Die Festigkeitslehre mit besonderer Rücksicht auf die Bedürfnisse des Maschinenbaues

Grashof, Franz

Berlin, 1866

Einleitung

urn:nbn:de:bsz:31-274080

EINLEITUNG.

1. — Materielle Punkte heissen die kleinsten gleichartigen materiellen Theilchen, woraus ein Körper bestehend gedacht werden kann. Cohäsion im weiteren Sinne*) heisse die den Körpern eigenthümliche innere Kraft, vermöge welcher sie einer durch äussere Kräfte verursachten Verrückung ihrer materiellen Punkte einen gewissen Widerstand entgegensetzen.

Bei einem festen Körper, wovon im Folgenden allein die Rede ist, äussert sich eine solche Verrückung der materiellen Punkte durch eine entsprechende Formänderung, dieses Wort im weitesten Sinne genommen, in welchem auch eine blosse Aenderung der Grösse bei ähnlich bleibender Gestalt des Körpers darunter verstanden werden soll. Die Inanspruchnahme eines Körpers durch beliebige äussere Kräfte heisse seine Belastung.**)

Die Formänderung, deren ein Körper bei einer gewissen Belastung fähig ist, tritt nicht augenblicklich, sondern nur allmählich ein und nimmt unter Umständen selbst nach langer Zeit noch nachweisbar zu. Unter der einer gewissen Belastung entsprechenden Formänderung ist deshalb streng genommen die Grenze zu verstehen, welcher sich dieselbe im Verlaufe der Zeit nähert.

Bei solchen Körpern und solchen Belastungen, wie sie in der technischen Praxis vorkommen, pflegt indessen schon nach sehr kurzer Zeit die Formänderung bei andauernder Belastung von jener Grenze so wenig verschieden zu sein, dass der Unterschied ausser Acht gelassen werden darf.***)

---

*) Im engeren Sinne versteht man unter Cohäsion nur die Widerstandskraft gegen eine Vergrösserung des Abstandes der materiellen Punkte.

**) Mit Erweiterung des gewöhnlichen Sprachgebrauchs, nach welchem unter Belastung nur die Inanspruchnahme durch Schwerkräfte verstanden wird.

***) Nach Versuchen von C. F. Dietzel (Zeitschr. des Vereins deutscher Ingenieure, Bd. I. p. 165) ist dieser Einfluss der Zeit auf die Formänderung bedeutender bei Holz (überhaupt bei organischen Körpern), als bei Metallen.

Dass bei sehr starker Belastung die Formänderung bei allen Körpern, auch Metallen, noch lange Zeit, selbst Monate lang merklich zunimmt und schliesslich so die Aufhebung des den festen Körper charakterisirenden Zusammenhangs herbeigeführt werden kann, ist eine bekannte Thatsache. Fairbairn hat gezeigt, dass diese Wirkung durch häufige und bedeutende Aenderungen der Temperatur befördert wird. (Seventh Report of the British Association.)

Man sagt, ein Körper verhalte sich vollkommen oder unvollkommen elastisch bei einer gewissen Formänderung, jenachdem dieselbe vollkommen oder nur unvollkommen wieder verschwindet, wenn die Belastung aufgehoben wird. Im ersteren Falle heisst die ganze Cohäsion, welche bei der betreffenden Belastung zur Wirkung gekommen war, auch Elasticität, im letzteren Falle nur derjenige Theil derselben, welcher dem rückgängig gewordenen Theile der Formänderung entspricht und eben diesen theilweisen Rückgang verursacht.

Die Cohäsion kommt wie jede Widerstands- oder secundäre Kraft jedesmal nur mit derjenigen Intensität zur Wirkung, welche der Belastung oder der primären Kraft entspricht. Wird die Belastung gesteigert, so erfolgt schliesslich eine Trennung der materiellen Punkte, d. h. eine stellenweise Aufhebung des Zusammenhangs, welcher den festen Körper als solchen charakterisirt, und erst im letzten Augenblicke vorher war die Cohäsion mit dem Maximum ihrer Intensität zur Wirkung gekommen.

Die zur vollen Wirkung gekommene Cohäsion, also die innere Kraft, mit welcher ein fester Körper der Trennung seiner materiellen Punkte Widerstand leistet, heisst seine Festigkeit.*)

Die inneren Kräfte, welche durch eine gewisse Belastung eines Körpers zur Wirkung kommen, treten zwischen je zwei materiellen Punkten auf und sind einzeln ebenso unbestimmt und unbestimmbar wie die Massenhaftigkeit der materiellen Punkte, woraus man sich den Körper bestehend denkt. Die obigen Definitionen der Cohäsion, Elasticität und Festigkeit beziehen sich daher auf gewisse im Körper anzunehmende Flächen, d. h. die damit bezeichneten inneren Kräfte sind die Resultanten aller jener unendlich vielen Elementarkräfte, welche auf die in einer solchen Fläche liegenden materiellen Punkte von allen übrigen auf derselben Seite der Fläche liegenden materiellen Punkten ausgeübt werden; damit eine resultirende Kraft mit verschwindend kleinem Fehler ohne Kräftepaar sich bilden lasse, muss im Allgemeinen die Fläche als unendlich klein vorausgesetzt werden.

2. — Genauere Versuche haben zu dem Schlusse geführt, dass der Begriff der vollkommenen Elasticität streng genommen der Wirklichkeit nicht entspricht, dass vielmehr jede Formänderung von endlicher Grösse aus einem bleibenden und einem nicht bleibenden Theile besteht in der Weise, dass das Verhältniss des ersten zum zweiten sich nur zugleich mit der ganzen Formänderung der Grenze Null nähert.**) Nichtsdestoweniger pflegt man

---

*) Nach dem gewöhnlichen Sprachgebrauche versteht man unter Elasticität und Festigkeit die Eigenschaft, solche innere Kräfte in höherem oder niederem Grade äussern zu können, welche hier als Elasticität und Festigkeit selbst definirt wurden.

**) In noch höherem Grade ist es unzulässig, die Körper selbst in vollkommen und unvollkommen elastische zu unterscheiden, weil selbst dann, wenn der Begriff der vollkommenen Elasticitat factisch begründet wäre, er doch immer nur relativ sein würde, indem derselbe Körper bei kleiner Formänderung sich vollkommen, bei grosser sich unvollkommen elastisch verhalten könnte. Höchstens darf von sehr elastischen und wenig elastischen Körpern gesprochen werden, jenachdem erst bei grosser oder schon bei kleiner Formänderung ein wesentlicher Theil derselben bleibend wird.

eine gewisse Grenze der Formänderung anzunehmen, innerhalb welcher ihr bleibender Theil verhältnissmässig so klein ist, dass er nur durch sehr feine Beobachtungsmittel nachgewiesen und deshalb mit einem für die Anforderungen der Praxis verschwindend kleinen Fehler = Null gesetzt werden kann. Diese Grenze nennt man kurzweg die Elasticitätsgrenze.

Wenn übrigens ein Körper eine Formänderung erfahren hatte, von der ein Theil zurückgeblieben ist, und dieser Körper dann einer neuen Formänderung von derselben Art, aber höchstens von der früheren Grösse unterworfen wird, so ist der bleibende Theil der letzteren sehr klein im Vergleich mit dem früheren, so dass die bleibende Formänderung durch Wiederholung solchen Verfahrens nicht etwa beliebig gesteigert werden kann.

Bei allen Constructionen pflegt man im Princip die Forderung zu Grunde zu legen, dass in keinem Theile eine Ueberschreitung der Elasticitätsgrenze stattfinden solle; in der That freilich ist jener Forderung wegen mangelhafter Kenntniss dieser Grenze, selbst abgesehen von der Unbestimmtheit ihres Begriffs*), nicht immer sicher zu entsprechen und vielmehr häufig nur die leichter bestimmbare und sicherer bekannte Festigkeit des Materials als massgebend zu Grunde zu legen.

3. — Die Formänderung, welche durch eine gewisse Belastung eines Körpers bewirkt wird, lässt sich immer darauf zurückführen, dass die ursprünglichen Abstände der materiellen Punkte geändert werden, welche Aenderungen theils positiv, theils negativ und sowohl in demselben Punkte nach verschiedenen Richtungen, als in verschiedenen Punkten nach gleichlaufenden Richtungen verschieden gross sein können.

