Die Festigkeitslehre mit besonderer Rücksicht auf die Bedürfnisse des Maschinenbaues

Grashof, Franz

Berlin, 1866

Erstes Capitel Zug- oder Druck-Elasticität und Festigkeit

urn:nbn:de:bsz:31-274080

ERSTES CAPITEL.

Zug- oder Druck-Elasticität und Festigkeit.

22. — Die Länge des stabförmigen Körpers sei $= l$, ein Querschnitt $= F$, die Resultante der äusseren Kräfte für diesen Querschnitt $= P$; die Richtungslinie der letzteren schneidet den Querschnitt rechtwinkelig in seinem Schwerpunkte O und berührt also in diesem Punkte die Mittellinie des Stabes. Im Allgemeinen kann die Mittellinie eine beliebige Curve und können F und P von einem zum anderen Punkte O derselben veränderlich sein.

Die Normalspannungen sind in den Flächenelementen von F so vertheilt, dass sie eine durch O gehende Resultante $= P$ haben, welchem Umstande am einfachsten durch die Annahme entsprochen wird, dass σ im Querschnitte constant sei, mithin auch ε; die materiellen Querschnitte des Stabes bleiben dann auch bei der Belastung genaue Ebenen, und es erfahren je zwei derselben, welche den Endpunkten eines Bogenelementes OO_1 der Mittellinie entsprechen, nur eine solche Aenderung ihrer relativen Lage, welche als eine Folge ihrer Drehung um die betreffende Krümmungsaxe der Mittellinie betrachtet werden kann.*)

Unter dieser Voraussetzung ist

$$max.\left(\frac{P}{F}\right) = k$$

die Bedingungsgleichung für die höchstens zulässige Belastung bei gegebenen Querschnitten oder für die erforderlichen Querschnitte bei gegebener Belastung; die Längenänderung des Stabes ist:

$$\Delta l = \frac{1}{E}\int_0^l \frac{P\,dl}{F}.$$

*) Streng genommen kann an den Stellen, wo die äusseren Kräfte unmittelbar angreifen, eine Krümmung der ursprünglich ebenen materiellen Querschnitte eintreten, die dann, allmälig schwächer werdend, auf die benachbarten Querschnitte sich überträgt; diese und ähnliche Unvollkommenheiten der den Rechnungen zu Grunde gelegten Annahmen lassen sich, ohne zu unpraktisch subtilen Untersuchungen zu schreiten, nur durch die in der Wahl des Werthes k liegende Sicherheit unschädlich machen.

A. Stabförmiger Körper von constantem Querschnitte.

23. — Ist ausser F auch P constant, so ist die Bedingungsgleichung für P oder F:

$$P = kF$$

und die Längenänderung des Stabes:

$$\Delta l = \frac{Pl}{EF}.$$

Dieser Fall liegt insbesondere dann vor, wenn der Stab gerade ist und nur eine einzige äussere Kraft P ihn am Ende nach der Richtung der Axe angreift, während die Wirkung des eigenen Gewichts G des Stabes vernachlässigt wird.

Letzteres darf in den meisten Fällen geschehen. Befindet sich aber der gerade Stab bei grosser Länge in verticaler Lage, so kann es nöthig sein, die eigene Schwere als äussere Kraft mit zu berücksichtigen; wird dann der vertical hängende Stab unten durch die ziehende oder der vertical stehende Stab oben durch die drückende Kraft P angegriffen, die also in beiden Fällen vertical abwärts gerichtet ist, so nimmt in beiden Fällen die Resultante der äusseren Kräfte von dem unmittelbar angegriffenen nach dem anderen Stabende hin von P bis $P+G$ zu, und es sind die obigen Gleichungen zu ersetzen durch:

$$P+G = kF;\ \Delta l = \frac{(P+{}^1/_2 G)l}{EF}.$$

Bei entgegengesetzter Richtung von P würde hierin G oder P (je nach der relativen Grösse beider Kräfte) entgegengesetzt zu nehmen sein.

