

Badische Landesbibliothek Karlsruhe

Digitale Sammlung der Badischen Landesbibliothek Karlsruhe

Die Festigkeitslehre mit besonderer Rücksicht auf die Bedürfnisse des Maschinenbaues

Grashof, Franz

Berlin, 1866

Drittes Capitel Zusammengesetzte Biegungs-Elasticität und Festigkeit

[urn:nbn:de:bsz:31-274080](https://nbn-resolving.org/urn:nbn:de:bsz:31-274080)

DRITTES CAPITEL.

Zusammengesetzte Biegungs-Elasticität und Festigkeit.

125. — Es wird hierunter der Fall verstanden, in welchem die äusseren Kräfte sich für jeden Querschnitt des stabförmigen Körpers durch eine resultirende Kraft P und durch ein resultirendes Kräftepaar M ersetzen lassen so, dass der Querschnitt sowohl in seinem Schwerpunkte von der Richtungslinie der Kraft P , als auch von der Ebene des Paares M rechtwinkelig geschnitten wird. Die Wirkung der in die Ebene des Querschnitts fallenden Kraft R , von welcher freilich das Kräftepaar M im Allgemeinen unvermeidlich begleitet ist, wird hier wie im vorigen Capitel ausser Acht gelassen (cf. Nr. 37).

Die Voraussetzung des vorigen Capitels (Nr. 38), dass die Richtungslinien der äusseren Kräfte die Mittellinie des Körpers schneiden, muss auch hier beibehalten werden, dagegen darf das Schneiden unter beliebigem Winkel, selbst unter dem Winkel = Null stattfinden. Es wird also nur vorausgesetzt, dass die Richtungslinie jeder äusseren Kraft mit jeder Tangente der Mittellinie in einer Ebene liege; letztere muss deshalb nicht mehr nothwendig eine gerade Linie, sondern sie darf auch eine ebene Curve sein, sofern nur in diesem Falle alle äusseren Kräfte in derselben Ebene, nämlich in der Ebene der einfach gekrümmten Mittellinie liegen.

Die Bezeichnungen: elastische Linie und Biegungsfläche, Biegungsaxe und elastische Fläche haben hier dieselben Bedeutungen wie im vorigen Capitel; auch wird hier wie dort im Allgemeinen vorausgesetzt, dass die Deformation sehr gering sei der Art, dass alle Tangenten der elastischen Linie mit den entsprechenden Tangenten der ursprünglichen Mittellinie sehr kleine Winkel bilden, sowie auch, dass die materiellen Querschnitte beständig eben und zur elastischen Linie senkrecht bleiben. (Cf. Nr. 38 und 40.)

A. Gerader stabförmiger Körper.

126. — Wenn man jede äussere Kraft, deren Richtungslinie nach der Voraussetzung mit der Axe des Stabes in je einer Ebene liegt, an ihrem in oder ausserhalb der Axe liegenden Angriffspunkte in je zwei Componenten zerlegt, wovon die eine die Axe rechtwinkelig schneidet, die andere mit ihr zusammenfällt oder parallel ist, so kann man die Spannung, welche vermöge des ersten Systems von Kräften in irgend einem Punkte nach der zum Querschnitte senkrechten Richtung hervorgerufen wird, nach dem vorigen Capitel berechnen, zu welcher dann die vermöge des zweiten Systems von Kräften in demselben Punkte nach derselben Richtung verursachte Spannung nur algebraisch addirt zu werden braucht, um die resultirende Spannung daselbst zu erhalten.

Es wird deshalb hier die Untersuchung auf die Voraussetzung beschränkt, dass überhaupt nur das zweite System von Kräften vorhanden sei, und weil zudem deren Wirkungen, sofern es sich nur um die resultirenden Spannungen handelt, bei Voraussetzung einer sehr geringfügigen Biegung sich wiederum nur einfach addiren, so wird die Aufgabe weiter darauf beschränkt, dass der Stab nur durch eine einzige Kraft P angegriffen wird, deren Richtungslinie mit seiner vor der Biegung geraden Axe parallel ist, wobei die beiden Fälle zu unterscheiden sind, ob der Angriffspunkt der Kraft ausserhalb der elastischen Linie oder in der derselben liegt. Ersterer Fall möge als excentrische Zug- oder Druckbelastung bezeichnet werden; letzterer, welcher als Grenzfall des ersteren betrachtet werden kann, gehört überhaupt nur unter der Voraussetzung hierher, dass die Kraft P als Druck wirkt und bei grösserer Länge des Stabes eine Biegung desselben verursacht, und es hat dann dieser Fall mit Rücksicht auf die Art des schliesslich herbeigeführten Bruchs den Namen der Zerknickungsfestigkeit erhalten.

Von dem Eigengewicht des Stabes darf hier immer abgesehen werden.

I. Excentrische Zug- oder Druckbelastung eines geraden Stabes von constantem Querschnitte.

127. — AB sei die Mittellinie des Stabes, AX die feste gerade Linie, mit welcher sie vor der Belastung zusammenfällt, D der Angriffspunkt der belastenden Kraft P . Wenn die Mittellinie AB als elastische Linie sich krümmt, so soll doch die Richtungslinie von P beständig parallel AX bleiben und der Punkt D stets dieselbe Lage in der durch ihn ursprünglich hindurchgehenden Querschnittsebene, insbesondere also auch einen unveränderlichen Abstand p von dem Schwerpunkte dieses Querschnitts, d. h. von der Mittellinie AB behalten.

Wenn der Angriffspunkt D nicht in einer der beiden Ebenen H und H_1 läge, welche, in der Axe AX des noch geraden Stabes sich rechtwinkelig

schneidend, die Schwerpunktshauptaxen aller Querschnitte desselben enthalten, so würde die Biegungsaxe irgend eines Querschnitts nicht mit der Axe des von der Belastung herrührenden Kräftepaars M zusammenfallen (cf. Nr. 119), und wenn zudem die Ausweichungen der Punkte der elastischen Linie aus der Geraden AX nicht etwa sehr klein im Vergleich mit p wären, so würde mit der Axe des Paares M zugleich auch die Biegungsaxe in den verschiedenen Querschnitten eine merklich verschiedene Lage erhalten, somit die elastische Linie eine Curve von doppelter Krümmung werden können.

Hier wird vorausgesetzt, die Ebene DAX falle, sofern nicht etwa die Hauptträgheitsmomente Y und Z der Querschnitte (Nr. 119) gleich gross sind, mit einer der beiden Ebenen H und H_1 zusammen, sei also in der Regel eine Symmetrieebene des Stabes; dann ist die elastische Linie eine ebene Curve, und es fällt ihre Ebene, die Biegungsebene, mit der Kraftebene DAX zusammen.

128. — Wenn man die an den Schwerpunkt O eines Querschnitts versetzte Kraft P in zwei Componenten zerlegt, tangential und senkrecht zur elastischen Linie, so ist, da letztere nach der Voraussetzung einen sehr kleinen Winkel mit AX bildet, die erste Componente mit Vernachlässigung einer kleinen Grösse der 2^{ten} Ordnung = P , die zweite als kleine Grösse der 1^{ten} Ordnung = Null zu setzen; der durch die Vernachlässigung der Schubkräfte begangene Fehler ist deshalb hier nur dann von gleicher Ordnung mit demjenigen, welcher bei den Problemen des vorigen Capitels dadurch begangen wurde, wenn Widerstandskräfte von Stützpunkten vorkommen, welche senkrecht gegen die Axe AX gerichtet sind.

Die Kraft P verursacht Spannungen oder Pressungen, welche als gleichförmig im Querschnitte vertheilt vorausgesetzt werden, also = $\frac{P}{F}$ gesetzt werden dürfen, unter F den Flächeninhalt des Querschnitts verstanden.

Das Moment M erzeugt Spannungen und Pressungen, welche proportional dem Abstände von der Biegungsaxe wachsen, in welcher Hinsicht die Resultate sub Nr. 43 ohne Weiteres auf vorliegenden Fall zu übertragen sind*).

Die resultirenden Spannungen und Pressungen ergeben sich durch algebraische Addition derjenigen, welche durch P , und derjenigen, welche durch M bedingt werden; sie sind am grössten = σ' resp. σ'' in den Punkten,

*) Der Umstand, dass ϵ_0 nicht = Null ist, ändert die Gleichung

$$\frac{EJ}{\rho} = M$$

nicht, wie schon in der Anmerkung zu Nr. 43 bemerkt wurde; wenigstens nicht mit derjenigen Annäherung, mit welcher ϵ_0 gegen 1 vernachlässigt, also

$$\epsilon = \epsilon_0 + (1 + \epsilon_0) \frac{\eta}{\rho} = \epsilon_0 + \frac{\eta}{\rho}$$

gesetzt wird: cf. Nr. 41.

welche auf der convexen resp. concaven Seite der elastischen Fläche den grössten Abstand e' resp. e'' von der Biegungsaxe haben:

$$\sigma' = \frac{Me'}{J} \pm \frac{P}{F}; \quad \sigma'' = \frac{Me''}{J} \mp \frac{P}{F},$$

unter J das auf die Biegungsaxe bezogene Trägheitsmoment des Querschnitts verstanden, und wobei die oberen oder unteren Zeichen gelten, jenachdem P als Zug oder als Druck wirkt.

Ist M klein, so kann es jedoch der Fall sein, dass alle Spannungen im weiteren Sinne von einerlei, nämlich von derjenigen Art (Spannungen im engeren Sinne oder Pressungen) sind, wie solche durch P hervorgerufen werden; dieser Umstand, welcher dadurch charakterisirt werden kann, dass die der Biegungsaxe parallele neutrale Axe ganz aus dem Querschnitte herausrückt, wird durch einen negativen Werth von σ' oder σ'' angezeigt.