Zieht man von einem materiellen Punkte A eines Körpers eine Gerade AB und betrachtet dieselbe als den geometrischen Ort der darin liegenden materiellen Punkte,**) so erfährt sie bei der Formänderung des Körpers eine entsprechende Formänderung, u. A. das beliebige Stück AB derselben eine gewisse Längenänderung $\Delta(AB)$; lässt man AB abnehmen bis zur Grenze Null, so heisst der entsprechende Grenzwerth des Verhältnisses $\frac{\Delta(AB)}{AB}$ die Ausdehnung des Körpers im Punkte A nach der Richtung AB.

Eine solche Ausdehnung (stets ein kleiner Bruch) ist positiv oder negativ, eine Ausdehnung im engeren Sinne oder eine Zusammenziehung, und soll algebraisch verstanden in der Folge mit ε bezeichnet werden; ε' bedeute insbesondere eine positive, ε'' den Absolutwerth einer negativen Ausdehnung.***)

---

*) Derselbe liesse sich dadurch bestimmen, dass ein bestimmter Grenzwerth des Verhältnisses der bleibenden zur ganzen Formänderung als Kriterium festgestellt würde.

**) Linien, Flächen oder Körperelemente, welche als die geometrischen Oerter der in ihnen liegenden materiellen Punkte betrachtet werden, heissen in der Folge kurzweg materielle Linien, Flächen oder Körperelemente.

***) Die als unbenannte Zahl definirte Ausdehnung im Punkte A nach der Richtung AB kann auch betrachtet werden als Länge, nämlich als positive oder negative Verlängerung, welche die materielle Gerade AB = der Längeneinheit erfahren würde, wenn

Man kann jetzt auch sagen: jede Formänderung eines Körpers kann auf Ausdehnungen zurückgeführt werden, welche in den verschiedenen Punkten nach den verschiedenen Richtungen stattfinden.

4. — Als Ursache der bleibenden Formänderungen eines Körpers muss angenommen werden, dass gewisse Werthe von ε' und ε'' entsprechende neue Gleichgewichtslagen der materiellen Punkte bedingen, welche von ihnen eingenommen werden, wenn die betreffenden Belastungen aufhören; diejenigen Grenzwerthe von ε' und ε'', welche man als der Elasticitätsgrenze entsprechend annimmt und welche unter sich verschieden sein können, mögen mit (ε') und (ε'') bezeichnet werden.*)

Die Grenzwerthe (ε') und (ε'') können im Allgemeinen sowohl mit der Lage des betreffenden Punktes A, als mit der betreffenden Richtung AB sich ändern. Bei einem homogenen, d. h. einem in allen Punkten gleich beschaffenen Körper sind sie nur vom Materiale und von der Richtung, bei einem isotropen, d. h. einem nach allen Richtungen gleich beschaffenen homogenen Körper sind sie nur vom Materiale abhängig.

5. — Auf Grund der in No. 2 ausgesprochenen principiellen Forderung und der Aufstellungen in No. 4 lässt sich nunmehr die Hauptaufgabe der praktischen Festigkeitslehre so aussprechen: Es sollen die Form, die Dimensionen oder die Belastung eines Constructionsgliedes unter gegebenen Umständen so bestimmt werden, dass ε' und ε'' in keinem Punkte und nach keiner Richtung gewisse erfahrungsmässig zulässige Werthe überschreiten, welche bei nur homogenem Materiale ausser von diesem auch von der Richtung, bei isotropem Materiale nur von diesem abhängen,**) principiell aber
1.a. jedenfalls kleiner sein sollen, als die Grenzwerthe (ε') und (ε''), welche der
145! Elasticitätsgrenze entsprechen.

Die zweite Aufgabe: Bestimmung der Formänderung eines gegebenen Körpers bei gegebener Belastung ist zwar an und für sich gewöhnlich nur von untergeordneter praktischer Wichtigkeit, doch giebt es viele Fälle, in welchen die erste Aufgabe nicht ohne die zweite gelöst werden kann, und zwar ist dies immer dann der Fall, wenn die bei den Unterstützungen oder Befestigungen des Körpers durch die primären belastenden Kräfte hervor-

---

in allen ihren Punkten ihre Ausdehnung gleich wäre. In diesem Sinne soll die Ausdehnung insbesondere specifische Ausdehnung heissen. Das Beiwort „specifisch" gebraucht der Verf. immer in dem Sinne, dass dadurch das Hauptwort (immer eine Grösse) auf die betreffende Einheit bezogen wird; z. B. specifisches Gewicht = Gewicht der Volumeinheit, specifisches Volumen = Volumen der Gewichtseinheit, specifischer Druck einer Flüssigkeit = Druck auf die Flächeneinheit etc.

*) Wie es zugeht, dass gewisse Werthe von ε die fraglichen Erscheinungen zur Folge haben, bleibt hierbei dahingestellt; es ist nur nöthig ausdrücklich hervorzuheben, dass eben bestimmte Werthe von ihnen jene Erscheinungen begleiten. Man könnte nämlich auch, was aber einen wesentlichen Unterschied machen würde (cf. No. 11), gewisse Werthe der inneren Kräfte als charakteristische Begleiter der fraglichen Erscheinungen hinstellen.

**) Abgesehen von praktischen Nebenrücksichten: cf. No. 21.

gerufenen Widerstände, welche stets als äussere Kräfte in Beziehung auf den Körper selbst mitgerechnet werden müssen, unbestimmt blieben, falls der Körper als absolut starr vorausgesetzt würde.

Von den in der Praxis angewendeten Constructionsmaterialien können gegossene Metalle unbedingt, geschmiedete und gewalzte näherungsweise als isotrop, Hölzer nur als homogen gelten.

Auf die etwas verschiedene Festigkeit, welche z. B. gewalztes Eisenblech nach der Walzrichtung und nach der darauf senkrechten Längenrichtung besitzt, mag bei der Ausführung einer Construction durch entsprechend vortheilhafte Lagerung der einzelnen Blechtafeln möglichst Rücksicht genommen werden, die Theorie darf aber im Allgemeinen davon abstrahiren. Gezogener Draht hat zwar in noch höherem Grade ein verschiedenes Verhalten nach der Länge und Quere; doch kommt hierbei überhaupt nur das Verhalten nach der Richtung der Länge in Betracht, und wenn es nicht der Fall wäre, so dürfte wenigstens nach der Längenrichtung eine ausgezeichnete Elasticitätsaxe vorausgesetzt werden, welche dadurch charakterisirt ist, dass nach je zwei Richtungen, die gleiche Winkel mit ihr bilden, ein gleiches Verhalten stattfindet. Dieselbe Voraussetzung ist auch beim Holze zulässig in der Weise, dass die ausgezeichnete Elasticitätsaxe nach der Richtung der natürlichen Fasern angenommen wird.

6. — Damit die in No. 5 bezeichnete Hauptaufgabe gelöst werden könne, muss man im Stande sein, bei gegebener Belastung eines gegebenen Körpers die Ausdehnungen zu berechnen, welche in einem beliebigen Punkte A nach allen möglichen Richtungen stattfinden, um so die grösste unter ihnen zu erkennen. Dies würde aber unmöglich sein, wenn zwischen den Ausdehnungen in einem Punkte nach allen möglichen Richtungen nicht solche Beziehungen stattfänden, dass die Kenntniss einer beschränkten Zahl von Elementen genügt, um damit jede solche Ausdehnung zu berechnen. Wie es möglich ist, zu solchen Elementen zu gelangen, lehrt folgende Betrachtung.

