Eléments de la théorie mathématique de la capillarité

Delsaulx, P. Joseph

Bruxelles, 1865

VII. Répulsion des corps légers (1)

urn:nbn:de:bsz:31-272374

Ces pressions sont inégales, et l'excès de la première sur la seconde est égal au poids de la colonne h'.

La lame AA' est donc pressée de dehors en dedans sur l'unité de longueur, par le poids d'une colonne liquide qui aurait pour base le rectangle

$$l - l_1,$$

et pour hauteur

$$\frac{l + l_1}{2}.$$

Ce poids est égal à

$$\frac{l^2 - l_1^2}{2} \rho g.$$

Les deux lames AA' et BB' tendent donc à se rapprocher.

VII

RÉPULSION DES CORPS LÉGERS (1).

Lorsqu'une des lames est mouillée par le liquide, et que l'autre ne l'est pas, il y a généralement répulsion. L'explication de ce phénomène exige quelque développement. Nous le traiterons cependant le plus brièvement possible.

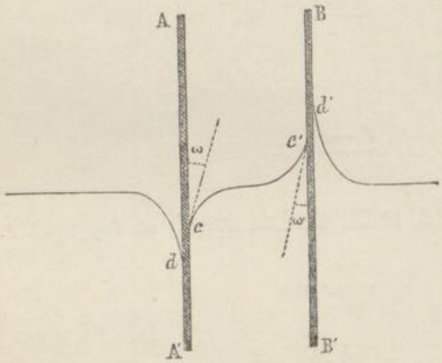
L'équation de la surface capillaire de révolution devient dans le cas de deux lames parallèles

$$z = \frac{k^2}{2} \frac{\frac{d^2 z}{du^2}}{\left(1 + \frac{dz^2}{du^2}\right)^{\frac{3}{2}}};$$

(1) LAPLACE, *Mécanique céleste*, 2e supplément au livre Xe, pp. 39 et suiv.

et il est facile de voir que la courbe méridienne a nécessairement dans ce cas un point d'inflexion, lorsque les deux lames sont à une distance assez grande l'une de l'autre. Ce point est d'ailleurs au niveau du liquide extérieur, attendu qu'en un point d'inflexion le rayon de courbure de la section méridienne est en général infini.

Cela posé, supposons que le liquide soit déprimé près de la première lame et soulevé près de la seconde;



et soient : ω l'angle aigu de raccordement de la première lame,

ω' l'angle de raccordement de la seconde,

λ la dépression du point c au-dessous du niveau extérieur,

λ_1 celle du point d,

λ' l'élévation du point c' au-dessus du même niveau,

λ'_1 celle du point d'.

On a

$$zdz = \frac{k^2}{2} \frac{\frac{dz}{du}\frac{d^2z}{du^2}du}{\left(1 + \frac{dz^2}{du^2}\right)^{\frac{3}{2}}}$$

et en intégrant,

$$\frac{z^2}{2} = \text{const} - \frac{k^2}{2} \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{dz^2}{du^2}}}.$$

Comme on doit avoir au point c

$$\frac{\lambda^2}{2} = \text{const} - \frac{k^2}{2} \sin\omega,$$

et au point c'

$$\frac{\lambda'^2}{2} = \text{const} - \frac{k^2}{2}\sin\omega';$$

il faut que

$$\lambda'^2 - \lambda^2 = k^2(\sin\omega - \sin\omega')$$

et que

$$\frac{k^2}{\sqrt{1+\frac{dz^2}{du^2}}} = \lambda^2 + k^2\sin\omega - z^2.$$

En posant

$$k^2 Z = \lambda^2 + k^2\sin\omega - z^2,$$

la dernière équation devient

$$du = \frac{Z\,dz}{\sqrt{1-Z^2}}$$

ou

$$du = tg\varphi\,dz,$$

φ étant l'angle variable formé par la tangente à la courbe méridienne cc' avec la verticale.

Z, qui est toujours inférieur à l'unité, devient au point d'inflexion

$$\frac{\lambda^2 + k^2\sin\omega}{k^2};$$

on a donc :

$$\lambda^2 + k^2\sin\omega \leqq k^2 \qquad \text{et} \qquad \lambda'^2 + k^2\sin\omega' \leqq k^2.$$

Mais il n'est pas possible d'avoir

$$\lambda^2 + k^2\sin\omega = k^2 = \lambda'^2 + k^2\sin\omega',$$

attendu qu'on aurait alors

$$k^2(1-Z) = z^2$$
$$k^2(1+Z) = 2k^2 - z^2$$

et partant,

$$du = \mp \frac{(k^2 - z^2)\,dz}{z\sqrt{2k^2 - z^2}}.$$

Or, cette dernière équation donne par l'intégration,

$$u = \frac{k}{2\sqrt{2}}\, l. \left[\frac{k\sqrt{2} + \sqrt{2k^2 - z^2}}{k\sqrt{2} - \sqrt{2k^2 - z^2}} \right] - \sqrt{2k^2 - z^2} + \text{const},$$

pour la partie de la courbe méridienne comprise entre la première lame et le point d'inflexion; c'est-à-dire, en remplaçant la constante par la valeur qu'elle doit avoir pour satisfaire à l'égalité

$$u = o \qquad \text{pour} \qquad z = \lambda:$$

$$u = \frac{k}{2\sqrt{2}} \left[l. \frac{k\sqrt{2} + \sqrt{2k^2 - z^2}}{k\sqrt{2} - \sqrt{2k^2 - z^2}} - l. \frac{k\sqrt{2} + \sqrt{2k^2 - \lambda^2}}{k\sqrt{2} - \sqrt{2k^2 - \lambda^2}} \right] + \sqrt{2k^2 - \lambda^2} - \sqrt{2k^2 - z^2}.$$

Cette valeur de u devenant infinie pour $z = o$, il faudrait donc en conclure que les deux lames sont à une distance infinie l'une de l'autre, ce qui est contraire à nos suppositions.