Aufgabe ist es in jedem Falle, die grössten Werthe von σ' und σ'' zu finden, um alsdann der Forderung entsprechen zu können, dass das grössere der beiden Verhältnisse

$$\frac{\max. \sigma'}{k'} \quad \text{und} \quad \frac{\max. \sigma''}{k''}$$

= 1 sei. Die Maximalwerthe von σ' und σ'' können im Allgemeinen in zwei verschiedenen Querschnitten stattfinden, für welche M ein relatives Maximum ist; am vortheilhaftesten ist es aber, wo möglich eine solche Form des Querschnitts zu wählen, dass in jedem einzelnen

$$\frac{\sigma'}{k'} = \frac{\sigma''}{k''}$$

ist, dass mithin auch diese beiden Verhältnisse gleichzeitig = 1 und so die Zug- und die Druckfestigkeit des Materials in gleichem Grade verwerthet werden. Die Bedingung dafür ist:

$$\frac{e''}{k''} - \frac{e'}{k'} = \pm \frac{JP}{FM} \left(\frac{1}{k'} + \frac{1}{k''} \right),$$

insbesondere für $k' = k''$:

$$e'' - e' = \pm 2 \frac{JP}{FM},$$

wobei wieder die oberen oder unteren Zeichen gelten, jenachdem P als Zug oder als Druck wirkt.

a. Die Durchbiegung der elastischen Linie ist sehr klein im Vergleich mit der Excentricität p der belastenden Kraft P .

129. — Unter der Durchbiegung der elastischen Linie in irgend einem Punkte ist die Ausweichung dieses Punktes aus der Geraden AX verstanden, welche alle materiellen Punkte der elastischen Linie vor der Belastung enthielt. Ist diese Ausweichung überall sehr klein im Vergleich mit p , und wird dann zunächst vorausgesetzt, der Stab sei am einen Ende A

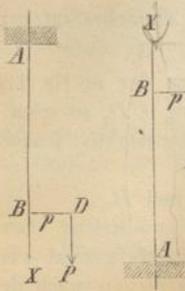


Fig. 18.

befestigt, am anderen frei und hier belastet (Fig. 18), so kann für jeden Querschnitt

$$M = Pp$$

gesetzt werden, so dass auch σ' und σ'' in allen Querschnitten gleich gross sind, nämlich:

$$\sigma' = \left(\frac{pe'}{J} \pm \frac{1}{F} \right) P$$

$$\sigma'' = \left(\frac{pe''}{J} \mp \frac{1}{F} \right) P.$$

Dergleichen excentrische Belastungen müssen möglichst vermieden werden, weil selbst im Falle, dass p nur klein im Vergleich mit e' und e'' ist, doch σ' für die Zugbelastung, σ'' für die Druckbelastung wesentlich grösser sein kann, als wenn die Richtungslinie von P mit der Axe des Stabes zusammenfällt.

130. — Hat z. B. eine excentrisch belastete Hängesäule, d. h. ein in verticaler Lage oben befestigter und unten durch ein excentrisch angehängtes Gewicht P belasteter stabförmiger Körper, einen rechteckigen Querschnitt mit den Seiten b und h (b parallel den Biegungsaxen), so ist

$$\left. \begin{array}{l} \sigma' \\ \sigma'' \end{array} \right\} = \left(\frac{6p}{h} \pm 1 \right) \frac{P}{bh},$$

z. B. mit $p = \frac{h}{2}$: $\sigma' = 4 \frac{P}{bh} = 2\sigma''$.

Dadurch, dass die Richtungslinie von P in die Oberfläche der Säule fällt, wird also ihre Anstrengung 4mal so gross, als bei centrischer Belastung; sie würde verdoppelt schon bei $p = \frac{h}{6}$.

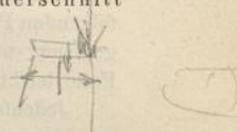
Hat der excentrisch gezogene Stab einen kreisförmigen Querschnitt mit dem Radius r , wie z. B. der cylindrische Schaft eines Kettenhakens, so ist:

$$\left. \begin{array}{l} \sigma' \\ \sigma'' \end{array} \right\} = \left(\frac{4p}{r} \pm 1 \right) \frac{P}{\pi r^2},$$

z. B. mit $p = r$: $\sigma' = 5 \frac{P}{\pi r^2} = \frac{5}{3} \sigma''$.

Es ist also wichtig, durch passende Krümmung des Hakens möglichst p auf Null zu reduciren.

131. — Wenn die Kraft P als Druck wirkt, indem sie z. B. eine Schwerkraft und die Säule AB in verticaler Stellung von Unten her (bei A) gestützt ist, so kann der Angriffspunkt D der Kraft P am Ende eines Seitenarms $CD = p$ sich befinden, welcher an einer mittleren Stelle C in den Abständen $AC = a$ und $BC = b$ von den Enden mit der Säule $AB = l$ verbunden ist, und es kann ausserdem die letztere an ihren Endpunkten noch von der Seite her gestützt oder auch befestigt sein. (Fig. 19.) In einem solchen Falle giebt es mehrere Querschnitte, für welche M ein Maximum ist: jedenfalls die beiden Querschnitte unmittelbar ober- und unterhalb der Verbindungsstelle C zwischen Säule und Seitenarm, event. ausserdem die Quer-



schnitte an den Enden A und B , sofern daselbst nicht einfache Stützung, sondern Befestigung stattfindet.

Nimmt man AY in der Biegungsebene senkrecht zu der in Nr. 127 bezeichneten Axe AX und zwar positiv nach der Richtung CD , so seien A und B die Widerstandskräfte bei A und B , positiv oder negativ, jenachdem sie die Richtung YA oder AY haben,

$[A]$ und $[B]$ die Spannungsmomente der Querschnitte A und B ,
 $[C^1]$ und $[C_1]$ die Spannungsmomente der Querschnitte unmittelbar ober- und unterhalb C , welche Momente positiv oder negativ gesetzt werden, jenachdem die elastische Linie an den betreffenden Stellen nach der Richtung YA oder AY concav gekrümmt ist.

Kennt man die Spannungsmomente $[C^1]$, $[C_1]$ und, sofern sie nicht = Null sind, $[A]$ und $[B]$, so findet man die entsprechenden 2 resp. 3 oder 4 relativen Maxima von σ' und σ'' nach den Formeln sub Nr. 128. Welche von diesen Werthen die absolut grössten, mithin massgebenden sind, hängt ab von dem Verhältnisse $a:b$ und von der verhältnissmässigen Grösse der Excentricität p , verglichen mit den Querdimensionen des Stabes. In den folgenden Paragraphen sind nur jene relativ grössten Spannungsmomente angegeben, woraus die weiteren Folgerungen in jedem gegebenen besonderen Falle leicht gezogen werden.

Jedenfalls ist A negativ, B positiv und
 $A + B = 0$

$$[C_1] = [C^1] - Pp.$$

Bei C findet eine plötzliche Aenderung der Krümmung der elastischen Linie statt, entsprechend einer Stetigkeitsunterbrechung 3^{ter} Ordnung ihrer Ordinate y .

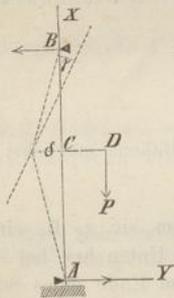


Fig. 19.

132. — Die excentrisch belastete Säule AB ist oben und unten gestützt: Fig. 19. Hier ist:

$$[A] = [B] = 0$$

$$-A = B = \frac{Pp}{l}$$

$$[C^1] = Bb = \frac{b}{l} Pp$$

$$[C_1] = [C^1] - Pp = -\frac{a}{l} Pp.$$

133. — Die excentrisch belastete Säule AB ist unten (bei A) nach der Richtung AB befestigt, oben gestützt. Hier ist nur

$$[B] = 0.$$

Ist γ der Winkel, unter welchem die elastische Linie bei C gegen die x -Axe geneigt ist, δ die Ausweichung des Punktes C aus der x -Axe nach

der Richtung YA (cf. Fig. 19 die punktirten Linien), so kann man nach den Formeln für A und $[B]$ sub Nr. 61, indem man darin

$$P = Q = 0; \alpha = \frac{\delta}{a}; \beta = -\gamma - \frac{\delta}{a}; l = a$$

setzt, A und $[C_1]$ durch γ und δ ausdrücken; desgl. auch B und $[C^1]$ nach den Formeln für B und $[A]$ sub Nr. 71, wenn man darin

$$P = Q = 0; \alpha = \gamma - \frac{\delta}{b}; l = b$$

setzt. Die Relationen

$$A + B = 0 \text{ und } [C_1] = [C^1] - Pp$$

liefern dann 2 Gleichungen zur Berechnung von γ und δ , und die Substitution ihrer Werthe giebt:

$$-A = B = \frac{3a(a+2b)}{2l^3} Pp$$

$$[C^1] = \frac{3ab(a+2b)}{2l^3} Pp$$

$$[C_1] = -\frac{2a^3 + 3a^2b + 2b^3}{2l^3} Pp.$$

Endlich ist:

$$[A] = Bl - Pp = \frac{a^2 + 2b(a-b)}{2l^2} Pp.$$

Ebenso wie im vorigen Falle sub Nr. 132 ist auch hier immer $[C^1]$ positiv, $[C_1]$ negativ, d. h. es findet bei C ein Wechsel im Sinne der Krümmung statt. Das Spannungsmoment $[A]$ ist positiv oder negativ, jenachdem

$$\frac{a}{b} \geq -1 + \sqrt{3} = 0,732$$

ist; letzteren Falls ist der Absolutwerth von $[A]$ stets kleiner, als derjenige von $[C_1]$, und es sind deshalb dann die Maximalwerthe von σ' und σ'' nur in den Querschnitten unmittelbar ober- und unterhalb C zu suchen.