I. Zug-Elasticität und Festigkeit.

24. — Gerade Stäbe von constantem Querschnitte sind vorzugsweise geeignet und angewendet worden zur experimentellen Bestimmung der Constanten K', (ε') und E eines gegebenen Materials.

Zur Bestimmung der absoluten Festigkeit K' brauchen die Stäbe nicht lang zu sein, und es ist hauptsächlich Sorge zu tragen, dass die Richtungslinien der belastenden Kraft am einen und der Widerstandskraft am anderen Ende genau mit der Axe des Stabes zusammenfallen; auch sind diese Enden so zu verstärken, dass der Riss an einer solchen mittleren Stelle erfolgen muss, wo eine gleichförmige Vertheilung der Spannung im Querschnitte mit Sicherheit vorausgesetzt werden darf. (Cf. No. 22, Anmerkung.) Ist dann P die totale Spannung im Augenblicke des Reissens und F die ursprüngliche Grösse des Querschnitts, so ist $K' = \frac{P}{F}$. An der Stelle, wo der Riss erfolgt, findet zuweilen eine beträchtliche Zusammenziehung des Querschnitts statt, und ist deshalb die specifische Spannung im Augenblicke des Reissens eigentlich entsprechend grösser als $\frac{P}{F}$; indessen ist es üblich, diese auf den ursprünglichen Querschnitt bezogene specifische Spannung $= K'$ zu setzen.

Bei der Bestimmung von (ε') und $E = \frac{P}{\varepsilon F}$ müssen die Stäbe möglichst lang genommen werden, damit ein gewisser Fehler bei der Ablesung von $\varDelta l$ einen möglichst kleinen Fehler von $\varepsilon = \frac{\varDelta l}{l}$ verursache. Es eignen sich deshalb zu diesem Zwecke besonders Drähte, mit welchen auch dergleichen Versuche im ausgedehntesten Masse von Gerstner, Lagerhjelm, Brix, Wertheim u. A. angestellt wurden.

25. — Das Verhalten beim Zerreissen von Stäben aus verschiedenem Material ist wesentlich verschieden.

Kurzfaserige Hölzer (Eichen, Buchen), Gusseisen und überhaupt alle Gussmetalle, auch Gussstahl, zeigen bis zum Augenblicke des Reissens keine andere wesentliche Veränderung, als die auf die ganze Länge des Stabes gleichmässig vertheilte, stetig zunehmende Ausdehnung; der Riss erfolgt plötzlich, ohne dass durch eine auffallende Erscheinung seine Nähe sich ankündigte.

Langfaserige Hölzer (insbesondere Nadelhölzer) zeigen für das Auge zwar auch keine andere wesentliche Veränderung, als die allgemeine Ausdehnung, allein der bevorstehende Riss kündigt sich dem Ohre durch das immer häufiger werdende klingende Abreissen einzelner Fasern an.

Schmiedeeisen und überhaupt alle streckbaren Metalle, insbesondere auch Kupfer und in geringerem Grade Schmiedestahl, zeigen, wenn die Spannung eine gewisse Grösse erreicht hat, auch bei ursprünglich überall möglichst gleichem Querschnitte, neben der allgemeinen Ausdehnung noch eine auffallende Zusammenziehung des Querschnitts an irgend einer Stelle des Stabes, welche mehr und mehr zunimmt bis sie ebendaselbst den Riss veranlasst.

26. — Der in der Tabelle unter No. 14 angegebene Mittelwerth der Zugfestigkeit des Holzes nach der Richtung der Fasern $(K' = 800)$ bezieht sich vorzugsweise auf Tannen- und Buchenholz; Eschenholz hat im Durchschnitt eine grössere, Eichenholz eine kleinere Zugfestigkeit. Dagegen ist dieselbe nach der Richtung senkrecht gegen die Fasern bei Eichenholz und allen harten Hölzern verhältnissmässig grösser, etwa $\frac{1}{4}$ derjenigen nach der Faserrichtung, bei weichen Hölzern aber oft kleiner als $\frac{1}{5}$ von jener.

