Eléments de la théorie mathématique de la capillarité

Delsaulx, P. Joseph

Bruxelles, 1865

Chapitre premier

CHAPITRE PREMIER.

DES ACTIONS MOLÉCULAIRES A LA BASE DE LA COLONNE CAPILLAIRE.

Principe. Quand un tube capillaire plonge dans un liquide par son extrémité inférieure, on peut le supposer prolongé jusqu'au niveau du liquide extérieur par un tube capillaire fictif recourbé, à parois solidifiées, c'est-à-dire, formées de molécules liquides réunies invariablement l'une à l'autre sans altération aucune, soit de la densité, soit d'aucune autre propriété physique. Cela revient à considérer isolément une partie de la masse totale du liquide, savoir, celle qui est renfermée dans le tube capillaire ainsi prolongé. Comme cette masse partielle doit être en équilibre, tout aussi bien que la masse totale, sous l'action des forces qui la sollicitent, il est permis de considérer à part cet équilibre et d'en rechercher les conditions. On peut dans cette recherche, vu la grande épaisseur relative des parois, soit du tube réel, soit du tube fictif, négliger le liquide extérieur au tube capillaire en ce qui concerne les actions moléculaires qui sollicitent la masse liquide intérieure. On suppose, en effet, que ces dernières ne s'étendent jamais à des distances sensibles. Pour procéder avec méthode nous considérerons d'abord les actions moléculaires qui sollicitent le liquide intérieur au tube réel, puis nous parlerons de celles qui sollicitent le liquide intérieur au tube fictif.

I

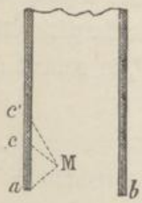
ACTIONS MOLÉCULAIRES QUI SOLLICITENT LE LIQUIDE INTÉRIEUR AU TUBE RÉEL (1).

1er Théorème. La résultante des actions moléculaires du tube réel sur une molécule liquide qui ne se trouve point dans le voisinage d'une de ses extrémités est toujours normale au tube, ou située dans un plan normal.

En effet, si on décrit de ce point ou de cette molécule, comme centre, la sphère d'attraction sensible, il devient évident que la symétrie de figure de la portion solide découpée par cette sphère dans le tube réel par rapport au plan diamétral perpendiculaire à l'axe du tube, entraîne nécessairement la normalité dont il est ici question.

Corollaire. Une telle action est impuissante, soit à soulever, soit à déprimer le liquide.

2e Théorème. Une molécule liquide située à une distance du périmètre de la base horizontale inférieure du tube réel moindre que le rayon de l'attraction sensible, éprouve de la part du tube supposé vertical, une action moléculaire résultante dont la composante verticale est dirigée de bas en haut.



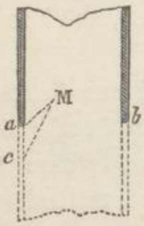
Soit, en effet, M*a* cette distance. Si on prend M*c* égal à M*a* et M*c'* égal au rayon de l'attraction sensible, il est évident que la portion *cc'* de l'arête du tube réel exercera sur la molécule M l'action résultante susdite.

(1) *Annales de chimie et de physique*, 3e série, t. LI, p. 394, et *Leçons de physique*, par M. P. Desains, t. I, pp. 591 et 592.

Corollaire. La composante verticale de l'action moléculaire dont il est ici question tend à soulever le liquide; de sorte que, si on représente par α la composante verticale de l'action moléculaire exercée par la portion de l'anneau du tube réel qui correspond à l'unité de longueur du périmètre p sur le liquide intérieur au tube, et par F, la somme de toutes ces actions soulevantes, on aura

$$F = p\alpha.$$

3e Théorème. Une molécule liquide située comme précédemment à l'intérieur du tube réel à une distance du périmètre de la base horizontale supérieure du tube fictif, moindre que le rayon de l'attraction sensible, éprouve de la part du tube fictif une action moléculaire résultante dont la composante verticale est dirigée de haut en bas.