134. — Die excentrisch belastete Säule ist an beiden Enden A und B nach den Richtungen AB resp. BA befestigt. Haben γ und δ die in der vorigen Nr. erklärten Bedeutungen, so lassen sich A und $[C_1]$ wie dort durch γ und δ ausdrücken vermittels der Formeln für A und $[B]$ sub Nr. 61; dieselben Formeln liefern aber hier auch die Ausdrücke von B und $[C^1]$ durch γ und δ , und zwar mit den Substitutionen:

$$P = Q = 0; \alpha = \frac{\delta}{b}; \beta = \gamma - \frac{\delta}{b}; l = b.$$

Die Einführung der aus den Gleichungen

$$A + B = 0; [C_1] = [C^1] - Pp$$

entwickelten Werthe von γ und δ giebt dann:

$$-A = B = \frac{6ab}{l^3} Pp$$

$$[C^1] = \frac{a(a^2 - ab + 4b^2)}{l^3} Pp$$

$$[C_1] = -\frac{b(4a^2 - ab + b^2)}{l^3} Pp.$$

Endlich ist:

$$[B] = [C^1] - Bb = \frac{a(a-2b)}{l^3} Pp$$

$$[A] = [C_1] - Aa = \frac{b(2a-b)}{l^3} Pp.$$

$[C^1]$ ist immer positiv, $[C_1]$ immer negativ; ein positiver Werth von $[B]$ ist stets $< [C^1]$, ein negativer Werth von $[A]$ absolut genommen $< [C_1]$. Die Maximalwerthe von σ' und σ'' sind also, wenn $a > 2b$ ist, auf keinen Fall im Querschnitte bei B , und wenn $b > 2a$ ist, auf keinen Fall im Querschnitte bei A zu suchen.

b. Die Durchbiegung der elastischen Linie ist nicht sehr klein im Vergleich mit der Excentricität p der belastenden Kraft P .

135. — Der Stab AB sei bei A befestigt, übrigens frei und am freien Ende B belastet. Ist dann die Ausweichung f dieses Endpunktes B der elastischen Linie aus der Geraden AX nicht gegen die Excentricität $BD = p$ des Angriffspunktes D zu vernachlässigen, so verhalten sich die beiden durch Fig. 18

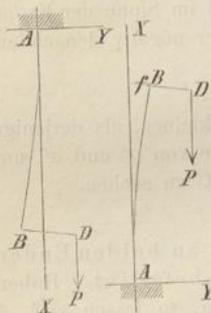


Fig. 20.

dargestellten Fälle wesentlich verschieden; siehe Fig. 20.

Wirkt P als Zug, so findet eine solche Biegung statt, dass M von B nach A abnimmt; der grösste und deshalb massgebende Werth von M im Querschnitte bei B ist aber ebenso gross, als ob f verschwindend klein wäre, nämlich $= Pp$, sofern der Unterschied zwischen p und seiner Projection auf AY als eine im Vergleich mit p kleine Grösse 2^{ter} Ordnung vernachlässigt wird. Mit solcher Annäherung sind also auch die Maximalwerthe von σ' und σ'' den in Nr. 129

angeführten gleich.

136. — Wirkt aber P als Druck, so nimmt M von B nach A zu, und es ist hier

$$\text{max. } M = P(p + f),$$

ein Ausdruck, dessen Werthbestimmung die Kenntniss der Gleichung der elastischen Linie erfordert. Aus der Momentengleichung:

$$\frac{EJ}{q} = P(p + f - y)$$

oder mit der üblichen und in den Fällen der Praxis meistens zulässigen Näherung:

$$\frac{1}{\varrho} = \frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{P}{EJ} (p + f - y)$$

findet man aber durch Integration mit Rücksicht darauf, dass

$$x = 0; y = 0; \frac{dy}{dx} = 0$$

den Bedingungen der Aufgabe gemäss zusammengehörige Werthe sind:

$$\frac{y}{p+f} = 1 - \cos \left(x \sqrt{\frac{P}{EJ}} \right),$$

daraus mit $x = l$, $y = f$:

$$\frac{f}{p+f} = 1 - \cos \left(l \sqrt{\frac{P}{EJ}} \right) \text{ oder } \frac{p+f}{p} = \frac{1}{\cos \left(l \sqrt{\frac{P}{EJ}} \right)},$$

folglich auch

$$\frac{y}{p} = \frac{1 - \cos \left(x \sqrt{\frac{P}{EJ}} \right)}{\cos \left(l \sqrt{\frac{P}{EJ}} \right)}$$

als Gleichung der elastischen Linie. Die Substitution von

$$P(p+f) = \frac{Pp}{\cos \left(l \sqrt{\frac{P}{EJ}} \right)}$$

für M in den Ausdrücken von σ und σ' sub Nr. 128 liefert endlich:

$$\begin{aligned} \max. \sigma &= \left(\frac{pe'}{J \cdot \cos \left(l \sqrt{\frac{P}{EJ}} \right)} - \frac{1}{F} \right) P \\ \max. \sigma'' &= \left(\frac{pe''}{J \cdot \cos \left(l \sqrt{\frac{P}{EJ}} \right)} + \frac{1}{F} \right) P. \end{aligned}$$

II. Zerknickungsfestigkeit.

a. Gerader Stab von constantem Querschnitte.

137. — Wenn ein gerader Stab AB am Ende A befestigt ist und am anderen, freien Ende durch eine genau im Endpunkte B der geraden Mittellinie AB angreifende und nach BA gerichtete Kraft P gedrückt wird (z. B. vertical stehend und oben durch ein Gewicht belastet), so ist zwar an und für sich kein Grund vorhanden, weshalb der Stab eine andere Deformation, als eine blosse Zusammendrückung bei gerade bleibender Mittellinie erfahren sollte; allein es kann bei verhältnissmässig grosser Länge des Stabes und starker Belastung jener Gleichge-

wichtszustand ein der Art labiler sein, dass durch den geringsten zufälligen Umstand, z. B. durch einen zufälligen Seitendruck oder wegen mangelhafter Homogenität des Materials eine bleibende Biegung eintritt, wodurch neue Spannungen und Pressungen verursacht werden, die mit den im Querschnitte gleichförmig vertheilten Pressungen $= \frac{P}{F}$ sich combiniren.

Ein solcher Gleichgewichtszustand bei gekrümmter Mittellinie und unter der Voraussetzung einer auch bei der Biegung constant bleibenden Richtung der Kraft kann als Grenzfall des in Nr. 136 besprochenen Falles betrachtet werden, entsprechend dem Uebergange von p in die Grenze Null, während f eine endliche Grösse behält. Indem aber damit

$$\frac{1}{\cos \left(l \sqrt{\frac{P}{EJ}} \right)} = \lim. \frac{p+f}{p} = \frac{f}{0}, \text{ also } \cos \left(l \sqrt{\frac{P}{EJ}} \right) = 0$$

wird, erhalte man

$$\text{max. } \sigma' = \left(\frac{e'}{J} \frac{0}{0} - \frac{1}{F} \right) P; \text{ max. } \sigma'' = \left(\frac{e''}{J} \frac{0}{0} + \frac{1}{F} \right) P,$$

also unbestimmte Werthe, woraus man schliesst, dass, wenn die Verhältnisse der Art sind, um das Gleichgewicht bei gekrümmter Mittellinie überhaupt möglich zu machen, dasselbe bei jedem Werthe von f stattfinden könne, so dass man keinerlei Sicherheit dafür haben würde, dass die Biegung und die entsprechenden Spannungen nicht so gross werden, um den Bruch des Stabes durch Zerknickung herbeizuführen. Man folgert also weiter, dass, um jene Gefahr zu vermeiden, P jedenfalls kleiner genommen werden müsse, als der kleinste Werth, bei welchem eine noch so kleine Biegung überhaupt bestehen, d. h. wodurch

$$\cos \left(l \sqrt{\frac{P}{EJ}} \right) = 0$$

werden kann; dieser Werth ist

$$P = \frac{\pi^2 EJ}{4 l^2}$$

und wird sonach als diejenige Kraft betrachtet, durch welche der Stab zwar nicht nothwendig zerknickt werden muss, aber doch bei der geringsten Zufälligkeit zerknickt werden kann*).

Natürlich ist im Allgemeinen anzunehmen, dass die Biegung in dem Sinne eintritt, für welchen der Widerstand dagegen am kleinsten ist; J bedeutet also hier das kleinste Trägheitsmoment des Querschnitts für irgend eine Biegungsaxe.

138. — Der Bedingung: $\cos \left(l \sqrt{\frac{P}{EJ}} \right) = 0$ kann auch genügt werden durch:

$$P = 9 \frac{\pi^2 EJ}{4 l^2}; 25 \frac{\pi^2 EJ}{4 l^2} \dots (2n+1)^2 \frac{\pi^2 EJ}{4 l^2}$$

*) Eine strengere Prüfung dieser Schlussfolgerungen enthält Nr. 142—144.

entsprechend dem Umstande, dass die elastische Linie (Fig. 21), deren Gleichung nach Nr. 136

$$y = f \left[1 - \cos \left(x \sqrt{\frac{P}{EJ}} \right) \right]$$

ist, bis zu irgend einem der unendlich vielen Punkte $B_1, B_2 \dots B_n$ reicht, für welche $y = f$ ist ebenso wie für den Punkt B . Ist freilich der Stab am belasteten Ende frei, so ist der Eintritt einer solchen Biegung weniger einfachen und eine grössere Kraft erfordernden Biegung nicht anzunehmen; dagegen führt diese Betrachtung zu dem Ausdrucke für die Bruchbelastung P bei einer anderen Art der Stützung oder Befestigung der Stabenden: Nr. 140.