Im Durchschnitt aus verschiedenen Versuchen hat sich ergeben, dass die Zugfestigkeit des Eisenblechs senkrecht gegen die Walzrichtung etwa nur 0,9 von derjenigen nach der Walzrichtung beträgt; bei Blechen aus Holzkohlen-Roheisen ist der Unterschied beider Festigkeiten kleiner, bei Blechen aus Coks-Roheisen grösser. Die Angabe $K' = 3500$ in No. 14 kann als Mittelwerth für die Walzrichtung gelten.

Aus Versuchen, welche von W. Fairbairn in England und schon früher von einer Commission des Franklin-Instituts in Philadelphia über den

Einfluss der Temperatur auf die Zugfestigkeit des Schmiedeeisens angestellt wurden, ist zu schliessen, dass dieselbe mit wachsender Temperatur Anfangs nicht nur nicht abnimmt, sondern sogar bis zu einem bei ungefähr 200° C. liegenden Maximum zunimmt, welches bis 20% grösser sein kann, als der ursprüngliche Werth bei gewöhnlicher Luft-Temperatur; bei weiter gesteigerter Hitze nimmt dann aber die Festigkeit schnell ab, so dass sie bei der dunklen Rothglühhitze (600—700° C.) nur noch ½—⅓ des gewöhnlichen Werthes beträgt.*)

Die Zugfestigkeit des Kupferblechs nimmt mit wachsender Temperatur beständig ab und beträgt bei 400° C. nur noch etwa ½ derjenigen bei 0°.

27. — Durch Hämmern, Walzen und anderweitige, mit starkem Drucke auf die Oberfläche verbundene Bearbeitung erfahren die streckbaren Metalle besonders in den Oberflächenschichten eine Verdichtung und überhaupt eine gewisse vortheilhafte, die Festigkeit erhöhende Texturveränderung. Diese Wirkung ist am auffallendsten beim Ziehen der Drähte; die sonst im Allgemeinen dem Querschnitte proportional zu setzende totale Festigkeit erfährt dadurch einen dem Umfange proportionalen Zuwachs, so dass, unter d den Durchmesser des Drahts verstanden, die totale Festigkeit

$$= \alpha d^2 + \beta d,$$

mithin die specifische Festigkeit:

$$K' = \frac{4}{\pi}\left(\alpha + \frac{\beta}{d}\right)$$

gesetzt werden kann. Durch das Ausglühen nimmt die Festigkeit ab, indem die Verdichtung grossentheils wieder verschwindet. Werden für diesen Fall die Coefficienten α und β insbesondere mit α_1 und β_1 bezeichnet, so gelten nach Versuchen von Karmarsch, die freilich nur mit Drähten von verhältnissmässig geringer Dicke angestellt wurden, die folgenden Werthe, vorausgesetzt dass d in Millimetern, die Festigkeit in Pfunden (à ½ Kilogr.) ausgedrückt wird:

	nicht geglüht		geglüht	
	α	β	α_1	β_1
Stahldraht	100	42	90	6
Eisendraht, bester . . .	100	25	52	6
„ gewöhnlicher	72	36	45	10
Messingdraht	86	16	45	11
Kupferdraht	55	15	37	0
Platindraht	35	19	29	15
Zinkdraht	20	3,5	—	—
Draht von hartem Blei	3,5	0	—	—
„ „ weichem „	2,7	0	—	—

*) Diese Erfahrungen lehren, dass die Widerstandsfähigkeit eines Dampfkessels erst dann, in diesem Falle aber sehr wesentlich gefährdet wird, wenn das Blech da, wo es mit dem Feuer oder den heissen Gasen in Berührung ist, von Wasser entblösst und dadurch sehr heiss oder gar glühend wird.

Durch das Ausglühen vermindert sich im Allgemeinen die Festigkeit verhältnissmässig um so mehr, je dünner der Draht ist, sofern nämlich im Allgemeinen $\frac{\beta_1}{\alpha_1} < \frac{\beta}{\alpha}$ ist; nach der Tabelle macht nur der Messingdraht eine Ausnahme.

