Die Festigkeitslehre mit besonderer Rücksicht auf die Bedürfnisse des Maschinenbaues

Grashof, Franz

Berlin, 1866

Zweites Capitel Biegungs-Elasticität und Festigkeit

urn:nbn:de:bsz:31-274080

ZWEITES CAPITEL.

Biegungs-Elasticität und Festigkeit.

---

37. — Nach der Definition in Nr. 18 wird hierunter derjenige Fall verstanden, in welchem die äusseren Kräfte sich für jeden Querschnitt durch ein resultirendes Kräftepaar ersetzen lassen, dessen Ebene den Querschnitt rechtwinkelig schneidet und dessen Moment hier mit M bezeichnet werden soll. Freilich ist dieses Kräftepaar im Allgemeinen unvermeidlich von einer Kraft R begleitet, deren Richtungslinie in die Ebene des Querschnitts fällt,*) von deren Wirkung aber in diesem Capitel abstrahirt wird. Der dadurch begangene Fehler ist um so kleiner, je grösser die Länge l des stabförmigen Körpers im Vergleich mit seiner grössten Höhe h ist, auch kleiner für solche Querschnitte, welche eine constante Breite oder gar ihre grösste Breite in der Mitte haben, als für solche, welche von der Mitte nach Aussen hin an Breite zunehmen.

Unter der Höhe eines Querschnitts oder der Höhe des Stabes an der Stelle eines gewissen Querschnitts wird hier und in diesem Capitel überhaupt die grösste mit der Ebene des Paares M parallel gemessene Dimension des betreffenden Querschnitts verstanden, d. h. die Entfernung derjenigen beiden zur Ebene von M senkrechten Geraden, welche den Umfang des Querschnitts so berühren, dass sie ihn ganz zwischen sich fassen. Jede andere zur Ebene von M senkrechte Gerade, welche zwischen den beiden vorgenannten liegt, bestimmt durch die Summe ihrer in den Querschnitt fallenden Strecken die Breite desselben an der betreffenden Stelle; die Breite in der Mitte wird auf solche Weise bestimmt durch diejenige zur Ebene von M senkrechte Gerade, welche durch den Schwerpunkt des Querschnitts geht und welche die Axe des Kräftepaars M genannt werden soll.

Wenn für jeden Querschnitt die Breite in der Mitte nicht kleiner ist, als an einer anderen Stelle, so ist der durch die Vernachlässigung der Kraft R begangene Fehler schon dann sehr klein, wenn die Länge l des

---

*) Cf. No 17, letzte Gleichung, wo diese Kraft mit R_2 bezeichnet ist, ebenso wie das Moment M mit M_2.

Körpers kaum = seiner grössten Höhe h ist (cf. Nr. 174). Ist aber die Breite der Querschnitte gerade umgekehrt in der grössten Entfernung von der Axe des Paares M am grössten, so kann die Vernachlässigung der Kraft R auch bei grösserer Länge des Körpers wesentlich fehlerhaft sein. Besonders gilt dies von zusammengesetzten Trägern, welche, wie grössere Brückenträger, aus zwei von der Fläche der Axen der Paare M möglichst entfernt gehaltenen Haupttheilen (sog. Streckbalken, Rahmstücken, Gurtungen) bestehen, welche durch eine verhältnissmässig dünne Wand (oder einige solche Wände) oder durch ein System von Stäben mit einander verbunden sind; indem nämlich die Kraft R oder eine Componente derselben (cf. Nr. 17) als das Mass der Schnelligkeit betrachtet werden kann, womit das Moment M von einem zum andern Querschnitte sich ändert (abgesehen von den zwischen diesen beiden Querschnitten unmittelbar angreifenden äusseren Kräften), diese Veränderung aber bei einem auf die angedeutete Art zusammengesetzten Träger fast allein durch die wand- oder stabförmige Verbindung der beiden Streckbalken vermittelt wird, so werden die Anstrengungen dieser Verbindungstheile fast nur durch die Kräfte R bedingt, während die Streckbalken zumeist durch die Kräftepaare M in Anspruch genommen werden. Solche zusammengesetzte Träger sind deshalb in diesem Capitel, wenn auch nicht ganz, so doch wenigstens in Beziehung auf die Functionen und die Widerstandsfähigkeit der fraglichen mittleren Verbindungstheile ausgeschlossen.

38. — Damit für alle Querschnitte die in Nr. 16 mit M_1 bezeichneten Kräftepaare, deren Ebenen den betreffenden Querschnitten parallel sind = Null sein können, muss vorausgesetzt werden, dass die Richtungslinien der äusseren Kräfte die Mittellinie des Körpers schneiden. Von der eigenen Schwere des Körpers, sofern sie als belastende Kraft berücksichtigt werden soll, wird diese Voraussetzung jedenfalls erfüllt, weil der Schwerpunkt jedes scheibenförmigen Körperelementes, welches von zwei unendlich nahen Querschnitten begrenzt wird, in der Mittellinie liegt.

Damit auch für alle Querschnitte die in Nr. 16 mit R_1 bezeichnete, tangential an die Mittellinie gerichtete Kraft = Null sein könne, muss ferner vorausgesetzt werden, dass die Richtungslinien der äusseren Kräfte die Mittellinie nicht nur überhaupt, sondern rechtwinkelig schneiden. Diese Bedingung wird von den Schwerkräften jener scheibenförmigen Körperelemente nur dann erfüllt, wenn die Mittellinie in einer horizontalen Ebene liegt; ist dies nicht der Fall, so werden in diesem Capitel die Schwerkräfte jener Körperelemente, wenn überhaupt, nur mit ihren zur Mittellinie senkrechten Componenten berücksichtigt, während die längs der Mittellinie gerichteten Componenten vernachlässigt werden.

Wäre nun aber die Mittellinie eine Curve, so würden trotz der gemachten Voraussetzungen die Kräfte R_1 noch nicht für alle Querschnitte = Null sein können, und muss deshalb noch vorausgesetzt werden, dass die Mittellinie eine gerade Linie sei. Die in diesem Capitel enthaltenen Resultate beziehen sich also nur auf

gerade stabförmige Körper,
deren gerade Mittellinie oder Axe von den Richtungslinien der äusseren Kräfte rechtwinkelig geschnitten wird, bevor die Biegung eintritt. Durch diese Biegung geht freilich die materiell gedachte Axe in eine Curve über, welche die elastische Linie genannt wird. Damit also alle vorgenannte Voraussetzungen, welche sich auf die ursprüngliche Form des Körpers beziehen, ohne wesentlichen Fehler auch für den durch die Biegung eintretenden Gleichgewichtszustand des belasteten Körpers gelten, worauf es eben ankommt, wird endlich noch vorausgesetzt, dass die Biegung sehr gering sei, derart, dass alle Tangenten der elastischen Linie mit der Axe des unbelasteten Körpers sehr kleine Winkel bilden.

Die primären belastenden Kräfte ändern gewöhnlich ihre Richtung nicht mit der Biegung des Körpers, insbesondere natürlich nicht, wenn sie z. B. Schwerkräfte sind. Die secundären Widerstandskräfte der Stützpunkte dagegen, welche auch zu den belastenden oder äusseren Kräften gehören, erfahren streng genommen durch die Biegung eine Aenderung ihrer Richtung und entsprechend auch eine solche ihrer Grösse, indem sie immer senkrecht zur Körperoberfläche gerichtet bleiben (abgesehen von der Reibung); entsprechend der Voraussetzung einer nur sehr unbedeutenden Biegung dürfen aber auch diese Widerstandskräfte senkrecht zur Axe des unbelasteten Körpers gerichtet angenommen werden.

39. — Wenn zwischen zwei unendlich nahen Querschnitten F und F_1 nicht etwa eine äussere Kraft von endlicher Grösse angreift, so ist der Voraussetzung entsprechend, dass die Richtungslinien der äusseren Kräfte des Körperelementes FF_1 dessen Mittellinie OO_1 rechtwinkelig schneiden, ihre Momentensumme in Beziehung auf jede durch O gehende Axe im Querschnitte F unendlich klein zweiter Ordnung; die Relation (cf. Nr. 17)

$$\frac{dM}{ds} = R\sin(\beta-\alpha)$$

gilt deshalb auch mit Rücksicht auf die äusseren Kräfte, d. h. es ist $R\sin(\beta-\alpha)$ das wahre Mass der Schnelligkeit, womit sich M vom Querschnitte F zum Querschnitte F_1 im Abstande $OO_1 = ds$ ändert. Dabei ist α der Winkel, unter dem die Kraft R, β derjenige, unter welchem die Axe des Paares M gegen die Richtung des Krümmungsradius der elastischen Linie im Punkte O geneigt ist, beide Winkel vom Krümmungsradius aus im Sinne einer durch die Richtung O_1O als Axe repräsentirten, d. h. im Sinne einer rechtläufigen Drehung genommen von der Seite desjenigen Körpertheils aus gesehen, an welchem die durch R und M ersetzten äusseren Kräfte angreifen.

40. — Durch den Umstand allein, dass die Normalspannungen in den sämmtlichen Flächenelementen eines Querschnitts sich auf ein Kräftepaar müssen reduciren lassen, dessen Ebene parallel der Ebene von M und dessen

Moment $= M$ ist, ist das Vertheilungsgesetz dieser Spannungen im Querschnitte noch nicht bestimmt, und es wird deshalb eine Annahme in dieser Beziehung zu Hülfe genommen, welche darin besteht, dass die materiellen Querschnitte auch bei der Biegung genaue Ebenen und zur elastischen Linie senkrecht, dass sie mithin auch die Querschnitte des gebogenen Körpers bleiben, dessen Mittellinie eben die elastische Linie ist. Streng genommen ist diese Annahme zwar nur mit derjenigen Annäherung zulässig, mit welcher von der Verschiebung der Querschnitte, nämlich von der Wirkung der Kräfte R abstrahirt wird; indessen werden die Normalspannungen selbst dadurch kaum berührt, weil diese nicht sowohl von den Krümmungen der Querschnitte an und für sich, als vielmehr von dem Unterschiede dieser Krümmungen für zwei unendlich nahe benachbarte Querschnitte abhängen.

Sind nun O und O_1 zwei unendlich nahe Punkte der elastischen Linie, F und F_1 die entsprechenden Querschnitte des gebogenen Körpers, so fallen dieselben in die Normalebenen der Punkte O und O_1 der elastischen Linie und schneiden sich in der Krümmungsaxe des Punktes O. Diejenige Gerade im Querschnitte F, welche durch seinen Schwerpunkt O geht und mit der Krümmungsaxe des Punktes O der elastischen Linie parallel ist, heisse die Biegungsaxe des Querschnitts F.*) Der Ort der Biegungsaxen aller Querschnitte heisse die elastische Fläche; der Ort aller Tangenten der elastischen Linie heisse die Biegungsfläche. Die elastische Linie ist hiernach die Durchschnittslinie der elastischen und der Biegungsfläche; die Biegungsaxen sind senkrecht zur Biegungsfläche in den Punkten der elastischen Linie.

Theilt man die Körperscheibe zwischen F und F_1 durch eine Schaar von Kreiscylinderflächen, welche alle die Krümmungsaxe zur geometrischen Axe haben, und durch eine Schaar von Ebenen, welche zu dieser Axe senkrecht sind, in unendlich kleine Elemente 3ter Ordnung, so haben je zwei derselben, die zwischen denselben aufeinander folgenden Cylinderflächen liegen, gleiche Länge nach der Richtung OO_1, und da diese Längen auch vor der Biegung gleich waren, so folgt, dass in allen Punkten eines Querschnitts, welche in einer mit der Biegungsaxe parallelen Geraden liegen, die Ausdehnung ε gleich gross ist. Dasselbe gilt von den Spannungen σ, wenn von solchen Normalspannungen abstrahirt wird, die nach Richtungen senkrecht zu OO_1 stattfinden (cf. Nr. 16); denn dann ist $\sigma = E\varepsilon$, unter E den Elasticitätsmodul nach der Längenrichtung des Körpers verstanden.

Diejenige mit der Biegungsaxe parallele Gerade des Querschnitts F, in deren Punkten ε und $\sigma =$ Null sind, heisst die neutrale Axe dieses Querschnitts.

*) Sie ist dieselbe Gerade, welche nach Saint-Vénant in der Theorie der Curven doppelter Krümmung die Binormale des Punktes O der Curve (hier der elastischen Linie) genannt wird. Sie ist ebenso wie die Normalebenen F und F_1 und also auch deren Durchschnittslinie, die Krümmungsaxe, senkrecht zur Schmiegungsebene des Punktes O der Curve.

41. — Ist ε die Ausdehnung, σ die Spannung in einem Punkte des Querschnitts F, dessen Entfernung von der Biegungsaxe $= \eta$ ist (positiv auf der convexen, negativ auf der concaven Seite der elastischen Fläche), ε_0 die Ausdehnung in allen Punkten der Biegungsaxe und ϱ der Krümmungshalbmesser der elastischen Linie im Schwerpunkte O von F (= der Entfernung der Krümmungsaxe von der Biegungsaxe), so ist:

$$\varepsilon = \varepsilon_0 + (1 + \varepsilon_0)\frac{\eta}{\varrho}$$

oder mit Vernachlässigung des kleinen Gliedes 2ter Ordnung:

$$\varepsilon = \varepsilon_0 + \frac{\eta}{\varrho};\ \sigma = E\varepsilon.$$

Hierdurch ist σ für jeden Punkt eines Querschnitts bestimmt, wenn ausser den betreffenden Werthen von ε_0 und ϱ auch die Lage der Biegungsaxe im Querschnitte bekannt ist.

Im Allgemeinen kann die Biegungsaxe mit der Axe des Paares M einen Winkel bilden, welcher von der Form des Querschnitts und von der Lage der letztgenannten Axe in demselben abhängt. Zerschnitte die durch O gehende Ebene des Paares M den Querschnitt F in zwei symmetrische Hälften, so fiele die Biegungsaxe mit der Axe des Paares M zusammen und die Schmiegungsebene des Punktes O der elastischen Linie mit der Ebene von M. Damit dasselbe für alle Querschnitte gelte, wird zunächst die folgende Voraussetzung gemacht, welche in den meisten Fällen der Praxis sich genau oder annäherungsweise erfüllt findet:

A. Die Richtungslinien aller äusseren Kräfte liegen in einer Ebene, welche Symmetrieebene des geraden stabförmigen Körpers ist.

42. — Diese Ebene — die Kraftebene — ist die gemeinschaftliche Ebene aller Paare M und die gemeinschaftliche Schmiegungsebene aller Punkte der elastischen Linie. Letztere ist also eine ebene Curve, die Biegungsfläche ist Biegungsebene und fällt mit der Kraftebene zusammen. Die Biegungsaxen und die neutralen Axen aller Querschnitte sind zur gemeinschaftlichen Biegungs- und Kraftebene senkrecht, und die elastische Fläche ist eine Cylinderfläche.

Der in Nr. 39 mit β bezeichnete Winkel ist jetzt $= 90^\circ$, der Winkel $\alpha = 0$ oder 180°, jenachdem R die Richtung des Krümmungsradius oder die entgegengesetzte Richtung hat; es ist also

$$\frac{dM}{ds} = \pm R,$$

und in denjenigen Querschnitten, für welche $R = 0$ ist, ist M ein Maximum oder Minimum, und zwar ein Maximum dann, wenn $\frac{dM}{ds}$ vom Positiven zum Negativen durch Null geht, d. h. wenn die Kraft R, nachdem sie in den vorhergehenden Querschnitten die Richtung des Krümmungsradius hatte, in die entgegengesetzte Richtung übergeht.

Die elastische Linie wird im Folgenden auf ein rechtwinkeliges Coordinatensystem bezogen, dessen Abscissenaxe, wo nicht eine andere Lage ausdrücklich bemerkt ist, in der ursprünglich geraden Axe des Stabes liegen, jedenfalls derselben parallel sein soll; die Ordinatenaxe ist dann stets parallel den Richtungslinien der äusseren Kräfte. Zur Erleichterung des Ausdrucks mögen die Letzteren bei der Darstellung der betreffenden Gesetze und Formeln vertical gerichtet angenommen werden; die Abscissenaxe ist dann horizontal, die Ordinatenaxe vertical, und zwar sei sie abwärts gerichtet positiv. Sind dann die primären äusseren Kräfte Schwerkräfte, so haben sie die Richtung der positiven Ordinatenaxe, und es ist in den Querschnitten $R = 0$ das Moment M ein Maximum oder Minimum, jenachdem an den betreffenden Stellen die elastische Linie concav nach Oben oder nach Unten ist.

Natürlich gelten die unter dieser Voraussetzung gefundenen Gesetze auch für jede nicht horizontale Lage der ursprünglich geraden Stabaxe, sofern wenigstens die eigene Schwere des Stabes entweder ganz vernachlässigt oder nur mit ihrer zur Axe senkrechten Componente berücksichtigt wird.

Im Allgemeinen wird die Abscissenaxe als x-Axe, die Ordinatenaxe als y-Axe angenommen und die Biegung als so gering vorausgesetzt (cf. Nr. 38), dass ohne wesentlichen Fehler der Krümmungsradius der elastischen Linie:

$$\varrho = \pm \frac{1}{\frac{d^2y}{dx^2}} \text{ statt } \pm \frac{\left[1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}}{\frac{d^2y}{dx^2}}$$

gesetzt werden kann. Entsprechend wird auch statt des Sinus oder der Tangente des Winkels, den die elastische Linie mit der x-Axe bildet, immer dieser Winkel selbst gesetzt.

43. — Ist dF der Inhalt eines der Biegungsaxe im Abstande η parallelen unendlich schmalen Flächenstreifens des Querschnitts F, σ die Spannung in allen Punkten desselben, so folgt aus den Gleichgewichtsbedingungen

$$\int \sigma dF = 0; \int \sigma dF \,.\, \eta = M$$

in Verbindung mit $\sigma = E\left(\varepsilon_0 + \frac{\eta}{\varrho}\right)$ nach Nr. 41:

$$\varepsilon_0 = 0 \text{ und } \frac{EJ}{\varrho} = M,$$

wenn mit J das Trägheitsmoment des Querschnitts in Beziehung auf die Biegungsaxe bezeichnet wird, welches in der Folge kurzweg das Trägheitsmoment des Querschnitts genannt werden soll; es ist

$$J = \int \eta^2 dF$$

d. h. die Summe der Producte aus den Inhalten der Flächenelemente und den Quadraten ihrer Abstände von der Biegungsaxe.

Die Gleichung $\varepsilon_0 = 0$ lehrt, dass die Biegungsaxe mit der neutralen Axe zusammenfällt.

Die Gleichung $\frac{EJ}{\varrho} = M$ dient in Verbindung mit $\frac{1}{\varrho} = \pm \frac{d^2y}{dx^2}$ durch zweifache Integration zur Bestimmung der angenäherten Gleichung der elastischen Linie, sofern J und M bekannte Functionen von x sind. Aus ihr folgt:

$$\sigma = E\frac{\eta}{\varrho} = \frac{M\eta}{J}.^{*)}$$

Die Grösse $\frac{EJ}{\varrho} = M =$ Momentensumme der Spannungen eines Querschnitts in Beziehung auf die Biegungsaxe heisst hinfort kurzweg das **Spannungsmoment** des Querschnitts.

44. — Ist für irgend einen Querschnitt
e' der grösste Werth eines positiven η,
e'' der grösste Absolutwerth eines negativen η,
σ' die grösste Spannung im engern Sinne,
σ'' die grösste Pressung, so ist

$$\sigma' = \frac{Me'}{J}\,;\ \sigma'' = \frac{Me''}{J}\,.$$

Beide Werthe ändern sich im Allgemeinen von einem zum andern Querschnitte, und es darf dabei σ' höchstens $= k'$, σ'' höchstens $= k''$ werden. (Cf. Nr. 20.) Dieser Forderung wird entsprochen, indem man die Verhältnisse so wählt, dass der grössere der beiden Quotienten

$$\frac{max.\,\sigma'}{k'} \text{ und } \frac{max.\,\sigma''}{k''}$$

$= 1$ wird; der Querschnitt, in welchem dies der Fall ist, heisst der **Bruchquerschnitt**.

---

*) Das Resultat des Zusammenfallens der Biegungsaxe und neutralen Axe ist wesentlich falsch für die Querschnitte in der Nähe derjenigen, für welche $M = 0$ ist. Es beruht nämlich wesentlich auf der Gleichung

$$\int \sigma\, dF = 0, \text{ wofür eigentlich } \int \sigma\, dF = R_1$$

gesetzt werden muss, unter R_1 die in Nr. 16 näher bezeichnete positive oder negative Kraft verstanden, welche freilich sehr klein, nämlich dem *sinus* des Neigungswinkels der elastischen Linie gegen die x-Axe proportional ist. Mit Rücksicht hierauf erhält man:

$$\varepsilon_0 = \frac{R_1}{EF}, \text{ während die Gleichung } \frac{EJ}{\varrho} = M$$

unverändert bleibt. Die neutrale Axe erhält aber jetzt den Abstand

$$\eta_0 = -\frac{R\,J}{MF}$$

von der Biegungsaxe, rückt also in denjenigen Querschnitten, für welche $M = 0$ ist, sogar ins Unendliche auf der einen oder anderen Seite je nach dem Vorzeichen von R_1. Für σ erhält man:

$$\sigma = \frac{R_1}{F} + \frac{M\eta}{J}$$

und kann hier das erste Glied trotz seiner Kleinheit das zweite überwiegen in der Nähe der Querschnitte $M = 0$. Weil aber die genauere Kenntniss von σ in diesen Querschnitten ohne praktisches Interesse ist, so ist überhaupt ein praktisches Bedürfniss zur Anbringung der hier bezeichneten Correctionen an den oben unter Nr. 43 angeführten Resultaten nicht vorhanden.

Damit die Zug- und die Druckfestigkeit des Materials in gleichem Masse verwerthet werden, sind die Verhältnisse so zu wählen, dass gleichzeitig

$$\frac{max.\,\sigma'}{k'} = \frac{max.\,\sigma''}{k''} = 1$$

wird, was im Allgemeinen in zwei verschiedenen Querschnitten der Fall sein kann, die dann beide Bruchquerschnitte sind. Besser ist es aber, in jedem einzelnen Querschnitte die Zug- und Druckfestigkeit in gleichem Masse auszunutzen, also für jeden

$$\frac{\sigma'}{k'} = \frac{\sigma''}{k''}$$

zu machen, was dadurch geschieht, dass die Form jedes Querschnittes und seine Lage gegen die Kraftebene der Bedingung

$$\frac{e'}{k'} = \frac{e''}{k''}$$

entsprechend gemacht wird. Dann wird auch in demselben Querschnitte, welcher demnach alleiniger Bruchquerschnitt ist, zugleich

$$\frac{max.\,\sigma'}{k'} = \frac{max.\,\sigma''}{k''} = 1.$$

Immerhin aber würde es im Allgemeinen nur dieser einzige Querschnitt sein, in welchem die Zug- und die Druckfestigkeit des Materials vollständig ausgenutzt werden; damit es in allen der Fall sei und dadurch ein sogenannter Körper von gleichem Widerstande hervorgehe, müsste der Querschnitt entsprechend der Veränderlichkeit von M derart veränderlich gemacht werden, dass in jedem Querschnitte

$$\frac{\sigma'}{k'} = \frac{\sigma''}{k''} = 1, \text{ also } \frac{Me'}{Jk'} = \frac{Me''}{Jk''} = 1$$

ist. Selbst dann wird nur in den äussersten Punkten aller Querschnitte die Widerstandsfähigkeit des Materials vollständig verwerthet, in den übrigen aber um so weniger, je näher sie der Biegungsaxe liegen. Dies ist ein unvermeidlicher Mangel bei einem nur auf Biegungsfestigkeit in Anspruch genommenen stetigen stabförmigen Körper, und es lässt sich die dadurch bedingte Materialverschwendung nur bis zu gewissem Grade vermindern, indem man, soweit es die Umstände gestatten, die Masse des Körpers in möglichst grosser Entfernung von der elastischen Fläche auf beiden Seiten anhäuft, also J möglichst gross macht bei gegebenem F. Bei einem aus einzelnen stabförmigen Theilen zusammengesetzten Träger indessen lässt es sich erreichen, und es ist dies eben der Zweck einer solchen, freilich nur bei grossen Dimensionen (z. B. bei Brückenträgern) sich lohnenden Construction, dass alle Theile fast nur gezogen oder gedrückt werden, dass also in den Querschnitten der einzelnen Theile die Spannungen oder Pressungen fast gleichförmig vertheilt sind und somit die Widerstandsfähigkeit des Materials bei angemessener Grösse der einzelnen Querschnitte fast vollkommen verwerthet wird.

45. — Bei den Fällen der Biegungsfestigkeit, welche im Maschinenbau vorkommen, überhaupt bei beweglichen Constructionen im Gegensatze zu den unbeweglichen des Ingenieur- und Baufachs ist es meistens nöthig, dass die Widerstandsfähigkeit des betreffenden Körpers entweder nur bei der Umkehrung der Kraftrichtungen oder selbst dann ungeändert bleibe, wenn die Kraftebene sich beliebig um die Körperaxe dreht. Der erste Fall (z. B. Zähne von Zahnrädern, Arme von Rädern und Riemenrollen etc.) bedingt Querschnittsformen, welche in Beziehung auf die Biegungsaxe, folglich in Beziehung auf zwei sich rechtwinkelig schneidende Axen symmetrisch sind, da der zur Biegungsaxe senkrechte Schnitt der Kraftebene mit dem Querschnitte hier stets als Symmetrieaxe des letzteren vorausgesetzt wird; im zweiten Falle (z. B. tragende Wellen und Wellzapfen) müssen diesen beiden Symmetrieaxen zudem gleich grosse Trägheitsmomente des Querschnitts entsprechen, so dass also dieses Moment überhaupt constant ist für alle Geraden, welche durch den Schwerpunkt des Querschnitts in seiner Ebene gezogen werden können. In beiden Fällen ist immer $e' = e''$ und muss deshalb, wenn k' nicht $= k''$ ist, auf die gleichmässige Verwerthung der Zug- und Druckfestigkeit des Materials verzichtet werden; es kommt dann nur der kleinere der beiden Werthe k' und k'' als massgebend in Betracht, welcher in der Folge mit k bezeichnet wird, ebenso wie jeder der gleichen Abstände e' und e'' mit e.