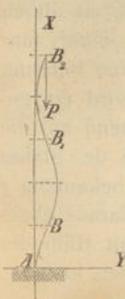


Fig. 21.

139. — Befinden sich die Stabenden unter solchen Verhältnissen, dass die elastische Linie mit beiden Endpunkten in der Richtungslinie von P bleiben muss, jedoch ungehindert ihre Neigung gegen dieselbe ändern kann (z. B. eine Schubstange, an beiden Enden um Zapfen drehbar), so verhält sich jede Hälfte des Stabes gerade so wie der ganze Stab im Falle sub Nr. 137, und es kann also, wenn mit l immer die ganze Länge des Stabes bezeichnet wird, die Zerknickung erfolgen durch die Kraft:

$$P = \frac{\pi^2}{4} \frac{EJ}{\left(\frac{1}{2}l\right)^2} = \pi^2 \frac{EJ}{l^2}.$$

140. — Ist die elastische Linie genöthigt, nicht nur mit ihren Endpunkten in der Richtungslinie von P zu bleiben, sondern auch von dieser daselbst berührt zu werden (z. B. eine Säule, welche beiderseits befestigt oder auch nur flach abgeschnitten und gegen entsprechende ebene Flächen gestützt ist), so stimmt bei der einfachst möglichen Biegungsweise die elastische Linie überein mit den unteren $\frac{1}{4}$ der Curve AB_2 (Fig. 21), und es ist also die Kraft, wodurch der Stab zerknickt werden kann:

$$P = 25 \frac{\pi^2}{4} \frac{EJ}{\left(\frac{5}{4}l\right)^2} = 4\pi^2 \frac{EJ}{l^2}.$$

141. — Endlich kann es noch der Fall sein, dass der Stab am einen Ende sich wie sub Nr. 139, am anderen wie sub Nr. 140 verhält, dass also die elastische Linie genöthigt ist, mit beiden Endpunkten in der Richtungslinie von P zu bleiben und zugleich im einen Endpunkte A von ihr berührt zu werden, während am anderen Ende B eine ungehinderte Neigungsänderung stattfinden kann. Die einfachste, also wahrscheinlichste und gefährlichste Biegung für diesen

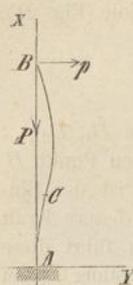


Fig. 22.

Fall zeigt Fig. 22; sie ist, weil ausserhalb AX ein durch $M = 0$ charakterisirter Inflexionspunkt C liegen muss, nur dadurch möglich, dass das Stabende B durch eine Führung in AX zu bleiben gezwungen wird. Dadurch wird ein gewisser Seitendruck p der Führung* als mitbestimmend auf die Werthe von M für die verschiedenen Querschnitte des Stabes eingeführt, welcher sonach an die Stelle der Unbekannten f in dem Fundamental Falle sub Nr. 137 und den daraus abgeleiteten Fällen tritt und, ebenso wie dort f , nur mit Hülfe der elastischen Linie, wenn überhaupt, bestimmt werden kann.

Der Differentialgleichung der elastischen Linie:

$$EJ \frac{d^2 y}{dx^2} = -Py + p(l-x)$$

entspricht das Integral:

$$\frac{P}{EJ} y = A \cdot \sin \left(x \sqrt{\frac{P}{EJ}} \right) + B \cdot \cos \left(x \sqrt{\frac{P}{EJ}} \right) + \frac{p}{EJ} (l-x)$$

und zur Bestimmung der Constanten A, B sowie der Unbekannten p sind den Bedingungen der Aufgabe gemäss die zusammengehörigen Werthe:

$$x = 0, y = 0; \quad x = 0, \frac{dy}{dx} = 0; \quad x = l, y = 0$$

gegeben; es zeigt sich aber, dass die 3 dadurch gelieferten Gleichungen nur die Verhältnisse, nicht die Absolutwerthe von A, B und p bestimmen, während die Möglichkeit des Zusammenbestehens dieser Gleichungen, somit die Möglichkeit der Biegung überhaupt an die Bedingung:

$$l \sqrt{\frac{P}{EJ}} = \operatorname{tg} \left(l \sqrt{\frac{P}{EJ}} \right)$$

geknüpft ist. Analog der Schlussfolgerung in Nr. 137 ist daraus zu schliessen, dass der kleinste Werth von P , welcher dieser Bedingungsgleichung entspricht, nämlich

$$P = 20,19 \frac{EJ}{l^2} = 2,046 \pi^2 \frac{EJ}{l^2}$$

die Zerknickung des Stabes herbeiführen kann.

142. — Die auffallenden Resultate der letzten Nummern, welche darauf beruhen, dass der Krümmungsradius der elastischen Linie $= 1 : \frac{d^2 y}{dx^2}$ anstatt

$$\rho = \frac{\left[1 + \left(\frac{dy}{dx} \right)^2 \right]^{\frac{3}{2}}}{\frac{d^2 y}{dx^2}}$$

gesetzt wurde, erfordern eine nähere Prüfung. Es werde dabei der Fundamentalfall des einerseits befestigten, andererseits freien und am

freien Ende B belasteten Stabes vorausgesetzt: Fig. 23. Entsprechend dem vollständigen Ausdrucke:

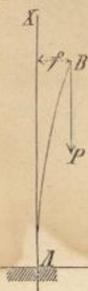


Fig. 23.

$$\varepsilon = \varepsilon_0 + (1 + \varepsilon_0) \frac{\eta}{\rho}$$

der Ausdehnung ε im Abstände η von der Biegungsaxe eines Querschnitts (cf. Nr. 128, Anmerkung) werde dabei die Momentengleichung in der vervollständigten Form:

$$\frac{EJ(1 + \varepsilon_0)}{\rho} = M = P(f - y)$$

zu Grunde gelegt, dabei aber ε_0 , was streng genommen von B nach A etwas wächst, als eine Constante behandelt:

$$\varepsilon_0 = -\frac{P}{EF}$$

Mit der kürzeren Bezeichnung:

$$a^2 = \frac{P}{EJ(1 + \varepsilon_0)},$$

ferner bei Einführung der Veränderlichen z , welche zu y in der Beziehung steht:

$$f - y = -z; \text{ also } \frac{dy}{dx} = \frac{dz}{dx}; \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d^2z}{dx^2},$$

lässt obige Momentengleichung sich schreiben:

$$\frac{d^2z}{dx^2} \left[1 + \left(\frac{dz}{dx} \right)^2 \right]^{\frac{3}{2}} = -a^2 z$$

und sie liefert durch eine erste Integration, deren Constante durch

$$z = -f; \frac{dz}{dx} = 0$$

bestimmt ist:

$$\sqrt{1 + \left(\frac{dz}{dx} \right)^2} = \frac{1}{1 - \frac{a^2}{2}(f^2 - z^2)}$$

oder

$$dx = \frac{1 - \frac{a^2}{2}(f^2 - z^2)}{\sqrt{\left[2 - \frac{a^2}{2}(f^2 - z^2) \right] \frac{a^2}{2}(f^2 - z^2)}} \cdot dz.$$

Die zweite Integration kann mit Hilfe einer Reihenentwicklung ausgeführt werden, indem $a^2(f^2 - z^2)$ eine mit $\left(\frac{dz}{dx} \right)^2 = \left(\frac{dy}{dx} \right)^2$ vergleichbare, jedenfalls kleine Grösse ist; setzt man

$$u = a^2(f^2 - z^2),$$

so wird:

$$\begin{aligned} dx &= \frac{-du}{2a\sqrt{a^2 f^2 u - u^2}} \frac{1 - \frac{u}{2}}{\sqrt{1 - \frac{u}{4}}} \\ &= \frac{-du}{2a\sqrt{a^2 f^2 u - u^2}} \left(1 - \frac{u}{2}\right) \cdot \left(1 + \frac{1}{2} \frac{u}{4} + \frac{1.3}{2.4} \frac{u^2}{16} + \dots\right) \\ &= \frac{-du}{2a\sqrt{a^2 f^2 u - u^2}} (1 + \alpha u + \beta u^2 + \dots); \\ &\alpha = -\frac{3}{8}; \quad \beta = -\frac{5}{128}. \end{aligned}$$

Durch Ausführung der Integration, wobei alle einzelnen Integrale auf das bekannte

$$\int \frac{du}{\sqrt{a^2 f^2 u - u^2}}$$

zurückgeführt werden können, und wobei die Constante durch

$$x = 0; \quad z = -f; \quad u = 0$$

bestimmt ist, ergibt sich als Gleichung der elastischen Linie, wenn schliesslich für u sein Werth wieder eingeführt wird:

$$\begin{aligned} 2ax &= \left[\alpha + \frac{1}{4} \beta a^2 (5f^2 - 2z^2) + \dots \right] a^2 z \sqrt{f^2 - z^2} + \\ &+ \left(1 + \frac{1}{2} \alpha a^2 f^2 + \frac{3}{8} \beta a^4 f^4 + \dots \right) \operatorname{arc} \cos \frac{2z^2 - f^2}{f^2}. \end{aligned}$$

Ist insbesondere x_1 die Abscisse des Punktes B , d. h. die Projection der elastischen Linie auf die x -Axe, so ist (mit $z = 0$):

$$2ax_1 = \left(1 + \frac{1}{2} \alpha a^2 f^2 + \frac{3}{8} \beta a^4 f^4 + \dots \right) \pi.$$