Denkt man im Inneren eines noch unbelasteten Körpers ein unendlich kleines materielles rechtwinkeliges Parallelepipedum abgegrenzt und verfolgt seine (verhältnissmässig immer sehr kleine) Formänderung bei der Belastung und entsprechenden Formänderung des Körpers, so ist zwar klar, dass dieselbe zunächst betrachtet werden kann als das Resultat von positiven oder negativen Ausdehnungen verschiedener Grösse, die nach allen möglichen Richtungen im Parallelepipedum stattfinden; sie lässt sich aber auch betrachten als Resultat von 1) nur 3 Ausdehnungen nach den Richtungen der Kanten, 2) gegenseitigen Verschiebungen der gegenüberliegenden Seitenflächen, 3) gegenseitigen Neigungen dieser Seitenflächen, welche früher parallel waren, 4) gegenseitigen Verdrehungen der gegenüberliegenden Flächen, 5) Wölbungen dieser ursprünglich ebenen Seitenflächen (wegen der Continuität des Körpers bei den gegenüberliegenden Flächen nothwendig nach derselben Richtung convex oder concav). Erwägt man aber, dass die Neigungen der Seitenflächen nur durch die Differenz der Ausdehnungen in parallelen Geraden, ihre Verdrehungen nur durch die Verschiedenheit der Verschiebungen (nach Grösse und Richtung) in verschiedenen Punkten paralleler Ebenen, ihre Wölbungen nur durch die Differenz der Ausdehnungen in parallelen Geraden und der Verschiebungen in parallelen Ebenen innerhalb des unendlich kleinen Parallelepipedums bedingt und deshalb von verschwindend kleinem Einflusse sind im Vergleich mit den unter 1) und 2) genannten Aenderungen, so bleiben nur diese, also die Ausdehnungen nach den 3 Gruppen paralleler Kanten und die gegenseitigen Verschiebungen der 3 Paare paralleler Seitenflächen zu berücksichtigen übrig. Die Verschiebungen sind bestimmt durch Grösse und Richtung oder sie lassen sich zerlegen in je zwei Verschiebungen nach den Richtungen der zweierlei Kanten der betreffenden Seitenebenen, und da schliesslich die Formänderungen der 8 möglichen Parallelepipeda, welche einen Eckpunkt A gemeinschaftlich haben, wegen der Continuität des Körpers sich gegenseitig bedingen, nämlich nur unendlich wenig verschieden sind, so erkennt man vorläufig die Möglichkeit, die Ausdehnung in einem Punkte A nach einer beliebigen Richtung AB durch 9 Elemente auszudrücken (ausser durch die Winkel, welche die Richtung AB bestimmen), nämlich durch 3 Ausdehnungen und 6 Verschiebungen, die sich auf 3 zu einander senkrechte Richtungen beziehen.

7. — Die jetzt gewonnene Erkenntniss giebt Veranlassung zur näheren Betrachtung der Verschiebungen.

Ist F eine materielle Ebene in einem vorläufig unbelasteten Körper, A ein materieller Punkt in F und B ein anderer materieller Punkt, welcher so liegt, dass die Gerade AB senkrecht zu F ist, so findet durch die Belastung des Körpers im Allgemeinen eine solche Verrückung statt, dass das Perpendikel von B auf F einen neben A gelegenen Punkt A_1 von F trifft; die früher ebene Fläche F ist dabei im Allgemeinen krumm geworden. Lässt man AB abnehmen bis zur Grenze Null, so heisst der entsprechende Grenzwerth des Verhältnisses $\frac{AA_1}{AB}$, welcher immer ein kleiner Bruch ist, die Verschiebung der Ebene F im Punkte A; unter der Ebene F ist dabei die Berührungsebene der Fläche F im Punkte A zu verstehen. Solche Verschiebungen werden in der Folge mit γ bezeichnet.*)

Ist AC eine Richtung in der Ebene F, welche mit der Richtung AA_1 den Winkel φ bildet, so ist $\gamma \cos\varphi$ die Verschiebung der Ebene F im Punkte A nach der Richtung AC; dieselbe ist positiv oder negativ mit $\cos\varphi$, da γ eine absolute Zahl ist.

*) Die als unbenannte Zahl definirte Verschiebung einer Ebene F im Punkte A kann auch betrachtet werden als Länge, nämlich als diejenige Strecke, um welche zwei parallele Ebenen im Abstande $AB =$ der Längeneinheit an den correspondirenden Punkten A und B gegeneinander verschoben werden würden, wenn die Verschiebungen aller dazwischen liegenden Parallelebenen in ihren betreffenden Durchschnittspunkten mit der Geraden AB gleich gross und gleich gerichtet wären. In diesem Sinne heisse die Verschiebung insbesondere specifische Verschiebung. Cf. No. 3, Anmerk.

8. — Wenn man bei einem unendlich kleinen materiellen rechtwinkeligen Parallelepipedum im Inneren eines Körpers die vom Eckpunkte A auslaufenden Kanten mit AX, AY, AZ bezeichnet, so seien bei der Belastung des Körpers und entsprechenden Deformation des Parallelepipedums, im Sinne von No. 7 verstanden, für den Punkt A:

γ_{xy} und γ_{xz} die Verschiebungen der Ebene YAZ nach den Richtungen AY und AZ,

γ_{yz} und γ_{yx} die Verschiebungen der Ebene ZAX nach den Richtungen AZ und AX,

γ_{zx} und γ_{zy} die Verschiebungen der Ebene XAY nach den Richtungen AX und AY.

Die Verschiebungen γ_{xy} und γ_{yx} lassen sich beide als Folge des Umstandes betrachten, dass der früher rechte Flächenwinkel an der Kante AZ $= \frac{\pi}{2} \mp \varphi$, etwas kleiner oder grösser als ein rechter Winkel, geworden ist; sie können also immer nur gleichzeitig vorhanden sein, und zudem lässt eine einfache Ueberlegung erkennen, dass sie einander gleich, nämlich beide $= cotg\left(\frac{\pi}{2} \mp \varphi\right)$ oder absolut genommen $= tg\,\varphi$, also auch mit Vernachlässigung kleiner Grössen höherer Ordnung $= \varphi$ sind. Ebenso ist $\gamma_{yz} = \gamma_{zy}$ und $\gamma_{zx} = \gamma_{xz}$.

Die 9 Elemente, zu denen die Betrachtung in No. 6 geführt hatte, reduciren sich also auf 6, und man erkennt die Möglichkeit, die Ausdehnung im Punkte A nach der Richtung AB, welche mit den Richtungen AX, AY, AZ die Winkel λ, μ, ν bildet, als Funktionen dieser Winkel und der 6 Elemente

$$\varepsilon_x \quad \varepsilon_y \quad \varepsilon_z \quad \gamma_{yz} \quad \gamma_{zx} \quad \gamma_{xy}$$

auszudrücken, unter ε_x, ε_y und ε_z die Ausdehnungen im Punkte A nach den Richtungen AX, AY und AZ verstanden.

9. — Diese 3 Ausdehnungen und 3 Verschiebungen können nur durch Vermittelung der inneren Kräfte gefunden werden, welche in den 3 um den Punkt A herumliegenden Seitenflächen des Parallelepipedums stattfinden und welche für einen Punkt A an der Oberfläche des Körpers in gewissen Beziehungen zu den daselbst angreifenden äusseren Kräften stehen müssen. Diese inneren Kräfte sind zweierlei, den Ausdehnungen und den Verschiebungen entsprechend.

Ist F eine Ebene in einem belasteten Körper, A ein Punkt in F, f der Inhalt eines den Punkt A einschliessenden Stücks von F und p die Resultante der an den Punkt A versetzten inneren Kräfte, den die von einer Seite angrenzenden Körpertheile auf die Elemente von f ausüben, so heisst die Grenze des Quotienten $\frac{p}{f}$, wenn f, den Punkt A stets einschliessend, in die Grenze Null übergeht, die Spannung im Punkte A der Ebene F.*)

*) Die als Quotient einer Kraft durch eine Fläche definirte Spannung kann auch als eine Kraft betrachtet werden, nämlich als diejenige innere Kraft, welche auf die Flächen-

Wird dieselbe in zwei Componenten zerlegt, so dass die Richtungslinie der einen senkrecht zu F ist und die der anderen in der Ebene F liegt, so heisst erstere die **Normalspannung**, letztere die **Tangentialspannung im Punkte A der Ebene F.**

Wenn man die von beiden Seiten her ausgeübten inneren Kräfte unterscheidet und die Richtung AB nach derjenigen Seite hin senkrecht zu F zieht, von welcher her man sich den Zug oder Druck durch die angrenzenden Körpertheile ausgeübt denkt, so entspricht die Normalspannung einem Zug oder Druck, jenachdem sie die Richtung AB oder BA hat. Um diesen zwei Fällen durch einen positiven oder negativen Werth zu entsprechen, wird für die Normalspannung im Punkte A der Ebene F die Bezeichnung: **Spannung*) im Punkte A nach der Richtung AB** eingeführt. Eine solche ist dann positiv oder negativ, jenachdem sie die Richtung AB oder die umgekehrte Richtung hat; im ersteren Falle heisst sie auch Spannung im engeren Sinne oder absolute Spannung, im letzteren Pressung oder rückwirkende Spannung. Solche Spannungen (Normalspannungen) werden in der Folge, algebraisch verstanden, mit σ bezeichnet: σ' bedeute insbesondere eine positive, σ'' den Absolutwerth einer negativen Spannung.