Ferner ist es bei einfachen, d. h. nicht aus verschiedenen Theilen zusammengesetzten stabförmigen Körpern theils wegen des natürlichen Vorkommens (insbesondere bei hölzernen Balken), theils mit Rücksicht auf die praktische Herstellung oder wegen gewisser Nebenbedingungen oft nicht möglich oder wenigstens nicht vortheilhaft, eine der theoretisch rationellsten Form eines Körpers von gleichem Widerstande genau oder näherungsweise entsprechende Körperform zu wählen, sondern ist vielmehr die möglichst einfache Form eines geraden stabförmigen Körpers mit **constantem Querschnitte** durch die Umstände vorgezeichnet. In anderen Fällen, namentlich des Maschinenbaues, ist, wenn auch der Querschnitt nicht genau constant sein sollte, doch eine theoretische Berücksichtigung seiner Veränderlichkeit überflüssig. Es wird deshalb im Folgenden dieser Specialfall des constanten Querschnittes einer besonders eingehenden Behandlung unterworfen, um so mehr, als die für ihn geltenden Gesetze auch bei der Berechnung grösserer Träger von veränderlichem Querschnitte als erste Annäherungen gute Dienste leisten.

46. — In dieser und in den folgenden Nummern sind die **Trägheitsmomente** J der am häufigsten vorkommenden und einfacheren Querschnittsformen enthalten; in den Figuren ist mit J die Axe bezeichnet, worauf sich das ebenso bezeichnete Trägheitsmoment bezieht.

Unter den **in Beziehung auf die Biegungsaxe symmetrischen Querschnittsformen** ist

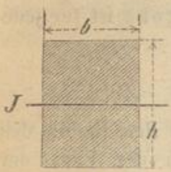

Fig. 1.

das **Rechteck** (Fig. 1) die einfachste; dafür ist:

$$J = \frac{bh^3}{12};\ e = \frac{h}{2}.$$

Um bei gegebenem Inhalte F des Querschnitts die Function

$$\frac{J}{e} = \frac{bh^2}{6} = F \cdot \frac{h}{6}$$

möglichst gross zu machen, muss h möglichst gross, also b entsprechend klein gemacht werden; damit aber diese Vergrösserung von $\frac{J}{e}$ nicht auf Kosten der nöthigen Widerstandsfähigkeit gegen die zufällige Einwirkung von Seitenkräften geschehe, empfehlen sich noch mehr die folgenden vom Rechtecke abgeleiteten Querschnittsformen:

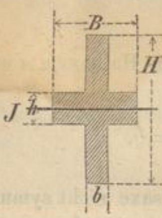

Fig. 2.

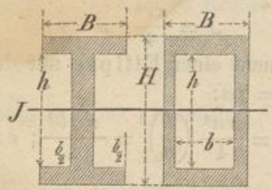

Fig. 3.

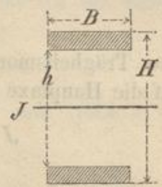

Fig. 4.

Kreuzförmiger Querschnitt (Fig. 2):

$$J = \frac{bH^3 + (B-b)h^3}{12};\ e = \frac{H}{2}.$$

Doppelt-Tförmiger und hohler rechteckiger Querschnitt (Fig. 3):

$$J = \frac{BH^3 - bh^3}{12};\ e = \frac{H}{2}.$$

Doppelt-rechteckiger Querschnitt (Fig. 4), wobei eine Verbindung beider Theile durch Verstrebung vorausgesetzt ist, deren geringer Einfluss auf das Trägheitsmoment des resultirenden Querschnitts vernachlässigt wird:

$$J = \frac{B(H^3 - h^3)}{12};\ e = \frac{H}{2}.$$

Bei einem rechteckigen Balken von Holz, der aus einem runden Stamme geschlagen werden soll, ist das erreichbare Maximum der Function $\frac{J}{e}$ ein durch jene Bedingung beschränktes, und die Aufgabe kommt darauf hinaus, in einem Kreise vom Durchmesser d ein Rechteck so zu zeichnen, dass, unter b die kleinere und unter h die grössere Seite verstanden, die Function bh^2 ein Maximum wird; die Lösung ist:

$$b = d\sqrt{\frac{1}{3}};\ h = d\sqrt{\frac{2}{3}};$$

die Construction des fraglichen Rechtecks ist dadurch bestimmt, dass die Projectionen der Seiten b und h auf die Diagonale d sich wie 1 : 2 verhalten.

47. — Das Trägheitsmoment eines **regulären Polygons** ist für jede in seiner Ebene durch seinen Mittelpunkt gehende Axe:

$$J = \frac{F}{12}\left(3r^2 - \frac{s^2}{2}\right),$$

unter F den Inhalt, s die Seite des Polygons und unter r den Radius des umschriebenen Kreises verstanden; e' und e'' sind je nach der Lage der Biegungsaxe verschieden zwischen den Radien des um- und des einbeschriebenen Kreises als äussersten Grenzen. Bei rotirenden Wellen, wo dergleichen Querschnitte hauptsächlich vorkommen, ist als ungünstigster Fall $e' = e'' = r$ zu setzen.

Mit $s = 0$ erhält man das Trägheitsmoment eines **Kreises** vom Radius r für einen beliebigen Durchmesser:

$$J = \frac{\pi r^4}{4};\ e = r;$$

daraus das Trägheitsmoment einer **Ellipse** mit den Halbaxen a und b, bezogen auf die Hauptaxe $= 2a$:

$$J = \frac{\pi a^4}{4}\left(\frac{b}{a}\right)^3 = \frac{\pi a b^3}{4};\ e = b.$$

48. — Unter den in Beziehung auf die Biegungsaxe nicht symmetrischen Querschnitten ist der **doppelt-Tförmige Querschnitt** der gewöhnlichste und bildet wenigstens die Grundform anderer zusammengesetzterer Formen ähnlichen Charakters. Bei demselben ist mit Rücksicht auf Fig. 5 die Lage der Biegungsaxe bestimmt durch:

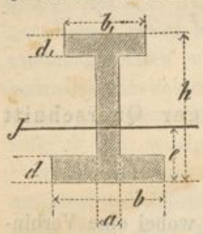

Fig. 5.

$$e = \frac{1}{2}\,\frac{ah^2 + (b-a)d^2 + (b_1-a)\,d_1(2h-d_1)}{ah + (b-a)\ d + (b_1-a)\,d_1};$$

mit $e_1 = h-e,\ f = e-d,\ f_1 = e_1-d_1$ ist dann ferner:

$$J = \frac{1}{3}\left[b e^3 + b_1 e_1{}^3 - (b-a)f^3 - (b_1-a_1)f_1{}^3\right].$$

Mit $b_1 = a$ erhält man hieraus für den **T förmigen Querschnitt** (Fig. 6):

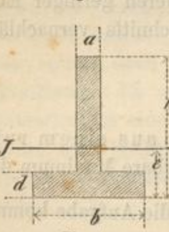

Fig. 6.

$$e = \frac{1}{2}\,\frac{ah^2 + (b-a)d^2}{ah + (b-a)d};$$

$$e_1 = h-e;\ f = e-d;$$

$$J = \frac{1}{3}\left[be^3 + ae_1{}^3 - (b-a)f^3\right].$$

Ist ein solcher Querschnitt durch n Elemente bestimmt, so kann man im Allgemeinen $n-2$ Relationen zwischen denselben willkürlich annehmen und eine weitere der Forderung gemäss ansetzen, dass

$$\frac{e'}{k'} = \frac{e''}{k''}$$

sein soll; hiernach sind alle n Elemente durch eins derselben bestimmt, welches schliesslich davon abhängt, dass $\frac{\sigma'}{k'} = \frac{\sigma''}{k''}$ im Bruchquerschnitte oder bei einem Körper von gleichem Widerstande in allen Querschnitten = 1 sein soll.

49. — Bei Berechnung der Function J für gewisse Querschnittsformen und bei gewissen Lagen derselben gegen die Biegungsaxe ist es oft bequemer, zunächst das Trägheitsmoment $= J_1$ für eine andere Axe zu berechnen, welche der Biegungsaxe im Abstande a parallel ist; die Reduction auf letztere geschieht dann mittels der Gleichung:

$$J = J_1 - Fa^2.$$

Bei Berechnung von J_1 für solche Querschnitte, welche sich als algebraische Summen von Rechtecken und Dreiecken, die mit ihren Grundlinien auf der betreffenden Parallelaxe stehen, betrachten lassen, ist es nützlich zu bemerken, dass das Trägheitsmoment eines Rechtecks bh für seine Grundlinie b:

$$J_1 = \frac{bh^3}{3}$$

und dasjenige eines Dreiecks von der Grundlinie b und Höhe h für seine Grundlinie:

$$J_1 = \frac{bh^3}{12}$$

ist.

Wenn der Querschnitt durch eine empirische oder durch eine sehr complicirte mathematische Curve begrenzt ist, kann zur Berechnung von J irgend eine der bekannten Näherungsformeln zur Berechnung eines bestimmten Integrals (mechanische Quadratur) angewendet werden. Z. B. man theile die Höhe h (cf. Nr. 37) in eine gerade Anzahl gleicher Theile:

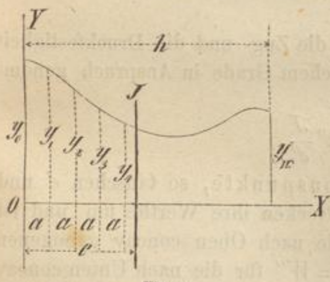

Fig. 7.

$$h = na$$

und messe die Breiten

$$y_0 \; y_1 \; y_2 \; \ldots . \; y_n$$

in den Abständen $0 \;\; a \;\; 2a \; \ldots . \; na$

von der Grundlinie OY (Fig. 7), d. h. von einer der beiden zur Kraftebene senkrechten Geraden, welche den Querschnitt berührend zwischen sich fassen, so ist:

$$F = \frac{a}{3}\left(y_0 + 4y_1 + 2y_2 + 4y_3 + 2y_4 + \ldots + 4y_{n-1} + y_n\right);$$

ferner der Abstand der Biegungsaxe von der Grundlinie:

$$e = \frac{a^2}{3F}\left(4y_1 + 2.2y_2 + 4.3y_3 + 2.4y_4 + \ldots + 4(n-1)y_{n-1} + ny_n\right)$$

und das Trägheitsmoment in Beziehung auf die Grundlinie:

$$J_1 = \frac{a^3}{3}\left(4y_1 + 2.2^2y_2 + 4.3^2y_3 + 2.4^2y_4 + \ldots + 4(n-1)^2y_{n-1} + n^2y_n\right);$$

endlich

$$J = J_1 - Fe^2.$$

Diese Formeln können u. A. zur Berechnung der Function J und der Lage der Biegungsaxe für den Querschnitt einer Eisenbahnschiene und in ähnlichen Fällen Anwendung finden.

I. Gerader stabförmiger Körper von constantem Querschnitte.

50. — Hat in diesem Falle die elastische Linie keine Inflexionspunkte, d. h. ist sie überall nach derselben Seite concav gebogen, so ist der Bruchquerschnitt (cf. Nr. 44) derjenige, für welchen das resultirende Moment der äusseren Kräfte am grössten ist, und der Forderung, dass $max.\ \sigma'$ höchstens $= k'$ und $max.\ \sigma''$ höchstens $= k''$ sei, wird dadurch entsprochen, das $max.\ M$ dem kleineren der beiden Werthe

$$k'\frac{J}{e'} \quad \text{und} \quad k''\frac{J}{e''}$$

gleich gesetzt wird, welcher das Widerstandsmoment des Stabes für den betreffenden Sinn der Biegung genannt und mit W bezeichnet werden möge.

Ist $k' = k'' = k$ oder $e' = e'' = e$, so ist

$$W = k\frac{J}{e},$$

unter e im 1ten Falle den grösseren der Werthe e' und e'',
„ k „ 2ten Falle „ kleineren „ „ k' „ k''
verstanden.

Wird der Forderung entsprochen, dass die Zug- und die Druckfestigkeit des Materials in jedem Querschnitte in gleichem Grade im Anspruch genommen werden sollen, so ist

$$W = k'\frac{J}{e'} = k''\frac{J}{e''}.$$

Hat aber die elastische Linie Inflexionspunkte, so tauschen e' und e'' für die entgegengesetzt gebogenen Stabstrecken ihre Werthe um und ist deshalb das Widerstandsmoment W' für die nach Oben concav gebogenen Stabtheile im Allgemeinen von demjenigen $= W''$ für die nach Unten concav gebogenen Stabtheile verschieden; ist dann $max.\ M'$ der grösste Werth von M für die ersteren, $max.\ M''$ der grösste Werth von M für die letzteren Stabstrecken, so wird der Forderung, dass $max.\ \sigma' = k'$ und $max.\ \sigma'' = k''$ sein soll, dadurch entsprochen, dass der grössere der beiden Quotienten

$$\frac{max.\ M'}{W'} \quad \text{und} \quad \frac{max.\ M''}{W''}$$

$= 1$ gesetzt wird; der betreffende Querschnitt, wo dieser Maximalwerth $= 1$ stattfindet, ist der Bruchquerschnitt.

Ist in diesem Falle $k' = k'' = k$ oder $e' = e'' = e$, so ist

$$W' = W'' = k\frac{J}{e},$$

wenn im 1ten Falle unter e der grössere der beiden Werthe e' und e'', im 2ten Falle unter k der kleinere der beiden Werthe k' und k'' verstanden wird, und der Bruchquerschnitt ist derjenige, für welchen M am grössten ist, einerlei ob daselbst der Stab nach Oben oder nach Unten concav gebogen ist.

Die Bedingung, dass die Zug- und die Druckfestigkeit in gleichem Grade verwerthet werden, erfordert eine entgegengesetzte Lage des Querschnitts gegen die Biegungsaxe in den entgegengesetzt gebogenen Stabstrecken, wodurch die Kenntniss der Inflexionspunkte von constructiver Wichtigkeit wird; auch in diesem Falle ist $W' = W''$ und der Bruchquerschnitt derjenige, für welchen M am grössten ist.

Bei den im Folgenden betrachteten besonderen Fällen wird vorausgesetzt, dass alle primären Kräfte in gleichem Sinne gerichtet seien: vertical abwärts, wenn der Stab horizontal liegend gedacht wird.

a. Der Stab ist am einen Ende befestigt, am anderen frei.

51. — A sei das befestigte, B das freie Ende des Stabes, die Länge $AB = l$.

M ist am grössten im Querschnitte bei A. Hat der Stab eine über seiner ganzen Länge gleichförmig vertheilte Last Q und ausserdem eine bei B concentrirte Last P zu tragen, so ist:

$$max.\,M = \left(P + \frac{Q}{2}\right) l.$$

Sind ausser der gleichförmig vertheilten Last Q
verschiedene Lasten $P_1 \quad P_2 \quad P_3 \quad \ldots$ vorhanden, welche
in den Abständen $a_1 \quad a_2 \quad a_3 \quad \ldots$ vom Ende A angreifen,
so ist:

$$max.\,M = \Sigma(Pa) + \frac{Ql}{2}.$$

52. — Wellzapfen.

Ist l die Länge, d der Durchmesser eines cylindrischen Zapfens, der durch die rechtwinkelig gegen die Zapfenaxe gerichtete Reaction P des Lagers auf Biegungs-Festigkeit in Anspruch genommen wird, so darf P als gleichförmig auf der Länge l vertheilt vorausgesetzt werden, und erhält man dann mit $l = \alpha d$ durch Gleichsetzen

von $max.\,M = \dfrac{P.\alpha d}{2}$

mit $W = k\dfrac{J}{e} = k\dfrac{\pi d^3}{32}$:

$$d = \sqrt{\frac{16\alpha}{\pi k}}\,.\,\sqrt{P} = 2{,}26\sqrt{\frac{\alpha P}{k}}.$$

Dabei kann, wenn n die Umdrehungszahl pro Minute ist,

$$\alpha = 1{,}2 + \frac{n}{60d}$$

bis zu $\alpha = 3$ gesetzt werden, indem namentlich, je grösser n, eine desto grössere Auflagerfläche zur Verhütung übermässiger Erhitzung und Abnutzung des Zapfens erforderlich ist. Bei mässig schnellem Gange, etwa bis $n = 60$, kann auch übereinstimmend

$$\alpha = 1{,}2 + \frac{1}{d}$$

genommen werden und mit Redtenbacher

$$d = 0{,}18\sqrt{P} \text{ für gusseiserne Zapfen, entsprechend } k = 189 + \frac{157}{d},$$

$$d = 0{,}12\sqrt{P} \text{ „ schmiedeeiserne „ „ } k = 424 + \frac{354}{d}.$$

Für Zapfen von Stahl kann unter solchen Umständen gesetzt werden:

$$d = 0{,}09\sqrt{P}, \text{ entsprechend } k = 786 \text{ bei } \alpha = 1{,}25.$$

53. — Radzähne.

Ist a die Zahndicke im Theilkreise,
l die Länge, nach der Richtung des Radius gemessen,
b die Breite des Zahns = der Radbreite,

so ist unter der Voraussetzung, dass der Druck P*) in der äusseren Kante des Zahns angreift, gleichförmig in der ganzen Breite b vertheilt und senkrecht zur Länge l gerichtet, dass auch die Zahndicke an der Wurzel nicht wesentlich von a verschieden ist, die der Gleichung

$$Pl = k\frac{ba^2}{6}$$

entsprechende Zahndicke: $a = \sqrt{\frac{6\lambda}{k\beta}} \cdot \sqrt{P},$

wenn $l = \lambda a$, $b = \beta a$ gesetzt wird. Nimmt man für gusseiserne Zähne $\lambda = 1{,}5$ und $k = 90$, so wird

$$a = \sqrt{\frac{P}{10\beta}}$$

und mit $\beta = 6$ als Mittel für gewöhnliche Transmissionen:**)

$$a = 0{,}13\sqrt{P}.$$

Wenn hölzerne Zähne mit eisernen zusammen arbeiten, so kann für erstere bei gleichen Werthen von l und b die Dicke $a_1 = 1{,}5\,a$ gesetzt werden, entsprechend $k_1 = \left(\frac{2}{3}\right)^2 . 90 = 40.$

Uebrigens kann sich bei ungenauer Lagerung der Wellen, mangelhafter Ausführung der Räder oder beim Dazwischenkommen eines kleinen Körpers der noch ungünstigere Fall ereignen, dass der Druck P sich an einer Zahnecke concentrirt und dieselbe abzubrechen droht, am wahrscheinlichsten in einer Bruchfläche,

---

*) Aus der Anzahl der übertragenen Pferdestärken $= N$, der Umdrehungszahl pro Minute $= n$ und dem Theilrissradius $= r$ Centimeter findet man

$$P = 71620\,\frac{N}{rn}\text{ Kilogr.},$$

wenn ungünstigsten Falls nur ein Paar Zähne in gegenseitiger Berührung befindlich vorausgesetzt wird.

**) Bei Maschinen, die durch Menschenkraft mit geringer Geschwindigkeit bewegt werden (z. B. Winden), ist β kleiner bis $= 4$, bei sehr schnell laufenden Rädern aber grösser bis $= 8$ zu setzen.

$N = \frac{2r\pi}{100} \frac{n}{60} \cdot P \cdot 75$ | $P = \frac{N \cdot 100 \cdot 60}{2r\pi n \cdot 75}$

welche unter 45° gegen die Stirnfläche des Zahns geneigt ist. Diesem Falle entspricht die Maximalspannung

$$\frac{\beta}{2\lambda}k = 2k \text{ für } \lambda = 1{,}5 \text{ und } \beta = 6,$$

wodurch der nur kleine Werth $k = 90$ gerechtfertigt ist.

Aus der Zahndicke a findet man die Theilung der Räder

bei blos eisernen Zähnen etwas $> 2a$, etwa $= 2{,}1a$,
bei eisernen mit hölzernen „ $> 2{,}5a$, „ $= 2{,}65a$.

54. — Wenn der am Ende A befestigte Stab eine am freien Ende B concentrirte Last P nebst einer auf seiner ganzen Länge $AB = l$ gleichförmig vertheilten Last Q zu tragen hat, so findet man die angenäherte Gleichung der elastischen Linie für das aus Fig. 8 ersichtliche Coordinatensystem durch zweimalige Integration der Differentialgleichung:

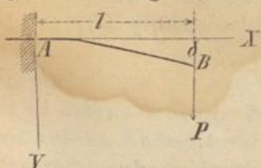

Fig. 8.

$$EJ\frac{d^2y}{dx^2} = P(l-x) + Q\frac{(l-x)^2}{2l}$$

(cf. Nr. 43) wie folgt:

$$EJ.y = P\frac{x^2(3l-x)}{6} + Q\frac{x^2(6l^2-4lx+x^2)}{24l};$$

daraus mit $x = l$ die Durchbiegung am Ende B, d. h. den Maximalwerth von y:

$$\delta = \frac{P + \frac{3}{8}Q}{EJ}\,\frac{l^3}{3}.$$

$$\text{Mit } Q = o \text{ ist } \delta = \frac{P}{EJ}\frac{l^3}{3} = \frac{2}{3}l\beta$$

$$\text{„ } P = o \text{ „ } \delta = \frac{Q}{EJ}\frac{l^3}{8} = \frac{3}{4}l\beta,$$

wenn β den Winkel bedeutet, unter welchem die Tangente der elastischen Linie bei B gegen die x-Axe geneigt ist.

55. — Wenn der Stab AB nach irgend einem anderen Gesetze belastet ist, wobei im Allgemeinen von A nach B gerechnet

an gewissen Stellen $C_1 \quad C_2 \quad C_3 \ldots$
in den Abständen $a_1 \quad a_2 \quad a_3 \ldots$ von A eine Stetigkeitsunterbrechung der Belastung stattfindet, so erfährt die elastische Linie daselbst ensprechende Unterbrechungen ihrer Stetigkeit, und es haben die einzelnen Strecken AC_1, C_1C_2, C_2C_3 ... ihre besonderen Gleichungen, welche auf folgende Weise gefunden werden, wenn

bei $C_1 \quad C_2 \quad C_3 \ldots$
mit $\gamma_1 \quad \gamma_2 \quad \gamma_3 \ldots$ die Neigungswinkel der elastischen Linie gegen AX
und mit $\delta_1 \quad \delta_2 \quad \delta_3 \ldots$ die betreffenden Ordinaten oder Durchbiegungen bezeichnet werden.

Bei gegebener Belastung und gegebenem Querschnitte ergiebt sich aus der Momentengleichung

$$\frac{EJ}{\varrho} = EJ\frac{d^2y}{dx^2} = M \text{ (cf. Nr. 43)}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \text{einer bekannten Function } f(x),$$

welche aber für die verschiedenen Strecken AC_1, C_1C_2 . . . verschieden ist. Ist nun für die Strecke AC_1

$$\frac{d^2y}{dx^2} = f_1(x), \text{ so folgt daraus durch Integration:}$$

$$\frac{dy}{dx} = \varphi_1(x), \text{ Constante bestimmt durch: } x = 0,\ \frac{dy}{dx} = 0;$$

$$y = \psi_1(x), \quad \text{"} \quad \text{"} \quad \text{"} \quad x = 0,\ y = 0;$$

daraus mit $x = a_1 : \gamma_1 = \varphi_1(a_1)$; $\delta_1 = \psi_1(a_1)$.

Ist dann für die zweite Strecke C_1C_2:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = f_2(x), \text{ so folgt für dieselbe:}$$

$$\frac{dy}{dx} = \varphi_2(x), \text{ Constante bestimmt durch } x = a_1,\ \frac{dy}{dx} = \gamma_1;$$

$$y = \psi_2(x), \quad \text{"} \quad \text{"} \quad \text{"} \quad x = a_1,\ y = \delta_1;$$

daraus mit $x = a_2$: $\gamma_2 = \varphi_2(a_2)$; $\delta_2 = \psi_2(a_2)$ u. s. w.

56. — Eine **Stetigkeitsunterbrechung der Belastung** an einer gewissen Stelle C im Abstande a von A rührt entweder davon her, dass daselbst eine Kraft P von endlicher Grösse angreift, oder davon, dass die stetig vertheilte Belastung $= p$ pro Längeneinheit sich daselbst plötzlich um einen endlichen Werth Δp ändert. Im Ausdrucke von M kommt in Folge dessen beim Passiren des Querschnitts C, wenn man von B nach A fortschreitet,

$$\text{im ersten Falle das Glied } P(a-x)$$

$$\text{" zweiten " " "} \pm \Delta p \frac{(a-x)^2}{2}$$

hinzu, und es ändert sich also bei C

$$\text{im ersten Falle } \frac{dM}{dx},$$

$$\text{" zweiten " } \frac{d^2M}{dx^2}$$

um eine endliche Grösse, entsprechend einer Stetigkeitsunterbrechung der 2ten resp. 3ten Ordnung von $M = EJ\frac{d^2y}{dx^2}$, also der 4ten resp. 5ten Ordnung von y.

Diese Bemerkung gilt für jede Art der Unterstützung oder Befestigung des Stabes.

b. Der Stab ist an beiden Enden unterstützt oder befestigt.

57. — Dieser Fall schliesst die 3 Specialfälle in sich, dass der Stab AB an beiden Enden nur gestützt, oder am einen Ende gestützt und am anderen befestigt, oder endlich an beiden Enden befestigt ist. Sind

A und B die durch die primären belastenden Kräfte hervorgerufenen Widerstände der Stützen oder Befestigungen an den gleich bezeichneten Stabenden,

$[A]$ und $[B]$ die in den äussersten Querschnitten daselbst hervorgerufenen Spannungsmomente,

α und β die Winkel, unter welchen die elastische Linie bei A resp. B gegen die gerade Verbindungslinie AB ihrer Endpunkte geneigt ist,

so ist $[A]$ oder $[B] = 0$, wenn bei A oder B der Stab nur gestützt ist, und es ist deshalb derjenige der 3 genannten Specialfälle, bei welchem der Stab an beiden Enden befestigt ist, der allgemeinste, aus welchem die beiden anderen durch die Voraussetzung abgeleitet werden können, dass eines der beiden Spannungsmomente $[A]$ und $[B]$ oder dass beide $= 0$ seien.

Umgekehrt kann auf diesen Fall des beiderseits unter beliebigen Winkeln α und β geneigt befestigten Stabes auch der noch allgemeinere Fall zurückgeführt werden, dass zwischen den Stützen oder Befestigungen an den Enden des Stabes sich noch eine beliebige Zahl von Zwischenstützen befindet: cf. Nr. 91—100.

Hinsichtlich der Art der Belastung des Stabes sind unendlich viele Fälle möglich, und kann deshalb die Art der Behandlung der betreffenden Aufgaben (ähnlich wie in Nr. 55) im Allgemeinen nur angedeutet werden: cf. Nr. 88.

