Eléments de la théorie mathématique de la capillarité

Delsaulx, P. Joseph

Bruxelles, 1865

III. Loi générale de l'ascension et de la dépression des liquides dans les tubes capillaires cylindriques

urn:nbn:de:bsz:31-272374

On a donc, en appelant F'' la somme des actions soulevantes dont il s'agit

$$F'' = F = p\alpha.$$

2e Théorème. La couche d'eau qui forme la paroi du tube fictif recourbé ne peut produire aucun déplacement relatif du liquide qu'elle renferme.

C'est une conséquence nécessaire des deux premiers théorèmes de l'article précédent appliqués au tube fictif.

3e Théorème. Les actions moléculaires réciproques des molécules liquides situées à l'intérieur du tube fictif sont impuissantes, soit à soulever, soit à déprimer le liquide.

La raison en a été donnée au théorème quatrième du même article.

III

LOI GÉNÉRALE DE L'ASCENSION ET DE LA DÉPRESSION DES LIQUIDES DANS LES TUBES CAPILLAIRES CYLINDRIQUES.

Les théorèmes qui précèdent conduisent à des conséquences générales que nous allons faire connaître.

Théorème. Dans les tubes cylindriques la variation du niveau capillaire est, pour un même solide et un même liquide, en raison directe du périmètre et en raison inverse de l'aire de la section intérieure du tube.

En effet, la somme des composantes verticales qui agissent au bas du tube pour soutenir la colonne liquide si elle est soulevée, ou pour la maintenir déprimée dans le cas contraire, est dans la première supposition,

$$2\,F - F' = p\,(2\,\alpha - \alpha'),$$

et, dans la seconde,

$$F' - 2F = p(\alpha' - 2\alpha).$$

De sorte qu'en représentant par h la hauteur de la colonne soulevée ou déprimée, par s l'aire de la section du tube, par ρ la densité du liquide et par a^2 une constante spécifique qui ne dépend que de la nature du tube et de celle du liquide, on aura pour la condition nécessaire et suffisante de l'équilibre dans le tube capillaire,

$$\pm\, p(2\alpha - \alpha') = sh\rho g$$

ou

$$h = \pm\, \frac{2\alpha - \alpha'}{\rho g}\,\frac{p}{s} = \pm\, a^2\,\frac{p}{s}.$$

Corollaire 1er (1). Entre tous les tubes prismatiques de même base intérieure le tube cylindrique à base de cercle est celui dans lequel la hauteur h est *minimum;* car, de toutes les figures planes de même aire, c'est le cercle qui a le plus petit périmètre.

Corollaire 2e. Entre tous les tubes prismatiques de même périmètre intérieur le tube cylindrique à base de cercle est encore celui dans lequel la hauteur h est *minimum;* car, de toutes les figures planes isopérimètres, c'est le cercle qui a l'aire la plus grande.

Corollaire 3e. Dans les tubes prismatiques dont les bases intérieures sont des polygones semblables les hauteurs h sont en raison inverse des côtés homologues; car, si d'un côté les périmètres sont proportionnels aux côtés homologues, de l'autre, les aires sont proportionnelles aux carrés des mêmes côtés.

---

(1) Laplace, *Mécanique céleste*, 2e supplément au livre Xe, pp. 21, 22, 26, 31 et 32.

Corollaire 4°. La hauteur h est la même pour des tubes prismatiques dont les bases sont des polygones circonscrits à un même cercle, et ces hauteurs sont en raison inverse des rayons des cercles inscrits lorsque les bases intérieures sont des polygones circonscrits à des cercles différents.

Corollaire 5°. Lorsqu'on plonge un tube capillaire par son extrémité inférieure dans un vase contenant un nombre quelconque de liquides différents superposés en couches horizontales, la différence des poids des liquides que le tube peut contenir avec et sans l'action capillaire, est absolument indépendante de la nature des liquides supérieurs à celui dans lequel est plongée l'extrémité inférieure du tube (1).

De là, si on plonge deux tubes capillaires identiques dans un même liquide et à une même profondeur, et qu'on introduise à la partie supérieure de l'un d'eux un liquide différent du premier, les poids des liquides renfermés dans les deux tubes seront égaux après comme avant.

Corollaire 6°. Lorsqu'on plonge entièrement un tube capillaire dans un vase qui contient deux liquides superposés, de manière que l'extrémité inférieure plonge dans le second liquide et l'extrémité supérieure dans le premier, la différence des poids du volume du liquide inférieur élevé dans le tube au-dessus du niveau extérieur de ce même liquide dans le vase et d'un égal volume du liquide supérieur, est égale à la différence des poids des volumes liquides qui seraient soulevés dans le tube par l'action capillaire au-dessus du niveau extérieur si on le plongeait successivement par l'extrémité inférieure dans le liquide inférieur et dans le liquide supérieur.

---

(1) M. Bertrand a démontré directement cette proposition. Voir, à cet effet, le *Journal de mathématiques pures et appliquées*, t. XIII, p. 206.

Corollaire 7e. Lorsque le tube capillaire qui plonge par son extrémité inférieure dans un liquide indéfini est incliné à l'horizon, le produit du volume du liquide soulevé par le sinus de l'inclinaison est une quantité constante.

En effet, les forces soulevantes dont l'action est nécessairement parallèle à l'axe du tube n'ont plus à détruire, dans ce cas, que le poids de la colonne soulevée estimé dans la même direction.

Scholie. La formule générale

$$h = \pm a^2 \frac{p}{s}$$

suppose le tube capillaire assez étroit pour qu'on puisse négliger le poids du ménisque supérieur et regarder la colonne soulevée ou déprimée comme très-sensiblement cylindrique ou prismatique.

Après avoir établi la loi générale de l'ascension et de la dépression des liquides dans les tubes capillaires cylindriques, il ne sera pas sans intérêt de descendre à quelques conclusions plus particulières. C'est ce que nous allons faire dans les articles suivants.

IV

TUBES CYLINDRIQUES PROPREMENT DITS.

1er Théorème. Dans un tube cylindrique *à base de cercle*, et pour un même liquide, l'élévation et la dépression sont en raison inverse du rayon du tube.

En effet, pour un tube cylindrique à base de cercle de rayon r, la formule générale devient,

$$h = \pm \frac{2a^2}{r}.$$