28. — Die Angabe $K' = 6500$ Kilogr. pro Quadratcentimeter für Eisendraht (in der Tabelle unter No. 14) bezieht sich auf ungeglühten Draht und entspricht besonders den sorgfältigen Versuchen von Brix, angestellt mit Drähten von $1\frac{1}{3}$ bis $1\frac{1}{2}$ Linien oder ungefähr 3 Millimeter Durchmesser; sie würde mit den Zahlen von Karmarsch übereinstimmen

bei Voraussetzung besten Drahts für $d = 12$ Millim.,

„ „ gewöhnlichen „ „ $d = 1{,}2$ „

Durch das Ausglühen nimmt die Zugfestigkeit des Eisendrahts nach Brix auf ungefähr $\frac{2}{3}$ des früheren Werthes ab. Der Elasticitätsmodul E erfährt dadurch keine wesentliche Aenderung. Am auffallendsten ist aber der Unterschied der Ausdehnungen ε im Augenblicke des Reissens: bei ungeglühtem Drahte ist diese $= 0{,}0034$, bei geglühtem dagegen $= 0{,}0885$.

29. — Hanfseile und Drahtseile.

Die specifische Festigkeit eines Hanfseils ist je nach der Güte des Hanfs, der Anfertigungsart des Seils und der Dauer seines Gebrauchs verschieden, etwa $=$ 500 bis 800 Kilogr., sofern es sich noch in gutem Zustande befindet. Sein erforderlicher Durchmesser d bei gegebener Zugkraft P ist:

$$d = \sqrt{\frac{4P}{\pi k}} = 1{,}128\sqrt{\frac{P}{k}};$$

im Durchschnitt $d = \frac{1}{9}\sqrt{P}$ entsprechend $k = 103$.

Besteht ein Drahtseil aus n Drähten, so ist jedem einzelnen Drahte der Durchmesser

$$\delta = \sqrt{\frac{4P}{\pi k n}} = 1{,}128\sqrt{\frac{P}{kn}}$$

zu geben. Ein rundes Drahtseil besteht häufig aus 36 Drähten, nämlich 6 Litzen von je 6 Drähten, und sind dann im Querschnitte des Seils die Querschnitte der einzelnen Drähte innerhalb 6 regelmässiger und in Seiten sich berührender Sechsecke (den einzelnen Litzen entsprechend) um ein 7tes Sechseck herum (einer inneren sogenannten Hanfseele entsprechend) so gruppirt, dass man den Durchmesser d des ganzen Seils nahezu setzen kann:

$$d = 9\delta \cdot \cos 30^0;$$

wird hiernach für ein rundes Seil allgemein

$$d = \frac{3}{2}\cos 30^0 \cdot \delta\sqrt{n}$$

gesetzt, d. h. auch bei verschiedener Zahl und Gruppirung der Drähte d^2 proportional $n\delta^2$ angenommen, so ist allgemein

$$d = \sqrt{\frac{27P}{4\pi k}} = 1{,}466\sqrt{\frac{P}{k}},$$

wofür im Durchschnitt zu setzen ist:

$$d = \frac{1}{20}\sqrt{P} \text{ entsprechend } k = 859.$$

30. — Ein auf gewöhnliche Art von Stangen getragener Telegraphendraht hat eine Spannung, welche abhängt vom Gewichte des Drahts $= p$ pro Längeneinheit, von der Entfernung $= 2a$ zweier Stangen und von der Höhe h des Bogens, in welchem der Draht zwischen den Stangen niederhängt. Dieser flache Bogen kann für einen Parabelbogen gelten mit derselben Näherung, mit welcher p auch als das Gewicht pro Längeneinheit der Horizontalprojection betrachtet werden darf. Ist die Spannung des Drahts im Scheitel $= P$ gegeben, so muss

$$h = \frac{pa^2}{2P}$$

sein; nach den Stangen hin nimmt dann die Spannung nur sehr wenig, bis $\sqrt{P^2 + (pa)^2}$ zu.