Specieller ausgeführt wird der Fall, dass die Belastung in einer gleichförmig auf der ganzen Länge $AB = l$ vertheilten Last $Q = pl$ und in solchen Kräften $P_1\, P_2 \ldots$ besteht, welche in gewissen Punkten $C_1\, C_2 \ldots$ concentrirt angreifen, ein Fall, welcher seinerseits wieder auf den noch einfacheren zurückgeführt wird, dass ausser der gleichförmig vertheilten Last Q nur eine einzige solche in einem Punkte C concentrirte Last P vorhanden ist.

Der Stab wird dabei horizontal liegend gedacht, während die primären Kräfte wie Schwerkräfte lothrecht wirkend vorausgesetzt werden; die unter dieser Voraussetzung entwickelten Formeln gelten allgemein für den Fall, dass alle primären Kräfte in gleichem Sinne gerichtet sind, falls nur diese Richtung überall der lothrechten und die geneigte Richtung der Stabaxe der horizontalen Richtung substituirt wird.

58. — Die elastische Linie AB ist jetzt im Allgemeinen nicht mehr wie im vorigen Falle sub **a.** in ihrer ganzen Erstreckung nach derselben Seite, sondern theilweise nach Oben, theilweise nach Unten concav gekrümmt.

Dieser entgegengesetzen Krümmung soll hinfort auch ein **entgegengesetztes Vorzeichen des Spannungsmomentes** $\frac{EJ}{\varrho} = M$ entsprechen, und zwar wird dasselbe positiv oder negativ gesetzt, jenachdem die elastische Linie an der bestreffenden Stelle nach Oben oder nach Unten concav gekrümmt ist. Das so algebraisch verstandene Spannungsmoment des Querschnitts X im Abstande x vom Ende A des Stabes wird mit $[X]$ bezeichnet.

X bezeichne zugleich die Resultante der äusseren Kräfte für den gleich bezeichneten Querschnitt, d. h. die algebraische Summe der äusseren Kräfte incl. des Widerstandes A, welche auf das Stück AX des Stabes wirken, und es werde auch diese **Kraft X algebraisch verstanden**, nämlich positiv oder negativ gesetzt, jenachdem sie aufwärts oder abwärts gerichtet ist.

Hiernach lässt sich die Gleichung

$$\frac{dM}{ds} = \pm R \text{ (cf. Nr. 42)},$$

weil absolut genommen $R = X\frac{dx}{ds}$ ist, auch so schreiben:

$$\frac{d[X]}{dx} = X,$$

und sie ist nicht nur mit Rücksicht auf die absoluten Werthe, sondern *auch* mit Rücksicht auf die Vorzeichen richtig, weil R die Richtung gegen den Krümmungsmittelpunkt oder die entgegengesetzte Richtung hat, jenachdem die Vorzeichen von $[X]$ und X gleich oder entgegengesetzt sind.

In derselben Weise sind nun auch die in Nr. 57 bezeichneten Widerstandskräfte A und B positiv oder negativ, jenachdem sie aufwärts oder abwärts gerichtet sind, desgl. die Spannungsmomente $[A]$ und $[B]$ positiv oder negativ, jenachdem die elastische Linie an den betreffenden Enden nach Oben oder nach Unten concav gekrümmt ist.

Was die in der vorigen Nummer noch bezeichneten Winkel α und β betrifft, so wird ihre Definition dahin ergänzt, dass α gebildet werden soll von der Richtung AB mit der gegen B hin gerichteten Tangente des Punktes A der elastischen Linie, β von der Richtung BA mit der gegen A hin gerichteten Tangente des Punktes B der elastischen Linie, und dass endlich beide **Winkel α und β positiv oder negativ** gesetzt werden, jenachdem sie unterhalb oder oberhalb der Geraden AB liegen.

1. Der Stab hat eine gleichförmig auf seiner ganzen Länge vertheilte und eine an einer beliebigen Stelle concentrirte Last zu tragen.

59. — Die gleichförmig vertheilte Last sei im Ganzen $= Q$, pro Längeneinheit des Stabes $= p$, also $Q = pl$. Die Kraft P greife in einem Punkte C der elastischen Linie an, dessen Abstände von den Endpunkten A und B $= a$ und b sind (Fig. 9).

Die Strecke $AC = a$ der elastischen Linie wird auf ein Coordinatensystem bezogen, dessen Anfangspunkt A, dessen x-Axe AB und dessen z-Axe die Lothrechte durch A ist.

X mit den Coordinaten x, z ist ein beliebiger Punkt dieser Strecke, und es wird mit

X zugleich die resultirende Kraft, mit

$[X]$ das Spannungsmoment für den betreffenden Querschnitt bezeichnet. (Cf. Nr. 58.)

Die Strecke $BC = b$ der elastischen Linie wird auf ein Coordinatensystem bezogen, dessen Anfangspunkt B, dessen y-Axe BA und dessen z-Axe die Lothrechte durch B ist.

Y mit den Coordinaten y, z ist ein beliebiger Punkt dieser Strecke, und es wird mit

Y zugleich die resultirende Kraft, mit

$[Y]$ das Spannungsmoment für den betreffenden Querschnitt bezeichnet, bezogen auf diejenigen äusseren Kräfte, welche von B bis Y den Stab angreifen.

Es sei ferner γ der spitze Winkel, unter welchem die elastische Linie im Punkte C gegen die Geraden AB geneigt ist, positiv oder negativ, jenachdem daselbst $\frac{dz}{dx}$ positiv oder negativ,

also $\frac{dz}{dy}$ negativ oder positiv ist;

δ sei die z-Coordinate dieses Punktes C.

60. — Ausser den Punkten A, B und C sind noch gewisse andere ausgezeichnete Punkte der elastischen Linie von besonderem Interesse, nämlich die relativen Bruchpunkte, die Inflexionspunkte und die Punkte grösster Durchbiegung.

Die relativen Bruchpunkte sind diejenigen, für welche in den zugehörigen Querschnitten M ein relatives Maximum, d. h. grösser als in den zunächst benachbarten Querschnitten ist. Liegt ein solcher Punkt an einer Stelle, wo nicht eine Kraft von endlicher Grösse angreift (hier also nicht in A, B oder C), so ist er charakterisirt durch $R = 0$, vorausgesetzt, dass an dieser Stelle die elastische Linie nach Oben concav gebogen ist (cf. Nr. 42). Im vorliegenden Falle kann es nur einen solchen mittleren relativen Bruchpunkt geben; liegt er in der Strecke AC, so dass er also durch $X = 0$ bestimmt ist, so sei er mit X_0 und sein Abstand von A mit x_0, liegt er aber in der Strecke BC an der durch $Y = 0$ bestimmten Stelle, so sei er mit Y_0 und sein Abstand von B mit y_0 bezeichnet. Er kann indessen auch im Punkte C liegen, wenn nämlich sowohl X für alle Punkte zwischen A und C, als Y für alle Punkte zwischen B und C positiv ist, einen positiven Werth auch des Spannungsmomentes $[C]$ vorausgesetzt.

Ausserdem sind auch die Endpunkte A und B relative Bruchpunkte, wenn daselbst der Stab nicht blos gestützt, sondern befestigt ist und wenn zudem A und $[A]$ resp. B und $[B]$ entgegengesetzte Vorzeichen haben.

Inflexionspunkte, in welchen der Sinn der Krümmung der elastischen Linie sich umkehrt, und welche durch ein Maximum der Neigung der elastischen Linie oder durch $\varrho = \infty$, also $M = 0$ charakterisirt sind, kann es hier im Allgemeinen 2 geben, entweder einen in AC, den andern in BC, oder auch beide in einer dieser beiden Strecken. Ein Inflexionspunkt in der Strecke AC, welcher sonach durch $[X] = 0$ bestimmt ist, sei mit X_1 und sein Abstand von A mit x_1, ein solcher in der Strecke BC, bestimmt durch $[Y] = 0$, sei mit Y_1 und sein Abstand von B mit y_1 bezeichnet.

Punkte grösster Durchbiegung oder grösster Abweichung von der Geraden AB, charakterisirt dadurch, dass die elastische Linie in ihnen eine horizontale Tangente hat, kann es möglicherweise 3 geben, wenn die Winkel α und β beide negativ sind. Haben α und β entgegengesetzte Zeichen, so giebt es 2 solche Punkte, einen Punkt grösster Erhebung und einen solchen grösster Senkung; sind α und β beide positiv, so giebt es nur einen Punkt grösster Senkung. Liegt ein solcher Punkt in der Strecke AC, so dass er durch $\frac{dz}{dx} = 0$ bestimmt ist, so sei er mit X' und sein Abstand von A mit x', liegt er in BC, so dass er durch $\frac{dz}{dy} = 0$ bestimmt ist, so sei er mit Y' und sein Abstand von B mit y' bezeichnet.

Der Werth einer grössten Durchbiegung, d. h. ein Maximum oder Minimum von z wird mit δ' bezeichnet.

Uebersichtlich zusammengefasst und bezogen beispielsweise auf die Strecke AC der elastischen Linie ist sonach

der höchstens einfache mittlere relative Bruchpunkt,
" " zweifache Inflexionspunkt,
" " dreifache Punkt grösster Durchbiegung

beziehungsweise charakterisirt durch:

$$X = 0;\ [X] = max. \text{ oder } min.$$

$$[X] = 0;\ \frac{dz}{dx} = \quad " \quad " \quad "$$

$$\frac{dz}{dx} = 0;\ z = \quad " \quad " \quad "$$

Die Aufsuchung der Inflexionspunkte wird unterstützt durch Berücksichtigung der Vorzeichen von $[A]$, $[B]$ und $[C]$, die der Punkte grösster Durchbiegung durch Berücksichtigung der Vorzeichen von α, β und γ; entgegengesetzten Zeichen von $[A]$ und $[C]$ oder $[B]$ und $[C]$ entspricht je ein dazwischen liegender Inflexionspunkt, entgegengesetzten Zeichen von α und γ oder gleichen Zeichen von β und γ wenigstens je ein Punkt grösster Durchbiegung.

α. Der Stab ist beiderseits befestigt.

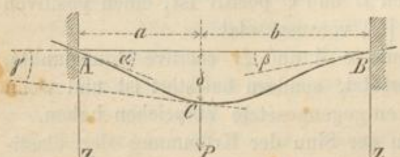

Fig. 9.

61. — Die Winkel α und β sind gegeben, die Kräfte A und B sowie die Spannungsmomente $[A]$ und $[B]$ sind vorläufig unbekannt. (Fig. 9.)

Für irgend einen Punkt X der Strecke AC der elastischen Linie gelten die folgenden Gleichungen, welche durch successive Integration auseinander erhalten werden:

$$\left.\begin{aligned} X &= A - px \\ [X] = -EJ\frac{d^2z}{dx^2} &= [A] + Ax - \frac{px^2}{2} \\ EJ\left(\alpha - \frac{dz}{dx}\right) &= [A]x + \frac{Ax^2}{2} - \frac{px^3}{6} \\ EJ\,(x\alpha - z) &= \frac{[A]x^2}{2} + \frac{Ax^3}{6} - \frac{px^4}{24} \end{aligned}\right\} \dots . (A)$$

und analog für irgend einen Punkt Y der Strecke BC:

$$\left.\begin{aligned} Y &= B - py \\ [Y] = -EJ\frac{d^2z}{dy^2} &= [B] + By - \frac{py^2}{2} \\ EJ\left(\beta - \frac{dz}{dy}\right) &= [B]y + \frac{By^2}{2} - \frac{py^3}{6} \\ EJ\,(y\beta - z) &= \frac{[B]y^2}{2} + \frac{By^3}{6} - \frac{py^4}{24} \end{aligned}\right\} \dots . (B).$$

Vermittels dieser Gleichungen würde man für jeden Punkt der elastischen Linie resp. für jeden Querschnitt des Stabes die Resultante der äusseren Kräfte, das resultirende Moment derselben = dem Spannungsmoment, die Neigung und die Durchbiegung der elastischen Linie unmittelbar berechnen können, wenn die 4 Grössen

$$A \qquad B \qquad [A] \qquad [B]$$

bekannt wären. Um sie zu finden, dienen die zusammengehörigen Werthe:

$$x = a;\ \frac{dz}{dx} = \gamma;\ z = \delta$$

$$\text{und } y = b;\ \frac{dz}{dy} = -\gamma;\ z = \delta,$$

welche, in die je zwei letzten Gleichungen obiger Systeme (A) und (B) eingesetzt, 4 Bestimmungsgleichungen liefern, wodurch in Verbindung mit den beiden Gleichgewichtsbedingungen des ganzen Systems der äusseren Kräfte:

$$A + B = P + p(a + b)$$

$$[A] + Aa - \frac{pa^2}{2} = [B] + Bb - \frac{pb^2}{2}$$

jene 4 Unbekannten nebst den ausserdem in den 4 ersteren Bestimmungsgleichungen vorkommenden Unbekannten γ und δ bestimmt sind. Man findet:

$$A = P\frac{(3a+b)\,b^2}{l^3} + \frac{Q}{2} + \frac{6EJ}{l^2}(-\alpha + \beta)$$

$$B = P\frac{a^2\,(a+3b)}{l^3} + \frac{Q}{2} + \frac{6EJ}{l^2}(\alpha - \beta)$$

$$[A] = -P\frac{ab^2}{l^2} - \frac{Ql}{12} + \frac{2EJ}{l}(2\alpha - \beta)$$

$$[B] = -P\frac{a^2b}{l^2} - \frac{Ql}{12} + \frac{2EJ}{l}(-\alpha + 2\beta)$$

$$EJ.\,tg\,\gamma = P\frac{a^2 b^2 (-a+b)}{2\,l^3} + p\,\frac{ab\,(-a+b)}{12} +$$
$$+\frac{EJ}{l^2}\Big[(-2ab+b^2)\,\alpha + (-a^2+2ab)\,\beta\Big]$$
$$EJ\,\delta = P\frac{a^3 b^3}{3\,l^3} + p\,\frac{a^2 b^2}{24} + \frac{EJab}{l^2}(b\alpha + a\beta).$$

Unter Anderem ergiebt sich hiermit

aus der zweiten der Gleichungen (A) für $x = a$

oder „ „ „ „ „ (B) „ $y = b$:

$$[C] = P\frac{2a^2b^2}{l^3} + \frac{p}{12}(-a^2+4ab-b^2) + \frac{2EJ}{l^2}\Big[(-a+2b)\,\alpha + (2a-b)\,\beta\Big].$$

Die Momente $[A]$, $[B]$ und $[C]$ stehen in der folgenden von α und β unabhängigen Beziehung zu einander:

$$l[C] - b[A] - a[B] = \left(P + \frac{Q}{2}\right)ab,$$

welche entweder durch Elimination von α und β zwischen den Gleichungen für diese drei Momente, oder einfacher durch Combination der beiden Gleichungen

$$[C] = [A] + Aa - \frac{pa^2}{2} \quad \text{und} \quad [C] = [B] + Bb - \frac{pb^2}{2} \text{ gefunden wird.}$$

62. — Die Lage des **mittleren Bruchpunktes** und das zugehörige relativ grösste Spannungsmoment sind in der Strecke AC bestimmt durch:

$$x_0 = \frac{A}{p};\ [X_0] = [A] + \frac{A^2}{2p},$$

wenn $0 < x_0 < a$ und $[X_0]$ positiv ist; dagegen in der Strecke BC durch:

$$y_0 = \frac{B}{p};\ [Y_0] = [B] + \frac{B^2}{2p},$$

wenn $0 < y_0 < b$ und $[Y_0]$ positiv ist. Ist Beides nicht der Fall, so liegt der mittlere Bruchpunkt in C, falls $[C]$ positiv ist, widrigenfalls er ganz fehlen, d. h. nur A und B oder auch nur einer dieser beiden Punkte relativer (letzteren Falls absoluter) Bruchpunkt sein würde.

Die **Inflexionspunkte** sind in der Strecke AC durch die zwischen 0 und a liegenden Wurzeln der Gleichung:

$$[A] + Ax_1 - \frac{px_1^2}{2} = 0,$$

in der Strecke BC durch die zwischen 0 und b liegenden Wurzeln der Gleichung:

$$[B] + By_1 - \frac{py_1^2}{2} = 0$$

bestimmt; mit $x_0 = \dfrac{A}{p}$ und $y_0 = \dfrac{B}{p}$ folgt aus denselben auch:

$$x_1 = x_0 \pm \sqrt{x_0^2 + 2\frac{[A]}{p}}$$
$$y_1 = y_0 \pm \sqrt{y_0^2 + 2\frac{[B]}{p}}.$$

Die Punkte grösster Durchbiegung sind in der Strecke AC durch die zwischen 0 und a liegenden Wurzeln der Gleichung:

$$EJ\alpha = [A]\,x' + \frac{Ax'^2}{2} - \frac{px'^3}{6},$$

in der Strecke BC durch die zwischen 0 und b liegenden Wurzeln der Gleichung:

$$EJ\beta = [B]y' + \frac{By'^2}{2} - \frac{py'^3}{6}$$

bestimmt. Die entsprechenden grössten Durchbiegungen δ' selbst werden durch Einsetzung der gefundenen Wurzelwerthe x' und y' für x resp. y in den letzten der Gleichungen (A) und (B), Nr. 61, gefunden, welche aber mit Rücksicht auf obige Bestimmungsgleichungen von x' und y' sich reduciren auf:

$$EJ\delta' = x'^2\left(\frac{[A]}{2} + \frac{Ax'}{3} - \frac{px'^2}{8}\right)$$

$$\text{und } EJ\delta' = y'^2\left(\frac{[B]}{2} + \frac{By'}{3} - \frac{py'^2}{8}\right).$$

BESONDERE FÄLLE.

63. — Es sei: $\alpha = \beta = 0$, d. h. der Stab beiderseits so befestigt, dass die elastische Linie genöthigt ist, sich bei A und B tangential an die Gerade AB anzuschliessen. Dieser Fall findet gewöhnlich mit genügender Näherung statt bei einem Balken, der mit beiden Enden eingemauert ist, oder bei einem stabförmigen Körper, dessen Enden mit festen und festliegenden Körpern zusammengegossen, verschraubt oder anderweitig fest verbunden sind.

Es sei ferner vorläufig $Q = 0$, d. h. der Stab AB habe nur die bei C concentrirte Last P zu tragen, eine Voraussetzung, welche die bei nicht sehr grosser Länge in der That meist ohne wesentlichen Fehler zulässige Vernachlässigung des Eigengewichts des Stabes in sich schliesst.

Aus den Formeln sub Nr. 61 und 62 ergiebt sich dann:

$$A = P\frac{(3a+b)\,b^2}{l^3};\quad B = P\frac{a^2\,(a+3b)}{l^3}$$

$$[A] = -P\frac{ab^2}{l^2};\ [B] = -P\frac{a^2b}{l^2};\ [C] = P\frac{2a^2b^2}{l^3}.$$

A, B und C sind relative Bruchpunkte, und die 3 relativ grössten Spannungsmomente, absolut genommen, verhalten sich:

$$-[A] : [C] : -[B] = \frac{1}{2a} : \frac{1}{l} : \frac{1}{2b};$$

sie folgen so nach abnehmender Grösse, wenn $a \lesseqgtr b$ vorausgesetzt wird.

Die Inflexionspunkte liegen je einer in jeder der beiden Strecken AC und BC; ihre Lagen sind bestimmt durch:

$$x_1 = \frac{-[A]}{A} = \frac{a}{3a+b}\,l$$

$$y_1 = \frac{-[B]}{B} = \frac{b}{a+3b}\,l.$$

Für den Angriffspunkt C der Kraft P ist:

$$\gamma = \frac{P}{EJ} \frac{a^2 b^2 (b-a)}{2 l^3}; \ \delta = \frac{P}{EJ} \frac{a^3 b^3}{3 l^3}.$$

Abgesehen von den Endpunkten A und B, welche nach der Voraussetzung den analytischen Charakter $\frac{dz}{dx} = 0$ resp. $\frac{dz}{dy} = 0$ von Punkten grösster Durchbiegung haben, giebt es nur einen solchen Punkt, welcher ein Punkt grösster Senkung ist. Wegen des mit $a < b$ positiven Werthes von γ liegt derselbe in der Strecke BC im Abstande

$$y' = 2 \frac{-[B]}{B} = 2 y_1 = \frac{2b}{a+3b} l$$

von B; die entsprechende grösste Senkung selbst ist:

$$\delta' = \frac{B}{EJ} \frac{y'^3}{12} = \frac{P}{EJ} \frac{2 a^2 b^3}{3(a+3b)^2}.$$

Dieselbe ist um so mehr $> \delta$, jemehr a und b verschieden sind; z. B.

$$\text{für } \frac{b}{a} = 1 \quad 2 \quad 3 \quad 4 \quad 5 \quad \ldots$$

$$\text{ist } \frac{\delta'}{\delta} = 1 \quad 1{,}10 \quad 1{,}28 \quad 1{,}48 \quad 1{,}69 \quad \ldots$$

64. — Ist bei dem Falle sub Nr. 63 insbesondere $a = b$, so wird:

$$A = B = \frac{P}{2}$$

$$-[A] = -[B] = [C] = \frac{Pl}{8}$$

$$x_1 = y_1 = \frac{l}{4}$$

$$\delta = \frac{P}{EJ} \frac{l^3}{4.48} = \delta'.$$

65. — Es sei $\alpha = \beta = 0$ und $a = b$, aber nicht $Q = 0$, d. h. der beiderseits genau nach der Richtung AB befestigte Stab habe zugleich eine gleichförmig auf seiner Länge l vertheilte Last Q und eine in der Mitte concentrirte Last P zu tragen. In diesem Falle ist:

$$A = B = \frac{P+Q}{2}$$

$$[A] = [B] = -\left(P + \frac{2}{3} Q\right) \frac{l}{8}$$

$$[C] = \left(P + \frac{1}{3} Q\right) \frac{l}{8};$$

ferner mit $\frac{P}{Q} = q$:

$$x_1 = y_1 = \left(q + 1 - \sqrt{q^2 + q + \frac{1}{3}}\right) \frac{l}{2}$$

$$\delta = \frac{\left(P + \frac{1}{2} Q\right)}{EJ} \frac{l^3}{4.48} = \delta'.$$

66. — Ist bei dem Falle sub Nr. 65 insbesondere $P=0$, d. h. ist der Stab nur mit der gleichförmig vertheilten Last Q beschwert, so wird:

$$A = B = \frac{Q}{2}$$

$$[A] = [B] = -\frac{Ql}{12};\ [C] = \frac{Ql}{24}$$

$$x_1 = y_1 = \left(1 - \sqrt{\frac{1}{3}}\right)\frac{l}{2} = 0{,}423\ \frac{l}{2}$$

$$\delta = \frac{Q}{EJ}\,\frac{l^3}{8\,.\,48} = \delta'.$$

67. — Der beiderseits befestigte Stab AB würde die grösstmögliche Tragfähigkeit erhalten, deren er bei gegebenem constanten Werthe von J und gegebener Belastung durch die Kräfte P und Q überhaupt fähig ist, wenn die bisher als gegeben vorausgesetzten Winkel α und β so bestimmt würden, dass jedes der 3 relativ grössten Spannungsmomente zu dem Widerstandsmomente für den betreffenden Sinn der Biegung (cf. Nr. 50) dasselbe Verhältniss hätte. Die betreffenden 3 Querschnitte bei A, B und an einer mittleren Stelle X_0, Y_0 oder C wären dann gleichwerthige Bruchquerschnitte, d. h. es würde in ihnen gleichzeitig die Spannung σ' oder Pressung σ'' den höchstens zulässigen Werth k' resp. k'' erreichen.

Mit Rücksicht auf die Bezeichnungen in Nr. 50 sind also α und β so zu bestimmen, dass

$$-[A] = -[B] = max.\ M''$$

$$\text{und}\ \frac{max.\ M'}{W'} = \frac{max.\ M''}{W''}$$

ist, wo je nach Umständen

$$max.\ M' = [X_0]\ \text{oder}\ [Y_0]\ \text{oder}\ [C]$$

sein kann. Die erstere Bedingung: $[A] = [B]$ liefert mit Rücksicht auf die allgemeinen Ausdrücke dieser beiden Spannungsmomente sub Nr. 61:

$$\alpha - \beta = \frac{P}{EJ}\,\frac{ab\,(b-a)}{6l},$$

womit u. A. die allgemeinen Ausdrücke von A und B übergehen in:

$$A = P\frac{b}{l} + \frac{Q}{2};\ B = P\frac{a}{l} + \frac{Q}{2}$$

d. h. es sind dann diese Widerstandskräfte eben so gross, wie sie nach dem Hebelgesetze sein würden, wenn der Stab beiderseits einfach gestützt, mithin $[A] = [B] = 0$ wäre.

Was die noch nöthige zweite Bestimmungsgleichung für α und β betrifft, so möge insbesondere $W' = W''$ vorausgesetzt werden, was nach Nr. 50 dann der Fall ist, wenn $k' = k''$ oder $e' = e''$ ist, oder wenn der Querschnitt bei den Inflexionspunkten seine Lage gegen die Biegungsaxe umkehrt. Die zweite Bedingung ist dann:

$$max.\ M' = max.\ M''\ (= -[A] = -[B])$$

und es sind die beiden Fälle zu unterscheiden, ob das Maximum von M' im Querschnitte C oder ausserhalb desselben stattfindet.

Ist $a \leqq b$, so ist

$$x_0 = \frac{A}{p} = \frac{A}{Q} l = \frac{P}{Q} b + \frac{l}{2} > a$$

$$y_0 = \frac{B}{p} = \frac{B}{Q} l = \frac{P}{Q} a + \frac{l}{2} \gtrless b$$

$$\text{jenachdem } \frac{P}{Q} \gtrless \frac{m}{a}$$

ist, unter $m = b - \frac{l}{2}$ die Entfernung des Angriffspunktes C vom Mittelpunkte des Stabes verstanden. Ist also

$$1)\ \frac{P}{Q} \geqq \frac{m}{a}, \text{ so ist } max.\, M' = [C]$$

und die Bedingung: $-[A] = -[B] = [C]$ liefert:

$$\left.\begin{matrix} EJ\alpha \\ EJ\beta \end{matrix}\right\} = \pm P \frac{ab\,(b-a)}{12l} + Q \frac{a^2 - ab + b^2}{24},$$

während aus der allgemeinen Relation zwischen den 3 Spannungsmomenten bei A, B und C (Nr. 61) sich ergiebt:

$$-[A] = -[B] = [C] = \left(P + \frac{Q}{2}\right) \frac{ab}{2l} = max.\, M.$$

Ist aber 2) $\frac{P}{Q} < \frac{m}{a}$, so ist $max.\, M' = [Y_0]$

und die Bedingung: $-[A] = -[B] = [Y_0]$ liefert:

$$\left.\begin{matrix} EJ\alpha \\ EJ\beta \end{matrix}\right\} = \pm P \frac{ab\,(b-a)}{12l} + P \frac{a\,(b-a)}{8} + Q \frac{l^2}{96} - \frac{P^2}{Q} \frac{a^2}{8}$$

$$-[A] = -[B] = [Y_0] = \frac{B^2}{4p} = max.\, M.$$

68. — Ist z. B. der Stab nur durch die Kraft P belastet, so ist mit $Q = 0$ jedenfalls $\frac{P}{Q} > \frac{m}{a}$; die grösstmögliche Tragfähigkeit findet also statt für

$$\alpha = \frac{P}{EJ} \frac{ab\,(b-a)}{12l} = -\beta$$

und zwar ist $max.\, M = P \frac{ab}{2l}$

$= \frac{l}{2b} \cdot max.\, M$ für $\alpha = \beta = 0$ (Nr. 63), so dass, wenn P sehr nahe am Ende A angreift, durch die vortheilhaftesten Richtungswinkel α und β die Tragfähigkeit fast auf das Doppelte derjenigen für $\alpha = \beta = 0$ gesteigert werden kann.

