du dehors au dedans et qui est égale sur l'unité de longueur au poids liquide

$$\frac{\lambda^2}{2} \rho g;$$

l'autre qui sollicite du dedans au dehors et qui est égale au poids liquide

$$\frac{\lambda_1^2}{2} \rho g.$$

Tant que la résultante de ces deux forces,

$$\frac{\lambda_1^2 - \lambda_2}{2} \rho g$$

est positive, c'est-à-dire, tant que l'on a

$$\lambda_1 > \lambda,$$

il y a répulsion des deux lames.

Mais lorsqu'on aura

$$\lambda_1 = \lambda,$$

et partant

$$\lambda_1 = \lambda,$$

la répulsion se changera en attraction, et cela pour les deux plans à la fois (1).

VIII

THÉORÈME DE M. BERTRAND (2).

M. Bertrand a fait connaître il y a quelques années un fort beau théorème par lequel nous allons terminer cette revue des principaux phénomènes capillaires.

Supposons qu'une goutte de mercure repose sur une lame horizontale de verre, et que, par le moyen d'un canal recourbé terminé à un petit orifice pratiqué dans la lame au centre même de la base de support, elle communique avec un vase assez large pour que la surface du niveau du liquide y soit horizontale.

---

(1) On peut consulter sur ce sujet, la *Nouvelle théorie de l'action capillaire*, par Poisson, nº 96-100 ; *Mécanique céleste* translated with a commentary by Bowditch, v. 4, pp. 920 et suiv. ; *Fisica de' corpi ponderabili* del cavaliere Avogadro, t. II, pp. 224 et suiv.

(2) *Journal de mathématiques pures et appliquées*, 1re série, t. XIII, p. 207.

Soient, V le volume de la goutte,
b la surface de la base de support,
L le contour de cette base,
i l'angle formé avec le plan horizontal par le plan tangent à la surface de la goutte tout le long du contour L.

Si on prend le plan de la lame pour le plan coordonné des xy et qu'on compte les z dans le sens de la pesanteur, on a pour l'équation de la surface de la goutte mercurielle,

$$h - z = \frac{k^2}{2}\left(\frac{1}{R} + \frac{1}{R'}\right)$$

h étant l'élévation de la surface horizontale du liquide du vase au-dessus du plan de la lame de verre.

Multipliant par $dx\,dy$, intégrant sur toute l'étendue de la surface libre de la goutte de la même manière que dans la détermination des volumes, et remarquant que le produit $h\,dx\,dy$ est nul sur toute l'étendue de l'anneau horizontal compris entre le contour L et celui de la projection de la surface, on obtient

$$bh - V = \frac{k^2}{2}\iint\left(\frac{1}{R} + \frac{1}{R'}\right) dx dy.$$

Nous avons déjà vu que l'on peut considérer l'intégrale

$$\iint\left(\frac{1}{R} + \frac{1}{R'}\right) dx dy$$

comme la différence de deux sommes : celle des composantes verticales des pressions $\frac{du}{\varepsilon}$ s'exerçant normalement sur toute l'étendue de la surface libre de la goutte, et celle des composantes verticales des pressions $\frac{dv}{\varepsilon}$ s'exerçant aussi normalement, mais en sens contraire des premières, sur toute l'étendue de la surface parallèle à la surface libre dont la distance constante à cette dernière est infiniment petite et égale à ε.

Cette intégrale est donc égale à la différence des produits de $\frac{1}{\varepsilon}$, d'une part par la projection horizontale de la portion de la surface libre renfermée dans le cylindre vertical qui a b pour base; de l'autre, par la projection horizontale de la portion de la surface parallèle renfermée dans le cylindre vertical qui passe par le contour terminateur de cette surface. En d'autres termes, l'intégrale dont il s'agit est égal au produit de $\frac{1}{\varepsilon}$ par la projection horizontale de la surface formée par ceux des segments ε normaux à la surface libre, qui sont situés tout le long du contour L.

On a par conséquent

$$bh - V = -\frac{k^2}{2} L \sin i$$

et, par suite,

$$V = bh + \frac{k^2}{2} L \sin i.$$

Cette relation remarquable fournit un moyen nouveau de soumettre la théorie de la capillarité à la sanction de l'expérience.

FIN.