Soient, en effet, Ma cette distance, et Mc le rayon de l'attraction sensible. Il est visible que la portion ac de l'arête du tube fictif exerce sur la molécule liquide la résultante moléculaire susdite.

Corollaire. La composante verticale dont il s'agit tend à déprimer le liquide. Par conséquent, si on appelle α' la composante verticale de l'action moléculaire exercée par la portion de l'anneau liquide du tube fictif qui correspond à l'unité de longueur du périmètre sur le liquide intérieur au tube réel, et par F', la somme de toutes ces actions déprimantes, on aura

$$F' = p\alpha'.$$

4e Théorème. Les actions moléculaires réciproques de deux molécules liquides prises où on voudra dans le tube réel ont des composantes verticales égales et contraires.

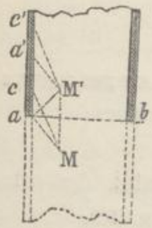
C'est une conséquence nécessaire de l'égalité de l'action et de la réaction.

Corollaire. De telles actions sont impuissantes, soit à soulever, soit à déprimer le liquide.

II

ACTIONS MOLÉCULAIRES QUI SOLLICITENT LE LIQUIDE INTÉRIEUR AU TUBE FICTIF (1).

1er Théorème. Une molécule liquide située à l'intérieur du tube fictif à une distance du périmètre de la base horizontale inférieure du tube réel moindre que le rayon de l'attraction sensible, éprouve de la part du tube réel une action moléculaire résultante dont la composante verticale est dirigée de bas en haut.



Soient, en effet, Ma cette distance, et Mc le rayon de l'attraction sensible, il est visible que la portion ac de l'arête du tube réel exerce sur M l'action moléculaire susdite.

Corollaire. La composante verticale dont il s'agit tend à soulever le liquide. De plus, les actions moléculaires que le tube exerce sur la molécule M et sur sa symétrique M' par rapport à la base horizontale du tube, sont évidemment égales et parallèles, puisque les relations

$$Ma = M'a' \qquad \text{et} \qquad Mc = M'c'$$

entraînent l'égalité

$$ac = a'c'.$$

(1) *Leçons de physique*, par M. P. Desains, t. I p. 592.

On a donc, en appelant F'' la somme des actions soulevantes dont il s'agit

$$F'' = F = p\alpha.$$

2e Théorème. La couche d'eau qui forme la paroi du tube fictif recourbé ne peut produire aucun déplacement relatif du liquide qu'elle renferme.

C'est une conséquence nécessaire des deux premiers théorèmes de l'article précédent appliqués au tube fictif.

3e Théorème. Les actions moléculaires réciproques des molécules liquides situées à l'intérieur du tube fictif sont impuissantes, soit à soulever, soit à déprimer le liquide.

La raison en a été donnée au théorème quatrième du même article.

III

LOI GÉNÉRALE DE L'ASCENSION ET DE LA DÉPRESSION DES LIQUIDES DANS LES TUBES CAPILLAIRES CYLINDRIQUES.

Les théorèmes qui précèdent conduisent à des conséquences générales que nous allons faire connaître.

Théorème. Dans les tubes cylindriques la variation du niveau capillaire est, pour un même solide et un même liquide, en raison directe du périmètre et en raison inverse de l'aire de la section intérieure du tube.

En effet, la somme des composantes verticales qui agissent au bas du tube pour soutenir la colonne liquide si elle est soulevée, ou pour la maintenir déprimée dans le cas contraire, est dans la première supposition,

$$2\,F - F' = p\,(2\,\alpha - \alpha'),$$

et, dans la seconde,

$$F' - 2F = p(\alpha' - 2\alpha).$$

De sorte qu'en représentant par h la hauteur de la colonne soulevée ou déprimée, par s l'aire de la section du tube, par ρ la densité du liquide et par a^2 une constante spécifique qui ne dépend que de la nature du tube et de celle du liquide, on aura pour la condition nécessaire et suffisante de l'équilibre dans le tube capillaire,

$$\pm\, p(2\alpha - \alpha') = sh\rho g$$

ou

$$h = \pm \frac{2\alpha - \alpha'}{\rho g}\frac{p}{s} = \pm\, a^2 \frac{p}{s}.$$

Corollaire 1er (1). Entre tous les tubes prismatiques de même base intérieure le tube cylindrique à base de cercle est celui dans lequel la hauteur h est *minimum;* car, de toutes les figures planes de même aire, c'est le cercle qui a le plus petit périmètre.