Ist aber hierbei $a = b$ (Nr. 64), so sind $\alpha = \beta = 0$ die vortheilhaftesten Richtungswinkel der beiderseitigen Befestigungen des Stabes.

Ist, während $a = b$ ist, nicht $Q = 0$ (Nr. 65), so ist doch noch $\frac{P}{Q} \geqq \frac{m}{a}$; das Maximum der Tragfähigkeit findet also statt bei:

$$\alpha = \beta = \frac{Q}{EJ} \frac{l^2}{96}$$

und zwar ist $max. M = \left(P + \frac{Q}{2}\right) \frac{l}{8}$, insbesondere für $P = 0$ (Nr. 66):

$$max.\ M = \frac{Ql}{16} = \frac{3}{4} . max.\ M \text{ für } \alpha = \beta = 0.$$

In diesem letzteren Falle kann zwar m jeder beliebige Werth, also auch $\frac{P}{Q} = 0 < \frac{m}{a}$ sein; indessen ergeben sich mit den hierfür geltenden Formeln sub Nr. 67 dieselben Werthe von α, β und $max. M$.

69. — Arme von Transmissionsrädern (Zahnrädern, Riemenrollen etc.), überhaupt von Rädern, in deren Peripherie (Theilkreis) eine Kraft P wirkt, welche den Radkranz gegen die Nabe zu verdrehen strebt und dadurch die beide Theile fest verbindenden Arme auf Biegungs-Festigkeit in Anspruch nimmt. — Es sei (Fig. 10):

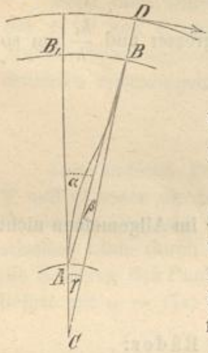

Fig. 10.

$CA = a$ der Radius der Nabe,
$CD = r$ „ „ des Theilkreises,
$AB_1 = l$ die Länge eines Arms,
z die Anzahl der Arme,

und es werde angenommen, dass jeder Arm durch dieselbe Kraft $= \frac{P}{z}$ gebogen wird.

Ist AB_1 die ursprüngliche Axe eines Arms und γ der Winkel B_1CB, um welchen der Radkranz gegen die Nabe verdreht wird, so wird dadurch der Arm so gebogen, dass seine elastische Linie den Radius CB_1 bei A und den Radius CB bei B berührt, und er ist mithin als ein stabförmiger Körper zu betrachten, welcher

bei A unter dem Winkel $-\alpha = -BAB_1$
„ B „ „ „ $\beta = ABC$

gegen die Gerade AB geneigt befestigt ist. Die 3 Winkel α, β, γ sind sehr klein, und wegen

$$\alpha = \beta + \gamma;\ \frac{\gamma}{\beta} = \frac{l}{a} \text{ ist: } \alpha = \frac{l+a}{a} \beta.$$

Wird also vorläufig ein constanter Querschnitt des Arms vorausgesetzt, so liefern die allgemeinen Ausdrücke von $[A]$ und $[B]$ sub Nr. 61 mit

$$P = 0;\ Q = 0;\ \alpha = -\frac{l+a}{a} \beta$$

zwei Gleichungen, aus denen sich durch Elimination von β ergiebt:

$$\frac{[B]}{-[A]} = \frac{l + 3a}{2l + 3a}.$$

Hieraus und aus der Momentengleichung für den Querschnitt bei A:

$$-[A] = \frac{P}{z}(r-a) - [B] \text{ folgt: } -[A] = \frac{P(r-a)}{z} \frac{2l + 3a}{3l + 6a}.$$

Dieses Spannungsmoment ist das grösste, welches in irgend einem Querschnitte des Arms stattfindet, und aus seiner Gleichsetzung mit

$$k\frac{J}{e} = k\frac{bh^2}{6} = k\frac{mh^3}{6},$$

unter h die in der Radebene,

$b = mh$ die nach der Richtung der Axe gemessene Dimension des rechteckigen Querschnitts verstanden, ergiebt sich:

$$h = \sqrt[3]{\frac{P(r-a)}{zkm}\,\frac{4l+6a}{l+2a}}.$$

Weil aber das Spannungsmoment bei B absolut genommen kleiner ist, als bei A, so darf schliesslich der Arm von A gegen B etwas verjüngt, nämlich die Dimension h bis h_1 verkleinert werden, und zwar bei constanter Dimension b im Verhältnisse:

$$\frac{h_1}{h} = \sqrt{\frac{[B]}{-[A]}} = \sqrt{\frac{l+3a}{2l+3a}}.$$

Freilich ist dieses Verjüngungsverhältniss sowohl, wie auch, falls es ausgeführt wird, die obige Formel für h nur angenähert richtig, weil die benutzten Formeln sub Nr. 61 auf der Voraussetzung eines constanten Querschnitts beruhen. Auch ist von den Seitenrippen abgesehen worden, welche den Armen gewöhnlich gegeben werden.

Bei übrigens gegebenen Verhältnissen fällt h um so grösser und $\frac{h_1}{h}$ um so kleiner aus, je kleiner a ist. Wird durchschnittlich

$$a = \frac{l}{3} = \frac{a+l}{4} = \frac{r}{4^2/_3}$$

gesetzt, so wird: $\frac{h_1}{h} = 0,82$

und sollte also eine stärkere Verjüngung, als auf $h_1 = \frac{4}{5}h$ im Allgemeinen nicht ausgeführt werden; ferner wird:

$$h = \sqrt[3]{\frac{99}{35mk}\,\frac{Pr}{z}}$$

oder mit $m = {}^1/_5$ als Durchschnittswerth für gusseiserne Räder:

$$h = \sqrt[3]{\frac{99}{7k}\,\frac{Pr}{z}}.$$

Der Coefficient k wird hier verhältnissmässig klein genommen, weil abgesehen davon, dass nicht immer auf eine gleichmässige Theilung des ganzen Theilrissdrucks P unter alle z Arme gerechnet werden kann, die Letzteren auch genügende Masse besitzen müssen, um bei Stössen ohne Gefahr eine beträchtliche lebendige Kraft zu ihrer Deformation verwenden zu können; im Mittel kann etwa genommen werden:

$$h = 0,6\sqrt[3]{\frac{Pr}{z}},\ \text{entsprechend}\ k = 65^1/_2.^{*)}$$

---

*) Setzt man nach Redtenbacher:

$$\frac{h}{d} = \frac{1,7}{\sqrt[3]{z}},$$

70. — Als ein anderes Beispiel der Benutzung der hier in Rede stehenden allgemeinen Formeln zur Lösung scheinbar fremdartiger oder zusammengesetzter Aufgaben sei es gefordert, einen gleichförmig schweren Stab ST von der Länge l in zwei so gewählten Punkten A und B zu unterstützen, dass dadurch gewisse Bedingungen erfüllt werden, dass z. B. die 3 relativ grössten Spannungsmomente in den Querschnitten bei A, B und an einer gewissen mittleren Stelle C zwischen A und B gleich gross werden, oder dass die 3 relativ grössten Senkungen der elastischen Linie an den überhangenden freien Enden S und T des Stabes und an einer mittleren Stelle C gleich gross ausfallen etc.

In den beiden genannten Fällen müssen offenbar die Stützpunkte A und B symmetrisch gegen den Mittelpunkt des Stabes liegen, welcher seinerseits mit C zusammenfällt; sind dann

$AS = BT = x$ die Längen der überhangenden äusseren Theile des Stabes,
α die Winkel, unter welchen die elastische Linie bei A und B gegen die Horizontale AB geneigt ist,

so lässt sich zunächst α als Function von $x = f(x)$ finden, indem man das Spannungsmoment im Querschnitte A einmal nach Nr. 54 durch x, dann nach Nr. 61 durch α und x ausdrückt und beide Ausdrücke gleich setzt.

Setzt man nun der Forderung entsprechend, dass die Spannungsmomente bei A, B und C einander gleich sein sollen, das nach Nr. 54 durch x ausgedrückte Spannungsmoment bei A = dem nach Nr. 61 durch α und x ausgedrückten Spannungsmomente bei C, so findet man mit $\alpha = f(x)$:

$$x = \frac{\sqrt{2}-1}{2}\, l = 0{,}207\, l.$$

Der anderen Forderung entsprechend, dass die Senkungen der Punkte S, T und C unter die Horizontale AB einander gleich sein sollen, kann man nach Nr. 54 die Senkung des Punktes S unter die Tangente des Punktes A der elastischen Linie durch x, also unter AB durch α und x ausdrücken, desgl. auch die Senkung des Punktes C nach Nr. 61, und die Gleichsetzung beider Ausdrücke liefert mit $\alpha = f(x)$ eine cubische Gleichnug, woraus

$$x = 0{,}223\,..\, l = \text{nahe}\, \frac{2}{9}\, l$$

folgt, ein Resultat, wovon z. B. Behufs zweckmässiger Unterstützung langer Massstäbe Gebrauch gemacht werden kann.

---

unter d den Durchmesser der Welle verstanden, welcher (N Zahl der übertragenen Pferdestärken, n Umdrehungszahl pro Minute) hierbei nach der Formel

$$d = 16 \sqrt[3]{\frac{N}{n}} = 16 \sqrt[3]{\frac{Pr}{71620}}$$

berechnet vorausgesetzt ist, so wäre:

$$h = 1{,}7\,.\,16 \sqrt[3]{\frac{Pr}{71620\, z}} = \sqrt[3]{\frac{Pr}{3{,}56\, z}},$$

also gar k nur $= \frac{99\,.\,3{,}56}{7} = 50^1/_3$.

β. Der Stab ist einerseits befestigt, anderseits unterstützt.

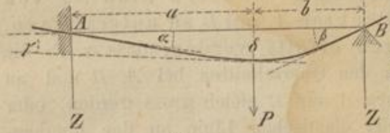

Fig. 11.

71. — Bei A sei der Stab befestigt, bei B unterstützt (Fig. 11). Das Spannungsmoment $[B]$ ist jetzt $= 0$, der Winkel β nicht gegeben. Man findet aber β, indem man den allgemeinen Ausdruck von $[B]$ sub Nr. 61 $= 0$ setzt, und indem man dann diesen Ausdruck von β in den übrigen Formeln von Nr. 61 substituirt, ergiebt sich:

$$EJ\beta = P\frac{a^2 b}{4l} + \frac{Ql^2}{48} + \frac{EJ\alpha}{2}$$

$$A = P\frac{(3a^2 + 6ab + 2b^2)b}{2l^3} + \frac{5}{8}Q - \frac{3EJ\alpha}{l^2}$$

$$B = P\frac{a^2(2a + 3b)}{2l^3} + \frac{3}{8}Q + \frac{3EJ\alpha}{l^2}$$

$$[A] = -P\frac{ab(a + 2b)}{2l^2} - \frac{Ql}{8} + \frac{3EJ\alpha}{l}$$

$$[C] = P\frac{a^2 b\,(2a + 3b)}{2l^3} + Q\frac{(3a - b)b}{8l} + \frac{3EJb\alpha}{l^2} -$$

$$l[C] = b[A] = \left(P + \frac{Q}{2}\right)ab$$

$$EJ\gamma = P\frac{a^2 b\,(2b^2 - a^2)}{4l^3} + p\frac{a\,(-a^2 - 3ab + 6b^2)}{48} + \\ + \frac{-a^2 - 2ab + 2b^2}{2l^2}EJ\alpha$$

$$EJ\delta = P\frac{a^3 b^2\,(3a + 4b)}{12l^3} + p\frac{a^2 b\,(a + 3b)}{48} + \frac{ab\,(a + 2b)}{2l^2}EJ\alpha.$$

Vermittels der hiernach bekannten Werthe von

$$A,\ B,\ [A] \text{ und } \beta$$

und der in Nr. 61 mit (A) und (B) bezeichneten zwei Systeme von Gleichungen, worin nur die Glieder mit $[B]$ verschwinden, kann man nun für jeden Punkt der elastischen Linie resp. für jeden Querschnitt des Stabes die Resultante der äusseren Kräfte, das resultirende Moment derselben = dem Spannungsmomente, die Neigung und die Durchbiegung der elastischen Linie unmittelbar berechnen.

72. — Im Allgemeinen giebt es 2 **relative Bruchpunkte**: A und einen zweiten, dessen Lage nebst dem zugehörigen relativ grössten Spannungsmomente in der Strecke AC bestimmt sind durch:

$$x_0 = \frac{A}{p};\ [X_0] = [A] + \frac{A^2}{2p},$$

wenn $0 < x_0 < a$ und $[X_0]$ positiv ist; dagegen in der Strecke BC durch:

$$y_0 = \frac{B}{p};\ [Y_0] = \frac{B^2}{2p},$$

wenn $0 < y_0 < b$ ist. Ist Beides nicht der Fall, so liegt dieser mittlere Bruchpunkt in C, falls $[C]$ positiv ist, widrigenfalls A der einzige oder absolute Bruchpunkt wäre.

Der höchstens einzige Inflexionspunkt ist in der Strecke AC durch die zwischen 0 und a liegende Wurzel der Gleichung:

$$[A] + Ax_1 - \frac{px_1^2}{2} = 0 \text{ oder } x_1 = x_0 \pm \sqrt{x_0^2 + 2\frac{[A]}{p}}$$

bestimmt, in der Strecke BC dagegen durch:

$$y_1 = 2\frac{B}{p} = 2y_0.$$

Die höchstens 2 Punkte grösster Durchbiegung sind in AC durch die zwischen 0 und a liegenden Wurzeln der Gleichung:

$$EJ\alpha = [A]x' + \frac{Ax'^2}{2} - \frac{px'^3}{6},$$

in BC durch die zwischen 0 und b liegenden Wurzeln der Gleichung:

$$EJ\beta = \frac{By'^2}{2} - \frac{py'^3}{6}$$

bestimmt. Die entsprechenden grössten Durchbiegungen δ' sind:

$$EJ\delta' = x'^2\left(\frac{[A]}{2} + \frac{Ax'}{3} - \frac{px'^2}{8}\right)$$

$$\text{und } EJ\delta' = y'^3\left(\frac{B}{3} - \frac{py'}{8}\right).$$

BESONDERE FÄLLE.

73. — Es sei $\alpha = 0$, d. h. der Stab bei A so befestigt, dass die elastische Linie daselbst die Gerade AB berührt. Auch sei vorläufig $Q = 0$, d. h. der Stab habe nur die bei C concentrirte Last P zu tragen, welche Voraussetzung die Vernachlässigung des Eigengewichts des Stabes in sich schliesst.

Aus den Formeln sub Nr. 71 und 72 ergiebt sich dann:

$$A = P\frac{(3a^2 + 6ab + 2b^2)b}{2l^3}; \quad B = P\frac{a^2(2a + 3b)}{2l^3}$$

$$[A] = -P\frac{ab(a + 2b)}{2l^2}; \; [C] = P\frac{a^2b(2a + 3b)}{2l^3}.$$

$[A]$ und $[C]$ sind relativ grösste Spannungsmomente, und das Verhältniss ihrer Absolutwerthe:

$$\frac{-[A]}{[C]} = \frac{l(a + 2b)}{a(2a + 3b)} \text{ ist} \gtreqless 1, \text{ jenachdem } \frac{b}{a} \gtreqless \sqrt{\frac{1}{2}}$$

ist. Der Inflexionspunkt liegt zwischen A und C in der Entfernung von A:

$$x_1 = \frac{-[A]}{A} = \frac{a(a + 2b)}{3a^2 + 6ab + 2b^2}l.$$

Ferner ist $\beta = \dfrac{P}{EJ}\dfrac{a^2b}{4l}$

und für den Punkt C:

$$\gamma = \frac{2b^2 - a^2}{l^2}\beta; \ \delta = \frac{P}{EJ}\frac{a^3 b^2 (3a + 4b)}{12 l^3}.$$

Jenachdem $\frac{b}{a} \gtrless \sqrt{\frac{1}{2}}$, also γ positiv oder negativ ist, findet die grösste Durchbiegung (Senkung) zwischen B und C oder zwischen A und C statt; im ersten Falle ist sie bestimmt durch:

$$y' = \sqrt{\frac{2EJ tg\beta}{B}} = l\sqrt{\frac{b}{2a+3b}}; \ \delta' = \frac{B}{EJ}\frac{y'^3}{3},$$

im zweiten Falle durch:

$$x' = 2\frac{-[A]}{A} = 2x_1; \ \delta' = \frac{A}{EJ}\frac{x'^3}{12}.$$

74. — **Hat der Stab nur die gleichförmig vertheilte Last** Q **zu tragen**, so ist nach den Formeln sub Nr. 71 und 72:

$$A = \frac{5}{8}Q; B = \frac{3}{8}Q; [A] = -\frac{Ql}{8}.$$

Der mittlere relative Bruchpunkt liegt im Abstande

$$y_0 = \frac{3}{8}l$$

von der Stütze B, und das entsprechende Spannungsmoment ist:

$$[Y_0] = \frac{9}{16}\frac{Ql}{8} = -\frac{9}{16}[A].$$

Der Inflexionspunkt liegt im Abstande

$$y_1 = 2y_0 = \frac{3}{4}l$$

von der Stütze B, woselbst $\beta = \frac{Q}{EJ}\frac{l^2}{48}$ ist.

Die grösste Durchbiegung findet statt in der Entfernung

$$y' = \frac{2}{-1+\sqrt{33}}l = 0{,}422\,l$$

von B, und zwar ist:

$$\delta' = 1{,}040\frac{Q}{EJ}\frac{l^3}{4.48} = 1{,}04\,\delta,$$

unter δ die Durchbiegung in der Mitte des Stabes verstanden, wo $\gamma = \frac{1}{4}\beta$ ist.

75. — Der bei A befestigte, bei B unterstützte Stab erhält die **grösstmögliche Tragfähigkeit**, deren er bei gegebenem constantem Werthe von J und gegebener Belastung durch die Kräfte P und Q fähig ist, wenn der Winkel α so gewählt wird, dass die beiden relativ grössten Spannungsmomente $max.\ M'$ und $-[A]$ zu den betreffenden Widerstandsmomenten W' und W'' (cf. Nr. 50) dasselbe Verhältniss haben, dass also

$$\frac{max.\ M'}{W'} = \frac{-[A]}{W''}.$$

ist, wo je nach Umständen

$$max.\ M' = [X_0] \text{ oder } [Y_0] \text{ oder } [C]$$

sein kann; in den beiden ersten dieser 3 Fälle ist die Bestimmungsgleichung von α quadratisch, im dritten Falle linear. Ist es nicht a priori gewiss, welcher von ihnen stattfindet, so kann man in dieser Beziehung vorläufig eine den Umständen entsprechende wahrscheinliche Annahme machen, ihr gemäss α, damit A und B, x_0 und y_0 berechnen und so die Richtigkeit der Annahme nach Nr. 72 controliren.

Mit $W' = W''$ wird die Bestimmungsgleichung von α:

$$max.\ M' = -[A];$$

wird dann in einem zweifelhaften Falle der mittlere Bruchquerschnitt vorläufig in C angenommen, so ergiebt sich vermittels der Ausdrücke von $[A]$, $[C]$, A und B sub Nr. 71:

$$EJ\,\alpha = P\frac{ab\,(2b^2-a^2)}{6l\,(a+2b)} + Q\frac{l\,(a^2-ab+2b^2)}{(24\,(a+2b)}$$

$$A = P\frac{2b}{a+2b} + Q\frac{a^2+4ab+2b^2}{2l\,(a+2b)}$$

$$B = P\frac{a}{a+2b} + Q\frac{a^2+2ab+2b^2}{2l\,(a+2b)}$$

und es ist nun die Annahme bestätigt, also obiger Werth von α der der Aufgabe entsprechende, wenn

$$x_0 = \frac{A}{p} > a, \text{ d. h. } \frac{P}{Q} > \frac{a^2-2b^2}{4bl}$$

$$\text{und } y_0 = \frac{B}{p} > b, \text{ d. h. } \frac{P}{Q} > \frac{2b^2-a^2}{2al}$$

oder auch $\frac{P}{Q}$ dem grösseren dieser beiden Quotienten gleich ist. Es liesse sich aber der mittlere Bruchquerschnitt

in AC vermuthen, wenn $x_0 < a$ und $y_0 > b$, dagegen
„ BC „ „ $x_0 > a$ „ $y_0 < b$ sich herausstellen sollte.

Ist α der Gleichung: $[C] = -[A]$ gemäss berechnet, so ist

$$max.\ M = \left(P + \frac{Q}{2}\right)\frac{ab}{a+2b},$$

widrigenfalls $max.\ M = -[A]$ durch Einsetzung des anderweitig gefundenen Werthes von α in den allgemeinen Ausdruck von $[A]$ gefunden wird.

76. — Ist z. B. $Q = 0$, so ist jedenfalls C der mittlere Bruchpunkt, also der Neigungswinkel der vortheilhaftesten Befestigungsrichtung gegen die Gerade AB bestimmt durch:

$$\alpha = \frac{P}{EJ}\,\frac{ab\,(2b^2-a^2)}{6l\,(a+2b)}$$

und zwar wird dadurch $max.\ M = P\frac{ab}{a+2b}$.

Ist $P = 0$, so kann nach Belieben X_0 oder Y_0 als der mittlere Bruchpunkt betrachtet werden; letzteren Falls giebt die Bedingung:

$$-[A] = [Y_0] = \frac{B^2}{2p}$$

mit Rücksicht auf die Ausdrücke von $[A]$ und B sub Nr. 71:

$$\alpha = \frac{Q}{EJ}\left(-\frac{11}{8} + \sqrt{2}\right)\frac{l^2}{3} = 0{,}0131\,\frac{Ql^2}{EJ}$$

und damit $max.\ M = \left(\frac{3}{2} - \sqrt{2}\right) Ql = 0{,}0858\ Ql$

$= \frac{1}{1{,}457}\, max.\, M$ für $\alpha = 0$, so dass also die Tragfähigkeit des gleichförmig belasteten Stabes durch die vortheilhafteste Befestigungsrichtung am Ende A auf das 1,457 fache derjenigen bei horizontaler Befestigungsrichtung erhöht wird.

77. — Ein an beiden Enden unterstützter, gleichförmig auf seiner ganzen Länge $AB = l = 2a$ mit der Last Q (incl. Eigengewicht G) zu belastender Balken soll in seiner Mitte noch durch eine dritte Stütze C unterstützt werden; es fragt sich, um welchen Betrag $= x$ dieser mittlere Stützpunkt unter der Horizontalen AB liegen müsse, damit die grösste Spannung oder Pressung, welche in irgend einem Punkte des belasteten Balkens eintritt, unter übrigens gegebenen Umständen ein Minimum sei?

Die Hälfte AC des Balkens lässt sich als bei C befestigt, bei A unterstützt betrachten, und da die elastische Linie bei C eine horizontale Tangente hat, so ist letztere unter dem Winkel $\alpha = \frac{x}{a}$ gegen AC geneigt. Nach der vorigen Nr. muss deshalb

$$x = a\,\alpha = \frac{0{,}0131}{2}\,\frac{Qa^3}{EJ}$$

gemacht werden. Anstatt diesen kleinen Betrag abzumessen, kann man den vorläufig nur bei A und B aufliegenden Balken durch ein solches Gewicht P in der Mitte belasten, dass in Folge der Biegung seine Unterfläche gerade die erforderliche Oberfläche der Mittelstütze erreicht; die Bedingung dafür ist (cf. Nr. 81):

$$\frac{P + \frac{5}{8}G}{EJ}\,\frac{(2a)^3}{48} = \frac{0{,}0131}{2}\,\frac{Qa^3}{EJ}$$

und liefert:
$$P = 0{,}0393\ Q - \frac{5}{8}\,G.$$

Soll dasselbe durch eine gleichförmig vertheilte Last Q_1 erzielt werden, so muss

$$Q_1 = \frac{8}{5}\,P = 0{,}0629\ Q - G$$

sein.

γ. Der Stab ist beiderseits unterstützt.

(Fig. 12.)

78. — Die Spannungsmomente $[A]$ und $[B]$ in den Endquerschnitten des Stabes über den Stützen sind jetzt beide $= 0$, die Winkel α und β aber nicht gegeben.

Wegen $[A]=[B]$ ist zunächst ebenso wie bei dem beiderseits nach der vortheilhaftesten Richtung befestigten Stabe (Nr. 67):

$$\alpha-\beta=\frac{P}{EJ}\frac{ab\,(b-a)}{6\,l}$$

und, wie hier auch aus dem Hebelgesetze folgt:

$$A=P\frac{b}{l}+\frac{Q}{2};\ B=P\frac{a}{l}+\frac{Q}{2};$$

ferner mit Rücksicht auf die allgemeinen Ausdrücke von $[A]$ und $[B]$ sub Nr. 61:

$$EJ\,\alpha=P\frac{ab\,(a+2b)}{6\,l}+\frac{Q\,l^2}{24}$$

$$EJ\,\beta=P\frac{ab\,(2a+b)}{6\,l}+\frac{Q\,l^2}{24}.$$

Die Substitution dieser Werthe in den betreffenden Formeln der Nr. 61 liefert für den Angriffspunkt C der Kraft P:

$$[C]=\left(P+\frac{Q}{2}\right)\frac{ab}{l}$$

$$EJ\,\gamma=\left(P+\frac{l^2+2ab}{8ab}\,Q\right)\frac{ab\,(b-a)}{3\,l}$$

$$EJ\,\delta=\left(P+\frac{l^2+ab}{8ab}\,Q\right)\frac{a^2b^2}{3\,l}.$$

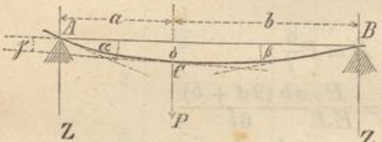

Fig. 12.