Tangentialspannungen werden mit τ bezeichnet; sie sind absolute Grössen. Ist aber AC eine Richtung in der Ebene F, welche mit der Richtung von τ den Winkel φ bildet, so ist die **Tangentialspannung im Punkte A der Ebene F nach der Richtung AC** $= \tau \cos\varphi$ eine positive oder negative Grösse, jenachdem φ ein spitzer oder stumpfer Winkel ist.

10. — Betrachtet man wieder das unendlich kleine materielle rechtwinkelige Parallelepipedum mit den Kanten AX, AY, AZ im Inneren eines Körpers, so werden bei der Belastung des Körpers auf die 6 Seitenflächen durch die umgebende Körpermasse gewisse innere Kräfte ausgeübt, und es seien für den Punkt A

σ_x σ_y σ_z die entsprechenden Spannungen nach den Richtungen XA, YA, ZA,

τ_{xy} und τ_{xz} die Tangentialspannungen der Ebene YAZ nach den Richtungen YA und ZA,

τ_{yz} und τ_{yx} die Tangentialspannungen der Ebene ZAX nach den Richtungen ZA und XA,

τ_{zx} und τ_{zy} die Tangentialspannungen der Ebene XAY nach den Richtungen XA und YA.

---

einheit der Ebene F ausgeübt werden würde, wenn in allen ihren Punkten die Spannung ebenso gross und ebenso gerichtet wäre wie im Punkte A. In diesem Sinne heisse sie insbesondere specifische Spannung. Cf. No. 3, Anmerk.

*) Die ausdrückliche Bezeichnung als Normalspannung ist hier unnöthig, weil die Bezeichnung der betreffenden Spannungsebene nicht fehlen dürfte, wenn eine resultirende oder eine Tangentialspannung gemeint wäre.

Durch diese 9 Spannungen und die Inhalte der Seitenflächen des Parallelepipedums lassen sich die inneren Kräfte ausdrücken, mit welchen die umgebende Körpermasse auf dasselbe einwirkt; je 2 in den gegenüberliegenden Flächen sich entsprechende dieser im Ganzen $2.9 = 18$ Kräfte unterscheiden sich um unendlich kleine Grössen 3^{ter} Ordnung, da die Kräfte selbst mit den Flächen unendlich klein 2^{ter} Ordnung sind. Im Gleichgewichtszustande des ganzen belasteten Körpers muss nun auch an dem parallelepipedischen Körperelemente Gleichgewicht stattfinden zwischen den gedachten 18 Kräften an seiner Oberfläche und derjenigen Kraft (in der Regel nur der Schwerkraft), welche als äussere Kraft auf die Masse des Parallelepipedums selbst wirkt und welche mit dieser unendlich klein 3^{ter} Ordnung ist. Vermittels der allgemeinen 6 Gleichgewichtsbedingungen eines Systems von Kräften erhält man also 6 Gleichungen zwischen den obigen 3 Normalspannungen und 6 Tangentialspannungen im Punkte A, von welchen drei, den in No. 8 erwähnten Beziehungen:

$$\gamma_{yz} = \gamma_{zy}, \quad \gamma_{zx} = \gamma_{xz}, \quad \gamma_{xy} = \gamma_{yx}$$

entsprechend, einfach folgende sind:

$$\tau_{yz} = \tau_{zy}, \quad \tau_{zx} = \tau_{xz}, \quad \tau_{xy} = \tau_{yx}.$$

Sie folgen sofort aus den Momentengleichungen in Beziehung auf die durch den Mittelpunkt des Parallelepipedums parallel seinen Kanten gezogenen Axen, in welche nur die zu diesen senkrecht und windschief gerichteten Tangentialspannungen mit unendlich kleinen Gliedern von der 3^{ten} Ordnung eintreten, alle übrigen Spannungen aber nebst der auf die Masse des Parallelepipedums wirkenden äusseren Kraft mit unendlich kleinen Gliedern höherer Ordnung, die vernachlässigt werden.

Hiernach sind die noch übrigen 6 verschiedenen Spannungen für denselben Punkt A nur durch 3 Gleichungen verbunden, wodurch dieselben vermittels der für einen Punkt A an der Oberfläche des Körpers aufzustellenden Beziehungen zwischen ihnen und den äusseren Kräften noch nicht bestimmt sind. Liessen sich aber die 6 Spannungen σ und τ durch die 6 Grössen ε und γ, diese dagegen durch nur 3 neue Elemente ausdrücken, so würde die Aufgabe bestimmt sein, weil sich dann vermittels jener 3 Gleichungen zwischen den Spannungen und mit Hülfe der Oberflächenbedingungen die fraglichen 3 Elemente für jeden Punkt des Körpers finden liessen.

Solche 3 Elemente, wodurch die 6 Grössen ε und γ sich ausdrücken lassen, hat man nun in der That in den Verrückungen, welche der materielle Punkt A in Folge der Deformation des Körpers nach den Richtungen der Coordinatenaxen erleidet: die partiellen Differentiale dieser Verrückungen nach den Coordinaten des Punktes A, wovon sie der Continuität des Körpers wegen stetige Functionen sind, bestimmen nämlich offenbar die relativen Verrückungen der verschiedenen Eckpunkte des unendlich kleinen Parallelepipedums gegen einander und somit überhaupt die Formveränderung desselben.

11. — Zur Lösung der Aufgabe, die Ausdehnung ε in einem beliebigen Punkte A nach der beliebigen Richtung AB bei gegebener Belastung eines gegebenen Körpers zu bestimmen, ist also schliesslich noch die Kenntniss derjenigen Beziehungen nöthig, die zwischen den Ausdehnungen und Verschiebungen einerseits und den zweierlei Spannungen andererseits stattfinden, welche auf denselben Punkt A und dieselben drei zu einander senkrechten Richtungen AX, AY, AZ bezogen werden. Hierbei ist es unerlässlich, die Erfahrung mit zu Rathe zu ziehen.

Was zunächst die Beziehung zwischen Normalspannungen und Ausdehnungen betrifft, so ist es zwar selbstverständlich, dass ein auf einen Körper nach einer gewissen Richtung AB ausgeübter äusserer Zug oder Druck neben der positiven oder negativen Ausdehnung nach dieser Richtung auch eine solche nach jeder anderen Richtung zur Folge haben muss, welche um so kleiner ist, je mehr der Winkel zwischen dieser Richtung und der Richtung AB einem rechten sich nähert; die Erfahrung lehrt aber, dass nach jeder zu AB senkrechten Richtung nicht etwa die Ausdehnung = Null ist, sondern negativ im Falle des Zuges, positiv im Falle des Drucks nach der Richtung AB. Ist in einem Punkte A die Ausdehnung nach der Richtung AB des äusseren Zuges oder Drucks $= \varepsilon$, so ist sie nach irgend einer zu AB senkrechten Richtung AC etwa $= -\frac{\varepsilon}{m}$, unter m eine Zahl > 1 verstanden, welche bei einem isotropen Materiale nur von diesem, bei nur homogenem Materiale aber ausserdem von den Richtungen AB und AC abhängt.

Daraus folgt allgemein, dass z. B. ε_x nicht nur von σ_x, sondern auch von σ_y und σ_z abhängt, und dass also eine bestimmte Beziehung zwischen der Ausdehnung ε und der Spannung σ in einem Punkte A nach irgend einer Richtung AB nur dann stattfinden kann, wenn nach jeder zu AB senkrechten Richtung im Punkte A die Normalspannung = Null ist.

In diesem Falle lehrt die Erfahrung, dass in der That (abgesehen von dem in No. 1 erwähnten Einflusse der Zeit) einem bestimmten σ auch ein bestimmtes ε in demselben Punkte nach derselben Richtung entspricht und dass der Quotient $\frac{\sigma}{\varepsilon}$ sowohl für positive wie für negative Werthe von σ und ε beinahe constant bleibt, so lange die Absolutwerthe von σ und ε nicht so gross sind, dass die sogenannte Elasticitätsgrenze erreicht wird. Streng genommen nimmt $\frac{\sigma}{\varepsilon}$ ab, wenn σ und ε absolut genommen wachsen, und zwar nach einem Gesetze, welches für positive Werthe von σ und ε ein anderes sein kann, als für negative, bei einem nur homogenen Materiale auch verschieden für verschiedene Richtungen ist; jedenfalls ist es abhängig von der Art des Materials, indessen bisher noch nicht genügend festgestellt.