Corollaire 2e. Entre tous les tubes prismatiques de même périmètre intérieur le tube cylindrique à base de cercle est encore celui dans lequel la hauteur h est *minimum;* car, de toutes les figures planes isopérimètres, c'est le cercle qui a l'aire la plus grande.

Corollaire 3e. Dans les tubes prismatiques dont les bases intérieures sont des polygones semblables les hauteurs h sont en raison inverse des côtés homologues; car, si d'un côté les périmètres sont proportionnels aux côtés homologues, de l'autre, les aires sont proportionnelles aux carrés des mêmes côtés.

---

(1) Laplace, *Mécanique céleste*, 2e supplément au livre Xe, pp. 21, 22, 26, 31 et 32.

Corollaire 4^e. La hauteur h est la même pour des tubes prismatiques dont les bases sont des polygones circonscrits à un même cercle, et ces hauteurs sont en raison inverse des rayons des cercles inscrits lorsque les bases intérieures sont des polygones circonscrits à des cercles différents.

Corollaire 5^e. Lorsqu'on plonge un tube capillaire par son extrémité inférieure dans un vase contenant un nombre quelconque de liquides différents superposés en couches horizontales, la différence des poids des liquides que le tube peut contenir avec et sans l'action capillaire, est absolument indépendante de la nature des liquides supérieurs à celui dans lequel est plongée l'extrémité inférieure du tube (1).

De là, si on plonge deux tubes capillaires identiques dans un même liquide et à une même profondeur, et qu'on introduise à la partie supérieure de l'un d'eux un liquide différent du premier, les poids des liquides renfermés dans les deux tubes seront égaux après comme avant.

Corollaire 6^e. Lorsqu'on plonge entièrement un tube capillaire dans un vase qui contient deux liquides superposés, de manière que l'extrémité inférieure plonge dans le second liquide et l'extrémité supérieure dans le premier, la différence des poids du volume du liquide inférieur élevé dans le tube au-dessus du niveau extérieur de ce même liquide dans le vase et d'un égal volume du liquide supérieur, est égale à la différence des poids des volumes liquides qui seraient soulevés dans le tube par l'action capillaire au-dessus du niveau extérieur si on le plongeait successivement par l'extrémité inférieure dans le liquide inférieur et dans le liquide supérieur.

---

(1) M. Bertrand a démontré directement cette proposition. Voir, à cet effet, le *Journal de mathématiques pures et appliquées*, t. XIII, p. 206.

Corollaire 7e. Lorsque le tube capillaire qui plonge par son extrémité inférieure dans un liquide indéfini est incliné à l'horizon, le produit du volume du liquide soulevé par le sinus de l'inclinaison est une quantité constante.

En effet, les forces soulevantes dont l'action est nécessairement parallèle à l'axe du tube n'ont plus à détruire, dans ce cas, que le poids de la colonne soulevée estimé dans la même direction.

Scholie. La formule générale

$$h = \pm a^2 \frac{p}{s}$$

suppose le tube capillaire assez étroit pour qu'on puisse négliger le poids du ménisque supérieur et regarder la colonne soulevée ou déprimée comme très-sensiblement cylindrique ou prismatique.

Après avoir établi la loi générale de l'ascension et de la dépression des liquides dans les tubes capillaires cylindriques, il ne sera pas sans intérêt de descendre à quelques conclusions plus particulières. C'est ce que nous allons faire dans les articles suivants.

IV

TUBES CYLINDRIQUES PROPREMENT DITS.

