Eléments de la théorie mathématique de la capillarité

Delsaulx, P. Joseph

Bruxelles, 1865

V. Angle de raccordement dans les tubes cylindriques a base de cercle l'unité de surface, et de la projection horizontale de la surface capillaire; de la même manière celle des forces $\frac{d\upsilon}{\varepsilon}$, par le produit de la pression normale constante $\frac{1}{\varepsilon}$ et de la projection horizontale de la surface parallèle. La différence de ces deux résultantes est donc égale au produit de $\frac{1}{\varepsilon}$ et de la projection horizontale de la surface formée par les segments normaux ε qui correspondent aux divers points du contour p de la section du tube.

On a, par conséquent

$V = \iint z\, dx\, dy$

$$V = \frac{k^2}{2}\, p \cos \omega,$$

$= \frac{k^2}{2} \iint \left(\frac{1}{R} + \frac{1}{R'}\right) dx\, dy$

pour un tube cylindrique quelconque (1).

V

ANGLE DE RACCORDEMENT DANS LES TUBES CYLINDRIQUES A BASE DE CERCLE.

1^er^ Théorème. Le poids du liquide soulevé ou déprimé devant être égal à la force soulevante ou déprimante, on a

$$\pm\, 2\pi r\,(2\alpha - \alpha') = k^2 \pi\, r\, g\, \rho \cos\omega$$

ou, puisque l'on a fait $\frac{2\alpha - \alpha'}{\rho g} = a^2$

$$\cos\omega = \pm\, \frac{2a^2}{k^2};$$

---

(1) Gauss, Poisson et M. Bertrand ont démontré que l'inclinaison de la normale à la surface capillaire sur le plan horizontal est constante tout le long du contour p.

l'angle de raccordement est donc indépendant du rayon du tube et absolument le même dans tous les tubes cylindriques à base de cercle, quand il s'agit d'une même matière de tube et d'un même liquide.

2ᵉ Théorème. Lorsque l'action moléculaire du tube sur le liquide est égale à celle du liquide sur lui-même, on a, d'une part,

$$\alpha = \alpha',$$

et de l'autre,

$$\omega = o.$$

En effet, si l'angle de raccordement n'était pas nul, l'action de la partie du tube comprise entre l'arête verticale et la tangente à la courbe méridienne capillaire au point où cette dernière rencontre la paroi, donnerait naissance à une résultante dont la composante suivant la tangente devrait être égale et contraire à celle de la résultante de la partie du liquide renfermé entre la courbe et cette même tangente. Une telle égalité est impossible, attendu que le premier angle est un angle fini, et le second un angle nul au sommet.

Corollaire. On a donc, dans cette supposition,

$$2a^2 = \frac{2\alpha'}{\rho g} = k^2$$

et, par conséquent,

$$\alpha' = \frac{k^2}{2}\, \rho\, g,$$

ou, en remplaçant k^2 par sa valeur trouvée plus haut,

$$\alpha' = \pi\, \rho^2\, \frac{\mathrm{H}}{2}.$$

On a aussi, dans le cas d'un angle de raccordement quelconque

$$a^2 \rho g = 2\alpha - \alpha' = \frac{k^2}{2} \rho g \cos\omega = \alpha' \cos\omega$$

et, par suite,

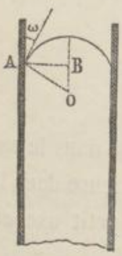
$$\alpha = \alpha' \frac{1 + \cos\omega}{2} = \alpha' \cos^2 \frac{\omega}{2}.$$

Ces résultats sont très-importants dans la théorie capillaire, puisqu'ils permettent d'assigner le rapport de α à α' quand on connaît l'angle ω, et qu'ils établissent une relation entre α' et H ; ils ont été démontrés directement par Laplace (1).

VI

EXPRESSIONS PLUS EXACTES DES LOIS DE LA VARIATION DU NIVEAU CAPILLAIRE DANS LES TUBES CYLINDRIQUES A BASE DE CERCLE.

Dans les tubes cylindriques de petit diamètre, alors que la surface capillaire coïncide sensiblement avec un segment sphérique, ces segments sont semblables pour des tubes de même nature et pour un même liquide, et leurs rayons sont en raison directe des rayons des tubes.



On a, en effet, dans ces circonstances, outre la constance de l'angle AOB

$$R = R'$$

et

$$\frac{r}{R} = \frac{AB}{AO} = \cos\omega,$$

(1) *Mécanique céleste*, 1er supplément au livre Xe, pp. 47 et 48 ; 2e supplément, pp. 17 et 18.