143. — Die Gleichung der elastischen Linie ist an und für sich ohne Interesse für den vorliegenden Zweck; worauf es ankommt, ist die Beziehung zwischen a , f und der Länge des Stabes, zunächst also die Beziehung zwischen a , f und der Bogenlänge $AB = s_1$ der elastischen Linie. Wegen

$$ds = dx \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} = dx \sqrt{1 + \left(\frac{dz}{dx}\right)^2} = \frac{dx}{1 - \frac{u}{2}}$$

ist aber nach Nr. 142:

$$ds = \frac{-du}{2a\sqrt{a^2 f^2 u - u^2}} (1 + \alpha u + \beta u^2 + \dots)$$

= dem früheren Ausdrucke von dx , nur mit dem Unterschiede, dass hier

$$\alpha = \frac{1}{2} \frac{1}{4}; \quad \beta = \frac{1.3}{2.4} \frac{1}{16} \dots$$

ist. Mit dieser Modification hat also auch s_1 denselben Ausdruck wie oben x_1 , d. h. es ist:

$$2as_1 = \left[1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 \frac{a^2 f^2}{4} + \left(\frac{1.3}{2.4}\right)^2 \frac{a^4 f^4}{16} + \dots \right] \pi,$$

und indem endlich s_1 zu der ursprünglichen Länge l des Stabes in der Beziehung steht:

$$s_1 = l(1 + \varepsilon_0),$$

so erhält man bei Einsetzung des Werthes von a :

$$\sqrt{\frac{P}{EJ}(1 + \varepsilon_0)} = \frac{\pi}{2l} \left[1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 \frac{P}{EJ} \frac{f^2}{4} + \left(\frac{1.3}{2.4}\right)^2 \left(\frac{P}{EJ} \frac{f^2}{4}\right)^2 + \dots \right].$$

Die schnelle Convergenz der Reihe ist daraus zu beurtheilen, dass

$$\frac{Pf^2}{EJ(1 + \varepsilon_0)} = \frac{f}{\rho_0}$$

ist, unter ρ_0 den Krümmungsradius der elastischen Linie im Punkte A verstanden.

144. — Bei Vernachlässigung des sehr kleinen Bruchs ε gegen 1 (er ist im Allgemeinen $< 0,001$) erhält man:

$$\sqrt{\frac{P}{EJ}} = \frac{\pi}{2l} \left[1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 \frac{P}{EJ} \frac{f^2}{4} + \left(\frac{1.3}{2.4}\right)^2 \left(\frac{P}{EJ} \frac{f^2}{4}\right)^2 + \dots \right].$$

Lässt man f bis Null abnehmen, so ist in der Grenze:

$$P_0 = \frac{\pi^2 EJ}{4l^2},$$

und es war also richtig, diese Kraftgrösse in Nr. 137 als die kleinste zu bezeichnen, bei welcher eine Biegung des Stabes überhaupt möglich zu werden anfängt; dagegen ist die Unbestimmtheit der Durchbiegung f durch die genauere Analyse beseitigt worden, indem vielmehr f stetig zunimmt, wenn P über jene Grenze P_0 hinaus wächst.

In den praktischen Anwendungen sind freilich die Verhältnisse meistens von solcher Art, dass P nur wenig $> P_0$ zu sein braucht, um eine unzulässige, nämlich solche Grösse der Durchbiegung f zu bewirken, welche eine übermässige Anstrengung oder gar die Zerknickung des Stabes zur Folge haben würde. In der That ist mit

$$J = Fi^2 : \varepsilon_0 = - \frac{P}{EF} = - \frac{P}{EJ} i^2;$$

ist also $f^2 \cong 16i^2$, z. B. bei rechteckigem Querschnitte mit der Seite h in der Biegungsebene: $f^2 \cong \frac{4}{3} h^2$, oder bei kreisförmigem Querschnitte mit dem

Durchmesser d : $f^2 \cong d^2$, ist also überhaupt f nicht wesentlich grösser, als die Dicke des Stabes, was in den praktischen Anwendungen der gewöhnliche Fall ist, so darf schon das zweite Glied der Reihe mit demselben Rechte vernachlässigt werden, mit welchem ε_0 , d. h. höchstens etwa 0,001 gegen 1 vernachlässigt wird, so dass man mit dieser Annäherung dann doch wieder auf die Kraftgrösse

$$P = \frac{\pi^2 EJ}{4l^2}$$

für jeden zulässigen Werth von f zurückkommen, mithin ein praktisches Bedürfniss zur Correction der Resultate sub Nr. 137—141 nicht vorliegen würde.

Nur wenn f wesentlich grösser werden kann, als die Dicke des Stabes, ist eine Correction nöthig; wenn man dabei nur das zweite Glied der Reihe berücksichtigt und in diesem zudem für P den ersten Näherungswerth P_0 setzt, so erhält man als zweite Näherung:

$$P = \frac{\pi^2}{4} \frac{EJ}{l^2} \left(1 + \frac{\pi^2 f^2}{32 l^2} \right)$$

für den Fall sub Nr. 137, also

$$P = \pi^2 \frac{EJ}{l^2} \left(1 + \frac{\pi^2 f^2}{8 l^2} \right)$$

für den Fall sub Nr. 139, unter f im letzteren Falle die Pfeilhöhe des ganzen von der elastischen Linie gebildeten Bogens verstanden.

145. — Dem Vorhergehenden zufolge vermag auch die genaueste Analyse nicht zu hindern, dass die sogen. Zerknickungsfestigkeit eine schwache Seite der praktischen Festigkeitslehre ist; man muss darauf verzichten, der in Nr. 5 bezeichneten allgemeinen Hauptaufgabe entsprechend hier die Verhältnisse so zu wählen, dass die Maximalwerthe von σ' und σ'' durch die Biegung des Stabes gegebenen Werthen l' und l'' gleich werden, weil dann eine äusserst geringe Vergrösserung von P oder l oder eine sehr geringe Verkleinerung der Stabdicke schon hinreichen würde, um mit f zugleich σ' und σ'' bis zur Gefahr der Zerknickung zu steigern. Es bleibt nur übrig, die Verhältnisse so zu wählen, dass erst durch das n fache der gegebenen Kraft P die theoretische Möglichkeit irgend einer Biegung eintreten und damit die Gefahr der Zerknickung nahe rücken würde; die Wahl des Sicherheitscoefficienten n ist dabei ganz der Willkür anheimgegeben, indem er lediglich zufälligen oder einer rationellen Berücksichtigung sich entziehenden Umständen Rechnung zu tragen hat, insbesondere einer etwaigen Abweichung des Angriffspunktes und der Richtung der Kraft P von der vorausgesetzten Lage und Richtung, einer etwa mangelhaften Homogenität des Materials, zufälligen Seitenkräften oder Erschütterungen etc.

146. — Wenn die Kraft P , welche nach der Theorie die Biegung des Stabes ermöglichen würde, grösser ist, als die einfache Druckfestigkeit $= K''F$, so schliesst man, dass thatsächlich die Biegung und die Zerknickung in Folge derselben nicht eintreten könne, weil zuvor schon der Stab durch gleichförmige Compression zerdrückt wäre. Der Grenze zwischen beiden Fällen, d. h. dem Uebergange von der einfachen Druck- zur Zerknickungsfestigkeit entspricht ein gewisses Verhältniss der Länge zur Dicke des Stabes, welches vom Material, von der Form des Querschnitts und von der Art der Stützung resp. Befestigung des Stabes abhängt, indem es bestimmt ist durch die Gleichung:

$$K''F = m \frac{EJ}{l^2},$$

worin für die in Nr. 137—141 besprochenen Fälle

$$m = \frac{\pi^2}{4}; \quad \pi^2; \quad 2,046 \pi^2; \quad 4\pi^2$$

zu setzen ist. Mit $J = F i^2$ folgt daraus:

$$\frac{l}{i} = \sqrt{m \frac{E}{K''}},$$

insbesondere für den Fundamentalfall sub Nr. 137:

$$\frac{l}{i} = \frac{\pi}{2} \sqrt{\frac{E}{K''}},$$

in den übrigen Fällen aber im Verhältnisse

$$1 : 2 : 2,86 : 4$$

grösser. Mit den in der Tabelle sub Nr. 14 angegebenen Mittelwerthen von E und K'' ergibt sich danach im Fundamentalfalle jenes Grenzverhältniss

für Holz, Gusseisen, Schmiedeeisen

$$\frac{l}{i} = 23,51; \quad 18,14; \quad 37,55.$$

Ist z. B. der Querschnitt ein Rechteck, h dessen zur Biegungsaxe senkrechte Seite (Dicke des Stabes), so ist $i^2 = \frac{h^2}{12}$, also:

$$\frac{l}{h} = 6,79; \quad 5,24; \quad 10,84;$$

ist er ein Kreis mit dem Durchmesser d , so ist $i^2 = \frac{d^2}{16}$, also:

$$\frac{l}{d} = 5,88; \quad 4,53; \quad 9,39.$$

147. — Wenn man nun einen Stab auf einfache Druckfestigkeit oder auf Zerknickungsfestigkeit berechnet, jenachdem $\frac{l}{i}$ kleiner oder grösser, als jenes in voriger Nr. ermittelte Grenzverhältniss ist, so ist dies immerhin doch nur als ein Nothbehelf zu betrachten, weil es erfahrungsmässig nicht eine bestimmte Länge l giebt, von welcher an die Bruchbelastung eines Stabes plötzlich abhängig von l zu werden anfängt, während sie bis dahin unabhängig von l gewesen wäre. In der That findet man die Bruchbelastung P stetig abnehmend, wenn das Verhältniss $\frac{l}{i} = x$ von Null an wächst, freilich so, dass für $x = 0$ auch $\frac{dP}{dx} = 0$ ist. Diesem Verhalten würde es besser entsprechen, wenn die Bruchbelastung P für alle Werthe von x durch dieselbe (empirische) Function ausgedrückt würde, welche so beschaffen sein müsste, dass sie immer kleiner, als $K'' F$ und als $m \frac{EJ}{l^2}$ ist, dass sie sich ferner diesen Werthen als Grenzen nähert, wenn $\frac{l}{i}$ ohne Ende ab resp.

zunimmt, und dass zugleich $\frac{dP}{dx} = 0$ ist für $x = \frac{l}{2} = 0$. Eine solche Function ist:

$$P = \frac{K''F \cdot m \frac{EJ}{l^2}}{K''F + m \frac{EJ}{l^2}} = \frac{K''F \cdot m E i^2}{K'' l^2 + m E i^2} = \frac{m E F}{\frac{l^2}{i^2} + m \frac{E}{K''}}$$

oder

$$P = \frac{m E F}{x^2 + x_1^2},$$

wenn $\frac{l}{2} = x$ und das in Nr. 146 bestimmte Grenzverhältniss = x_1 gesetzt wird.