1er Théorème. Dans un tube cylindrique *à base de cercle*, et pour un même liquide, l'élévation et la dépression sont en raison inverse du rayon du tube.

En effet, pour un tube cylindrique à base de cercle de rayon r, la formule générale devient,

$$h = \pm \frac{2a^2}{r}.$$

Cette loi est connue sous le nom de *loi de Jurin*.

Il est toutefois essentiel de remarquer que cette loi n'est vérifiée par l'expérience que pour des tubes dont le diamètre est inférieur à $0^{mm},5$.

Pour des diamètres supérieurs l'influence du ménisque ne peut plus être négligée, et elle augmente avec les dimensions du tube.

SCHOLIE. Des mesures faites par Haüy ont montré qu'on peut regarder le ménisque comme sensiblement hémisphérique pour des diamètres compris entre $0^{mm},5$ et $3^{mm},00$.

Alors, h étant la distance du niveau du liquide extérieur au point du ménisque où le plan tangent est horizontal, on a

$$\pm 2\pi r.\, a^2 = \pi r^2.\, h + \pi r^3 - \frac{2}{3}\pi r^3 = \pi r^2\left(h + \frac{r}{3}\right)$$

ou

$$h + \frac{r}{3} = \pm \frac{2a^2}{r}.$$

Ainsi, quand on tient compte du ménisque hémisphérique, ce sont les hauteurs h accrues du tiers du rayon du tube qui doivent être réciproquement proportionnelles au rayon.

Cette loi a été vérifiée par Gay-Lussac et M. Ed. Desains.

2e THÉORÈME (1). Lorsque la section du tube capillaire est une *ellipse* d'assez petites dimensions pour qu'on puisse négliger le ménisque, $2a'$ étant le grand axe de l'ellipse, $2b'$ le petit axe et S la somme de la série

$$1 - \left(\frac{1}{2}e\right)^2 - \frac{1}{3}\left(\frac{1.3}{2.4}e^2\right)^2 - \frac{1}{5}\left(\frac{1.3.5}{2.4.6}e^3\right)^2 - \dots\dots$$

la formule fondamentale donne,

$$h = \pm a^2 \frac{2\pi a'.\, S}{\pi a' b'} = \pm 2a^2 \frac{S}{b'}.$$

(1) *Annales de chimie et de physique*, 3e série, t. LI, p. 412.

Corollaire. Dans un tube cylindrique dont la base circulaire est équivalente à celle du tube elliptique, la variation de niveau est déterminée par l'équation

$$h = \pm \frac{2\,a^2}{\sqrt{a'b'}} = \pm\, 2\,a^2\,\frac{s}{b'}$$

s étant donnée par l'équation

$$s = \left(1 - e^2\right)^{\frac{1}{4}} = 1 - \frac{1}{4}e^2 - \frac{1.3}{2.4.4}e^4 - \frac{1.3.7}{2.3.4.4.4}e^6 - \ldots\ldots;$$

ce qui montre que la variation du niveau est plus considérable dans le tube capillaire elliptique que dans le tube circulaire. Ce résultat est conforme à un théorème général de l'article qui précède.

V

TUBES PRISMATIQUES.

1er Théorème. Lorsque la section du tube capillaire est un rectangle dont les côtés sont B et D, on a

$$h = \pm\, a^2\,\frac{2\,(\mathrm{B} + \mathrm{D})}{\mathrm{B\ D}} = \pm\, 2\,a^2\left(\frac{1}{\mathrm{B}} + \frac{1}{\mathrm{D}}\right).$$

La hauteur du liquide soulevé ou déprimé est proportionnelle, dans ce cas, à la somme des réciproques des côtés du rectangle.

Corollaire. Si le rectangle est un *carré* de côté D, on a

$$h = \pm\,\frac{4a^2}{\mathrm{D}}.$$

2e Théorème. Si on suppose B infini, le rectangle devient l'ensemble de deux *lames parallèles indéfinies*, et on a,

$$h = \pm\,\frac{2a^2}{\mathrm{D}},$$

c'est-à-dire, qu'entre deux lames indéfinies l'élévation et la dépression sont, toutes choses égales d'ailleurs, en raison inverse de la distance des lames.