Die Grenze, welcher sich der Quotient $\frac{\sigma}{\varepsilon}$ nähert, wenn die Absolutwerthe von σ und ε in die Grenze Null übergehen, wird mit E bezeichnet und heisst der **Elasticitätsmodul** des Materials für die betreffende Richtung, wenn dasselbe nur homogen ist, oder kurzweg der Elasticitätsmodul des Materials, wenn dieses als isotrop angenommen wird.*)

Innerhalb der bei den praktischen Anwendungen zulässigen Grenzwerthe von σ und ε, worauf sich die Rechnungen der Festigkeitslehre beziehen, wird immer $\frac{\sigma}{\varepsilon} = E$ gesetzt.**)

12. — Die **Beziehung zwischen Tangentialspannungen und Verschiebungen** ist einfacher, als die zwischen Normalspannungen und Ausdehnungen. Beziehen sich nämlich τ und γ auf denselben Punkt derselben Ebene und dieselbe Schubrichtung der letzteren, so ist γ durch τ bestimmt, also nicht auch von anderen gleichzeitigen Spannungen abhängig, und der Quotient $\frac{\tau}{\gamma}$ nähert sich, wenn τ und γ bis Null abnehmen, einer gewissen Grenze, welche der **Schubelasticitätsmodul** genannt und mit G bezeichnet werden soll. Er ist bei isotropem Materiale nur von diesem, bei nur homogenem aber ausserdem von der betreffenden Ebene und deren Schubrichtung abhängig. Die in No. 11 und 12 besprochenen Constanten m, E und G stehen in einer gewissen Abhängigkeit von einander: cf. No. 168.

Bei solchen Belastungen und entsprechenden Formänderungen, welche sich innerhalb der Elasticitätsgrenze halten, kann ohne wesentlichen Fehler $\frac{\tau}{\gamma} = G$ gesetzt werden.

13. — Derjenige Werth $= K'$ resp. K'' der Spannung σ' oder Pressung σ'' nach einer gewissen Richtung AB, womit, wenn nach allen zu AB senkrechten Richtungen im betreffenden Punkte die Normalspannungen = Null sind, eine

---

*) Wenn man für rechtwinkelige Coordinatenaxen mit den Werthen von σ als Abscissen und den zugehörigen Werthen von ε als Ordinaten eine Curve zeichnet, so geht dieselbe durch den Anfangspunkt, welcher zudem Inflexionspunkt ist, und zwar so, dass die Curve in ihrem ganzen Verlaufe der Abscissenaxe ihre convexe Seite zukehrt. Bildet die Tangente im Anfangspunkte den Winkel α mit der Abscissenaxe, so ist $E = \lim \frac{\sigma}{\varepsilon} = \operatorname{cotg} \alpha$.

**) Weil ε eine unbenannte Zahl ist, so ist E eine Grösse von derselben Art wie σ (Kraft: Fläche).

Zuweilen wird unter dem Elaticitätsmodul eines Materials auch eine Grösse anderer Art verstanden. Wenn man nämlich an einen aus dem betreffenden Materiale verfertigten verticalen prismatischen Stab einen anderen solchen Stab aus demselben Materiale, von demselben Querschnitte und von der Länge l als Belastung anhängt, und wenn dadurch in dem ersteren Stabe (abgesehen von dessen eigenem Gewichte) die (specifische) Ausdehnung ε hervorgerufen wird, so heisst das bis zu einer gewissen Grenze constante Verhältniss $\frac{l}{\varepsilon}$ der Elasticitätsmodul des betreffenden Materials für die Längenrichtung des ersteren Stabes.

Dieser Elasticitätsmodul $L = \frac{l}{\varepsilon}$ ist eine Länge wie l und steht zu dem in der technischen Mechanik gewöhnlich sogenannten Elasticitätsmodul E in der Beziehung: $E = Ls$, unter s das specifische Gewicht des Materials (Gewicht: Volumen) verstanden.

Aufhebung des Zusammenhangs der materiellen Punkte durch Zerreissen resp. Zerdrücken verbunden ist, heisst die specifische Zug- oder Druckfestigkeit, auch kurzweg die **Zug- oder Druckfestigkeit**, absolute oder rückwirkende Festigkeit des Materials für die Richtung AB.

Specifische Schubfestigkeit oder kurzweg **Schubfestigkeit**, Scheerfestigkeit eines Materials für eine gewisse Ebene F und eine gewisse Richtung AC in derselben heisst der Grenzwerth T der Tangentialspannung τ, welcher eine Aufhebung des Zusammenhangs durch Abschiebung der Ebene F nach der Richtung AC zur Folge hat.

Bei isotropem Material kann kurzweg von seiner Zug- oder Druckfestigkeit K' resp. K'' und von seiner Schubfestigkeit T gesprochen werden.

14. — Die in der folgenden Tabelle enthaltenen Werthe von E, K', K'', T, (ε') und (ε'') für die im Maschinenbau am häufigsten angewendeten Materialien sind abgerundete Mittelwerthe nach Angaben vieler verschiedener Autoritäten. Sie beziehen sich, wie alle Angaben in diesem Buche, wobei eine gegentheilige Bemerkung fehlt, auf das Kilogramm als Krafteinheit und das Quadratcentimeter als Flächeneinheit.*)

Die Angaben für K'' und namentlich (ε'') haben im Allgemeinen geringere Zuverlässigkeit, als diejenigen für K' und (ε'). Die Werthe von T sind fast nur aus Versuchen über die Abdrehung von Stäben abgeleitet, wobei die Schubfestigkeit nicht rein, sondern durch Nebenumstände mehr oder weniger gestört auftritt; sie dürfen deshalb (ausser dem für Schmiedeeisen angegebenen Werthe) nur mit Vorsicht in anderen Fällen gebraucht werden.

Die für Holz gemachten Angaben sind Mittelwerthe für die im mittleren und nördlichen Europa gewöhnlichen Bauhölzer (Nadelhölzer, Eichen, Buchen) und beziehen sich auf die Richtung der natürlichen Fasern, der Werth von T auf den Fall, dass die natürlichen Fasern des der Verdrehung unterworfenen Stabes parallel mit dessen Längenrichtung verlaufen. Rechtwinkelig gegen die Faserrichtung ist K' etwa nur $1/5$, K'' nur $1/2$ so gross, als nach der Richtung der Fasern.

Die Produkte $E(\varepsilon')$ und $E(\varepsilon'')$ können mit einer solchen Annäherung, worauf die folgenden Zahlenwerthe überhaupt Anspruch machen, denjenigen Werthen von σ' resp. σ'' gleich geachtet werden, mit welchen, wenn nach den zu der betreffenden senkrechten Richtungen die Normalspannungen = Null sind, die Elasticitätsgrenze erreicht wird. Man nennt diese Werthe wohl die **Tragmodul für Zug resp. Druck**.

Bei den aus verschiedenen Bezugsquellen stammenden oder an demselben Orte unter verschiedenen Umständen gewonnenen Materialien einerlei Art weichen alle Constanten oft so bedeutend von den hier angeführten Mittelwerthen ab, dass es bei grösseren, wichtigen und kostspieligen Constructionen rathsam ist, die Eigenschaften des anzuwendenden Materials in Beziehung auf Elasticität und Festigkeit durch besondere Versuche zu prüfen.

*) Wie diese Werthe gefunden wurden oder gefunden werden können, wird in der Folge betreffenden Orts angedeutet.

Die Constante G entzieht sich einer directen und zuverlässigen experimentellen Bestimmung gänzlich; für isotrope Materialien (u. A. Metalle) kann aber aus theilweise theoretischen Gründen $G = {}^3/_8\, E$ bis ${}^2/_5\, E$ gesetzt werden (cf. No. 169).