Nach dieser empirischen Formel wäre für $x = x_1$ die Bruchbelastung P schon auf $\frac{1}{2} K'' F$ herabgesunken; auch würde

$$1 : 4 : 4 \cdot 2,046 : 16$$

nicht das Verhältniss der Bruchbelastungen desselben Stabes für die mehrgenannten 4 Fälle, sondern vielmehr das Verhältniss derjenigen Werthe von $\frac{l^2}{i^2}$ sein, welchen bei einerlei Material und Querschnitt = F derselbe Werth von P in jenen 4 Fällen entspricht.

148. — Versuche über die Zerknickungsfestigkeit, welche bei den Mängeln der Theorie hier von besonderer Wichtigkeit sind, hat vorzugsweise Hodgkinson in ausgedehntem Masse ausgeführt mit Stäben von Gusseisen, Schmiedeeisen und Holz. Die Hauptresultate dieser Versuche, auf das Centimeter als Längen- und das Kilogramm als Gewichtseinheit reducirt, hat Hodgkinson für die beiden Fälle, dass die Stabenden entweder zugeschärft und beweglich (2^{ter} Fall) oder dass sie eben abgeschnitten und unbeweglich sind (4^{ter} Fall), in den folgenden empirischen Formeln zusammengefasst, wobei sich

- Nr. 1 auf eine massive cylindrische Säule aus Gusseisen,
- Nr. 2 " " hohle " " " " "
- Nr. 3 " " massive " " " " Schmiedeeisen,
- Nr. 4 " " quadratische Säule aus Eichenholz,
- Nr. 5 " " " " " " Fichtenholz

bezieht, und wobei ferner

P das zerknickende Gewicht,

l die Länge der Säule,

d den Durchmesser, beziehungsweise den äusseren Durchmesser der massiven resp. hohlen cylindrischen Säule,

d_1 den inneren Durchmesser der hohlen Säule,

a die Seite des quadratischen Querschnitts

bedeutet. Endlich gelten die Formeln für den 2^{ten} Fall nur unter der Voraussetzung, dass

$$\frac{l}{d} > 15,$$

für den 4^{ten} Fall nur unter der Voraussetzung, dass

$$\frac{l}{d} \text{ resp. } \frac{l}{a} > 30$$

ist.

Nr.	2 ^{ter} Fall.	4 ^{ter} Fall.
1.	$P = 151625 \frac{d^{3,76}}{l^{1,7}}$	$P = 546548 \frac{d^{3,55}}{l^{1,7}}$
2.	$P = 132291 \frac{d^{3,76} - d_1^{3,76}}{l^{1,7}}$	$P = 548775 \frac{d^{3,55} - d_1^{3,55}}{l^{1,7}}$
3.	$P = 1214035 \frac{d^{3,76}}{l^2}$	$P = 4614184 \frac{d^{3,55}}{l^2}$
4.		$P = 248338 \frac{a^4}{l^2}$
5.		$P = 177125 \frac{a^4}{l^2}$

Für den Fall des einerseits zugeshärften, anderseits eben abgeschnittenen Stabendes (3^{ter} Fall, vorausgesetzt, dass durch geeignete Mittel beide Endpunkte der elastischen Linie in der Richtungslinie des belastenden Drucks erhalten werden) wurde die Bruchbelastung ungefähr = dem arithmetischen Mittel derer für den 2^{ten} und 4^{ten} Fall unter sonst gleichen Umständen gefunden. Für solche Fälle endlich, in denen $\frac{l}{d}$ resp. $\frac{l}{a}$ kleiner, als 15 im 2^{ten} resp. 30 im 4^{ten} Falle, immerhin aber noch ziemlich gross ist, giebt Hodgkinson die empirische Formel:

$$P = \frac{K''F \cdot P_1}{\frac{3}{4} K''F + P_1},$$

in welcher P_1 den betreffenden Werth nach obiger Tabelle bedeutet*).

*) Folgende Beispiele mögen zur Vergleichung der Hodgkinson'schen mit den in den vorhergehenden Nummern angeführten Formeln dienen. Es ist dabei mit

1) das Resultat nach Hodgkinson,

2) " " " der Formel $P = \frac{mEF}{x^2 + x_1^2}$ (Nr. 147),

3) " " " " " " $P = m \frac{EJ}{l^2}$

bezeichnet, und zwar sind die Werthe sub 2) und 3) auf Grund der in No. 14 angegebenen mittleren Constanten E und K'' für Holz, Gusseisen und Schmiedeeisen berechnet.

A. Quadratischer Stab von Holz; die Werthe sub 1) mit dem mittleren Coefficienten

$$\frac{248338 + 177125}{2} = 212731$$

berechnet. Werthe von $\frac{P}{a^2}$

149. — Eine schmiedeeiserne Schubstange von der Länge l mit kreisförmigem Querschnitte habe den Druck P von dem einen zum anderen der an den Enden von ihr umfassten Zapfen zu übertragen. Soll ihre Dicke d so bestimmt werden, dass sie voraussichtlich erst durch den n -fachen Druck P zerknickt werden würde, so kann nach Nr. 147 gesetzt werden:

$$nP = \frac{K'' F \cdot \pi^2 \frac{EJ}{l^2}}{K'' F + \pi^2 \frac{EJ}{l^2}}$$

		4 ^{ter} Fall.		
für $\frac{l}{a} =$		30	40	50
	1)	236	133	85
	2)	225	158	114
	3)	409	230	147.

B. Cylindrischer Stab von Gusseisen bei $d = 6^{\text{cm}}$ Durchm. Werthe von $\frac{P}{d^2}$

		2 ^{ter} Fall.			4 ^{ter} Fall.		
für $\frac{l}{d} =$		15	20	25	30	40	50
	1)	1691	1037	710	1288	790	540
	2)	1578	1005	685	1578	1005	685
	3)	2153	1211	775	2153	1211	775.

C. Cylindrischer Stab von Schmiedeeisen bei $d = 6^{\text{cm}}$ Durchm. Werthe von $\frac{P}{d^2}$

		2 ^{ter} Fall.			4 ^{ter} Fall.		
für $\frac{l}{d} =$		15	20	25	30	40	50
	1)	3510	1974	1264	2289	1288	824
	2)	1677	1287	991	1677	1287	991
	3)		2422	1550		2422	1550.

(Bei dem schmiedeeisernen Stabe ist für $\frac{l}{d} = 15$ im 2^{ten} resp. = 30 im 4^{ten} Falle

noch $x < x_1$ und deshalb die Formel $P = m \frac{EJ}{l^2}$ ohne Bedeutung.)

Die Werthe sub 3) sind hiernach immer zu gross. Die Werthe sub 2) stimmen ziemlich gut mit denen sub 1) bei den Stäben von Holz und Gusseisen; sind auch sie für den 4^{ten} Fall im Allgemeinen noch etwas zu gross, so hat dies zum Theil vielleicht darin seinen Grund, dass die charakteristischen Bedingungen des 4^{ten} Falles bei den Versuchen von Hodgkinson nicht vollkommen erfüllt wurden.

Bei dem schmiedeeisernen Stabe freilich sind im 2^{ten} Falle die Werthe sub 2) wesentlich kleiner, als die nach der Hodgkinson'schen Formel berechneten; indessen dürften die letzteren kaum grosses Vertrauen verdienen, weil sie ein Schmiedeeisen von ganz abnorm grosser Druckfestigkeit voraussetzen würden. Mit dem Mittelwerthe $K'' = 3500$ wäre selbst für ein verschwindend kleines $\frac{l}{d}$, also für reine Druckfestigkeit nur $\frac{P}{d^2} = 2749$ und für $\frac{l}{d} = 12$ nach Angaben von Navier nur $\frac{2}{3}$ so gross, also hier = 1718. Ohne specielle Kenntniss der Constanten E und K'' für diejenigen Materialien, mit denen Hodgkinson experimentirt hat, ist eine sichere Vergleichung überhaupt nicht möglich.

woraus, wenn in runder Zahl 10 für π^2 gesetzt wird,

$$d^4 = \frac{32nP}{5E\pi} \left(1 + \frac{5E}{8K''} \frac{d^2}{l^2} \right) l^2$$

sich ergibt. Zum Zweck einer einfachen Constructionsregel ist es aber vorzuziehen, dieses d in Verhältniss zu setzen zum Durchmesser δ der von den Schubstangenköpfen umfassten, gleichfalls schmiedeeisernen Zapfen, welche als einfach und einerseits angeheftet, anderseits frei hervorstehend hierbei vorausgesetzt werden; ist dann λ die Zapfenlänge und K der sogenannte Coefficient der Bruchfestigkeit, d. h. diejenige Maximalspannung, bei welcher der Zapfen abbrechen würde, falls die Elasticitätsgesetze bis zum Bruche gültig blieben, so ist für n_1 fache Sicherheit (cf. Nr. 52):

$$n_1 P \cdot \frac{\lambda}{2} = K \frac{\pi \delta^3}{32}; \text{ daraus } \delta^4 = \frac{16n_1 P}{K\pi} \frac{\lambda}{\delta} \delta^2.$$