Für jeden Querschnitt X oder Y der Strecke AC resp. BC des Stabes findet man die Resultante der äusseren Kräfte, das resultirende Moment derselben = dem Spannungsmomente, die Neigung und die Durchbiegung der elastischen Linie vermittels der Gleichungen:

$$X=A-px \qquad\qquad Y=B-py$$

$$[X]=Ax-\frac{px^2}{2} \qquad\qquad [Y]=By-\frac{py^2}{2}$$

$$EJ\left(\alpha-\frac{dz}{dx}\right)=\frac{Ax^2}{2}-\frac{px^3}{6} \qquad\qquad EJ\left(\beta-\frac{dz}{dy}\right)=\frac{By^2}{2}-\frac{py^3}{6}$$

$$EJ\,(x\,\alpha-z)=\frac{Ax^3}{6}-\frac{px^4}{24} \qquad\qquad EJ\,(y\,\beta-z)=\frac{By^3}{6}-\frac{py^4}{24}.$$

79. — Die elastische Linie ist nur nach Oben concav gekrümmt und hat nur einen Bruchpunkt, welcher entweder in C oder zwischen C und dem Mittelpunkte des Stabes liegt.

Es sei $a \leqq b$ und $m=\frac{l}{2}-a=b-\frac{l}{2}$. Ist dann $\frac{P}{Q}\geqq\frac{m}{a}$, so ist C der Bruchpunkt und

$$max.\ M=[C]=\left(P+\frac{Q}{2}\right)\frac{ab}{l};$$

ist aber $\frac{P}{Q} < \frac{m}{a}$, so liegt der Bruchpunkt in der Entfernung

$$y_0 = \frac{P}{Q} a + \frac{l}{2}$$

von B und ist $max.\ M = [Y_0] = \frac{B^2}{2p}$.

In beiden Fällen ist $max.\ M$ doppelt so gross, als bei beiderseitiger Befestigung des Stabes unter den vortheilhaftesten Winkeln α und β (cf. Nr. 67).

Ein Inflexionspunkt ist nicht vorhanden.

Der einzig vorhandene Punkt grösster Durchbiegung (Senkung) liegt in der grösseren Abtheilung BC, und seine Entfernung y' von B ist die zwischen 0 und b liegende Wurzel der Gleichung:

$$EJ\,\beta = \frac{By'^2}{2} - \frac{py'^3}{6};$$

die grösste Senkung ist bestimmt durch:

$$EJ\,\delta' = y'^3\left(\frac{B}{3} - \frac{py'}{8}\right).$$

BESONDERE FÄLLE.

80. — Wenn der Stab nur die bei C angreifende Last P trägt, so ist:

$$A = P\frac{b}{l};\ B = P\frac{a}{l}$$

$$\alpha = \frac{P}{EJ}\,\frac{ab\,(a+2b)}{6l};\ \beta = \frac{P}{EJ}\,\frac{ab\,(2a+b)}{6l}$$

$$max.\,M = [C] = P\,\frac{ab}{l}$$

$$\gamma = \frac{P}{EJ}\,\frac{ab\,(b-a)}{3l} = 2\,(\alpha-\beta);\ \delta = \frac{P}{EJ}\,\frac{a^2b^2}{3l}$$

$$y' = \sqrt{\frac{2EJ\,\beta}{B}} = \sqrt{\frac{b\,(2a+b)}{3}}$$

$$\delta' = \frac{P}{EJ}\,\frac{a}{l}\,\frac{y'^3}{3}.$$

81. — Wenn der Stab eine gleichförmig auf seiner Länge l vertheilte Last Q nebst der in der Mitte concentrirten Last P zu tragen hat, so sind alle Verhältnisse symmetrisch in Beziehung auf die Mitte, und man hat:

$$A = B = \frac{P+Q}{2};\qquad \alpha = \beta = \frac{P + \frac{2}{3}Q}{EJ}\,\frac{l^2}{16}$$

$$max.\,M = \left(P + \frac{Q}{2}\right)\frac{l}{4};\qquad \delta = \frac{P + \frac{5}{8}Q}{EJ}\,\frac{l^3}{48} = \delta'.$$

82. — Nachstehend sind zur Vergleichung die Werthe von $max. M$ und von δ' unter den Voraussetzungen einer in der Mitte des Stabes angreifenden Last P ($Q = 0$; $a = b$) und einer gleichförmig auf seiner ganzen Länge vertheilten Last Q ($P = 0$) für die 5 Fälle zusammengestellt, dass der Stab

1) beiderseits unterstützt,
2) einerseits unterstützt, anderseits unter dem Richtungswinkel $\alpha = 0$ befestigt,
3) einerseits unterstützt, anderseits unter dem die grösste Tragfähigkeit bedingenden Winkel α befestigt,
4) beiderseits unter den Winkeln $\alpha = \beta = 0$ befestigt,
5) beiderseits unter den der grössten Tragfähigkeit entsprechenden Richtungswinkeln befestigt ist.

	$Q = 0$; $a = b$		$P = 0$	
	$max. M$	δ'	$max. M$	δ'
1.	$\frac{Pl}{4}$	$\frac{P}{EJ}\frac{l^3}{48}$	$\frac{Ql}{8}$	$\frac{5}{4}\cdot\frac{Q}{EJ}\frac{l^3}{96}$
2.	$\frac{3}{4}\cdot$ „	0,447 . „	„	0,520 . „
3.	$\frac{2}{3}\cdot$ „	0,507 . „	0,686 . „	0,744 . „
4.	$\frac{1}{2}\cdot$ „	$\frac{1}{4}\cdot$ „	$\frac{2}{3}\cdot$ „	$\frac{1}{4}\cdot$ „
5.	$\frac{1}{2}\cdot$ „	$\frac{1}{4}\cdot$ „	$\frac{1}{2}\cdot$ „	$\frac{1}{2}\cdot$ „

83. — Die Formel für δ sub Nr. 81 ist auf Grund entsprechender Biegungsversuche vorzugsweise geeignet und vielfach benutzt worden (von Eytelwein, Gerstner, Lagerhjelm, Morin, Fairbairn u. A.) zur Bestimmung des Elasticitätsmodul solcher Materialien, welche sich nicht in Form von Drähten oder genügend langen und dünnen Stäben herstellen lassen, wie solche zu einfachen Ausdehnungsversuchen nöthig sind. Der Stab erhält behufs sicherer Berechnung von J aus den gemessenen Querdimensionen am besten einen rechteckigen Querschnitt und wird, auf zwei kantigen Stützen mit dem Abstande l liegend, in der Mitte durch nach und nach vergrösserte Kräfte P belastet. Vermittels der durch gewisse vergrössernde Mittel (Fühlhebel, Keilmass etc.) jedesmal gemessenen Durchbiegung δ findet man dann, unter Q das Eigengewicht des Stabes verstanden, den Elasticitätsmodul

$$E = \frac{P + \frac{5}{8}Q}{\delta J}\frac{l^3}{48},$$

so lange der Stab bei der Entlastung keine merkliche bleibende Durchbiegung zeigt und die gefundenen Werthe von E nicht merklich abnehmen, überhaupt nur solche Unterschiede zeigen, welche den Beobachtungsfehlern der einzelnen Versuche zugeschrieben werden dürfen.

Ist e die halbe Höhe des in Beziehung auf die Biegungsaxe symmetrischen Querschnitts, so ist der Absolutwerth ε der positiven oder negativen Ausdehnung, welche bei der Belastung durch die Kraft P im tiefsten, resp. höchsten Punkte des mittleren Querschnitts stattfindet:

$$\varepsilon = \frac{1}{E} \cdot max.\, M \cdot \frac{e}{J} = \frac{1}{E}\left(P + \frac{Q}{2}\right)\frac{l}{4}\,\frac{e}{J}.$$

Er ist entweder $= (\varepsilon')$ oder $= (\varepsilon'')$ — cf. Nr. 4 —, wenn P diejenige belastende Kraft ist, bei welcher eben die hervorgerufene Durchbiegung theilweise merklich bleibend zu sein anfängt; ob dieses $\varepsilon = (\varepsilon')$ oder $= (\varepsilon'')$ ist, wird durch die Vergleichung mit Ausdehnungsversuchen oder auch mit Biegungsversuchen solcher aus demselben Materiale verfertigter Stäbe erkannt, deren Querschnitt nicht symmetrisch in Beziehung auf die Biegungsaxe ist, für welche sonach e' und e'', ε' und ε'' verschieden sind.

Wenn man P zwischen obigen zwei Gleichungen für E und ε eliminirt und Q vernachlässigt, ergiebt sich:

$$\delta = \frac{l^2}{12e}\,\varepsilon,$$

und das Verhältniss dieser Durchbiegung zu der Längenänderung $\varDelta l = l\varepsilon$ des bis zu gleichem Werthe von ε der Länge nach gezogenen oder zusammengedrückten Stabes ist:

$$\frac{\delta}{\varDelta l} = \frac{l}{12e} = \frac{l}{6h},$$

unter $h = 2e$ die Höhe des Querschnitts verstanden. Es ist also δ grösser, mithin verhältnissmässig sicherer zu messen, als $\varDelta l$, sofern nur $l > 6h$ genommen wird; darin liegt ein Vorzug dieses Verfahrens der Bestimmung von E, (ε') und (ε'') vor demjenigen durch einfache Ausdehnungs- oder Compressionsversuche.

2. Der Stab hat ausser einer gleichförmig auf seiner ganzen Länge vertheilten Last noch beliebig viele an verschiedenen Stellen concentrirte Lasten zu tragen.

84. — In den allgemeinen Ausdrücken von

$$A \quad B \quad [A] \quad [B] \quad (\text{Nr. } 61)$$

als Functionen von P, Q, α und β für den Fall des beiderseits befestigten Stabes, ferner in den Ausdrücken von

$$A \quad B \quad [A] \quad \beta \quad (\text{Nr } 71)$$

als Functionen von P, Q und α für den Fall des einerseits befestigten, anderseits unterstützten Stabes, endlich in den Ausdrücken von

$$A \quad B \quad \alpha \quad \beta \quad (\text{Nr. } 78)$$

als Functionen von P und Q für den Fall des beiderseits unterstützten Stabes kommt P nur in je einem Gliede allein vor, welches von Q, α und β, resp. von Q und α oder von Q unabhängig, nämlich von der Form: $P.\, f(a, b)$ ist, unter $f(a, b)$ eine Function der Abstände a und b des Angriffspunktes

C der Kraft P von den Stabenden A und B verstanden. Daraus ist zu schliessen, dass, wenn mehre Kräfte

	P_1	P_2	P_3	...
den Stab in den Punkten	C_1	C_2	C_3	...
angreifen in den Abständen	a_1	a_2	a_3	...
von A und „ „ „	b_1	b_2	b_3	...

von B, alsdann in jenen Ausdrücken überall nur

$$\Sigma\, P.f(a,b) \text{ statt } P.f(a,b)$$

gesetzt zu werden braucht, um sie diesem allgemeineren Falle entsprechend zu machen. So erhält man

α) für den beiderseits befestigten Stab:

$$A = \Sigma\left[P\,\frac{(3a+b)\,b^2}{l^3}\right] + \frac{Q}{2} + \frac{6EJ}{l^2}\,(-\alpha+\beta)$$

$$B = \Sigma\left[P\,\frac{a^2\,(a+3b)}{l^3}\right] + \frac{Q}{2} + \frac{6EJ}{l^2}\,(\alpha-\beta)$$

$$[A] = -\,\Sigma\left(P\,\frac{ab^2}{l^2}\right) - \frac{Ql}{12} + \frac{2EJ}{l}\,(2\alpha-\beta)$$

$$[B] = -\,\Sigma\left(P\,\frac{a^2b}{l^2}\right) - \frac{Ql}{12} + \frac{2EJ}{l}\,(-\alpha+2\beta);$$

β) für den einerseits befestigten, anderseits unterstützten Stab:

$$A = \Sigma\left[P\,\frac{(3a^2+6ab+2b^2)\,b}{2l^3}\right] + \frac{5}{8}\,Q - \frac{3EJ\alpha}{l^2}$$

$$B = \Sigma\left[P\,\frac{a^2\,(2a+3b)}{2l^3}\right] + \frac{3}{8}\,Q + \frac{3EJ\alpha}{l^2}$$

$$[A] = -\,\Sigma\left[P\,\frac{ab\,(a+2b)}{2l^2}\right] - \frac{Ql}{8} + \frac{3EJ\alpha}{l}$$

$$EJ\beta = \Sigma\left(P\,\frac{a^2b}{4l}\right) + \frac{Ql^2}{48} + \frac{EJ\alpha}{2};$$

γ) für den beiderseits unterstützten Stab:

$$A = \Sigma\left(P\,\frac{b}{l}\right) + \frac{Q}{2}$$

$$B = \Sigma\left(P\,\frac{a}{l}\right) + \frac{Q}{2}$$

$$EJ\,\alpha = \Sigma\left[P\,\frac{ab\,(a+2b)}{6l}\right] + \frac{Ql^2}{24}$$

$$EJ\,\beta = \Sigma\left[P\,\frac{ab\,(2a+b)}{6l}\right] + \frac{Ql^2}{24}.$$

85. — Indem sonach die Werthe von A, B, $[A]$ und $[B]$ in jedem Falle bekannt sind, kann man damit für jeden Querschnitt X des Stabes die Resultante X und das resultirende Moment $[X]$ der äusseren Kräfte finden, insbesondere also auch den durch $X=0$ charakterisirten mittleren Bruchpunkt und die durch $[X]=0$ charakterisirten Inflexionspunkte.

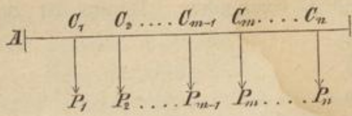

Fig. 13.

Ist, unter p die gleichförmig vertheilte Last pro Längeneinheit verstanden,

$$\sum_1^{m-1} P + p a_{m-1} < A < \sum_1^m P + p a_m,$$

so liegt der Bruchpunkt X_0 in der Abtheilung $C_{m-1}\, C_m$ (Fig. 13) in der Entfernung

$$x_0 = \frac{A - \sum_1^{m-1} P}{p}$$

von A, vorausgesetzt dass dieses $x_0 \gtreqless a_m$ ist, widrigenfalls der Angriffspunkt C_m der Bruchpunkt wäre. Letzteres ist immer der Fall, wenn $p = 0$ und

$$\sum_1^{m-1} P < A < \sum_1^m P$$

ist. Wäre aber im Falle $p = 0$

$$\sum_1^{m-1} P = A, \text{ folglich } B = \sum_m^n P,$$

so wäre $x_0 = \frac{0}{0}$, das Spannungsmoment aller Querschnitte von C_{m-1} bis C_m gleich gross und die elastische Linie zwischen diesen Punkten ein Kreisbogen.

86. — Der letztgenannte Specialfall findet z. B. statt bei einem Stabe AB (Fig. 14), welcher, beiderseits bei A und B auf Stützen liegend, bei C_1 und C_2 in den Abständen

$$AC_1 = BC_2 = a$$

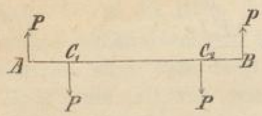

Fig. 14.

mit den gleichen Kräften P belastet ist, während sein Eigengewicht ausser Acht gelassen wird; hier ist von C_1 bis C_2 das Spannungsmoment constant $= Pa$ und der Krümmungsradius der elastischen Linie: $\varrho = \frac{EJ}{Pa}$.

Ist z. B. AB eine Locomotivaxe mit inneren Axenhälsen, wobei die Räder die Stellen der Stützpunkte A und B vertreten und a die Entfernung des Radmittels von der Mitte des Axenhalses bedeutet, so ist dieselbe bei constantem Durchmesser d ein Körper gleichen Widerstandes, und d bestimmt durch

$$Pa = k\frac{J}{e} = k\frac{\pi d^3}{32}; \text{ etwa } d = 0{,}32\sqrt[3]{Pa}$$

entsprechend $k = 310$ für eine schmiedeiserne Axe. Der Radius der kreisförmigen Krümmung von C_1 bis C_2 ist dann

$$\varrho = \frac{EJ}{Pa} = \frac{E}{2k}\, d \text{ nahe} = 3200\, d$$

entsprechend $k = 310$ und $E = 1984000$.

Bei einer Locomotivaxe mit äusseren Zapfen kehren sich blos alle 4 Kräfte P um, indem jetzt A und B die Zapfenmittel, C_1 und C_2 die Radmittel sind. Es gelten dieselben Formeln wie zuvor, nur ist die elastische Linie jetzt nach Unten concav gekrümmt.

Der hier betrachtete Fall liegt u. A. auch vor bei einer Wasserradwelle, welche nur zu tragen hat, indem die gewonnene Arbeit unmittelbar am Radkranze durch einen damit verbundenen Zahnkranz fortgeleitet wird; dabei sind A und B die Mitten der in Lagern liegenden Wellzapfen, C_1 und C_2 die Mitten der Naben der beiden Armsysteme, welche den Radkranz mit der Welle verbinden.

87. — Um bei der vorliegenden allgemeineren Aufgabe die Gleichungen der einzelnen Strecken

$$AC_1 \quad C_1C_2 \quad C_2C_3 \quad \ldots \quad C_nB \quad \text{(Fig. 13)}$$

der elastischen Linie zu finden, ist nun ähnlich zu verfahren, wie sub Nr. 55 angegeben wurde. Bezogen auf A als Anfangspunkt, AB als positive x-Axe und die Lothrechte durch A als positive z-Axe seien in den Punkten $C_1 \quad C_2 \quad C_3 \ldots$

$$\gamma_1 \quad \gamma_2 \quad \gamma_3 \ldots \text{ die Werthe von } \frac{dz}{dx},$$

$$\delta_1 \quad \delta_2 \quad \delta_3 \ldots \quad „ \quad „ \quad „ \quad z.$$

Ist dann die Momentengleichung der Strecke AC_1:

$\frac{d^2z}{dx^2} = f_1(x)$, so folgt daraus durch Integration:

$\frac{dz}{dx} = \varphi_1(x)$, Constante bestimmt durch $x = 0, \frac{dz}{dx} = \alpha$,

$z = \psi_1(x)$, „ „ „ $x = 0, \quad z = 0$;

daraus mit $x = a_1$: $\gamma_1 = \varphi_1(a_1)$; $\delta_1 = \psi_1(a_1)$.

Ist dann für die Strecke C_1C_2:

$\frac{d^2z}{dx^2} = f_2(x)$, so folgt für dieselbe:

$\frac{dz}{dx} = \varphi_2(x)$, Constante bestimmt durch $x = a_1, \frac{dz}{dx} = \gamma_1$,

$z = \psi_2(x)$, „ „ „ $x = a_1, \quad z = \delta_1$;

daraus mit $x = a_2$: $\gamma_2 = \varphi_2(a_2)$; $\delta_2 = \psi_2(a_2)$ u. s. f.

Haben in zwei aufeinander folgenden Angriffspunkten C die Winkel γ entgegengesetzte Zeichen, so liegt dazwischen ein Punkt grösster Durchbiegung, welcher durch $\frac{dz}{dx} = 0$ bestimmt ist, unter z die Ordinate eines Punktes der betreffenden Abtheilung der elastischen Linie verstanden.

Statt vom Endpunkte A kann man natürlich auch vom anderen Endpunkte B ausgehen oder auch für einen Theil AC_m des Stabes von A, für den anderen BC_m von B ausgehend die aufeinander folgenden Integrationen verrichten.

3. Der Stab ist auf beliebige Weise belastet.

88 — Ausser den in gewissen Angriffspunkten concentrirten endlichen Kräften $P_1 \; P_2 \ldots$ hat der Stab noch eine stetige Belastung $= p$ pro Längeneinheit, welche aber im Allgemeinen weder constant, noch auf der ganzen Länge des Stabes vertheilt ist; Stetigkeitsunterbrechungen der Belastung,

mithin auch der elastischen Linie an gewissen Stellen C_1 C_2 ... könnten nicht nur von den daselbst angreifenden Kräften P_1 P_2 ..., sondern auch von plötzlichen Aenderungen von p um endliche Grössen Δp herrühren, nur sind die letzteren Stetigkeitsunterbrechungen von einer höheren Ordnung: cf. Nr. 56.

Von den 6 Grössen:

$$A \quad [A] \quad \alpha; \quad B \quad [B] \quad \beta,$$

welche den Zustand an beiden Stabenden bestimmen, sind 2 gegeben, also 4 vorläufig unbekannt; am Ende A z. B. ist α gegeben, wenn der Stab daselbst befestigt, dagegen $[A] = 0$, wenn er dort nur unterstützt ist.

Nach dem Verfahren sub Nr. 87 kann man nun für jeden Querschnitt X des Stabes in der Entfernung x von A die 4 Grössen:

$$X \quad [X] \quad \frac{dz}{dx} \quad z$$

als Functionen gegebener Elemente und der beiden Unbekannten A und $[A]$ oder A und α, desgl. für jeden Querschnitt Y in der Entfernung y von B die Grössen:

$$Y \quad [Y] \quad \frac{dz}{dy} \quad z$$

durch gegebene Elemente und die Unbekannten B und $[B]$, oder B und β ausdrücken, und durch die Gleichsetzung der auf denselben, übrigens beliebig zu wählenden bestimmten Querschnitt bezogenen Ausdrücke von

$$X \text{ und } -Y, \ [X] \text{ und } [Y], \ \frac{dz}{dx} \text{ und } -\frac{dz}{dy}, \ z \text{ und } z$$

erhält man 4 Gleichungen, wodurch die 4 Unbekannten bestimmt sind.

Liegt der Stab beiderseits auf Stützen, so können übrigens A und B auch ohne Rücksicht auf die Biegung direct durch das Hebelgesetz gefunden werden, und ist dann nur zur Berechnung von α und β die Gleichsetzung der auf denselben Punkt der elastischen Linie bezogenen Ausdrücke von

$$\frac{dz}{dx} \text{ und } -\frac{dz}{dy}, \ z \text{ und } z$$

erforderlich.

89. — Als Beispiel einer unter den obigen Fällen sub 2. (Nr. 84—87) nicht begriffenen Belastungsweise, bei welcher zugleich eine durch plötzliche Aenderung von p bedingte Stetigkeitsunterbrechung stattfindet, werde ein Stab AB von der Länge l vorausgesetzt, welcher, mit beiden Enden auf Stützen liegend, beständig eine gleichförmig auf der ganzen Länge vertheilte Last $= p_1$ pro Längeneinheit zu tragen hat, während ausserdem vorübergehend eine andere auf einer gewissen Länge $CD > AB$ gleichförmig vertheilte Last $= p_2$ pro Längeneinheit sich von A oder B herkommend über AB hinwegschiebt. In irgend einem Punkte X der elastischen Linie in der Entfernung x von A ändern sich hierbei die Werthe von

$$X \quad [X] \quad \frac{dz}{dx} \text{ und } z$$

stetig, während der Anfang oder das Ende der beweglichen Last sich zwischen A und B befindet, somit die Belastung des Stabes selbst sich stetig ändert, indem sie auf einem veränderlichen Theile der Länge $AB = p_1$, auf dem andern $= p_1 + p_2 = p$ ist.

Dieser Fall kommt vor bei einem beiderseits unterstützten Brückenträger, dessen ruhende Belastung, im Eigengewichte der Brücke bestehend, constant $= p_1$ pro Längeneinheit vorausgesetzt wird, während die bewegliche Last in einem Menschen- oder Wagenzuge etc. besteht. Indem die Constructionselemente eines solchen, meist zusammengesetzten, Brückenträgers theils durch X und theils durch $[X]$ bedingt sind, so ist besonders die Kenntniss der Maximalwerthe von X und $[X]$ von Interesse, sowie auch desjenigen Werthes von $[X]$, der den Maximalwerth von X, und desjenigen Werthes von X, der den Maximalwerth von $[X]$ begleitet, weil nämlich gewisse Dimensionen unter Umständen von diesen beiden Grössen X und $[X]$ zugleich abhängig gemacht werden müssen. Unbeschadet der Allgemeinheit darf dabei $x < \frac{l}{2}$, d. h. der Querschnitt X als zwischen A und der Trägermitte O liegend, sowie auch die bewegliche Last als von A herkommend vorausgesetzt werden, weil sowohl die entgegengesetzte Lage des Querschnitts in Beziehung auf die Trägermitte, als auch die entgegengesetzte Bewegungsrichtung der beweglichen Last nur eine umgekehrte Reihenfolge der Aenderungen der in dem betrachteten Querschnitte stattfindenden Einwirkungen zur Folge hat.

Man findet nun, dass das Spannungsmoment in dem beliebigen Querschnitte X seinen grössten Werth dann erreicht, wenn die bewegliche Last die ganze Länge AB überdeckt, und es ist also derselbe nebst dem entsprechenden Werthe von X:

$$max. [X] = p\frac{x\,(l-x)}{2};\; X = p\left(\frac{l}{2} - x\right).$$

Die Resultante X dagegen erreicht ihren grössten Werth in dem Augenblicke, in welchem die bewegliche Last von dem betreffenden Querschnitte X bis zu dem entfernteren Stützpunkte B reicht, und zwar ist dann

$$max. X = p\left(\frac{l}{2} - x\right) + p_2\frac{x^2}{2l};\; [X] = \left(p - p_2\frac{x}{l}\right)\frac{x\,(l-x)}{2}.{}^{*)}$$

90. — Der Punkt X_0, für welchen $X = 0$, also $[X]$ ein Maximum ist, ändert bei der in der vorhergehenden Nr. betrachteten Aufgabe seine Lage

*) Wenn man diesen mit x veränderlichen Werthen von X und $[X]$ entsprechend die Dimensionen aller Querschnitte des Trägers so ermittelt, dass derselbe möglichst ein Körper von gleichem Widerstande wird (Nr. 35), so wird danach die zu Grunde liegende Voraussetzung eines constanten Werthes von p_1 nicht mehr genau zutreffen; eine diesem Umstande entsprechende Berichtigung der vorläufig gefundenen Dimensionen ist aber im vorliegenden Falle, da X und $[X]$ von der Art der Biegung des Stabes unabhängig sind, verhältnissmässig leicht auszuführen, besonders wenn schon der praktischen Ausführung wegen die stetige Veränderlichkeit des Querschnitts durch eine nach endlichen Strecken sprungweise Abstufung der Dimensionen ersetzt wird.

mit dem Belastungszustande. Kommt die bewegliche Last von der Stütze A her, so bewegt sich in dem Augenblicke, in welchem ihr vorderer Endpunkt C die Stütze A überschreitet, der Punkt X_0 aus der Trägermitte O heraus nach der Richtung OA dem Punkte C entgegen und trifft damit an einer gewissen Stelle M zusammen, von welchem Augenblicke an der Punkt X_0 seine Bewegungsrichtung umkehrt und, hinter C sich herbewegend, die Trägermitte O wieder erreicht, wenn die bewegliche Last den ganzen Träger AB überdeckt; wenn aber darauf das hintere Ende D dieser Last den Stützpunkt A überschreitet, setzt sich vor ihm her der Punkt X_0 nach der Richtung OB wieder in Bewegung, wird vom Punkte D an einer gewissen Stelle N im Abstande $ON = OM$ von O eingeholt und kehrt dann zur Trägermitte O zurück, während D die noch übrige Strecke NB des Trägers durchläuft.