	E	K'	K''	$\frac{K''}{K'}$	T	(ε')	(ε'')	$\frac{(\varepsilon'')}{(\varepsilon')}$	$E(\varepsilon')$	$\frac{E(\varepsilon')}{K'}$	$E(\varepsilon'')$	$\frac{E(\varepsilon'')}{K''}$
Holz	112000	800	500	$^5/_8$	300	0,0018	0,0015	$^5/_6$	201,6	0,252	168	0,336
Gusseisen . .	1000000	1250	7500	6	2000	0,00075	0,0015	2	750	0,6	1500	0,2
Gussstahl . .	2750000	10000	—	—	7500	0,0022	—	—	6050	0,605	—	—
Schmelz- und Cementstahl	2250000	7500	—	—	5000	0,0012	—	—	2700	0,36	—	—
Schmiedeeisen	2000000	4000	3500	$^7/_8$	3500	0,0007	0,0007	1	1400	0,35	1400	0,4
Eisenblech . .	1750000	3500	3000	$^6/_7$	—	0,0008	0,0008	1	1400	0,4	1400	0,466
Eisendraht . .	2000000	6500	—	—	—	0,0012	—	—	2400	0,369	—	—
Kupfer, insb. Blech . . .	1200000	2500	6000	2,4	—	0,00025	—	—	300	0,12	—	—
Messing . . .	650000	1250	11000	8,8	—	0,00075	—	—	487,5	0,39	—	—
Blei	50000	130	520	4	—	0,002	—	—	100	0,769	—	—

15. — Rücksichtlich der Art und Weise, wie die äusseren Kräfte einen Körper angreifen und demnach dessen Elasticität und Festigkeit sich äussern, unterscheidet man verschiedene Fälle, zu deren Charakteristik von einer bestimmten Körperform oder wenigstens einer bestimmten Entstehungsweise der Körperform ausgegangen wird.

Denkt man sich die Körperform entstanden durch Bewegung einer im Allgemeinen dabei stetig veränderlichen ebenen Fläche längs einer beliebigen Curve, so dass die Fläche beständig in ihrem Schwerpunkte rechtwinkelig von der Curve geschnitten wird, so heisse letztere die Mittellinie und jeder zu ihr senkrechte Durchschnitt (den verschiedenen Lagen der erzeugenden Fläche entsprechend) ein Querschnitt des Körpers.

Ein Körper, welcher der Form nach auf solche Weise entstanden gedacht wird, soll ein stabförmiger Körper im weiteren Sinne genannt werden. Ein Querschnitt eines stabförmigen Körpers wird mit F, die Länge seiner Mittellinie gewöhnlich mit l bezeichnet, letztere auch kurzweg die Länge des Körpers genannt. Ein stabförmiger Körper im engeren Sinne ist ein solcher, dessen Mittellinie überwiegend lang, wenigstens länger ist, als die grösste Dimension irgend eines Querschnitts.

Besondere Fälle der Stabform, welche besonders von praktischer Wichtigkeit sind, entsprechen den Voraussetzungen, dass die Mittellinie eine einfach gekrümmte Curve oder gar eine gerade Linie sei, in welchem letzteren Falle sie auch die Axe des Körpers genannt wird; im Falle der einfach gekrümmten Mittellinie ferner der Voraussetzung, dass deren Ebene den Körper in zwei symmetrisch gleiche Hälften theile, im Falle der geraden Mittellinie, dass sich eine Symmetrieebene oder dass sich zwei zu einander senkrechte Symmetrieebenen hindurch legen lassen; endlich der Voraussetzung, dass der Querschnitt constant sei — abgesehen von den unendlich vielen Specialfällen, welche hinsichtlich der Form einer nicht geraden Mittellinie, des Aenderungsgesetzes eines nicht constanten Querschnitts und der Form sowie der relativen Lage des letzteren gegen die Mittellinie oder die einwirkenden Kräfte möglich sind.

16. — Um die Wirkungen zu untersuchen, welche in einem Querschnitte F eines stabförmigen Körpers durch dessen Belastung hervorgerufen werden, ist es einerlei, ob man das eine oder das andere der beiden durch den Querschnitt F getrennten Stücke des Körpers mit den an ihnen angreifenden äusseren Kräften in Betracht zieht; beide Systeme von Kräften sind mit einander im Gleichgewichte durch Vermittelung der gleichen und entgegengesetzt gerichteten inneren Kräfte in den Flächenelementen von F. Das gerade in Betracht gezogene dieser beiden Systeme von Kräften soll das System der äusseren Kräfte für den Querschnitt F genannt werden. Unter der Richtung s werde die Richtung der Tangente der Mittellinie im Schwerpunkte O des betrachteten Querschnitts F verstanden, dieselbe genommen vom Punkte O aus nach der Seite desjenigen Körperstücks hin, an welchem das betrachtete System der äusseren Kräfte angreift. $O\,O_1$ sei ein nach der Richtung $-s$ gelegenes unendlich kleines Bogenelement der Mittellinie; F_1 der Querschnitt durch O_1.

Die äusseren Kräfte lassen sich ersetzen durch eine in O angreifende resultirende Kraft R und ein resultirendes Kräftepaar M. Die Resultante R werde in zwei zu einander senkrechte Componenten R_1 und R_2 zerlegt: R_1 senkrecht zu F (positiv oder negativ, jenachdem sie die Richtung s oder die entgegengesetzte Richtung hat), also R_2 in die Ebene F fallend. Ebenso werde das resultirende Paar M in zwei Componentenpaare M_1 und M_2 zerlegt, deren Ebenen sich rechtwinkelig schneiden: die Ebene von M_1 sei parallel mit F (M_1 selbst positiv oder negativ, jenachdem die Axe dieses Paares die Richtung s oder die entgegengesetzte Richtung hat), also die Ebene von M_2 senkrecht zu F.

Die Kraft R_1 verursacht, jenachdem sie positiv oder negativ ist, positive oder negative Normalspannungen in den Flächenelementen von F, welche der Grösse nach so vertheilt sind, dass ihre Resultante durch O geht und $= R_1$ ist. Die entsprechenden positiven oder negativen Ausdehnungen ε haben eine Zunahme oder Abnahme der gegenseitigen Entfernung der materiellen Querschnitte F und F_1 zur Folge.

Das Kräftepaar M_2 verursacht Normalspannungen, welche in den Flächenelementen von F der Grösse nach so vertheilt sind, dass sie sich auf ein Kräftepaar reduciren lassen, dessen Ebene parallel der Ebene von M_2 und dessen Moment $= M_2$ ist. Die entsprechenden positiven und negativen Ausdehnungen haben eine Aenderung der gegenseitigen Neigung von F und F_1 zur Folge.

Die Kraft R_2 verursacht Tangentialspannungen in den Flächenelementen von F, welche der Richtung und Grösse nach so vertheilt sind, dass sie eine durch O gehende Resultante $= R_2$ haben. Die entsprechenden Verschiebungen γ haben eine gegenseitige Verschiebung der materiellen Querschnitte F und F_1 zur Folge.

Das Kräftepaar M_1 verursacht Tangentialspannungen, welche in den Flächenelementen von F der Richtung und Grösse nach so vertheilt sind, dass sie sich auf ein Kräftepaar in der Ebene F reduciren lassen, dessen Moment $= M_1$ ist. Die entsprechenden Verschiebungen haben eine gegenseitige Verdrehung von F und F_1 zur Folge.

Sollten in den genannten Fällen die materiellen Flächen F und F_1 nach wie vor genaue Ebenen bleiben, so würde dies in jedem Falle ein bestimmtes entsprechendes Gesetz erfordern, nach welchem die Ausdehnungen der Grösse nach, die Verschiebungen der Richtung und Grösse nach von Punkt zu Punkt im Querschnitte sich ändern. Möglicherweise ist aber das Aenderungsgesetz ein anderes und findet dann neben der angeführten Hauptwirkung (Aenderung der Entfernung oder der Neigung, Verschiebung oder Verdrehung von F und F_1) auch noch eine Krümmung der materiellen Querschnitte statt.

Positive oder negative Normalspannungen nach der Richtung s werden nach No. 11 von negativen resp. positiven Ausdehnungen nach jeder Richtung längs F begleitet, welche eine Aenderung der Form und Grösse des Querschnilts F zur Folge haben können; dieselbe ist aber so unbedeutend, dass man im Allgemeinen davon absehen darf.

An denjenigen Stellen der Oberfläche des Körpers, wo die äusseren Kräfte unmittelbar angreifen, können Normalspannungen nach der Richtung der Quere von solcher Grösse vorkommen, dass von ihrer Wirkung nicht ohne wesentlichen Fehler abstrahirt werden darf; bei den zu charakterisirenden einfachen Fällen der Inanspruchnahme eines stabförmigen Körpers wird von ihnen abgesehen.