On a donc nécessairement, ainsi que nous l'avons dit,

$$\lambda^2 + k^2 \sin\omega < k^2 \qquad \text{et} \qquad \lambda'^2 + k^2 \sin\omega' < k^2,$$

et puisqu'on a

$$\lambda_1^2 + k^2 \sin\omega = k^2 \qquad \text{et} \qquad \lambda_1'^2 + k^2 \sin\omega' = k^2,$$

ainsi qu'il a été démontré à la fin du chapitre précédent, on a aussi :

$$\lambda < \lambda_1 \qquad \text{et} \qquad \lambda' < \lambda_1'.$$

La variation de niveau est donc moins forte aux points c et c', qu'aux points d et d'.

Cela posé, il résulte de l'examen qui a été fait dans l'article précédent, que la lame AA′ est pressée de dedans en dehors sur l'unité de longueur, par une colonne liquide dont le poids est égal à

$$\frac{\lambda_1^2 - \lambda^2}{2} \rho g,$$

en même temps que la lame BB′ est pressée de la même manière, du dedans au dehors, par le poids liquide

$$\frac{\lambda_1'^2 - \lambda'^2}{2} \rho g.$$

Ces deux pressions sont égales, puisque l'on a

$$\lambda'^2 - \lambda^2 = k^2 (\sin \omega - \sin \omega') = \lambda_1'^2 - \lambda_1^2 .$$

Si $\omega = \omega'$, le point d'inflexion se trouve à égale distance des deux lames et subsiste toujours, quel que soit le degré de rapprochement des parois en regard. Dans ce cas, il y a toujours répulsion des deux lames.

Si on a $\omega > \omega'$: d'une part, il est nécessaire que le point d'inflexion soit, dans ce cas, plus rapproché de la première lame que de la seconde, attendu que, l'angle φ obtenant les mêmes valeurs de part et d'autre du point d'inflexion pour les mêmes valeurs absolues de z, il s'ensuit que les différentielles du sont égales deux à deux de part et d'autre de ce point et qu'on a

$$\int_\lambda^0 du < \int_0^{\lambda'} du;$$

d'autre part, il est facile de voir que le point d'inflexion doit finir par se confondre avec la paroi de la première lame, si on rapproche indéfiniment les deux lames en regard.

En effet, on a tout à la fois

$$\lambda'^2 - \lambda^2 = k^2 (\sin\omega - \sin\omega')$$

et

$$du = tg\varphi \, dz;$$

la première équation exige que l'on ait constamment

$$\lambda'^2 > k^2 \, (\sin\omega - \sin\omega'),$$

tandis que la seconde, intégrée depuis la première lame jusqu'au point d'inflexion, demande que λ' soit du même ordre de grandeur que la distance des lames.

Il est évident que ces deux conditions, qui subsistent tant qu'il y a point d'inflexion, ne peuvent coexister quand on rapproche indéfiniment les deux lames, puisque λ' devrait être à la fois une quantité finie et une quantité infinitésimale.

Lorsque le point d'inflexion coïncide avec la lame AA', λ est égal à zéro.

A partir de ce moment, la courbe capillaire méridienne demeure concave dans toute son étendue, et λ qui croît à mesure qu'on diminue la distance des lames ne caractérise plus une dépression du liquide, mais bien une ascension.

La lame AA' est alors soumise à deux forces contraires, l'une qui agit du dehors au dedans et qui est égale sur l'unité de longueur au poids liquide

$$\frac{\lambda^2}{2} \rho g;$$

l'autre qui sollicite du dedans au dehors et qui est égale au poids liquide

$$\frac{\lambda_1^2}{2} \rho g.$$

Tant que la résultante de ces deux forces,

$$\frac{\lambda_1^2 - \lambda_2}{2} \rho g$$

est positive, c'est-à-dire, tant que l'on a

$$\lambda_1 > \lambda,$$

il y a répulsion des deux lames.

Mais lorsqu'on aura

$$\lambda_1 = \lambda,$$

et partant

$$\lambda_1 = \lambda,$$

la répulsion se changera en attraction, et cela pour les deux plans à la fois (1).

VIII

THÉORÈME DE M. BERTRAND (2).

M. Bertrand a fait connaître il y a quelques années un fort beau théorème par lequel nous allons terminer cette revue des principaux phénomènes capillaires.

Supposons qu'une goutte de mercure repose sur une lame horizontale de verre, et que, par le moyen d'un canal recourbé terminé à un petit orifice pratiqué dans la lame au centre même de la base de support, elle communique avec un vase assez large pour que la surface du niveau du liquide y soit horizontale.

---

(1) On peut consulter sur ce sujet, la *Nouvelle théorie de l'action capillaire*, par Poisson, n° 96-100 ; *Mécanique céleste* translated with a commentary by Bowditch, v. 4, pp. 929 et suiv. ; *Fisica de' corpi ponderabili* del cavaliere Avogadro, t. II, pp. 224 et suiv.

(2) *Journal de mathématiques pures et appliquées*, 1re série, t. XIII, p. 207.