Eléments de la théorie mathématique de la capillarité

Delsaulx, P. Joseph

Bruxelles, 1865

II. Suspension des liquides dans les tubes cylindriques a base de cercle

urn:nbn:de:bsz:31-272374

L'action du liquide supérieur sur le liquide inférieur agit de bas en haut, et est égale à

$$-\left(A_1 - \frac{\pi \rho \rho' H_1}{r} \cos \theta\right).$$

De sorte que l'action totale de haut en bas est égale à

$$A' + \pi \frac{2 \rho \rho' H_1 - \rho^2 H - \rho'^2 H'}{r} \cos \theta - \pi \frac{\rho^2 H}{r} \cos \omega.$$

Si le liquide inférieur était seul dans le tube capillaire, le poids du liquide déplacé serait le même que celui qui est soulevé dans les circonstances actuelles, ainsi que nous l'avons montré dans le premier chapitre, et l'action moléculaire de haut en bas serait égale à,

$$A' - \frac{\pi \rho'^2 H'}{r} \cos \omega'.$$

Ces deux forces sont donc égales, et on a

$$\frac{\rho'^2 H'}{r} \cos \omega' = \frac{\rho^2 H}{r} \cos \omega - \frac{2\rho\rho' H_1 - \rho^2 H - \rho'^2 H'}{r} \cos \theta$$

ou

$$\cos \theta = \frac{\rho^2 H \cos \omega - \rho'^2 H' \cos \omega'}{2\rho\rho' H_1 - \rho^2 H - \rho'^2 H'}.$$

L'angle θ détermine le segment sphérique qui constitue la surface capillaire commune aux deux liquides.

II

SUSPENSION DES LIQUIDES DANS LES TUBES CYLINDRIQUES A BASE DE CERCLE.

Lorsqu'on retire avec précaution un tube capillaire du liquide qui le mouille et dans lequel il était plongé par son extrémité inférieure, ou qu'on introduit directement ce liquide par l'extrémité supérieure, on voit se former à la partie inférieure du tube une goutte liquide dont la convexité peut être plus ou moins prononcée. La hauteur et le volume de la colonne soulevée croissent avec cette convexité.

M. Bertrand a fait connaître une expression remarquable de la limite supérieure du volume soulevé (1). On peut parvenir au résultat indiqué par le savant géomètre de la manière suivante.

Soient, V la limite supérieure du volume soulevé dont il s'agit, et V' celui qui serait soulevé si le tube plongeait par son extrémité inférieure dans le liquide.

Il est facile de voir qu'en représentant par p le périmètre de la section inférieure du tube, on a

$$g\rho V = 2\alpha . p.$$

D'un autre côté,

$$g\rho V' = (2\alpha - \alpha') p.$$

On a donc

$$\frac{V}{V'} = \frac{2\alpha}{2\alpha - \alpha'}.$$

Mais nous avons vu que

$$2\alpha - \alpha' = \alpha' \cos \omega$$

et que, par conséquent,

$$2\alpha = \alpha' (1 + \cos \omega);$$

on a donc finalement

$$\frac{V}{V'} = 1 + \frac{1}{\cos \omega}.$$

(1) *Journal de mathématiques pures et appliquées*, t. XIII, p. 205.

Le volume soulevé lorsque le tube est suspendu verticalement et que les deux extrémités sont à l'air libre, est donc *tout au plus* égal au volume V' multiplié par le facteur $\left(1+\frac{1}{\cos\omega}\right)$.

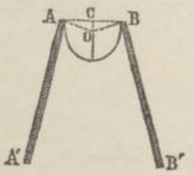
Scholie. Il a été démontré par Gauss, Poisson et M. Bertrand, que l'angle de raccordement est constant tout autour de la surface capillaire dans un tube cylindrique à section quelconque, et qu'il ne dépend que de la nature du tube et de celle du liquide. Si on tient compte de cette remarque, la démonstration qui précède de particulière devient générale, sans qu'il soit besoin d'y rien changer.

III

ASCENSION ET DÉPRESSION DES LIQUIDES DANS LES TUBES CONIQUES (1).

Nous supposerons le tube assez étroit pour qu'on puisse regarder la surface capillaire comme se confondant sensiblement avec un segment de sphère.

Lorsque la surface capillaire est tangente aux parois du tube, r étant le rayon de la section d'affleurement et φ le demi-angle au sommet du cône, la variation de niveau est donnée par l'équation



$$h=\frac{k^2}{r}\cos\varphi.$$

Lorsque la surface capillaire fait avec la paroi du tube un angle ω, la variation de niveau est donnée

(1) *Annales de chimie et de physique*, 3e série, t. LI, pp. 407, 433 et suiv.