Streng genommen gehört zu den äusseren Kräften auch der Druck des umgebenden Mediums, also im Allgemeinen der Druck der umgebenden Luft, wodurch eine entsprechende innere Pressung nach jeder, also auch nach der Richtung der Quere hervorgerufen wird. Weil aber die Erfahrungswerthe, mit denen man in der technischen Festigkeitslehre rechnet, auch durch Versuche in atmosphärischer Luft als Medium gewonnen und nicht etwa mit Rücksicht auf diesen Umstand einer Correction unterworfen werden, so wird consequenter Weise von dem Luftdrucke als Theil der Belastung eines stabförmigen Körpers im Folgenden stets abstrahirt.*)

17. — Die Aenderungen, welche die Kräfte R_1 und R_2 und die Kräftepaare M_1 und M_2 erfahren, wenn man vom Querschnitte F zum Querschnitte F_1 übergeht, sind zum Theil bedingt durch die an dem Körperelemente zwischen F und F_1 unmittelbar angreifenden äusseren

*) Nur bei plattenförmigen Körpern, die einerseits dem Luftdrucke, andererseits dem Drucke einer anderen Flüssigkeit ausgesetzt sind, kommt jener insofern in Betracht, als nur der Ueberdruck als effectiver Druck von der betreffenden Seite in Rechnung gestellt wird.

Kräfte, zum Theil aber sind sie auch davon unabhängig. Wählt man für den Punkt O als Anfangspunkt die Tangente, die Hauptnormale (d. i. die Normale in der Schmiegungsebene) und die sogenannte Binormale (d. i. die zur Schmiegungsebene senkrechte Normale) der Mittellinie als Axen, nimmt man ferner die erste Axe positiv nach der Richtung s, die zweite nach der Richtung des Krümmungsradius, die dritte nach der Richtung der Axe einer directen Drehung von der ersten zur zweiten positiven Halbaxe, und bezeichnet man dann mit α den Winkel der Kraft R_2, mit β den Winkel der Axe des Paares M_2 mit der zweiten Axe (dem Krümmungsradius), beide Winkel gerechnet von der zweiten gegen die dritte positive Halbaxe hin, so sind die Aenderungen der in Rede stehenden Kräfte und Kräftepaare vollständig bestimmt durch die Aenderungen von

$$R_1,\ R_2 \cos\alpha,\ R_2 \sin\alpha,\ M_1,\ M_2 \cos\beta,\ M_2 \sin\beta.$$

Bezeichnet man nun mit

$$R_1 + dR_1,\ R_2 \cos\alpha + d(R_2 \cos\alpha) \text{ etc.}$$

die analogen Kräfte und Kräftepaare für den Querschnitt F_1, denkt dieselben aber in entgegengesetztem Sinne wirkend, so dass sie als das Resultat der äusseren Kräfte erscheinen, welche den nach der Richtung $-s$ über F_1 hinaus liegenden Körpertheil angreifen, so müssen an der Körperscheibe zwischen F und F_1 alle diese 6 Kräfte und 6 Kräftepaare zusammen mit den etwa unmittelbar zwischen F und F_1 angreifenden äusseren Kräften sich Gleichgewicht halten; wird aber von letzteren abstrahirt, so liefern die allgemeinen 6 Gleichgewichtsbedingungen, bezogen auf die vorgenannten 3 rechtwinkeligen Axen, bei Vernachlässigung unendlich kleiner Glieder der 2ten Ordnung die folgenden Gleichungen, in welchen $d\varphi$ den Neigungswinkel der Querschnitte F und F_1 (den Contingenzwinkel der Mittellinie) und $d\psi$ den Schmiegungswinkel (positiv entsprechend einer Verdrehung der Schmiegungsebene des Punktes O_1 gegen die des Punktes O um die Tangente in demjenigen Sinne, in welchem die Winkel α und β wachsen) bedeutet:

$$\begin{aligned}
dR_1 &= -R_2 \cos\alpha\, d\varphi \\
d(R_2 \cos\alpha) &= R_1\, d\varphi + R_2 \sin\alpha\, d\psi \\
d(R_2 \sin\alpha) &= -R_2 \cos\alpha\, d\psi \\
dM_1 &= -M_2 \cos\beta\, d\varphi \\
d(M_2 \cos\beta) &= M_1\, d\varphi + M_2 \sin\beta\, d\psi - R_2 \sin\alpha\, ds \\
d(M_2 \sin\beta) &= -M_2 \cos\beta\, d\psi + R_2 \cos\alpha\, ds.
\end{aligned}$$

Es sind dies die Aenderungen, welche die in Rede stehenden Kräfte und Kräftepaare von einem zum folgenden Querschnitte erfahren, insoweit sie unabhängig sind von den zwischen diesen beiden Querschnitten unmittelbar angreifenden äusseren Kräften.

Von jenen 6 Relationen sind namentlich die beiden letzten bemerkenswerth; sie liefern, wenn $M_1 = 0$ oder $d\varphi = 0$ ist:

$$\frac{dM_2}{ds} = R_2 \sin(\beta - \alpha)$$

d. h. es ist dann $R_2 \sin(\beta - \alpha)$ das Mass der Schnelligkeit, womit sich das Moment M_2 von einem zum folgenden Querschnitte ändert.

18. — Die unter No. 16 vorgeführte Zusammensetzung und Zerlegung der äusseren Kräfte für einen Querschnitt eines stabförmigen Körpers weist unmittelbar auf die einfachen Fälle hin, welche hinsichtlich der Elasticität und Festigkeit eines solchen Körpers unterschieden werden können: es sind diejenigen, in welchen (mit Beibehaltung der dortigen Bezeichnungen) die äusseren Kräfte sich für jeden Querschnitt durch nur eine der beiden Kräfte R_1 und R_2 oder durch nur eines der beiden Kräftepaare M_1 und M_2 ersetzen lassen, oder in welchen wenigstens die übrigen dieser Einzelwirkungen der äusseren Kräfte, ausser einer, ohne wesentlichen Fehler vernachlässigt werden können. Die entsprechenden 4 Specialfälle sind dann folgende:

1) Zug- oder Druck-Elasticität und Festigkeit (absolute oder rückwirkende E. u. F.). Die äusseren Kräfte lassen sich für jeden Querschnitt durch eine Resultante ersetzen, deren Richtungslinie den Querschnitt in seinem Schwerpunkte rechtwinkelig schneidet; wenn diese Resultante ziehend auswärts wirkt, wird der Körper verlängert und event. zerrissen, wenn sie drückend einwärts wirkt, verkürzt und event. zerdrückt.

2) Biegungs-Elasticität und Festigkeit (relative E. u. F.). Die äusseren Kräfte lassen sich für jeden Querschnitt durch ein resultirendes Kräftepaar ersetzen, dessen Ebene den Querschnitt rechtwinkelig schneidet; der Körper wird dadurch verbogen und event. zerbrochen.

3) Schub-Elasticität und Festigkeit (Scheer-E. u. F.). Die äusseren Kräfte lassen sich für jeden Querschnitt durch eine Resultante ersetzen, deren Richtungslinie in den Querschnitt fällt und durch dessen Schwerpunkt geht; der Körper wird verschoben und event. in einem Querschnitte abgeschoben.

4) Drehungs-Elasticität und Festigkeit. Die äusseren Kräfte lassen sich für jeden Querschnitt durch ein resultirendes Kräftepaar ersetzen, dessen Ebene dem Querschnitte parallel ist; der Körper wird um seine Mittellinie verdreht und event. abgedreht.

19. — Alle unter den vorgenannten einfachen nicht enthaltenen Fälle werden als zusammengesetzte Elasticität und Festigkeit bezeichnet. Sie lassen sich bei stabförmigen Körpern als Verbindungen von zweien oder mehreren jener einfachen Fälle betrachten; doch werden unter derselben Bezeichnung auch solche Fälle begriffen, in welchen die Körperform nicht wohl als Stabform zu bezeichnen, nämlich nicht ungezwungen auf die in No. 15 angegebene Art entstanden zu denken ist, wie z. B. bei plattenförmigen Körpern, Röhren und Gefässen.

Derjenige Fall zusammengesetzter Elasticität und Festigkeit bei stabförmigen Körpern, welcher als Verbindung von Zug- oder Druck- mit Biegungs-Elasticität und Festigkeit erscheint, ist verhältnissmässig einfach theoretisch zu behandeln, indem es sich dabei nur um die Zusammensetzung von Normalspannungen handelt, die in demselben Punkte nach derselben Richtung auftreten, was einfach durch algebraische Addition geschehen kann; wegen der praktischen Wichtigkeit dieses Falles wird ihm unter der Bezeichnung als **zusammengesetzte Biegungs-Elasticität und Festigkeit** ein besonderes Capitel unmittelbar hinter denjenigen Capiteln gewidmet, welche von jenen beiden ersten einfachen Fällen handeln.

