Eléments de la théorie mathématique de la capillarité

Delsaulx, P. Joseph

Bruxelles, 1865

III. Ascension et dépression des liquides dans les tubes coniques (1)

Le volume soulevé lorsque le tube est suspendu verticalement et que les deux extrémités sont à l'air libre, est donc *tout au plus* égal au volume V' multiplié par le facteur $\left(1 + \frac{1}{\cos\omega}\right)$.

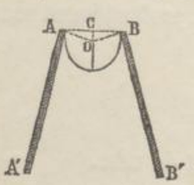
Scholie. Il a été démontré par Gauss, Poisson et M. Bertrand, que l'angle de raccordement est constant tout autour de la surface capillaire dans un tube cylindrique à section quelconque, et qu'il ne dépend que de la nature du tube et de celle du liquide. Si on tient compte de cette remarque, la démonstration qui précède de particulière devient générale, sans qu'il soit besoin d'y rien changer.

III

ASCENSION ET DÉPRESSION DES LIQUIDES DANS LES TUBES CONIQUES (1).

Nous supposerons le tube assez étroit pour qu'on puisse regarder la surface capillaire comme se confondant sensiblement avec un segment de sphère.

Lorsque la surface capillaire est tangente aux parois du tube, r étant le rayon de la section d'affleurement et φ le demi-angle au sommet du cône, la variation de niveau est donnée par l'équation



$$h = \frac{k^2}{r}\cos\varphi.$$

Lorsque la surface capillaire fait avec la paroi du tube un angle ω, la variation de niveau est donnée

(1) *Annales de chimie et de physique*, 3e série, t. LI, pp. 407, 433 et suiv.

par l'équation

$$h = \frac{k^2}{r} \cos(\varphi \pm \omega).$$

Ces formules peuvent s'appliquer aux lames indéfinies dont le plan bissecteur serait vertical ; il suffirait d'y remplacer r par la distance D des deux lames aux points d'affleurement.

Dans le cas, par exemple, d'un tube conique et d'une surface capillaire concave tangente aux parois du tube, on a de plus, r' étant le rayon de la section du tube qui correspond au niveau du liquide extérieur,

$$\frac{r' - r}{h} = tg\,\varphi,$$

et, par conséquent,

$$\frac{r'}{h} - \frac{k^2 \cos\varphi}{h^2} = tg\,\varphi.$$

Cette équation donne

$$h^2\, tg\,\varphi - r'h + k^2 \cos\varphi = 0$$

et

$$h = \frac{r'}{2\, tg\,\varphi} \pm \frac{1}{2\, tg\,\varphi} \sqrt{r'^2 - 4\, k^2 \sin\varphi}.$$

On voit par là que l'équilibre de la colonne soulevée est impossible lorsqu'on plonge le tube assez profondément pour que l'on ait

$$r' < 2\, k \sqrt{\sin\varphi}\,;$$

le liquide doit alors monter jusqu'au haut du tube.

Lorsqu'on ne plonge pas le tube aussi profondément, et que l'on prend garde que la relation

$$r' > 2\, k \sqrt{\sin\varphi}$$

soit vérifiée, il y a deux positions d'équilibre de la colonne liquide également possibles, l'une

$$h' = \frac{r'}{2\, tg\, \varphi} - \frac{1}{2\, tg\, \varphi} \sqrt{r'^2 - 4\, k^2 \sin \varphi}$$

qui correspond à un *équilibre stable,* l'autre

$$h'' = \frac{r'}{2\, tg\, \varphi} + \frac{1}{2\, tg\, \varphi} \sqrt{r'^2 - 4\, k^2 \sin \varphi}$$

qui correspond à un *équilibre instable.*

En effet, on a

$$\frac{dh}{dr'} = \frac{1}{2\, tg\, \varphi} \left[1 \pm \frac{r'}{\sqrt{r'^2 - 4\, k^2 \sin \varphi}} \right].$$

Cette équation montre que h'' varie dans le même sens que r', tandis que h' varie en sens contraire. Il s'ensuit que si on déplace un tant soit peu la colonne liquide, soit dans un sens, soit dans un autre, en produisant une aspiration, par exemple, ou une compression, à la partie supérieure du tube, h'' ne pourra pas revenir à sa position primitive, et que le contraire arrivera pour la colonne h'.

IV

ÉQUILIBRE D'UNE GOUTTE LIQUIDE DANS UN TUBE CONIQUE.

Une goutte liquide qui mouille les parois d'un tube conique suffisamment étroit est terminée, comme on sait, par deux segments sphériques concaves de rayons différents. Dans ce cas, lorsque l'angle de raccordement est nul, les pressions moléculaires qui correspondent à chacun des ménisques, sont, en prenant pour unité de poids celui de l'unité de volume du