Corollaire. Dans un tube cylindrique à base de cercle de diamètre D on a, ainsi qu'il a été dit,

$$h = \pm \frac{4a^2}{D}.$$

La variation de niveau entre deux lames parallèles est donc la moitié de celle qui aurait lieu, soit dans un tube cylindrique à base de cercle dont le diamètre serait égal à l'écartement des lames, soit dans un tube prismatique quadrangulaire de même épaisseur.

Scholie. Si on voulait tenir compte dans le cas des lames parallèles du ménisque supposé cylindrique, on aurait pour une longueur l prise sur les lames

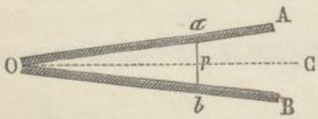
$$\pm 2a^2 l = l D h + \frac{l D^2}{2} - \pi \frac{l D^2}{8}$$

et, par conséquent,

$$h + (4 - \pi) \frac{D}{8} = \pm \frac{2a^2}{D}.$$

Cette formule a été vérifiée par Gay-Lussac (1).

3e Théorème. Dans un *angle dièdre très-aigu* formé par deux lames verticales la surface supérieure du liquide soulevé prend une forme hyperbolique.



Soient, O la trace de l'arête verticale de l'angle dièdre sur le plan horizontal du niveau extérieur du liquide,

OA et OB celles des faces,
OC celle du plan bissecteur.

(1) *Annales de chimie et de physique*, 3e série, t. LI, p. 427.

Soient, de plus, 2φ l'angle dièdre des deux lames, x la distance Op, et y la hauteur de la tranche liquide qui se projette en ab. Vu l'extrême petitesse de l'angle dièdre, la tranche qui se projette en ab doit s'élever très-sensiblement à la même hauteur que si elle se trouvait comprise entre deux lames parallèles indéfinies distantes l'une de l'autre d'une quantité égale à ab. Or

$$ab = 2\,tg\,\varphi.\,x;$$

on aura donc

$$y = \frac{a^2}{tg\varphi.\,x}$$

ou

$$xy = \frac{a^2}{tg\,\varphi}.$$

Cette équation représente une hyperbole équilatère ayant pour asymptotes l'arête verticale de l'angle dièdre et la bissectrice à la base de l'angle plan correspondant.

VI

TUBES CONCENTRIQUES (1).

Théorème. L'ascension et la dépression capillaires ont la même valeur dans le cas de deux tubes prismatiques concentriques de même nature, que dans le cas d'un tube cylindrique à base de cercle de même substance et d'un rayon égal à l'intervalle constant des deux prismes.

En effet, entre deux tubes prismatiques de même nature

(1) Laplace, *Mécanique céleste*, 2e supplément au livre Xe, pp. 32, 33 et 34.

dont les polygones des bases sont semblables et semblablement placés, l'équation fondamentale de l'ascension et de la dépression capillaires donne, en représentant par V le volume liquide soulevé ou déprimé, et par p et p' les périmètres en contact avec le liquide,

$$V = \pm a^2 (p + p').$$

Mais, d'un autre côté, on a, D étant la distance commune des côtés semblables,

$$V = h D \frac{p + p'}{2}$$

on a donc

$$h = \pm \frac{2 a^2}{D}.$$

1^{er} Corollaire. Lorsque les deux tubes prismatiques sont de nature différente, on a,

$$V = \pm (a^2 p + a'^2 p')$$

et, par conséquent,

$$h = \pm \frac{2 (a^2 p + a'^2 p')}{D (p + p')}.$$

2^e Corollaire. Quant au volume soulevé ou déprimé autour d'un prisme plein, il est donné par la formule

$$V = \pm a^2 p$$

qui exprime en même temps l'augmentation ou la diminution de poids que le prisme éprouve par le fait de l'action capillaire.