Die Strecke MN, innerhalb welcher die Resultante X ihr Zeichen ändert, ist bei einem zusammengesetzten Träger von constructiver Wichtigkeit in Betreff der Anordnung derjenigen Constructionsglieder, welche die beiden Streckbalken oder Gurtungen des Trägers verbinden und vorzugsweise der Einwirkung dieser Kraft X ausgesetzt sind. Die Lage des Punktes M in der Trägerhälfte AO ist aber bedingt durch den Minimalwerth, welchen die Resultante X in irgend einem Punkte dieser Trägerhälfte annehmen kann; derselbe ist:

$$min.\, X = p_1\left(\frac{l}{2} - x\right) - p_2\frac{x^2}{2l}$$

und findet in dem Augenblicke statt, in welchem die bewegliche Last von diesem Punkte X bis zur nächstgelegenen Stütze A reicht; $AM = BN = m$ ist derjenige Werth von x, für welchen

$$min.\; X = 0$$

ist, woraus sich ergiebt:

$$\frac{m}{l} = -\frac{p_1}{p_2} + \sqrt{\frac{p_1}{p_2}\left(1 + \frac{p_1}{p_2}\right)}$$

$$\text{z. B. für } \frac{p_1}{p_2} = \quad {}^1/_4 \quad {}^1/_2 \quad 1 \quad 2$$

$$\frac{m}{l} = 0{,}309 \quad 0{,}366 \quad 0{,}414 \quad 0{,}449;$$

$\frac{m}{l}$ ist um so kleiner, d. h. die Strecke MN, in welcher der Punkt X_0 sich hin und herbewegt, verhältnissmässig um so grösser, je kleiner $\frac{p_1}{p_2}$ oder je kleiner die Spannweite der Brücke ist.

c. Der an den Enden unterstützte oder befestigte Stab ruht ausserdem noch auf einer Anzahl von Zwischenstützen.

91. — Während die Enden des Stabes wie bisher mit A und B bezeichnet werden, seien von A aus gerechnet

die n Zwischenstützen mit . . . . $C_1 \quad C_2 \quad C_3 \; . \; . \; . \; . \; C_n$
die Längen der $(n+1)$ Abtheilungen . . . $AC_1 \quad C_1C_2 \quad C_2C_3 \; . \; . \; . \; . \; C_nB$
mit . . . . $l \quad l_1 \quad l_2 \; . \; . \; . \; . \; l_n$
bezeichnet. Diese Zwischenstützpunkte brauchen im Allgemeinen nicht genau in der Horizontalen AB zu liegen; es seien vielmehr, unter $A, C_1, C_2 \ldots$ die betreffenden Punkte der elastischen Linie verstanden,

$\lambda \quad \lambda_1 \; . \; . \; . \; \lambda_n$ die kleinen Winkel der
Richtungen $AC_1 \quad C_1C_2 \; . \; . \; . \; . \; C_nB$ mit der Richtung AB,
welche Winkel positiv oder negativ gesetzt werden, jenachdem sie unterhalb oder oberhalb einer durch

$A \quad C_1 \; . \; . \; . \; C_n$ gezogenen Horizontalen liegen. In gleicher Weise werden die Winkel

$\gamma_1 \quad \gamma_2 \; . \; . \; . \; . \; \gamma_n$
der elastischen Linie bei $C_1 \quad C_2 \; . \; . \; . \; . \; C_n$
mit der Horizontalen AB positiv oder negativ gesetzt, ihre Neigungswinkel α und β bei A und B aber so verstanden wie in Nr. 58.

Bezogen auf AB als x-Axe und eine Lothrechte durch A als z-Axe seien endlich noch . . . . $\delta_1 \quad \delta_2 \; . \; . \; . \; \delta_n$
die z-Coordinaten der Punkte $C_1 \quad C_2 \; . \; . \; . \; C_n$.

Ausser den betreffenden 4 Unbekannten der 6 Grössen:

$$A \quad [A] \quad \alpha; \quad B \quad [B] \quad \beta,$$

welche den Zustand an den beiden Stabenden bestimmen (cf. Nr. 88), sind nun auch die Reactionen

$$C_1 \quad C_2 \; . \; . \; . \; C_n$$

der gleich bezeichneten Zwischenstützpunkte a priori unbekannt. Durch dieselben und durch die gegebenen Elemente lassen sich aber nach Nr. 88 jene ersteren vier Unbekannten ausdrücken, und indem man dann damit auch die z-Coordinate für jeden Punkt der elastischen Linie ausdrücken kann, dieselbe aber in den Zwischenstützpunkten $= \delta_1, \delta_2 \, . \, . \, \delta_n$ gegeben ist, erhält man so viele Gleichungen, als zur Bestimmung der noch übrigen Unbekannten nöthig sind.

Die $2n+2$ Elemente l und λ, wodurch die Lagen der Zwischenstützpunkte gegen AB bestimmt sind, können so gewählt werden, dass ausser

$$\Sigma l = AB \text{ und } \Sigma \lambda = 0$$

noch $2n$ Bedingungen dadurch erfüllt werden, dass z. B. die Spannungsmomente in $2n+1$ relativen Bruchquerschnitten einander gleich werden oder zu den betreffenden Widerstandsmomenten W' und W'' (Nr. 50) dieselben Verhältnisse erhalten. Ist der Stab auch an den Enden nur unterstützt, so sind überhaupt nicht mehr als $2n+1$ relative Bruchquerschnitte vorhanden: je einer über den Zwischenstützen und in den durch diese begrenzten $n+1$ Abtheilungen; ist aber der Stab bei A oder B oder beiderseits befestigt, so kommen die Spannungsmomente daselbst als relativ grösste hinzu, und müssen dann noch die Winkel α und β zu Hülfe genommen werden, um zu machen, dass alle relativen Bruchquerschnitte gleiche Sicherheit gegen eine übermässige Spannung oder Pressung gewähren.

92. — Wenn der Stab in jeder Abtheilung eine gleichförmig auf deren Länge vertheilte Last ausser beliebig vielen an verschiedenen Stellen concentrirten Lasten zu tragen hat, so lässt sich die in voriger Nr. im Allgemeinen angedeutete Berechnung der zur ferneren Untersuchung nöthigen $n+4$ unbekannten Constanten mit Hülfe der allgemeinen Relationen sub Nr. 84 wesentlich vereinfachen.

Bezeichnen nämlich C_1, C_2, C_3 irgend 3 aufeinander folgende Stützpunkte, so kann man nach den Formeln für $[A]$ und $[B]$ sub Nr. 84, α) mit

$$[A]=[C_1];\ [B]=[C_2];\ \alpha=\gamma_1-\lambda_1;\ \beta=\lambda_1-\gamma_2$$

die beiden unbekannten Spannungsmomente $[C_1]$ und $[C_2]$ durch gegebene Elemente und die beiden unbekannten γ_1 und γ_2 ausdrücken, woraus durch Elimination von γ_1 eine Gleichung

$$f\,\{[C_1],\ [C_2],\ \gamma_2\}=0$$

zwischen $[C_1]$, $[C_2]$ und γ_2 erhalten wird. Eine ganz analoge Relation besteht zwischen $[C_2]$, $[C_3]$ und γ_2, und durch Elimination von γ_2 zwischen beiden erhält man eine Gleichung

$$F\,\{[C_1],\ [C_2],\ [C_3]\}=0$$

zwischen den Spannungsmomenten der Querschnitte über irgend 3 aufeinander folgenden Stützpunkten. Setzt man nun diese Gleichung n Mal, d. h. so viel Mal an, als je 3 aufeinander folgende Stützpunkte (die beiden Endpunkte A und B mitgerechnet) vorhanden sind, so hat man in Verbindung mit den beiden Gleichungen:

$$f\,\{[A],[C_1],\alpha\}=0 \text{ und } f\,\{[B],[C_n],\beta\}=0$$

im Ganzen $n+2$ Gleichungen, wodurch die n Spannungsmomente $[C_1]$, $[C_2]$ . . . $[C_n]$ und die beiden nicht gegebenen der vier Grössen $[A]$, $[B]$, α, β bestimmt sind.

Sind nun		S_1	S_2	. . .
diejenigen Theile der Reactionen		C_1	C_2	. . .
welche von den Belastungen der Abtheilungen		C_1C_2	C_2C_3	. . .
herrühren, sind ferner	R	R_1	R_2	. . .
die resultirenden Kräfte, welche die Abtheilungen	AC_1	C_1C_2	C_2C_3	. . .
belasten, und	M	M_1	M_2	. . .
ihre Momente in Beziehung auf die Punkte	C_1	C_2	C_3	. . .

so ist:

$$[C_1]=[A]+Al-M;\ [C_2]=[C_1]+S_1l_1-M_1 \text{ etc.,}$$

$$\text{also } A=\frac{M}{l}+\frac{[C_1]-[A]}{l}$$

$$S_1=\frac{M_1}{l_1}+\frac{[C_2]-[C_1]}{l_1};\ C_1=R-A+S_1$$

$$S_2=\frac{M_2}{l_2}+\frac{[C_3]-[C_2]}{l_2};\ C_2=R_1-S_1+S_2 \text{ etc.,}$$

wodurch dann die fraglichen $n+4$ Unbekannten, nämlich die $n+2$ Reactionen A, C_1, C_2 . . . C_n, B und die beiden nicht gegebenen der 4 Grössen $[A]$, $[B]$, α, β bestimmt sind. Zugleich wurden als Zwischenglieder die

Spannungsmomente in den Querschnitten über den Zwischenstützen gefunden, welche als relativ grösste im weiteren Verlaufe der Untersuchung ohnehin zu berechnen gewesen wären.

93. — Der Stab sei auch an den Enden ebenso wie in den Zwischenpunkten C nur gestützt und in den einzelnen Abtheilungen nur gleichförmig belastet:

mit $p \quad p_1 \quad p_2 \ldots$ pro Längeneinheit
in den Abtheilungen $= l \quad l_1 \quad l_2 \ldots$ *).

Die in voriger Nummer erwähnten Gleichungen $f=0$ und $F=0$ werden dann:

$$[C_1]+2[C_2]=-\frac{p_1 l_1^2}{4}+\frac{6EJ}{l_1}(\lambda_1-\gamma_2)$$

$$l_1[C_1]+2(l_1+l_2)[C_2]+l_2[C_3]=-\frac{p_1 l_1^3+p_2 l_2^3}{4}+6EJ(\lambda_1-\lambda_2).$$

Das System der n Gleichungen, welche nach Analogie dieser letzten Gleichung für je drei aufeinander folgende Stützpunkte angesetzt werden, bestimmt wegen

$$[A]=[B]=0$$

die n unbekannten Spannungsmomente:

$$[C_1] \quad [C_2] \quad \ldots \quad [C_n]^{**}).$$

---

*) Dieser Fall hat u. A. Interesse behufs der (wenigstens vorläufig angenäherten) Berechnung eines Brückenträgers, der ununterbrochen über mehrere Pfeiler fortläuft; wird dabei auch einstweilen die vom Eigengewichte der Brücke herrührende bleibende Belastung als gleichförmig auf der ganzen Länge vertheilt angenommen, so entspricht doch die Verschiedenheit von p in den einzelnen Abtheilungen der Voraussetzung, dass einzelne Abtheilungen ausserdem durch eine bewegliche gleichförmig vertheilte Last augenblicklich überdeckt sind. Indem man so statt aller möglichen Längen und Lagen eines oder mehrerer getrennter Lastzüge auf der Brücke nur diejenigen Längen und Lagen betrachtet, wobei gerade ganze Abtheilungen zwischen zwei Stützpunkten von dem Zuge oder den Zügen belastet sind, erhält man die Maximalwerthe der Schubkraft und des Spannungsmoments, welche in irgend einem Querschnitte stattfinden können, wenn auch nicht genau, so doch mit ziemlicher Näherung.

**) In der Auflösung dieser Gleichungen besteht die einzige Schwierigkeit; sie geschieht am einfachsten dadurch, dass diese Gleichungen:

$$\begin{aligned} 2(l+l_1)[C_1]+l_1[C_2] &= H_1 \\ l_1[C_1]+2(l_1+l_2)[C_2]+l_2[C_3] &= H_2 \\ l_2[C_2]+2(l_2+l)[C_3]+l_3[C_4] &= H_3 \text{ etc.} \end{aligned}$$

addirt werden nach ihrer Multiplication mit gewissen Coefficienten $\mu_1 \; \mu_2 \; \mu_3 \ldots$, welche so gewählt sind, dass bei der Addition alle Unbekannten bis auf eine verschwinden. Nimmt man zu dem Ende $\mu_1=1$, so verschwindet offenbar

$[C_1]$, wenn $\mu_2=-2\frac{l+l_1}{l_1}$, dann auch

$[C_2]$, „ $\mu_3=-\frac{l_1}{l_2}-2\frac{l_1+l_2}{l_2}\mu_2$,

$[C_3]$, „ $\mu_4=-\frac{l_2}{l_3}\mu_2-2\frac{l+l_3}{l_3}\mu_3$ etc.

genommen wird. Ist so aus der resultirenden Gleichung mit nur $[C_n]$ diese Unbekannte gefunden, so findet man sofort $[C_{n-1}]$ aus der letzten,
dann $[C_{n-2}]$ „ „ vorletzten etc.
der ursprünglichen Gleichungen.

Danach findet man:

$$A = \frac{pl}{2} + \frac{[C_1]}{l}$$

$$S_1 = \frac{p_1 l_1}{2} + \frac{[C_2] - [C_1]}{l_1}; \; C_1 = pl - A + S_1$$

$$S_2 = \frac{p_2 l_2}{2} + \frac{[C_3] - [C_2]}{l_2}; \; C_2 = p_1 l_1 - S_1 + S_2 \text{ etc.}$$

Sind ferner . . . . $D \quad D_1 \quad D_2$ . . . die mittleren Bruchpunkte
in den Abtheilungen . . . . . . $l \quad l_1 \quad l_2$ . . .
und $d \quad d_1 \quad d_2$ . . . ihre Entfernungen
von den Punkten $A \quad C_1 \quad C_2$ . . . ,

so ist nach Nr. 62:

$$d = \frac{A}{p}; \; [D] = \frac{A^2}{2p}$$

$$d_1 = \frac{S_1}{p_1}; \; [D_1] = [C_1] + \frac{S_1{}^2}{2p_1}$$

$$d_2 = \frac{S_2}{p_2}; \; [D_2] = [C_2] + \frac{S_2{}^2}{2p_2} \text{ etc.}$$

Desgl. sind die Abstände . . . $f \quad f_1 \quad f_2$ . . .
der Inflexionspunkte . $F \quad F_1 \quad F_2$ . . .
von den Stützpunkten $A \quad C_1 \quad C_2$ . . .

nach den betreffenden Formeln sub Nr. 62:

$$f = 2d$$

$$f_1 = d_1 \pm \sqrt{d_1{}^2 + 2\frac{[C_1]}{p_1}}$$

$$f_2 = d_2 \pm \sqrt{d_2{}^2 + 2\frac{[C_2]}{p_2}} \text{ etc.,}$$

wobei die Doppelzeichen beide gelten, entsprechend je 2 Inflexionspunkten in jeder Abtheilung ausser den beiden äussersten.

Um endlich auch nach Nr. 62 die Punkte grösster Durchbiegung und die grössten Durchbiegungen selbst zu finden, sind zuvor die Winkel α, γ_1, γ_2 . . . zu berechnen, was nach Analogie der obigen Gleichung zwischen

$$[C_1], \; [C_2] \text{ und } \gamma_2$$

geschehen kann.

94. — In den folgenden Nummern sind beispielsweise die Resultate der in Nr. 93 angedeuteten Rechnung für einige Fälle unter der besonderen Voraussetzung zusammengestellt, dass alle Stützen gleich hoch und in gleichen Entfernungen liegen und dass die Belastung auf der ganzen Länge des Stabes gleichförmig vertheilt ist:

$$\lambda = \lambda_1 = \lambda_2 \; . \; . \; . \; . = \lambda_n = 0$$

$$l = l_1 = l_2 \; . \; . \; . \; . = l_n$$

$$p = p_1 = p_2 \; . \; . \; . \; . = p_n$$

In gleichen Abständen beiderseits von der Mitte des Stabes sind dann alle Verhältnisse gleich, und sind deshalb alle Werthe nur für die dem Endpunkte A zunächst liegende Stabhälfte angegeben. Auch die Gleichungen zur Berechnung der Spannungsmomente

$$[C_1] \quad [C_2] \ldots$$

reduciren sich dadurch auf nur $\frac{n}{2}$ resp. $\frac{n+1}{2}$, jenachdem n eine gerade oder ungerade Zahl ist; sie sind nämlich:

$$4[C_1] + [C_2] = -\frac{pl^2}{2}$$

$$[C_1] + 4[C_2] + [C_3] = -\frac{pl^2}{2}$$

$$[C_2] + 4[C_3] + [C_4] = -\frac{pl^2}{2}$$

$$\vdots \qquad \vdots \qquad \vdots$$

$$\left[C_{\frac{n}{2}-1}\right] + 5\left[C_{\frac{n}{2}}\right] = -\frac{pl^2}{2} \text{ resp. } 2\left[C_{\frac{n-1}{2}}\right] + 4\left[C_{\frac{n+1}{2}}\right] = -\frac{pl^2}{2}.$$

95. — Der Stab liegt auf 3 Stützen:*)

$$A \quad C_1 \quad B.$$

Dann ist:

$$[C_1] = -\frac{pl^2}{8}$$

$$A = \frac{3}{8}pl; \; C_1 = -\frac{5}{4}pl$$

$$A : C_1 = 3 : 10$$

$$d = \frac{3}{8}l; \; [D] = 0{,}0703\,pl^2 = -0{,}562\,[C_1]$$

$$f = 0{,}75\,l.$$

96. — Der Stab liegt auf 4 Stützen:

$$A \quad C_1 \quad C_2 \quad B.$$

Dann ist:

$$[C_1] = -\frac{pl^2}{10}$$

$$A = \frac{2}{5}pl; \; C_1 = \frac{11}{10}pl$$

$$A : C_1 = 4 : 11$$

$$d = \frac{2}{5}l; \; [D] = 0{,}08\,pl^2 = -0{,}8\,[C_1]$$

$$d_1 = \frac{1}{2}l; \; [D_1] = 0{,}025\,pl^2$$

$$f = 0{,}8\,l; \; f_1 = 0{,}276\,l.$$

---

*) Für diesen Fall ergeben sich die Resultate auch aus Nr. 74.

97. — Der Stab liegt auf 5 Stützen:

$$A \quad C_1 \quad C_2 \quad C_3 \quad B.$$

Dann ist:

$$[C_1] = -\frac{3}{28}\,p\,l^2;\ [C_2] = -\frac{1}{14}\,p\,l^2$$

$$[C_1]:[C_2] = 3:2$$

$$A = \frac{11}{28}\,p\,l;\ C_1 = \frac{8}{7}\,p\,l;\ C_2 = \frac{13}{14}\,p\,l$$

$$A:C_1:C_2 = 11:32:26$$

$$d = \frac{11}{28}\,l;\ [D] = 0{,}0772\,p\,l^2 = -0{,}722\,[C_1]$$

$$d_1 = \frac{15}{28}\,l;\ [D_1] = 0{,}0364\,p\,l^2$$

$$f = 0{,}786\,l;\ f_1 = \begin{cases} 0{,}266\,l \\ 0{,}805\,l. \end{cases}$$

98. — Der Stab liegt auf 7 Stützen:

$$A \quad C_1 \quad C_2 \quad C_3 \quad C_4 \quad C_5 \quad B.$$

Dann ist:

$$[C_1] = -\frac{11}{104}\,p\,l^2;\ [C_2] = -\frac{1}{13}\,p\,l^2;\ [C_3] = -\frac{9}{104}\,p\,l^2$$

$$[C_1]:[C_2]:[C_3] = 11:8:9$$

$$A = \frac{41}{104}\,p\,l;\ C_1 = \frac{59}{52}\,p\,l;\ C_2 = \frac{25}{26}\,p\,l;\ C_3 = \frac{53}{52}\,p\,l$$

$$A:C_1:C_2:C_3 = 41:118:100:106$$

$$d = \frac{41}{104}\,l;\ [D] = 0{,}0777\,p\,l^2 = -0{,}735\,[C_1]$$

$$d_1 = \frac{55}{104}\,l;\ [D_1] = 0{,}0340\,p\,l^2$$

$$d_2 = \frac{51}{104}\,l;\ [D_2] = 0{,}0434\,p\,l^2$$

$$f = 0{,}788\,l;\ f_1 = \begin{cases} 0{,}268\,l \\ 0{,}790\,l \end{cases};\ f_2 = \begin{cases} 0{,}196\,l \\ 0{,}785\,l. \end{cases}$$

99. — Der Stab liegt auf 9 Stützen:

$$A \quad C_1 \quad C_2 \quad C_3 \quad C_4 \quad C_5 \quad C_6 \quad C_7 \quad B.$$

Dann ist:

$$[C_1] = -\frac{41}{388}\,p\,l^2;\ [C_2] = -\frac{15}{194}\,p\,l^2;\ [C_3] = -\frac{33}{388}\,p\,l^2;\ [C_4] = -\frac{8}{97}\,p\,l^2$$

$$[C_1]:[C_2]:[C_3]:[C_4] = 41:30:33:32$$

$$A = \frac{153}{388}\,p\,l;\ C_1 = \frac{110}{97}\,p\,l;\ C_2 = \frac{187}{194}\,p\,l;\ C_3 = \frac{98}{97}\,p\,l;\ C_4 = \frac{193}{194}\,p\,l$$

$$A:C_1:C_2:C_3:C_4 = 153:440:374:392:386$$

$$d = \frac{153}{388}\,l;\ [D] = 0{,}0777\,p\,l^2 = -0{,}735\,[C_1]$$

$$d_1 = \frac{205}{388} l;\ [D_1] = 0{,}0339\, p l^2$$

$$d_2 = \frac{191}{388} l;\ [D_2] = 0{,}0438\, p l^2$$

$$d_3 = \frac{195}{388} l;\ [D_3] = 0{,}0412\, p l^2$$

$$f = 0{,}789\, l;\quad f_1 = \begin{cases} 0{,}268\, l \\ 0{,}789\, l \end{cases}$$

$$f_2 = \begin{cases} 0{,}196\, l \\ 0{,}788\, l \end{cases};\quad f_3 = \begin{cases} 0{,}215\, l \\ 0{,}790\, l. \end{cases}$$

100. — Die Beispiele sub Nr. 95—99 gestatten einige Folgerungen, welche dazu dienen können, bei noch grösserer Zahl von Stützpunkten unter den sub Nr. 94 angeführten Voraussetzungen auch ohne weitere Rechnung die Hauptverhältnisse zu beurtheilen. Es ist nämlich jenen Beispielen zufolge bei

folge bei	3	4	5	7	9 Stützen:
$\frac{-[C_1]}{p l^2} =$	0,125	0,1	0,1071	0,1058	0,1057
$\frac{[D]}{p l^2} =$	0,0703	0,08	0,0772	0,0777	0,0777
$\frac{[D]}{-[C_1]} =$	0,562	0,8	0,722	0,735	0,735
$\frac{A}{p l} =$	0,375	0,4	0,3929	0,3942	0,3943
$\frac{C_1}{p l} =$	1,25	1,1	1,1429	1,1346	1,1340.

Die Absolutwerthe der Spannungsmomente über den Stützen nehmen in jedem Falle von den Enden A und B gegen die Mitte des Stabes hin abwechselnd zu und ab; $-[C_1]$ ist immer am grössten und nähert sich bei zunehmender Zahl der Stützen einer gewissen Grenze $= 0{,}1057 \,..\, p l^2$. Nach der Mitte hin nähert sich $-[C_m]$ natürlich der Grenze $\frac{p l^2}{12}$ (cf. Nr. 66).

Auch die Spannungsmomente der mittleren Bruchquerschnitte nehmen von Aussen nach der Mitte hin abwechselnd ab und zu; $[D]$ ist am grössten und nähert sich der Grenze $0{,}0777 \,..\, p l^2$. Nach der Mitte hin ist der Grenzwerth von $[D_m]$ offenbar $= \frac{p l^2}{24}$ (cf. Nr. 66).

Immer ist $-[C_1] > [D]$; das Verhältniss $\frac{[D]}{-[C_1]}$ nähert sich mit zunehmender Zahl von Stützen der Grenze 0,735.

Die Pressung der äusseren Stützen hat zur Grenze: $A = 0{,}3943 \,..\, p l$. Die Pressungen der Zwischenstützen C_1, C_2 .. sind abwechselnd grösser und kleiner, als $p a$ und haben nach der Mitte hin $p a$ zur Grenze; C_1 ist immer die grösste Pressung einer Stütze und nähert sich der Grenze $1{,}134 \,..\, p l$.

II. Gerader stabförmiger Körper von veränderlichem Querschnitte.

a. Allgemeine Methode.

101. — Wenn in diesem Falle der Stab $AB = l$ am einen Ende befestigt, am anderen frei, oder wenn er beiderseits unterstützt ist, so sind die resultirenden Schubkräfte R und Spannungsmomente M der verschiedenen Querschnitte unabhängig von der Biegung des Stabes, lassen sich also ebenso berechnen, als ob der Querschnitt constant wäre.