Ebenso würde die Combination des dritten und vierten einfachen Falles, nämlich von Schub- mit Drehungs-Elasticität und Festigkeit, einfach auf die Zusammensetzung von Tangentialspannungen hinauslaufen, die in demselben Punkte derselben Ebene nach verschiedenen Richtungen auftreten, was nach dem Parallelogramm der Kräfte geschehen könnte; zur besonderen Hervorhebung dieses Falles, etwa als **zusammengesetzte Drehungs-Elasticität und Festigkeit**, liegt indessen eine praktische Veranlassung nicht vor.

Alle übrigen Fälle der zusammengesetzten Elasticität und Festigkeit erfordern zu ihrer theoretischen Behandlung eine erweiterte Grundlage in Betreff der **allgemeinen Beziehungen zwischen den Normal- und Tangentialspannungen, Ausdehnungen und Verschiebungen**, welche in demselben Punkte eines belasteten Körpers nach verschiedenen Richtungen, resp. in verschiedenen Ebenen und nach verschiedenen Richtungen stattfinden; diese Beziehungen werden deshalb im sechsten Capitel vorausgeschickt, insoweit für die im siebenten Capitel abgehandelte allgemeinere Theorie der zusammengesetzten Elasticität und Festigkeit ihre Kenntniss nöthig ist.

20. — **Bei der Zug- oder Druck-, der einfachen und zusammengesetzten Biegungs-Elasticität und Festigkeit** darf nach No. 11, sofern die Normalspannungen nach den zur Mittellinie senkrechten Richtungen nicht in Betracht kommen, die den betreffenden Aufgaben nach No. 5 zu Grunde liegende Forderung dahin ausgesprochen werden, dass in irgend einem Punkte des Körpers die Spannung σ' oder Pressung σ'' nach der Richtung der Mittellinie höchstens = einem gewissen erfahrungsmässig zulässigen Werthe sein solle, welcher in der Folge mit k' resp. k'' bezeichnet wird oder auch einfach mit k, falls $k' = k''$ gesetzt wird oder eine Unterscheidung der vorkommenden Spannungen in Beziehung auf ihren Charakter als Spannungen im engeren Sinne oder Pressungen der Natur der betreffenden Aufgabe gemäss nicht nöthig ist oder wenigstens unterlassen wird. Diese zulässigen Maximalwerthe k', k'' oder k sind für alle Punkte dieselben, **sofern, wie im Folgenden stets vorausgesetzt wird, das Material des Körpers entweder isotrop ist oder homogen mit einer ausgezeichneten Elasticitätsaxe, welche überall die Richtung der Mittellinie hat.**

Bei der Schub- und der Drehungs-Elasticität und Festigkeit kommen als Spannungen nur die Tangentialspannungen in den verschiedenen Punkten der Querschnitte in Betracht, die zu den betreffenden Verschiebungen nach No. 12 in bestimmter Beziehung stehen; die Fundamentalforderung wird deshalb hier dadurch erfüllt, dass man diese Tangentialspannungen τ höchstens einen gewissen erfahrungsmässig zulässigen Werth annehmen lässt, der in der Folge mit t bezeichnet wird, und welcher bei isotropem oder bei homogenem Materiale mit ausgezeichneter Elasticitätsaxe nach der Richtung der Mittellinie für alle Punkte und alle Schubrichtungen der betreffenden Querschnitte in denselben gleich ist.

Bei der zusammengesetzten Elasticität und Festigkeit im Allgemeinen ist es wesentlich, daran festzuhalten, dass principiell nicht sowohl σ', σ'' und τ, sondern die Ausdehnungen und Zusammenziehungen ε' und ε'' gewisse Werthe nicht überschreiten sollen; weil aber einmal die oben mit k' und k'' bezeichneten Werthe in der praktischen Festigkeitslehre sich eingebürgert haben, so möge die den Aufgaben der zusammengesetzten Elasticität und Festigkeit im Allgemeinen zu Grunde zu legende Forderung auch dahin ausgesprochen werden, dass das Produkt $E\varepsilon'$ resp. $E\varepsilon''$ in irgend einem Punkte und nach irgend einer Richtung höchstens den erfahrungsmässig zulässigen Werth k' resp. k'' annehmen darf, der bei nicht isotropem Materiale für verschiedene Richtungen verschieden ist.

21. — Die passende Wahl der Werthe k' und k'' für die verschiedenen Constructionsmaterialien ist zugleich von den Werthen $E(\varepsilon')$ resp. $E(\varepsilon'')$ und K' resp. K'' der Tabelle in No. 14 abhängig: je kleiner die Verhältnisse $\frac{E(\varepsilon')}{K'}$ und $\frac{E(\varepsilon'')}{K''}$ sind, je weiter also ein bis zur Elasticitätsgrenze belasteter Körper noch von dem Zustande entfernt ist, bei welchem der Zusammenhang der materiellen Punkte aufgehoben wird, einem desto grösseren aliquoten Theile von $E(\varepsilon')$ resp. $E(\varepsilon'')$, dagegen einem desto kleineren aliquoten Theile von K' resp. K'' muss man k' resp. k'' unter sonst gleichen Umständen gleich setzen.

Eine feste Regel lässt sich darüber nicht aufstellen, weil noch mancherlei praktische Rücksichten obwalten, z. B. die Formänderung, welche auch abgesehen von der Festigkeit unter Umständen eine gewisse Grösse nicht überschreiten soll, die von der ganzen Construction den Umständen gemäss überhaupt beanspruchte Dauerhaftigkeit, die Widerstandsfähigkeit des Materials gegen atmosphärische Einflüsse, die Abnutzung, welcher ein Maschinentheil durch Reibung unterworfen sein kann, die verschiedene Leichtigkeit und Billigkeit der Ersetzung eines schadhaft gewordenen Constructionstheiles durch einen anderen, der verschiedene Grad, in welchem auf der Festigkeit verschiedener Constructionselemente diejenige der ganzen Construction beruht, die grössere oder geringere Gefahr, welche mit einem etwa eintretenden Bruche für den regelmässigen Betrieb oder gar für Menschenleben verbunden sein würde, ferner Stösse und Einwirkungen lebendiger Kräfte bewegter Massen, die bei verschiedenartigen Maschinen in sehr verschiedenem Grade vorkommen,*) sowie andere Umstände, welche sich der theoretischen Berücksichtigung entziehen.**)

---

*) Unter Umständen sind diese Einwirkungen so bedeutend, dass es angemessen ist, die Dimensionen der betreffenden Maschinentheile vorwiegend davon abhängig zu machen. Die Mittel dazu giebt das letzte Capitel an die Hand, welches für gewisse Fälle die Arbeit berechnen lehrt, die ein fester Körper durch seine Formänderung ohne Gefahr in sich aufnehmen kann.

**) Hierher gehört u. A. auch die Erfahrung, dass das Schmiedeeisen (vermuthlich

Im Allgemeinen können deshalb nur sehr weite Grenzen für k' und k'' angegeben werden, innerhalb welcher in jedem Falle nach praktischer Erfahrung oder nach Analogie verwandter Fälle die Wahl zu treffen ist, und zwar etwa $^3/_4$ bis $^1/_4$ von $E(\varepsilon')$ resp. $E(\varepsilon'')$, oder $^1/_4$ bis $^1/_{20}$ von K' resp. K''.

Was die passende Wahl des Werthes t betrifft, so muss es zwar, da die Verschiebungen auf positive und negative Ausdehnungen zurückgeführt werden können, einen gewissen der Elasticitätsgrenze entsprechenden Werth (γ) der Verschiebung geben, der von den Grenzwerthen (ε') und (ε'') für die verschiedenen Richtungen abhängt, und wäre deshalb analog dem oben Angeführten jener Werth t zugleich von $G(\gamma)$ und von T abhängig zu machen; indessen genügt es bei der Schub- und der Torsions-Elasticität und Festigkeit, wo dieser Werth t überhaupt nur in Betracht kommt, ihn einfach einem den Umständen gemäss grösseren oder kleineren aliquoten Theile von T gleich zu setzen, etwa innerhalb der Grenzen $^1/_4$ und $^1/_{20}$ T.

---

in Folge einer gewissen Structurveränderung) an Festigkeit verliert, wenn es anhaltenden heftigen Erschütterungen ausgesetzt ist.