Bei Erniedrigung der Temperatur nimmt die

$$= 2a\left(1 + \frac{2}{3}\frac{h^2}{a^2}\right)$$

zu setzende Länge des Drahts, somit auch h ab und P zu; soll nun die Spannung im Scheitelquerschnitte erst bei einer solchen Temperatur $= P$ werden, welche um t^0 niedriger ist, als diejenige, bei welcher der Draht gelegt wird, so darf er beim Legen nur so stark angezogen werden, dass die Bogenhöhe

$$h_1 = \sqrt{h^2 + 1{,}5\,\alpha t a^2} = a\sqrt{\left(\frac{pa}{2P}\right)^2 + 1{,}5\,\alpha t}$$

ist, unter α den Ausdehnungscoefficienten des Drahts verstanden.

II. Druck-Elasticität und Festigkeit.

31. — Zu Versuchen über die Druckfestigkeit K'' verschiedener Materialien eignen sich vorzugsweise gerade stabförmige Körper von constantem (kreisförmigem oder quadratischem) Querschnitte F und geringer Länge. Um bei so kleiner Länge mit Sicherheit

$$K'' = \frac{P}{F}$$

setzen zu dürfen, unter P den die Zerstörung bewirkenden Druck verstanden, ist es nöthig, dass nicht nur die Richtungslinien des resultirenden directen Druckes an der einen Endfläche und des entsprechenden Widerstandes der Unterlage an der anderen genau in die Axe des Körpers fallen, sondern es ist ausserdem durch entsprechende Zwischenlagen dafür zu sorgen, dass beide Pressungen möglichst gleichförmig in den Endflächen vertheilt seien.

Bei solchen Versuchen wurden gewöhnlich die Materialien in Form von Würfeln angewendet; Rondelet u. A. hielten bei dieser Form die Druckfestigkeit für am grössten, besonders bei Steinen. Jedoch hat Hodgkinson durch spätere Versuche mit Prismen von Stein, Holz, Schmiedeeisen und namentlich Gusseisen gezeigt, dass die Festigkeit mit zunehmender Höhe der Prismen von der kleinstmöglichen Höhe an durchweg abnimmt, so lange letztere nicht grösser ist, als die 3fache Dicke,*) und dass sie dann nahe

*) Die Dicke eines stabförmigen Körpers an einer gewissen Stelle ist seine kleinste Querdimension daselbst, d. h. der kleinste Abstand zweier paralleler Geraden in der Ebene des Querschnitts, welche dessen Umfang, ihn zwischen sich fassend, berühren.

constant bleibt, bis die Höhe das 6fache der Dicke beträgt. Damit hängt es auch zusammen, dass der Widerstand eines massiven prismatischen Körpers gegen Zerdrücken bei gleicher Länge und gleichem Inhalte des Querschnitts nicht ganz von dessen Form unabhängig, sondern um so grösser, je kleiner der Umfang, am grössten also für die Kreisform des Querschnitts ist.

Compressionsversuche zur Bestimmung von (ε'') und E sind schwieriger anzustellen und seltener angestellt worden, als Ausdehnungsversuche zur Bestimmung von (ε') und E. Es sind dazu lange Stäbe nöthig, deren Biegung, wenn sie frei ständen, den Versuch stören würde; um solche Biegung zu hindern, ist der Versuchsstab in eine starke röhrenförmige Leitung zu stellen, welche so dicht anschliesst, dass es nur eben möglich ist, durch ein passendes Schmiermittel die Reibung unschädlich zu machen.

32. — Auch das Verhalten beim Zerdrücken ist bei verschiedenen Materialien wesentlich verschieden; während einige, wie namentlich weiche Metalle, u. A. selbst sehr weiches Schmiedeeisen, sich blos zusammendrücken lassen ohne dabei in Stücke zu zerfallen, werden andere, wie Gusseisen, Hölzer, Steine, gänzlich zertrümmert, zeigen aber gewöhnlich schon lange vorher Sprünge und Risse.