Um bei beliebiger Belastung die Art der Biegung, also die Gleichung der elastischen Linie zu finden, ist bei stetiger Veränderlichkeit des Querschnitts nach Analogie von Nr. 55 zu verfahren: für den bei A befestigten Stab wird die horizontale Tangente der elastischen Linie im Punkte A, für den beiderseits unterstützten Stab die horizontale Verbindungslinie AB der Endpunkte der elastischen Linie als x-Axe, in beiden Fällen die Lothrechte durch A als z-Axe angenommen, und werden dann nach und nach die Gleichungen

$$z = \psi_1(x)\,;\; z = \psi_2(x) \ldots$$

der einzelnen Strecken der elastischen Linie entwickelt, welche event. durch solche Punkte getrennt sind, in denen eine Stetigkeitsunterbrechung (cf. Nr. 56) stattfindet; in den betreffenden je 2 Mal zu integrirenden Gleichungen:

$$\frac{d^2z}{dx^2} = f_1(x);\; \frac{d^2z}{dx^2} = f_2(x) \ldots$$

sind nur die rechten Seiten $= \frac{M}{EJ}$ jetzt weniger einfache Functionen von x wegen der gleichzeitigen Veränderlichkeit von M und J. Auch ist zu bemerken, dass im Falle des beiderseits unterstützten Stabes die Gleichungen der einzelnen Strecken vorläufig mit der unbekannten Constanten α behaftet erhalten werden, deren Werth erst schliesslich durch Substitution der zusammengehörigen Werthe

$$x = l;\; z = 0$$

in der Gleichung der letzten Strecke nächst dem Stützpunkte B gefunden wird.

Bei stellenweise plötzlichen Aenderungen des Querschnitts ändert sich in diesem Verfahren Nichts, als dass dadurch neue Stetigkeitsunterbrechungen der elastischen Linie an den betreffenden Stellen bedingt werden, welche, entsprechend einer plötzlichen Aenderung des Krümmungsradius ϱ oder der zweiten Ableitung $\frac{d^2z}{dx^2}$, von der 3^{ten} Ordnung in Beziehung auf die Ordinate z sind, während die Stetigkeitsunterbrechungen der Belastung nur solche der 4^{ten} oder 5^{ten} Ordnung von z verursachen. (Cf. Nr. 56.)

102. — Wenn der Stab an einem Ende befestigt, am anderen unterstützt, oder wenn er beiderseits befestigt ist oder endlich noch auf Zwischenstützen ruht, so sind die Schubkräfte und Spannungsmomente der Querschnitte von der Art der Biegung abhängig, und es ist dann nach Analogie von Nr. 88 resp. 91 zu verfahren. Plötzliche Querschnittsänderungen bedingen dabei wieder Stetigkeitsunterbrechungen der elastischen Linie, also verschiedene Gleichungen ihrer beiderseits angrenzenden Theile.

Bei zusammengesetzten Trägern (Brückenträgern) macht im Allgemeinen die Rücksicht auf die praktische Ausführung dergleichen plötzliche Aenderungen des Querschnitts an gewissen Stellen nöthig, und zwar in der Weise, dass zwischen je zwei aufeinander folgenden dieser Stellen der Querschnitt constant gehalten wird; zur Ermittelung der passenden Querschnittsdimensionen der einzelnen so gebildeten Strecken des Trägers kann man dieselben zunächst näherungsweise denjenigen Werthen von R und M entsprechend machen, welche sich nach den sub **I.** entwickelten Regeln unter der Voraussetzung eines durchweg constanten Querschnitts ergeben, dann den dadurch veränderten Werthen des Trägheitsmoments und des ursprünglich angenommenen Eigengewichts des Trägers entsprechend corrigirte Werthe von R und M berechnen, und diesen gemäss endlich die Querschnitte der einzelnen Trägerabtheilungen corrigiren.

103. — Wenn z. B. ein continuirlich über mehre Pfeiler C_1 C_2 .. C_n fortlaufender Brückenträger zu berechnen ist, der auch auf den Endpfeilern A und B nur lose aufliegt, so kann man zunächst unter Voraussetzung eines constanten Querschnitts und eines constanten erfahrungsmässigen mittleren Eigengewichts des Trägers pro Längeneinheit, eines gewissen den Umständen entsprechenden Gewichts der Brückenbahn und unter Berücksichtigung verschiedener Belastungszustände nach Massgabe von Nr. 93, 1. Anmerkung, also überhaupt unter der Annahme gleichförmig vertheilter verschiedener Belastungen

$$= p \qquad p_1 \qquad p_2 \quad \ldots \quad p_n \text{ pro Längeneinheit}$$

in den Strecken $AC_1 \quad C_1C_2 \quad C_2C_3 \ldots C_nB$

nach der sub Nr. 93 angegebenen Methode die grössten Werthe von R und M berechnen, welche in den Abtheilungen:

$$\begin{array}{llll} A\,C^1 & C^1\,C^2 & C^2\,C^3 \ldots & C^m\,C_1 \\ C_1\,C_1^1 & C_1^1\,C_1^2 & C_1^2\,C_1^3 \ldots & C_1^{m_1}\,C_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ C_n\,C_n^1 & C_n^1\,C_n^2 & C_n^2\,C_n^3 \ldots & C_n^{m_n}\,B \end{array}$$

vorkommen, für welche schliesslich constante und sprungweise veränderte Querschnitte gewählt werden sollen. Hat man dann demgemäss die Querschnitte dieser Abtheilungen passend gewählt, so sind dadurch sowohl die Belastungen pro Längeneinheit*), als auch namentlich die Trägheitsmomente

---

*) Auch kann man jetzt ausser denjenigen Belastungszuständen, wobei die beweg-

andere und zwar im Allgemeinen verschieden für die verschiedenen Abtheilungen geworden, etwa:

$$\begin{array}{llll} p\ ; J & p^1\ ; J^1 & \ldots\ldots & p^m\ ; J^m \\ p_1 ; J_1 & p_1^1\ ; J_1^1 & \ldots\ldots & p_1^{m_1} ; J_1^{m_1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ p_n ; J_n & p_n^1\ ; J_n^1 & \ldots\ldots & p_n^{m_n} ; J_n^{m_n}. \end{array}$$

In Folge dessen ändert sich auch die elastische Linie, und ändern sich also auch die Werthe von R und M für die verschiedenen Querschnitte, welche erst gefunden werden, nachdem zuvor die geänderten Werthe der Reactionen der Stützen berechnet wurden.

Entwickelt man zu dem Ende successive die Gleichungen aller

$$(m+1) + (m_1+1) + \ldots + (m_n+1)$$

Abtheilungen des Trägers, von A angefangen, bezogen auf AB als Abscissenaxe und die Lothrechte durch A als Ordinatenaxe, so erhält man dieselben behaftet mit den $(n+2)$ Unbekannten:

$$A \quad \alpha \quad C_1 \quad C_2 \ldots\ldots C_n,$$

zu deren Bestimmung $(n+2)$ Gleichungen dienen: $(n+1)$ Gleichungen, welche ausdrücken, dass die Ordinaten der Stützpunkte

$$C_1 \quad C_2 \ldots C_n \quad B$$

gegebene Grössen sind, und eine Gleichung, welche durch Elimination der Reactionskraft B zwischen den beiden Gleichgewichtsbedingungen aller äusseren Kräfte an dem als starr gedachten ganzen Träger hervorgeht.

104. — Die zeitraubenden Rechnungen, welche mit dem in voriger Nr. erklärten Verfahren verbunden sind, machen es wünschenswerth, dasselbe durch eine kürzere Methode ersetzen zu können. Zu dem Zwecke liegt es nahe, analog dem Verfahren sub Nr. 93 zunächst auch hier eine allgemeine Relation zwischen den Spannungsmomenten der Querschnitte über 3 aufeinander folgenden Stützpunkten C_1, C_2, C_3 aufzusuchen, weil, wenn aus den n nach Analogie dieser Relation anzusetzenden Gleichungen jene n unbekannten Spannungsmomente gefunden wären, dadurch die Reactionen der Stützen ebenso einfach wie in Nr. 93 bestimmt sein würden, mithin auch die Schubkräfte R und Spannungsmomente M für alle Querschnitte des Trägers dann unmittelbar berechnet werden könnten.

Um eine solche Relation

$$F \{ [C_1], [C_2], [C_3] \} = 0$$

zu finden, kann man bemerken, dass die veränderte Biegung und dadurch bedingte andere Druckvertheilung auf die Stützen bei dem Träger, dessen

---

liche Last durch die Stützpunkte begrenzt wird, noch solche der Rechnung unterwerfen, wobei diese Last sich bis zu beliebigen der Zwischenpunkte

$$\begin{array}{cccc} C^1 & C^2 & C^3 & \ldots \\ C_1{}^1 & C_1{}^2 & C_1{}^3 & \ldots \end{array}$$

erstreckt.

Querschnitt nicht mehr constant ist, in weit höherem Grade durch das veränderliche Trägheitsmoment J, als durch die veränderte Belastung pro Längeneinheit bedingt wird, so dass letztere (abgesehen von solchen Belastungszuständen, wobei die bewegliche Last bis zu den Zwischenpunkten zwischen den Stützpunkten reicht: cf. Nr. 103, Anmerkung) auch hier mit kaum geringerem Rechte, als früher sub Nr. 93, in den einzelnen Strecken

$$A C_1 = l;\; C_1 C_2 = l_1;\; C_2 C_3 = l_2 \ldots$$

$$\text{constant} = \quad p; \quad p_1; \quad p_2 \ldots$$

gesetzt werden kann, weil das Eigengewicht des Trägers selbst, welches neben dem constanten Gewichte der Brückenbahn und der zufälligen, beweglichen Last immerhin nur einen Theil von $p, p_1, p_2 \ldots$ ausmacht, zudem bis zu gewissem Grade eine Ausgleichung dadurch erfährt, dass in den mittleren Querschnitten, für welche M am grössten, zugleich $R = 0$ ist, die grössten Dimensionen und Gewichte der durch M bedingten Constructionselemente des zusammengesetzten Trägers hier also mit den kleinsten der durch R bedingten zusammentreffen; nur über den Zwischenstützen treffen Maximalwerthe von M und R zusammen, so dass die Voraussetzung einer nach wie vor in den einzelnen Strecken $l, l_1, l_2 \ldots$ gleichförmig vertheilten Belastung nur insofern etwas fehlerhaft sein wird, als die Reactionen der Zwischenstützen, insbesondere C_1 und C_n ein wenig zu klein, die Reactionen A und B der Endstützen also entsprechend zu gross gefunden werden.

Was ferner das Trägheitsmoment J betrifft, so kann dasselbe, wenn es bei der Ausführung schliesslich auch absatzweise veränderlich gemacht wird, bei der Rechnung doch stetig veränderlich vorausgesetzt werden, und zwar — entsprechend dem Ziele, welches hierbei eben angestrebt wird — der Art veränderlich, dass für jeden Querschnitt das Spannungsmoment dem Widerstandsmomente gleich ist (cf. Nr. 50), also

$$\frac{EJ}{\varrho} = k\frac{J}{e},$$

unter e den grösseren der Abstände e' und e'' verstanden, wenn $k' = k''$ gesetzt wird, oder unter k den kleineren der beiden Werthe k' und k'' verstanden, wenn $e' = e''$ ist, oder endlich unter $\frac{k}{e}$ den für denselben Querschnitt gleichen Werth $\frac{k'}{e'} = \frac{k''}{e''}$ verstanden, wenn, wie bei dem Brückenträger in der That zu fordern ist, die Querschnitte so proportionirt werden, dass die Zug- und die Druckfestigkeit des Materials gleichmässig in Anspruch genommen werden.

Daraus folgt, dass der Krümmungsradius ϱ der elastischen Linie eines solchen Trägers oder Stabes von gleichem Widerstande $= \frac{Ee}{k}$, mithin proportional der Höhe h des betreffenden Querschnitts ist; insbesondere für

$$\frac{e}{k} = \frac{e'}{k'} = \frac{e''}{k''}, \text{ also } h = e' + e'' = \frac{e}{k}(k' + k'') \text{ wird: } \varrho = \frac{Eh}{k' + k''}.$$

Werden also schliesslich noch Querschnitte von constanter Höhe vorausgesetzt, wie es bei continuirlichen Brückenträgern der Fall zu sein pflegt, so wird ϱ constant und sei dann mit r bezeichnet; die elastische Linie besteht dann aus Kreisbögen mit demselben Radius r, welche in den $M=0$ entsprechenden Inflexionspunkten mit entgegengesetzten Krümmungen in einander übergehen. Für diesen Fall möge die oben erwähnte Gleichung $F=0$ ermittelt werden.

105. — Dazu sind analog dem früher bei Voraussetzung eines constanten Querschnitts angewendeten Verfahren zunächst für den Fall eines beiderseits unter den Richtungswinkeln α und β befestigten und gleichförmig belasteten Stabes $AB=l$ die Spannungsmomente $[A]$ und $[B]$ der Endquerschnitte durch die Winkel α und β auszudrücken. Sind zu dem Ende X und Y (Fig. 15) die Inflexionspunkte der elastischen Linie, a, c, b die Mittelpunkte der Kreisbögen AX, XY, YB mit den gleichen Radien r, so sind bei übrigens denselben Bezeichnungen, wie in Nr. 61, die Entfernungen x der Punkte X und Y vom Punkte A die beiden Wurzeln der quadratischen Gleichung:

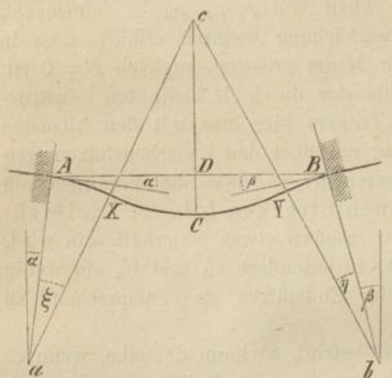

Fig. 15.

$$[A] + Ax - \frac{px^2}{2} = 0 \text{ oder } x^2 - 2\frac{A}{p}x - 2\frac{[A]}{p} = 0.$$

Wird insbesondere $AX = x$, $BY = y$ gesetzt, so ist das Product beider Wurzeln:

$$x(l-y) = -2\frac{[A]}{p}; \text{ daraus } [A] = -\frac{p}{2}x(l-y)$$

oder mit $x = r\xi$, $y = r\eta$, $l = r\lambda$:

$$[A] = -\frac{pr^2}{2}\xi(\lambda - \eta).$$

Die Winkel ξ und η sind mit Rücksicht auf Fig. 15 bestimmt durch die Gleichungen:

$$r[2 \sin(\alpha+\xi) - \sin\alpha] + r[2 \sin(\beta+\eta) - \sin\beta] = l$$

und $CD = 2r[1-\cos(\alpha+\xi)] - r(1-\cos\alpha) = 2r[1-\cos(\beta+\eta)] - r(1-\cos\beta)$

oder wegen der Kleinheit aller Winkel:

$$(\alpha+2\xi) + (\beta+2\eta) = \lambda$$

$$(\alpha+\xi)^2 - \frac{\alpha^2}{2} = (\beta+\eta)^2 - \frac{\beta^2}{2}.$$

Die Einsetzung der hieraus sich ergebenden Werthe von ξ und η in den obigen Ausdruck von $[A]$ liefert mit den Bezeichnungen:

$$\gamma = \alpha + \beta;\ \delta = \alpha - \beta:$$

$$[A] = -\frac{pr^2}{32}\,\frac{\lambda^2 - \gamma^2 - 2\lambda\delta}{\lambda+\gamma}\left(4\lambda - \frac{\lambda^2-\gamma^2+2\lambda\delta}{\lambda+\gamma}\right).$$

Daraus folgt $[B]$ durch Vertauschung von δ mit $-\delta$. Wenn man endlich γ und δ aus diesen beiden Gleichungen für $[A]$ und $[B]$ entwickelt, so ergiebt sich auch

$$\beta = \frac{\gamma - \delta}{2}$$

als Function von $[A]$ und $[B]$, und zwar bei Wiedereinführung des Werthes $\frac{l}{r}$ für λ:

$$\beta = \frac{l}{r}\left\{-\frac{1}{2} + \left(1 - 2\frac{[A]-[B]}{pl^2}\right)\cdot\sqrt{\left(1-2\frac{[A]-[B]}{pl^2}\right)^2 + 8\frac{[A]}{pl^2}}\right\}.$$

106. — Werden nun alle Stützen als in gleicher Höhe liegend vorausgesetzt*), so erhält man, bei denselben Buchstabenbezeichnungen wie in Nr. 93, die gesuchte Beziehung zwischen den Spannungsmomenten der Querschnitte über drei aufeinander folgenden Stützen, wenn man in der für β gefundenen Gleichung

$$\begin{array}{lccccc} \text{zuerst} & \beta & p & l & [A] & [B] \\ \text{mit} & -\gamma_2 & p_1 & l_1 & [C_1] & [C_2] \\ \text{und dann mit} & \gamma_2 & p_2 & l_2 & [C_3] & [C_2] \end{array}\ \text{vertauscht,}$$

endlich beide Werthe von γ_2 einander gleich setzt; das giebt:

$$\frac{l_1}{2} - l_1\left(1-2\frac{[C_1]-[C_2]}{p_1 l_1^2}\right)\cdot\sqrt{\left(1-2\frac{[C_1]-[C_2]}{p_1 l_1^2}\right)^2 + 8\frac{[C_1]}{p_1 l_1^2}} =$$
$$= -\frac{l_2}{2} + l_2\left(1+2\frac{[C_2]-[C_3]}{p_2 l_2^2}\right)\cdot\sqrt{\left(1+2\frac{[C_2]-[C_3]}{p_2 l_2^2}\right)^2 + 8\frac{[C_3]}{p_2 l_2^2}}.$$

Bei grösserer Zahl von Stützen ist freilich auch diese Relation nicht bequem zu gebrauchen; bei wenigen Stützen, d. i. dem gewöhnlich vorkommenden Falle, kann sie jedoch unter Umständen gute Dienste leisten.

107. — Sind z. B. nur 3 Stützen vorhanden, also eine Zwischenstütze C ausser den Endstützen A und B, so hat man wegen $[A] = [B] = 0$ zur Berechnung von $[C]$ die quadratische Gleichung:

$$\left(\frac{1}{p^2 l^3} + \frac{1}{p_1^2 l_1^3}\right)\cdot[C]^2 + \left(\frac{1}{pl} + \frac{1}{p_1 l_1}\right)\cdot[C] + \frac{l + l_1}{8} = 0,$$

von deren 2 negativen Wurzeln die eine absolut genommen kleiner, die an-

---

*) Ungleiche Höhen wären hier in der That ohne Nutzen, während bei constantem Querschnitte möglichste Gleichwerthigkeit der relativen Bruchquerschnitte dadurch angestrebt werden kann: cf. Nr. 91.

dere grösser als $\frac{p l^2}{2}$ und $\frac{p_1 l_1^2}{2}$ ist; nur die erstere hat praktische Bedeutung. Mit $[C]$ findet man:

$$A = \frac{p l}{2} + \frac{[C]}{l}; \; B = \frac{p_1 l_1}{2} + \frac{[C]}{l_1}$$

und damit die Schubkraft und das Spannungsmoment für jeden beliebigen Querschnitt.

Wäre insbesondere $l = l_1$ und $p = p_1$, so wäre

$$[C] = \frac{p l^2}{2}\left(-1 + \sqrt{\frac{1}{2}}\right) = -0{,}1464 \ldots p l^2,$$

mithin absolut genommen ungefähr im Verhältnisse 7 : 6 grösser, als bei constantem Querschnitte, d. h. als $\frac{p l^2}{8} = 0{,}125\, p l^2$.

108. — Bei 4 symmetrisch angeordneten Stützen $A\, C_1\, C_2\, B$ und bei symmetrischer Belastung, d. h. für

$$l = l_2 \text{ und } p = p_2$$

sind die gleichen Spannungsmomente $[C_1]$ und $[C_2]$, welche mit $[C]$ bezeichnet sein mögen, wenn zudem

$$[C] = -x \frac{p l^2}{2}$$

gesetzt wird, bestimmt durch die Gleichung:

$$\frac{l + l_1}{2} - l(1 - x)^2 = l_1 \sqrt{1 - 4 \frac{p l^2}{p_1 l_1^2} x}$$

oder

$$x^4 - 4x^3 + \left(4 - \frac{l_1 - l}{l}\right) x^2 + 2\left(\frac{l_1 - l}{l} + 2\frac{p}{p_1}\right) x - \frac{(l + l_1)(3 l_1 - l)}{4 l^2} = 0.$$

Nur die positive Wurzel x, welche $< \frac{1}{4} \frac{p_1 l_1^2}{p l^2}$ ist, hat praktische Bedeutung.

Insbesondere für $l = l_1$ und $p = p_1$ erhält man:

$$x = 0{,}2136; \; [C] = -0{,}1068\, p l^2$$

statt $-0{,}1\, p l^2$ bei constantem Querschnitte.

109. — Schliesslich muss in Betreff eines der Biegung unterworfenen Stabes von veränderlichem Querschnitte ausdrücklich darauf aufmerksam gemacht werden, dass alle Gesetze dieses Capitels unter der Voraussetzung einer vor Eintritt der Biegung von den Richtungslinien der äusseren Kräfte rechtwinkelig geschnittenen geraden Mittellinie entwickelt sind, und dass also, wo diese Voraussetzung nicht erfüllt ist, jene Gesetze nur mehr oder weniger angenähert zutreffen. Wenn z. B. ein aus einer verticalen Wand hervorstehender, durch Schwerkräfte zu belastender, consolartiger Träger von rechteckigem verticalen Querschnitte oben durch eine horizontale Ebene begrenzt ist, so ist bei einer geneigten Ebene als unterer Begrenzung zwar die Mittellinie noch gerade, aber nicht mehr horizontal, also auch nicht senkrecht zur Richtung der äusseren Kräfte würde gar die untere Begrenzung durch eine krumme cylindrische Fläche gebildet, so würde auch die Mittellinie eine krumme Linie. Wenn nun auch in beiden Fällen die durch die Belastung hervorgerufenen Spannungen gewöhnlich nach den Regeln dieses Capitels beurtheilt werden, so kann es doch immerhin nur mit einem geringeren Grade von Zuverlässigkeit geschehen, als wenn der beispielsweise betrachtete (von der Kraftebene stets symmetrisch geschnittene) Träger oben und unten durch dieselben Cylinderflächen begrenzt wird von symmetrischer Lage gegen eine horizontale Ebene, in welcher somit die gerade Mittellinie liegt.

Aber selbst wenn die Bedingung einer zur Kraftrichtung senkrechten geraden Mittellinie erfüllt ist, kann doch die den Rechnungen dieses Capitels durchweg zu Grunde liegende Voraussetzung, dass mit der Biegung nur solche innere Zug- und Druckkräfte verbunden seien, welche senkrecht gegen die Flächenelemente der Querschnitte gerichtet sind, bei veränderlichem Querschnitte nicht mehr genau zutreffen. In der That werden im Umfange eines Querschnitts jene inneren Kräfte tangential an diejenigen Curven gerichtet sein, in welchen die Oberfläche des Stabes von einem durch seine gerade Mittellinie gelegten Ebenenbüschel geschnitten wird, und werden von dort aus nach dem Schwerpunkte des Querschnitts hin sich jene Richtungen nur allmählig derjenigen der Mittellinie nähern; mit anderen Worten, es müssten die zur Mittellinie senkrechten ebenen Querschnitte durch krumme Flächen ersetzt werden, welche sowohl die Mittellinie, als auch jene vorgenannten Durchschnittscurven auf der Oberfläche des Stabes rechtwinkelig schneiden, um nach wie vor mit demselben Rechte annehmen zu dürfen, dass in allen Flächenelementen nur normale Spannungen stattfinden.

Zu einer rechnungsmässigen Rücksichtnahme auf den hier hervorgehobenen Umstand, resp. zu einer Correction der bisher entwickelten Formeln liegt indessen bei einfachen massiven Stäben, wie solche im Maschinenbau vorzugsweise vorkommen, sowie auch in allen denjenigen Fällen ein praktisches Bedürfniss nicht vor, wo auch schon von dem Einflusse der auf Verschiebung der Querschnitte wirkenden Kräfte ohne in Betracht kommenden Fehler abstrahirt wird. Nur bei zusammengesetzten, insbesondere Brückenträgern, bei denen die den Kraftmomenten M entsprechenden Spannungen in grösster Entfernung von der Biegungsaxe, nämlich in den Gurtungen concentrirt und ebenso wie diese gerichtet sind, kommt es wesentlich in Betracht, kann es dann aber auch verhältnissmässig leicht in Rechnung gebracht werden, dass, wenn der veränderliche Querschnitt mit einer veränderlichen Höhe verbunden ist, jene Gurtungen und folglich deren Spannungen unter veränderlichen Winkeln gegen die Mittellinie des Trägers gerichtet sind.

b. Körper von gleichem Widerstande.

110. — Im Folgenden sind für die beiden Fälle, dass der stabförmige Körper entweder an einem Ende befestigt, am anderen frei, oder dass er an beiden Enden unterstützt ist, die Regeln zusammengestellt, nach welchen er für einige besondere, einfache Belastungsarten und Querschnittsformen als sogenannter Körper von gleichem Widerstande hergestellt werden kann, d. h. nach welchen gewisse Querdimensionen veränderlich gemacht werden müssen, damit in allen Querschnitten zugleich die Maximalspannung $\sigma' = k'$ oder die Maximalpressung $\sigma'' = k''$ $\left(\text{jenachdem } \frac{\sigma'}{k'} \gtrless \frac{\sigma''}{k''}\right)$, oder noch besser zugleich $\sigma' = k'$ und $\sigma'' = k''$ sei. Dieser Forderung wird entsprochen, wenn für alle Querschnitte

$$\frac{Me}{J} = k$$

gemacht wird, unter $\frac{e}{k}$ das grössere der beiden Verhältnisse $\frac{e'}{k'}$ und $\frac{e''}{k''}$ resp. jedes dieser beiden gleichen Verhältnisse verstanden.

Ausser den Bemerkungen unter Nr. 109 ist dabei noch zu beachten, dass, wenn hiernach gewisse Querschnitte unendlich klein gemacht werden dürften, dieselben doch in Wirklichkeit schon deswegen eine endliche Grösse erhalten müssen, weil die in diesem Capitel stets vernachlässigte Schubkraft R einen verhältnissmässig um so grösseren Einfluss ausübt, je kleiner M ist, dass sie also vorzugsweise oder selbst allein massgebend wird, wo M sehr klein oder gar $= 0$ ist*).

1. Der Körper AB ist einerseits (bei A) befestigt, anderseits frei.

α. Belastung am freien Ende B durch die Kraft P.