Durch Division der Gleichungen für d^4 und δ^4 folgt mit $\frac{n}{n_1} = m$ und wenn

$$E = 2000000; K = 4000; K'' = 3125; \frac{\delta}{\lambda} = \frac{3}{4}$$

gesetzt wird:

$$\frac{d}{\delta} = 0,1 \sqrt[4]{6m \left(1 + 400 \frac{d^2}{l^2} \right)} \cdot \sqrt{\frac{l}{\delta}} \dots (1)$$

und mit dem vorläufigen Durchschnittswerthe $\frac{l}{d} = 20$:

$$\frac{d}{\delta} = 0,1 \sqrt[4]{12m} \cdot \sqrt{\frac{l}{\delta}}.$$

Eine Formel von solcher Form hat Redtenbacher mit den Abmessungen gut ausgeführter Schubstangen verglichen und daraus die Regel:

$$\frac{d}{\delta} = 0,229 \sqrt{\frac{l}{\delta}}$$

abgeleitet; ihr würde $m = 2,29$ d. h. eine 2,29 Mal so grosse Sicherheit der Schubstange gegen Zerknickung, als des Zapfens gegen Bruch entsprechen, abgesehen von der üblichen Verjüngung der Stange nach den Enden hin, wodurch ihre überwiegende Sicherheit etwas vermindert wird, indem dann d ihren grössten Durchmesser in der Mitte bedeutet.

Die Redtenbacher'sche Formel lässt sich schliesslich verbessern, indem man den ihr entsprechenden Werth von d als ersten Näherungswerth auf der rechten Seite von Gl. (1) zusammen mit $m = 2,29$ substituirt; dadurch wird:

$$\frac{d}{\delta} = 0,19 \sqrt[4]{\frac{l}{\delta} \left(\frac{l}{\delta} + 21 \right)}.$$

Für $\frac{l}{d} = 20$ stimmt diese Formel natürlich mit der Redtenbacher'schen überein, bei abweichenden Verhältnissen aber trägt sie diesen Abweichungen in angemessener Weise Rechnung; sie liefert z. B.*)

*) Ohne die für alle verhältnissmässigen Längen als gültig aufgestellte empirische Formel sub Nr. 147, welche hier benutzt wurde, müsste für $\frac{l}{\delta} = 12$, also $\frac{l}{d} = \frac{12}{0,85} = 14$ die Stange nach einer anderen Regel, als für grössere Längen, nämlich auf einfache Druckfestigkeit berechnet, folglich $\frac{d}{\delta}$ constant gesetzt werden, bis mit zunehmender Länge l

$$\text{für } \frac{l}{\delta} = 12 \quad 20 \quad 40$$

$$\frac{d}{\delta} = 0,85 \quad 1,02 \quad 1,34$$

$$\text{während nach Redtenbacher } \frac{d}{\delta} = 0,79 \quad 1,02 \quad 1,45.$$

150. — Gusseiserne Schubstangen haben gewöhnlich (abgesehen von einem Stücke = der Kurbellänge von mehr oder weniger abgeflachter Form zur Gestattung des dichten Vorbeistreifens der Kurbel) einen kreuzförmigen Querschnitt mit bogenförmiger Ausfüllung des Winkelraums zwischen den Kreuzrippen: Fig. 24.

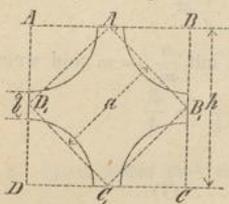


Fig. 24.

Angenommen, die Dicke b der Rippen sei so gewählt, dass das Trägheitsmoment J des mittleren (grössten) Querschnitts demjenigen des Quadrats $A_1 B_1 C_1 D_1$ gleich ist, dessen Ecken mit den Mittelpunkten der Seiten des umschriebenen Quadrats $ABCD$ zusammenfallen. Ist dann a die Seite des äusseren Quadrats und haben

$$l \quad \lambda \quad \delta \quad P \quad n \quad n_1 \quad K$$

dieselben Bedeutungen wie in Nr. 149, so darf hier mit grösserem Rechte, als dort, die Bruchbelastung

$$= \pi^2 \frac{EJ}{l^2}$$

gesetzt werden, weil $\frac{l}{h}$ jedenfalls grösser als 12, also $\frac{l}{a}$ grösser als 17 ist, während nach Nr. 146 schon mit $\frac{l}{a} = 10,5$ die Grenze zwischen einfacher Druck- und Zerknickungs-Festigkeit erreicht sein würde, und weil auch die Bestimmung des Verhältnisses

$$m = \frac{n}{n_1}$$

nach praktischer Erfahrung vorbehalten bleibt. Aus

$$nP = \pi^2 \frac{EJ}{l^2} = \pi^2 \frac{E a^4}{12 l^2}$$

$$\text{und } n_1 P \cdot \frac{\lambda}{2} = K \frac{\pi \delta^3}{32}$$

folgt dann durch Elimination von P mit $\frac{n}{n_1} = m$ und $a^2 = \frac{h^2}{2}$:

$$\left(\frac{h}{l}\right)^4 = \frac{3mK}{\pi E \lambda} \frac{\delta}{\lambda} \left(\frac{\delta}{l}\right)^2$$

die Grenze zwischen Druck- und Zerknickungsfestigkeit erreicht wird, was hier bei ungefähr $\frac{l}{d} = 19$ der Fall ist (cf. Nr. 146). Eine solche Unterscheidung wäre aber, wie schon bemerkt, dem thatsächlichen Verhalten kaum entsprechend.

und mit $E = 1000000$, $K = 4000$, $\frac{\delta}{\lambda} = \frac{3}{4}$:

$$\frac{h}{l} = \sqrt{\frac{\delta}{l}} \sqrt{\frac{m}{350}}.$$

Diese Formel liefert Werthe, welche bewährten Ausführungen sich anschliessen, wenn entsprechend $m = 2,43^*)$ gesetzt wird:

$$\frac{h}{l} = \sqrt{\frac{\delta}{12l}}.$$

Die obige Voraussetzung, dass das Trägheitsmoment des kreuzförmigen Querschnitts demjenigen des Quadrats $A_1B_1C_1D_1$ gleich sei, würde genau zutreffen, wenn die Bögen aus den Eckpunkten des Quadrats $ABCD$ als Mittelpunkten beschrieben wären und dabei $\frac{h-b}{2h} = x$ die zwischen 0 und 1 liegende Wurzel der Gleichung

$$x^4 - \frac{16}{3\pi} x^3 + x^2 - \frac{1}{4\pi} = 0,$$

$$\text{somit } x = 0,411, \text{ also } \frac{b}{h} = 1 - 2x = 0,178$$

wäre. In der That pflegt $\frac{b}{h}$ etwas kleiner und zwar im Durchschnitt $= \frac{1}{7} = 0,143$ zu sein.**)

b. Körper von gleichem Widerstande.

151. — Wenn auch die Spannungen, welche unter der Voraussetzung einer sehr geringen Biegung in den verschiedenen Punkten des Stabes hervorgerufen werden, zugleich mit der Grösse dieser Biegung wenigstens vom praktischen Gesichtspunkte aus unbestimmt bleiben, indem sie sehr schnell wachsen, wenn die belastende Kraft P von einem gewissen Grenzwerte aus nur sehr wenig zunimmt, und wenn auch deswegen die Verhältnisse so gewählt werden, dass der Eintritt irgend einer Biegung bei der vorausgesetzten Belastung theoretisch unmöglich wird, so könnte man sich doch die Aufgabe stellen, den Querschnitt des Stabes nach einem solchen Gesetze veränderlich zu machen, dass, wenn infolge übermässiger Belastung dennoch der Stab gebogen werden sollte, dabei die Maximalspannung, mithin die Gefahr des Bruchs durch Zerknickung in allen Querschnitten gleich gross sei. Bei einer Schubstange z. B. hat man diesen Zweck im Auge, indem man sie von der Mitte nach den Enden hin verjüngt, und das rationelle Gesetz dieser Verjüngung ist eben in der Lösung jener Aufgabe enthalten.

*) Diese noch grössere relative Sicherheit der Schubstange, als im vorigen Falle (Nr. 149), ist nur scheinbar, weil hier die Bruchbelastung $= \pi^2 \frac{EJ}{l^2}$ grösser in Rechnung gestellt wurde, als dort nach der Formel sub Nr. 147.

***) Auch aus diesem Grunde ist also die Widerstandsfähigkeit der Schubstange etwas zu günstig in Rechnung gestellt worden und dadurch mit die scheinbar grosse relative Sicherheit $m = 2,43$ begründet.

Wird dabei der Fall eines einerseits bei A befestigten, anderseits freien und am freien Ende B belasteten Stabes und die Richtungslinie der Kraft P parallel der Tangente AX an die elastische Linie bei A vorausgesetzt (Fig. 23), in welchem Falle sich auch jede Hälfte der Schubstange befindet, wenn ihr Querschnitt von der Mitte gegen beide Enden hin in gleicher Weise veränderlich gemacht wird, so entspricht der Forderung, dass die grösste Pressung in allen Querschnitten $= k$ sein soll, die für jeden Querschnitt zu erfüllende Gleichung:

$$\frac{P(f-y)e}{J} + \frac{P}{F} = k,$$

unter e die Entfernung des am stärksten gepressten Punktes von der Biegungsaxe verstanden.