Daraus, dass verschiedene Experimentatoren verschiedene Kennzeichen als bestimmend erachteten, um die Festigkeit für überwunden ansehen zu dürfen, sind zum Theil die sehr abweichenden Angaben über die Werthe von K'' zu erklären, welche aus demselben Grunde ohne genaue Angabe der näheren Umstände kaum einen wissenschaftlichen Werth haben. So beziehen sich z. B. in der Tabelle unter No. 14 die für Messing und Blei angegebenen Werthe auf eine Zusammendrückung bis $\frac{1}{2}$, der Werth für Kupfer auf eine solche bis etwa $\frac{7}{8}$ der ursprünglichen Höhe.

Spröde Körper, namentlich Steine, zerfallen vorwiegend in pyramidale Stücke, deren Spitzen im Innern des Körpers zusammen liegen und von denen diejenigen besonders deutlich ausgebildet zu sein pflegen, deren Grundflächen die gedrückten Endflächen des Körpers sind. Die ersten Sprünge zeigen sich (nach Brix) bei Steinen gewöhnlich schon bei einem nur halb so grossen Drucke, als bei welchem sie in Trümmer zerfallen.

Bei Hölzern, besonders langfaserigen Hölzern, die nach der Richtung der Fasern gedrückt werden, kündigt sich die Nähe der Zerstörung durch eine wulstförmige Erhöhung an, welche, dem Umfange eines Querschnitts folgend, an irgend einer Stelle hervortritt.

33. — Die Druckfestigkeit der meisten natürlichen Steine, selbst im Uebrigen ganz ähnlicher Varietäten, ist zwar je nach ihrem Fundorte, diejenige der Ziegelsteine und des erhärteten Mörtels je nach dem verwendeten Materiale und der Darstellungsweise so sehr verschieden, dass brauchbare Mittelwerthe sich kaum angeben lassen; als ungefährer Anhalt und vorbehaltlich specieller Versuche und örtlicher Erfahrungen mögen indessen folgende Zahlen dienen:

Basalt	K'' =	1200
Gneiss und Granit	„ =	600
Kalkstein	„ =	300
Sandstein	„ =	200
Gewöhnlicher Ziegelstein	„ =	60
Guter Mörtel von Kalk und Sand .	„ =	40.

Natürliche Steine, welche ein geschichtetes Gefüge haben, leisten einen grösseren Widerstand, wenn der Druck senkrecht gegen die Schichten stattfindet, als nach einer anderen Richtung. Die Festigkeit des Mörtels nimmt, selbst wenn er schon Jahre alt ist, noch merklich mit der Zeit zu.

Bei Steinen, wie bei allen harten, mehr oder weniger spröden Körpern, ist es wesentlich, den Druck recht gleichförmig in der Druckfläche zu vertheilen, um die Druckfestigkeit zur vollen Geltung zu bringen; es dienen dazu Zwischenlagen von weicherem Material, und ist es bei Mauerwerk der Mörtel, welcher neben seiner Bestimmung als Bindemittel auch diesen Dienst leistet.

34. — Die zulässige Belastung eines auf Druckfestigkeit in Anspruch genommenen Körpers ist häufig nicht sowohl durch die Druckfestigkeit dieses Körpers, als vielmehr durch ganz andere Umstände bedingt, z. B. die Belastung eines eingerammten Pfahls durch die Widerstandsfähigkeit des Erdreichs gegen das weitere Eindringen. Ein Beispiel aus dem Maschinenbaufache sind die Zapfen stehender Wellen, welche bei gegebenem Drucke P einen viel grösseren Durchmesser d erhalten, als mit Rücksicht auf die Festigkeit des Materials des Zapfens (gewöhnlich Stahl) und der Pfanne (Rothguss oder eine andere harte Metallcomposition) nöthig wäre. Massgebend ist hierbei in höherem Grade die Rücksicht auf möglichst geringe Erwärmung und Abnutzung, welche Wirkung der Reibung mit dem specifischen Drucke und der Geschwindigkeit der gleitenden Bewegung wächst, so dass jener specifische Druck um so kleiner sein muss, je grösser diese Geschwindigkeit ist. Wird diesen Verhältnissen entsprechend mit Redtenbacher von der empirischen Formel