111. — Ist der Querschnitt ein Rechteck von constanter Breite b, so sind dessen Höhen h bei A, sowie y in der Entfernung x von B bestimmt durch:

$$h = \sqrt{\frac{6Pl}{kb}}; \quad \frac{y^2}{h^2} = \frac{x}{l}.$$

Für Körper von Gusseisen ist diese parabolische Form zwar leicht herzustellen und zweckmässig (bis auf die nöthige Zugabe an Höhe bei B: cf. Nr. 110), für Körper von Schmiedeeisen oder Holz wird sie aber angemessener Weise durch eine Trapezform des Längenprofils ersetzt, etwa so, dass für $x = \frac{1}{4}\,l$ die Höhe $y = \frac{1}{2}\,h$ gemacht wird, wodurch in Ver-

*) Wegen der betreffenden Correction siehe das vierte Capitel, insbesondere Nr. 179 bis 181.

bindung mit $y = h$ für $x = l$ das Trapez bestimmt ist. Freilich wird dann auf $^3/_4$ der Länge, von A aus gerechnet, der Körper etwas schwächer, als er sein sollte; um dies eben zu vermeiden, müsste die Höhe bei $B = \frac{1}{2} h$ gemacht werden.

Bei Voraussetzung der vollkommen parabolischen Form des Längenschnitts ergiebt sich die Durchbiegung am Ende B:

$$\delta = \frac{8Pl^3}{Ebh^3}$$

d. i. doppelt so gross, als sie unter sonst gleichen Umständen bei constanter Höhe h sein würde.

112. — Ist der Querschnitt ein Rechteck von constanter Höhe h, so sind dessen Breiten b bei A, sowie y in der Entfernung x von B bestimmt durch:

$$b = \frac{6Pl}{kh^2}; \; \frac{y}{b} = \frac{x}{l},$$

entsprechend einem Dreieck als Horizontalschnitt, welches aber der vernachlässigten Schubkräfte wegen durch ein Trapez auf derselben Grundlinie b bei A zu ersetzen ist.

Bei Voraussetzung der vollkommenen Dreiecksform des Horizontalschnitts findet man die Durchbiegung am Ende B:

$$\delta = \frac{6Pl^3}{Ebh^3}$$

d. h. 1,5 Mal so gross, als sie unter sonst gleichen Umständen bei constanter Breite b sein würde. Die elastische Linie ist hier ein Kreisbogen (cf. Nr. 104).

Sollten abgesehen von den Verstärkungen bei B die in dieser und der vorigen Nr. bestimmten Körper gleiches Volumen erhalten, so müsste b dort und h hier so angenommen werden, dass

$$bh^2 = \frac{27\,Pl}{8\,k}$$

ist.

113. — Wenn alle Querschnitte einer gegebenen Figur ähnlich sein sollen (z. B. einem Rechtecke von gegebenem Seitenverhältnisse, einer Ellipse von gegebenem Axenverhältnisse, insbesondere einem Kreise etc.), so sind durch eine einzige Dimension eines Querschnitts alle übrigen Dimensionen desselben bestimmt. Ist y der Werth dieser bestimmenden homologen Dimension für den Querschnitt in der Entfernung x vom Angriffspunkte B der Kraft P, und a derselbe für den Querschnitt bei A, d. h. für $x = l$, so ist:

$$a = \sqrt[3]{\frac{Pl}{km}}; \; \frac{y^3}{a^3} = \frac{x}{l}.$$

Dabei ist m von der Querschnittsform abhängig, nämlich $m = \frac{J}{ey^3}$; z. B. für ähnliche rechteckige Querschnitte:

$$m = \frac{\text{Breite}}{6 \times \text{Höhe}},$$

für kreisförmige Querschnitte (Umdrehungskörper):

$$m = \frac{\pi}{4}.$$

Sofern übrigens eine solche Körperform weder leicht herzustellen, noch von gefälligem Ansehen ist, auch am Ende B ohnehin wieder einer Zugabe an Stärke bedarf, so kann sie durch eine andere von derselben Form des Querschnitts, aber constanter Verjüngung, d. h. durch eine abgekürzte Kegelform ersetzt werden, etwa so, dass für $x = \frac{1}{8}\,l$ die bestimmende Dimension $y = \frac{1}{2}\,a$ gemacht wird. Freilich wird dann der Körper auf $^7/_8$ seiner Länge, von A aus gerechnet, etwas schwächer, als er sein sollte; um dies zu vermeiden, müsste das Verjüngungsverhältniss $\frac{dy}{dx}$ constant = demjenigen gemacht werden, welches bei der theoretischen Form gleicher Festigkeit für $x = l$ stattfindet, was dadurch geschieht, dass für $x = 0$, d. h. bei B: $y = \frac{2}{3}\,a$ gemacht wird.

β. Gleichförmig auf der ganzen Länge l vertheilte Belastung = pl.

114. — Wird dabei ein rechteckiger Querschnitt von constanter Breite b vorausgesetzt, so ergiebt sich dessen Höhe h am Ende A, sowie die Höhe y in der Entfernung x von B:

$$h = l\sqrt{\frac{3p}{kb}};\ \frac{y}{h} = \frac{x}{l}.$$

Eine Verstärkung am Ende B ist hier kaum nöthig, weil die Schubkraft R zusammen mit dem Spannungsmomente M nur allmählig von B gegen A wächst.

2. Der Körper AB ist beiderseits unterstützt.

α. Belastung durch eine in einem Punkte C concentrirte Last P.

115. — Beide Theile AC und BC des Körpers verhalten sich wie wenn sie bei C befestigt und bei A resp. B durch eine Kraft = dem Stützendrucke angegriffen würden; ihre der Aufgabe entsprechenden Formen sind deshalb nach den obigen Regeln sub 1,α zu bestimmen.

Namentlich sind die Endstücke von Wellen, welche nur zu tragen haben, wie z. B. eine Balancierwelle oder die Welle eines Wasserrades, dessen Arbeit durch einen unmittelbar mit ihm verbundenen Zahnkranz fortgeleitet wird, nach der Regel unter Nr. 113 zu gestalten, sofern hier die Querschnitte alle unter sich ähnlich, insbesondere kreisförmig sein sollen. Der anderweitig zu bestimmende Zapfendurchmesser begrenzt dabei die zulässige Verjüngung nach Aussen hin.

116. — Wenn die Last P beweglich wäre, so dass ihr Angriffspunkt C jede Lage zwischen A und B annehmen kann, so ist es zwar nicht mehr möglich, dass bei jeder Lage in jedem Querschnitte

$$\frac{Me}{J} = k$$

ist; allein es lässt sich dann der Forderung entsprechen, dass diese Gleichung in dem jedesmaligen Bruchquerschnitte, d. h. im jedesmaligen Querschnitte C erfüllt sein soll.

Wird z. B. ein rechteckiger Querschnitt von constanter Breite b angenommen, so muss zu dem Ende, wenn die Lange $AB = 2a$ gesetzt wird, die Höhe h in der Mitte:

$$h = \sqrt{\frac{3\,Pa}{kb}}$$

gemacht werden, wonach die Höhe y im Abstande x von der Mitte bestimmt ist durch die Gleichung:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{h^2} = 1;$$

d. h. sie ist = der betreffenden Ordinate einer Ellipse mit den Halbaxen a und h.

β. Gleichförmig auf der ganzen Länge AB = 2a vertheilte Belastung.

117. — Bei Voraussetzung eines rechteckigen Querschnitts von constanter Breite b sind dessen Höhen h und y in der Mitte des Körpers und in der Entfernung x von der Mitte bestimmt durch:

$$h = a\sqrt{\frac{3p}{kb}};\ \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{h^2} = 1.$$

Dieser Körper ist bei gleichen Werthen von a, b und k identisch mit dem unter Nr. 116 bestimmten, wenn $P = pa$ ist.

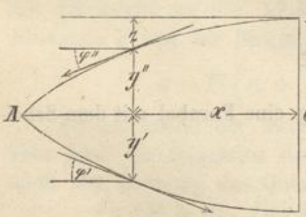

Fig. 16.

118. — Der Träger bestehe aus 2 bogenförmigen flachen Gurten mit constanten Querschnitten F' und F'', welche durch Streben so verbunden sind, dass ihre vertical gemessene gegenseitige Entfernung von den Stützpunkten A und B gegen die Trägermitte hin wächst. (Fig. 16.) Die Dicke der Gurte, längs der Biegungsebene gemessen, sei so klein, dass ohne in Betracht kommende Fehler die Spannung des unteren und die Pressung des oberen Gurts als gleichförmig in den Querschnitten F' resp. F'' vertheilt, mithin auch als in den bogenförmigen Mittellinien concentrirt anzusehen sind; y' und y'' seien die der Abscisse x entsprechenden Ordinaten dieser Mittellinien für den Mittelpunkt O der Horizontalen AB als Anfangspunkt und OA als x-Axe. Beide Curven, sowie die Querschnitte F' und F'' sollen so bestimmt werden, dass die Spannung des unteren Gurts überall $= k'$, die Pressung des oberen überall $= k''$ ist.

Sind φ' und φ'' die Winkel, unter denen die Curven in den Punkten x, y' und x, y'' gegen die x-Axe geneigt sind, so entsprechen jener Forderung die Gleichungen:

$$F' k' \cos\varphi' = F'' k'' \cos\varphi''$$

$$F' k' \cos\varphi' (y' + y'') = \frac{p}{2}(a^2 - x^2),$$

wodurch die Aufgabe noch nicht bestimmt ist, so dass noch eine Beziehung zwischen beiden Curven anzunehmen ist, welche nach der ersten Gleichung nur in einem constanten Verhältnisse von $\cos\varphi'$ zu $\cos\varphi''$ bestehen kann; auch muss für eine von beiden Curven noch ein Punkt ausser A sowie die Richtung der Tangente in demselben gegeben sein.

Es seien z. B. beide Curven congruent, also

$$\varphi' = \varphi'' = \varphi;\ y' = y'' = y$$

und für $x = 0$ gegeben: $\varphi = 0; y = h$.

Dann wird:

$$F' = \frac{pa^2}{4k'h};\ F'' = \frac{pa^2}{4k''h}$$

$$y \cos\varphi = h\left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right).$$

Hiernach kann die Curve durch successive Näherung construirt werden, indem man als erste Annäherung die Curve:

$$y_1 = h\left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right)$$

construirt, dann, wenn für diese der Winkel φ mit φ_1 bezeichnet wird, als zweite Annäherung die Curve:

$$y_2 = \frac{y_1}{\cos\varphi_1}$$

und, wenn für diese der Winkel φ mit φ_2 bezeichnet wird, als dritte Annäherung:

$$y_3 = \frac{y_1}{\cos\varphi_2} \text{ u. s. f.}$$

Uebrigens entspricht der ersten Annäherung eine Parabel mit dem Scheitel S, der Axe SO und der Gleichung:

$$\frac{z_1}{h} = \frac{x^2}{a^2},$$

wenn $h - y_1 = z_1$ gesetzt wird. Die der zweiten Annäherung entsprechende Curve kann näherungsweise dargestellt werden durch die Gleichung:

$$\frac{z_2}{h} = \frac{x^2}{a^2}\left[1 - 2\frac{h^2}{a^2}\left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right)\right];\ z_2 = h - y_2.$$

Obige Aufgabe enthält das Princip der Brückenträger nach Pauli's System, abgesehen von dem Einflusse der Schubkräfte und der entsprechenden Wirkung der die Gurte verbindenden Streben.

B. Die Richtungslinien der äusseren Kräfte liegen in verschiedenen Ebenen oder in einer Ebene, welche nicht Symmetrieebene des geraden stabförmigen Körpers ist.

119. — Die elastische Linie ist im Allgemeinen doppelt gekrümmt; wenigstens fällt, wenn sie auch einfach gekrümmt ist, ihre Ebene im Allgemeinen nicht mit der Kraftebene oder die Biegungsaxe irgend eines Querschnitts nicht mit der Axe des resultirenden Paares M der äusseren Kräfte für diesen Querschnitt zusammen. Ist die Axe sowie die Grösse von M gegeben, so kommt es darauf an, zunächst die Lage der Biegungsaxe, demnächst den entsprechenden Krümmungsradius ϱ (Radius der ersten Krümmung) der elastischen Linie und endlich die Spannung σ für einen beliebigen Punkt des betreffenden Querschnitts zu finden.

Letzterer werde bezogen auf seine Hauptaxen OY und OZ für den Schwerpunkt O (Fig. 17), welche in solchem Sinne positiv genommen sein sollen, dass die Axe einer im Sinne YZ stattfindenden Drehung nach demjenigen Körpertheile hin gerichtet ist, dessen System von äusseren Kräften bei ihrer Versetzung an den Punkt O das Kräftepaar M liefert. OA sei die Axe, welche dieses Kräftepaar in Beziehung sowohl auf die Lage seiner Ebene, als den Sinn seiner Drehung darstellt; sie bilde mit OY den Winkel α, während β der Winkel zwischen OY und der Biegungsaxe OB ist.

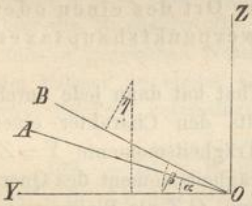

Fig. 17.

Die zu Anfange dieses Capitels bis Nr. 41 incl. erörterten Voraussetzungen werden auch hier beibehalten, und ist deshalb nach Nr. 41 und mit Rücksicht auf Fig. 17 in einem beliebigen Punkte des Querschnitts im Abstande η von der Biegungsaxe OB:

$$\sigma = E\left(\varepsilon_0 + \frac{\eta}{\varrho}\right) = E\left(\varepsilon_0 + \frac{z\cos\beta - y\sin\beta}{\varrho}\right).$$

An die Stelle der zwei Gleichgewichtsbedingungen sub Nr. 43 treten aber jetzt die folgenden drei, unter dF ein unendlich kleines Flächenelement 2ter Ordnung des Querschnitts verstanden:

$$\int\sigma\,dF = 0;\quad \int\sigma\,dF.z = M\cos\alpha;\quad \int\sigma\,dF.y = -M\sin\alpha.$$

Aus diesen Gleichungen in Verbindung mit dem obigen Ausdrucke von σ folgt, wenn mit

$$Y = \int z^2 dF;\quad Z = \int y^2 dF$$

die Trägheitsmomente des Querschnitts für die Hauptaxen OY und OZ bezeichnet werden, ausser $\varepsilon_0 = 0$, entsprechend dem Zusammenfallen der Biegungsaxe mit der neutralen Axe:

$$\frac{\cos\beta}{\varrho} = \frac{M\cos\alpha}{EY};\quad \frac{\sin\beta}{\varrho} = \frac{M\sin\alpha}{EZ}$$

$$\frac{tg\,\beta}{tg\,\alpha} = \frac{Y}{Z}$$

$$\frac{1}{\varrho} = \frac{M}{E}\sqrt{\frac{\cos^2\alpha}{Y^2} + \frac{\sin^2\alpha}{Z^2}}$$

$$\sigma = M\left(\frac{z\cos\alpha}{Y} - \frac{y\sin\alpha}{Z}\right).^{*)}$$

120. — Mit $\alpha = 0$ oder $\alpha = -\frac{\pi}{2}$ gehen diese Formeln über in:

$$\beta = \alpha$$

$$\frac{1}{\varrho} = \frac{M}{EY} \text{ resp. } \frac{M}{EZ}$$

$$\sigma = \frac{Mz}{Y} \text{ resp. } \frac{My}{Z}$$

in Uebereinstimmung mit Nr. 43; die dem Hauptabschnitte dieses Capitels sub **A.** zu Grunde liegende Voraussetzung, dass die äusseren Kräfte in einer Ebene liegen, welche den Körper symmetrisch theilt, kann sonach dahin erweitert werden kann, dass die Kraftebene der Ort des einen oder des andern der beiden Systeme von Schwerpunktshauptaxen aller Querschnitte sei.

Ist $Y = Z$, so ist immer auch $\beta = \alpha$; in der That hat dann jede durch O gezogene Gerade in der Ebene des Querschnitts den Charakter einer Hauptaxe desselben, und zwar mit dem nämlichen Trägheitsmomente $Y = Z$.

Ist $Y > Z$, so ist Z überhaupt das kleinste Trägheitsmoment des Querschnitts für irgend eine Axe, und eine Biegung um OZ als Biegungsaxe ist mit dem kleinstmöglichen Widerstande verbunden. Nennt man deshalb OZ die Axe der leichtesten Biegung, so kann man sagen:

Wenn die Axe des Paares M nicht mit einer Hauptaxe für den Schwerpunkt des Querschnitts zusammenfällt, so liegt die betreffende Biegungsaxe zwischen ihr und der Axe der leichtesten Biegung, und zwar der letzteren um so näher, je mehr

---

*) Die Ableitung dieser Gleichungen beruht darauf, dass

$$\int y\,dF = 0;\ \int z\,dF = 0;\ \int yz\,dF = 0$$

ist, welche Gleichungen den Schwerpunkt und die Hauptaxen charakterisiren.

die Hauptträgheitsmomente Y und Z verschieden sind. Hat der Querschnitt eine sehr längliche Form, so können Y und Z so sehr verschieden sein, dass β nahe $= \frac{\pi}{2}$, obgleich α nahe $= 0$ ist.

121. — Die grösste Spannung

$$\sigma' = M.\ max.\left(\frac{z\cos\alpha}{Y} - \frac{y\sin\alpha}{Z}\right)$$

und die grösste Pressung

$$\sigma'' = M.\ max.\left(\frac{y\sin\alpha}{Z} - \frac{z\cos\alpha}{Y}\right)$$

finden in denjenigen Punkten des Umfangs statt, welche von der Biegungsaxe:

$$\frac{z\cos\alpha}{Y} - \frac{y\sin\alpha}{Z} = 0$$

auf der einen und der andern Seite am weitesten entfernt sind. Beide Maximalwerthe σ' und σ'' ändern sich im Allgemeinen von einem zum andern Querschnitte, und zwar nicht nur mit M, sondern, wenn die Richtungslinien der äusseren Kräfte in verschiedenen Ebenen liegen, zugleich mit α, in welchem Falle selbst bei gleichen und gleich gelegenen Querschnitten, d. h. bei prismatischer Form des Körpers, die Punkte grösster Spannung und Pressung in den verschiedenen Querschnitten verschieden liegen und ihre Oerter auf der Oberfläche des Körpers zwei krumme Linien bilden können.

Wenn die secundären äusseren Kräfte, d. h. die Widerstandskräfte der Stützpunkte, unabhängig von der Biegung durch die Bestimmungsstücke der primären äusseren Kräfte ausgedrückt werden können, so lässt sich eins der letzteren oder eine Dimension des Körpers ohne Weiteres so bestimmen, dass die Maximalwerthe von σ' und σ'' in irgend einem Querschnitte höchstens = gegebenen Werthen k' resp. k'' werden. Es ist dies der Fall, wenn der Körper an einem Ende befestigt und übrigens frei, oder wenn er in zwei Punkten unterstützt ist.

122. — Ist z. B. der Querschnitt eine Ellipse mit den Halbaxen b und c in OY und OZ, so ist

$$tg\beta = \frac{c^2}{b^2} tg\alpha,$$

woraus folgt, dass die Biegungsaxe OB in den Durchmesser fällt, welcher dem zur Axe OA senkrechten Durchmesser, d. h. dem Schnitt der Ebene des Paares M conjugirt ist. Die einander gleichen Maximalwerthe σ' und σ'' finden in den Endpunkten dieses Schnitts statt und sind:

$$\left.\begin{matrix}\sigma'\\ \sigma''\end{matrix}\right\} = \frac{4M}{\pi b^2 c^2}\sqrt{b^2\cos^2\alpha + c^2\sin^2\alpha}.$$

Ist der Querschnitt ein Rechteck mit den Seiten b und c parallel OY resp. OZ, so ist auch

$$tg\beta = \frac{c^2}{b^2} tg\alpha;$$

fällt z. B. der zu OA senkrechte Schnitt der Ebene des Paares M in eine Diagonale des Rechtecks, so fällt die Biegungsaxe in die andere. Die Maximalwerthe σ' und σ'' finden immer in zwei gegenüberliegenden Eckpunkten statt und sind:

$$\left.\begin{matrix}\sigma' \\ \sigma''\end{matrix}\right\} = \frac{6M}{b^2c^2}(b\cos\alpha + c\sin\alpha).$$

123. — Der Ausdruck von $\frac{1}{\varrho}$ in Nr. 119 dient zur Bestimmung der elastischen Linie, also auch zur Bestimmung der Reactionen der Befestigungs- oder Stützpunkte, wenn diese von der Biegung des Stabes abhängen, insbesondere also wenn der Letztere beiderseits befestigt, oder einerseits befestigt und andererseits gestützt, oder ausserdem noch in beliebig vielen Zwischenpunkten gestützt ist. Der erste dieser drei Fälle kann wieder als Fundamentalfall betrachtet werden, aus welchem der zweite durch Specialisirung, der dritte durch Combination abzuleiten ist; praktische Wichtigkeit haben alle diese Fälle nicht, und es möge genügen, das Verfahren der Behandlung des Fundamentalfalls nur allgemein anzudeuten.

124. — AB sei der stabförmige Körper von der Länge l, welcher an beiden Enden so befestigt ist, dass die Tangenten der elastischen Linie in ihren Endpunkten A und B gegebene Richtungen haben, welche mit der Geraden AB sehr kleine Winkel bilden. Mit A und B seien zugleich die der Grösse und Richtung nach zu bestimmenden Widerstandskräfte an den gleich bezeichneten Stabenden, mit $[A]$ und $[B]$ die Spannungsmomente der Endquerschnitte bezeichnet, welche hinsichtlich ihrer Grössen und der Lagen ihrer Ebenen bestimmt werden sollen. Die Art der Belastung sei nur an die allgemeine Voraussetzung dieses Capitels gebunden (Nr. 38); die Veränderlichkeit des Querschnitts wird nur durch die Voraussetzung beschränkt, dass vor der Biegung die Hauptaxen der Schwerpunkte aller Querschnitte des geraden Stabes in zwei Ebenen liegen, welche in der Axe AB sich rechtwinkelig schneiden.

Diese beiden Ebenen und die im Punkte A zu ihrer Durchschnittslinie AB senkrechte Ebene seien die Coordinatenebenen, AB die x-Axe, AY_0 und AZ_0 die beiden anderen Axen, worauf die Lage eines beliebigen Punktes O der elastischen Linie durch seine betreffenden Coordinaten x, y_0, z_0 bezogen wird. Der sehr kleine Winkel, unter welchem die Tangente des Punktes O der elastischen Linie (genommen im Sinne der Bewegung eines die elastische Linie von A nach B durchlaufenden Punktes) gegen die x-Axe geneigt ist, habe in der Ebene XZ_0 die Projection φ_y, in der Ebene XY_0 die Projection φ_z; α_y und α_z seien die gegebenen Werthe dieser Winkel für $x = 0$, d. h. im Punkte A, β_y und β_z dieselben für $x = l$, d. h. im Punkte B; alle diese Winkel werden positiv oder negativ gesetzt, jenachdem sie von dem mit der x-Axe gleich gerichteten Schenkel aus gerechnet nach der Seite der positiven oder negativen Axe AZ_0 resp. AY_0 liegen.

Ist nun $d\varphi$ der Contingenzwinkel der elastischen Linie im Punkte O, so ist mit sehr kleinem Fehler

$$d\varphi = \frac{ds}{\varrho} = \frac{dx}{\varrho},$$

und wenn man diese unendlich kleine Verdrehung $d\varphi$ um die Biegungsaxe des betreffenden Querschnitts in zwei dergleichen um die Hauptaxen OY und OZ dieses Querschnitts zerlegt denkt, nämlich (Fig. 17):

$$d\varphi_y = d\varphi \,.\, \cos\beta = \frac{dx}{\varrho}\cos\beta \text{ um } OY$$

$$\text{und } d\varphi_z = -d\varphi \,.\, \sin\beta = -\frac{dx}{\varrho}\sin\beta \text{ um } OZ,$$

so ergiebt sich sofort:

$$\varphi_y - \alpha_y = \int_0^x \frac{dx}{\varrho}\cos\beta$$

$$\varphi_z - \alpha_z = -\int_0^x \frac{dx}{\varrho}\sin\beta.$$

Wäre der Punkt A nicht fest, so würde er

vermöge $d\varphi_y$ um die Strecke $x\,.\,d\varphi_y$ nach der Richtung Z_0A,

" $d\varphi_z$ " " " $x\,.\,d\varphi_z$ " " " Y_0A

von der Tangente des Punktes O sich entfernen; in der That entfernt sich umgekehrt der Punkt O von der Tangente des Punktes A

$$\text{um } x\,.\,d\varphi_y = \frac{x\,dx}{\varrho}\cos\beta \text{ nach der Richtung } AZ_0$$

$$\text{und " } x\,.\,d\varphi_z = -\frac{x\,dx}{\varrho}\sin\beta \text{ " " " } AY_0.$$

Daraus ergiebt sich:

$$z_0 - x\,\alpha_y = \int_0^x \frac{x\,dx}{\varrho}\cos\beta$$

$$y_0 - x\,\alpha_z = -\int_0^x \frac{x\,dx}{\varrho}\sin\beta.$$

In diesen Gleichungen ist nach No. 119:

$$\frac{\cos\beta}{\varrho} = \frac{M\cos\alpha}{EY};\quad \frac{\sin\beta}{\varrho} = \frac{M\sin\alpha}{EZ}$$

und weil für $x = l$ gegeben ist:

$$\varphi_y = \beta_y;\ \varphi_z = \beta_z;\ z_0 = 0;\ y_0 = 0,$$

so erhält man die 4 Gleichungen:

$$\beta_y = \alpha_y + \frac{1}{E}\int_0^l \frac{M\cos\alpha}{Y}\,dx$$

$$\beta_z = \alpha_z - \frac{1}{E}\int_0^l \frac{M \sin \alpha}{Z}\, dx$$

$$0 = l\alpha_y + \frac{1}{E}\int_0^l \frac{M \cos \alpha}{Y}\, x\,dx$$

$$0 = l\alpha_z - \frac{1}{E}\int_0^l \frac{M \sin \alpha}{Z}\, x\,dx\,,$$

woraus die in den Ausdrücken von $M \cos \alpha$ und $M \sin \alpha$ vorkommenden 4 unbekannten Grössen, nämlich A, $[A]$ und die 2 Winkel, wodurch die Richtung von A und die Richtung der Ebene von $[A]$ bestimmt sind, sich finden lassen. Die entsprechenden 4 Unbekannten für das andere Stabende findet man dann aus den Bedingungen des Gleichgewichts aller äusseren Kräfte am ganzen Körper.