$$\frac{P}{\frac{\pi d^2}{4}} = \frac{1}{a + bnd}$$

ausgegangen, unter n die Umdrehungszahl pro Minute verstanden, so ergiebt sich

$$d = \alpha n P \left(1 + \sqrt{1 + \frac{\beta}{n^2 P}}\right),$$

unter α und β Constante verstanden, welche durch a und b bestimmt sind, nämlich:

$$\alpha = \frac{2b}{\pi};\ \beta = \frac{\pi a}{b^2}.$$

Setzt man

$$a = \frac{\pi}{400} \text{ und } b = 0{,}000007\pi,$$

entsprechend einem specifischen Drucke = 127 Kilogr. für $n = 0$, dagegen nur = 20 Kilogr. für schwere Wellen mit $d = 16$ Centim. bei $n = 120$ (nach Redtenbacher), so ist

$$\alpha = 0{,}000014;\ \beta = 51020000.$$

Für sehr langsam gehende und nicht sehr stark belastete Wellen ist näherungsweise zu setzen:

$$d = \alpha\sqrt{\beta}\,.\,\sqrt{P} = 0{,}1\sqrt{P}.$$

B. Stabförmiger Körper von veränderlichem Querschnitte.

35. — Einem stabförmigen Körper an verschiedenen Stellen einen verschiedenen Querschnitt zu geben kann man hauptsächlich veranlasst sein in der Absicht, einen sogenannten Körper von gleichem Widerstande herzustellen, d. h. einen Körper, dessen Festigkeit bei gegebener Art der Belastung in allen Querschnitten gleich stark in Anspruch genommen wird; die Aufgabe besteht dann darin, das diesem Zwecke entsprechende Gesetz der Veränderlichkeit des Querschnitts zu ermitteln.

Bei der Zug- oder Druckfestigkeit kann diese Aufgabe sich darbieten, wenn ein stabförmiger Körper mit gerader Mittellinie vertical hängend unten oder vertical stehend oben durch eine nach der geraden Mittellinie oder Axe abwärts gerichtete äussere Kraft P angegriffen wird und der Körper so lang ist, dass sein eigenes Gewicht eine mit P vergleichbare oder gar überwiegende Grösse hat. Ist dann

F der Querschnitt im Abstande x von dem durch die Kraft P angegriffenen Ende des Körpers,

s das specifische Gewicht des letzteren und

e die Basis der natürlichen Logarithmen,

so wird der Forderung, dass in allen Punkten aller Querschnitte die Spannung oder Pressung $= k$ sei, durch die für alle Werthe von x gültige Gleichung:

$$F = \frac{P}{k} e^{\frac{sx}{k}}$$

entsprochen. Es müsste darin $-s$ statt s gesetzt werden, wenn P vertical aufwärts gerichtet wäre.

36. — Die Gleichung der vorigen No. könnte zur Formgebung langer Schachtgestänge Anwendung finden, wenn nicht die stetige Veränderlichkeit des Querschnitts hierbei praktisch unausführbar wäre. Näherungsweise lässt sich aber der Zweck erreichen, indem man das Gestänge aus verschiedenen Stücken, von unten an gerechnet etwa mit den Längen $l_1\ l_2\ l_3 \ldots$ zusammensetzt und deren Querschnitte $F_1\ F_2\ F_3 \ldots$, für jedes einzelne Stück constant, so wählt, dass in den obersten Querschnitten aller Stücke die specifische Spannung $= k$ ist. Dieser Forderun entsprechen die Querschnitte:

$$F_1 = \frac{P}{k - s l_1}$$

$$F_2 = \frac{Pk}{(k - s l_1)\ (k - s l_2)}$$

$$F_3 = \frac{Pk^2}{(k - s l_1)\ (k - s l_2)\ (k - s l_3)} \text{ etc.}$$

Insbesondere mit $l_1 = l_2 = l_3 \ldots = l$ wird:

$$F_n = \frac{P}{k}\left(\frac{k}{k - s l}\right)^n.$$