Vorausgesetzt wird, dass die Axen des kleinsten Trägheitsmomentes J aller Querschnitte unter sich parallel sind, somit Biegungsaxen werden; ferner sei r eine homologe Dimension aller Querschnitte, zu welcher deren übrige Dimensionen, sofern sie nicht constant sind, constante Verhältnisse haben. Dann sind e , F und J gegebene Functionen von r , und es ist also durch obige Bedingungsgleichung r als Function von $f-y$:

$$r = \varphi(f-y)$$

bestimmt. Die Aufgabe, r als Function von x zu finden, erfordert sonach die Bestimmung der elastischen Linie. Zu dem Ende hat man:

$$\frac{1}{\varrho} = \frac{\frac{d^2 y}{dx^2}}{\left[1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}} = \frac{P(f-y)}{EJ}$$

= einer bekannten Function von $f-y$, weil J als Function von r auch als Function von $f-y$ bekannt ist. Durch Integration dieser Differentialgleichung, wobei die Constanten durch die zusammengehörigen Werthe:

$$x = 0; y = 0; \frac{dy}{dx} = 0$$

bestimmt sind, findet man die Gleichung der elastischen Linie, und wenn sich daraus

$$y = \psi(f, x)$$

entwickeln lässt, so ist:

$$r = \varphi[f - \psi(f, x)],$$

worin schliesslich f bestimmt ist durch die Gleichung:

$$f = \psi(f, x_1),$$

unter x_1 die Abscisse des Endpunktes B der elastischen Linie verstanden.

Letztere Gleichung liefert mit $f=0$ ohne Zweifel auch hier, wie in Nr. 144 bei constantem Querschnitte, einen gewissen Grenzwert von P , über welchen hinaus die Biegung erst möglich wird, und es entspricht diesem Grenzwert auch ein solcher von

$$k = \frac{P}{F_1},$$

wenn F_1 den äussersten Querschnitt oder die Endfläche des Stabes bei B bezeichnet.

Wenn man aber gar mit einer ähnlichen Annäherung, als mit welcher $x_1 = l$ gesetzt werden kann, wieder $\frac{1}{\rho} = \frac{d^2 y}{dx^2}$ setzt und damit f unbestimmt findet*), so wird damit die Aufgabe überhaupt unbestimmt und zwar nicht nur in Betreff der absoluten, sondern selbst in Betreff der verhältnissmässigen Werthe von r , welche zugleich von dem bestimmten Drucke P und von dem unbestimmten Momente $P(f-y)$ abhängen würden. Um dies zu vermeiden und wenigstens bestimmte Verhältnisse der Werthe von r für die verschiedenen Querschnitte zu erhalten, könnte man sich damit begnügen wollen, denjenigen Theil der Maximalpressung für alle Querschnitte gleich zu machen, welcher blos von dem Momente $P(f-y)$, also von der Biegung des Stabes herrührt; allein dies würde darauf hinauslaufen, in dem Ausdrücke

$$\frac{(f-y)e}{J} + \frac{1}{F}$$

den zweiten Theil gegen den ersten, z. B. bei kreisförmigem Querschnitte

$$\frac{1}{\pi r^2} \text{ gegen } \frac{4(f-y)}{\pi r^3} \text{ oder } r \text{ gegen } 4(f-y)$$

zu vernachlässigen, was ganz unzulässig wäre, da $f-y$ zwischen den Grenzen 0 und f liegt und selbst der Maximalwerth $4f$ bei den in der Praxis vorkommenden Verhältnissen keineswegs viel Mal grösser, als r ist.

152. — Um für die Verjüngung einer Schubstange mit kreisförmigem Querschnitte von der Mitte nach den Enden hin eine wenigstens einigermaßen rationelle Regel zu gewinnen, kann man sich darauf beschränken, der Forderung zu genügen, dass dieselbe Kraft P , welche den Stab im mittleren Querschnitte zerknicken kann, ihn an den schwächeren Enden zerdrücken würde. In Betreff des Gesetzes, nach welchem der grösste Radius r_0 des mittleren Querschnitts bei A (Fig. 23) in den kleinsten Radius r_1 am Ende B stetig abnehmend übergeht, möge dabei irgend eine willkürliche Annahme gemacht werden, welche die Schwierigkeit der Integration der Gleichung

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{P(f-y)}{EJ}$$

möglichst zu vermindern geeignet ist und welche nur dem Umstande entspricht, dass der Axendurchschnitt des Stabes auch in der Mitte eine stetige Krümmung hat, dass also

$$\frac{dr}{dx} = 0 \text{ für } x = 0 \text{ oder } y = 0$$

*) Die nähere Untersuchung wird dadurch sehr schwierig, dass die Gleichung

$$\frac{(f-y)e}{J} + \frac{1}{F} = \frac{k}{P},$$

aus welcher r behufs der Einsetzung in die Differentialgleichung der elastischen Linie:

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{P(f-y)}{EJ}$$

entwickelt werden müsste, in Beziehung auf r eine nicht reine cubische Gleichung ist, welche je nach dem Werthe von y zwischen den Grenzen 0 und f entweder eine oder drei reelle Wurzeln haben kann; jene Differentialgleichung erhält dadurch eine solche Form, dass von dem Versuche einer Integration abgestanden werden muss.

ist. Setzt man zu dem Ende

$$r = r_0 \sqrt[n]{(1-my)^n}, \text{ also } J = J_0 (1-my)^n,$$

so liefert die Gleichung:

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{P(f-y)}{EJ_0(1-my)^n}$$

durch eine erste Integration, wenn

$$\frac{P}{EJ_0} = a^2; \quad 1-my = z$$

$$1-mf = \left(\frac{r_1}{r_0}\right)^{\frac{4}{n}} = \alpha$$

gesetzt wird, mit Rücksicht darauf, dass für den Anfangspunkt der Coordinaten

$$z = 1; \quad \frac{dz}{dx} = 0$$

ist:

$$\left(\frac{dz}{dx}\right)^2 = 2a^2 \left[-\frac{\alpha}{(n-1)z^{n-1}} + \frac{1}{(n-2)z^{n-2}} + \frac{\alpha}{n-1} - \frac{1}{n-2} \right],$$

vorausgesetzt, dass n nicht = 1 oder 2 genommen wird. Wird deshalb die nächstefache Annahme: $n = 3$ gemacht, so folgt:

$$dx = \frac{1}{a} \frac{-z dz}{\sqrt{-\alpha + 2z - (2-\alpha)z^2}}.$$

Die Integration dieser Gleichung zwischen den sich entsprechenden Grenzen:

$$x = 0, \quad z = 1 \quad \text{und} \quad x = l, \quad z = \alpha,$$

unter l vorläufig die halbe Länge der Schubstange verstanden, liefert, wenn

$$\frac{1}{(2-\alpha)^2} \left[(1-\alpha)\sqrt{\alpha} + \frac{\pi}{2} + \frac{\text{arc sin}(1-\alpha)}{\sqrt{2-\alpha}} \right]^2 = f(\alpha)$$

gesetzt wird:

$$P = f(\alpha) \frac{EJ_0}{l^2},$$

eine Gleichung, welche für bestimmte Werthe von r_0 und r_1 , also auch von $\alpha =$

$\left(\frac{r_1}{r_0}\right)^{\frac{4}{n}}$, die Bedingung dafür ausdrückt, dass die Kraft P den Stab bei irgend einer kleinen Biegung überhaupt im Gleichgewichte erhalten könne; in der That ist für den Specialfall eines constanten Querschnitts, d. h. für $\alpha = 1$: $f(\alpha) = \frac{\pi^2}{4}$ in Uebereinstimmung mit Nr. 137. Weil aber die Grösse der Biegung, nämlich f , unbestimmt bleibt, so ist wie früher zu schliessen, dass jene Grösse von P auch schon genüge, um den Bruch des Stabes durch Zerknickung herbeizuführen.

Bei kleineren Werthen von l genügt aber dazu jedenfalls ein noch kleinerer Werth von P , als jener, bei dessen Ableitung auf die von der Biegung unabhängige Pressung keine Rücksicht genommen werden konnte, und wenn deshalb analog der bewährt gefundenen empirischen Formel sub Nr. 147 der corrigirte Werth der Kraft, welche bei irgend einer Länge der Schubstange ihre Zerknickung im mittleren Querschnitte F_0 bewirkt,

$$K'' F_0 \cdot f(\alpha) \frac{EJ_0}{l^2}$$

$$= \frac{K'' F_0 \cdot f(\alpha) \frac{EJ_0}{l^2}}{K'' F_0 + f(\alpha) \frac{EJ_0}{l^2}}$$

gesetzt wird, so muss dieser Ausdruck $= K'' F_1$ gesetzt werden als Bedingung dafür, dass dieselbe Kraft gerade im Stande sein soll, an den Enden die Schubstange einfach zu zerdrücken. So ergibt sich:

$$\frac{F_0}{F_1} = 1 + \frac{K'' F_0 l^2}{f(\alpha) \cdot E J_0} = 1 + \frac{4 K'' l^2}{f(\alpha) \cdot E r_0^2}$$

oder, wenn jetzt mit l die ganze Länge der Schubstange, mit d ihr Durchmesser in der Mitte, mit d_1 derselbe an den Enden bezeichnet wird:

$$\left(\frac{d}{d_1}\right)^2 = 1 + \frac{4 K''}{f(\alpha) \cdot E} \left(\frac{l}{d}\right)^2,$$

und daraus endlich mit $\frac{d_1}{d} = \alpha^{\frac{3}{4}}$:

$$\left[\left(\frac{1}{\alpha}\right)^{\frac{3}{2}} - 1\right] \cdot f(\alpha) = F(\alpha) = \frac{4 K''}{E} \left(\frac{l}{d}\right)^2,$$

insbesondere für eine schmiedeeiserne Stange:

$$\left(\frac{l}{d}\right)^2 = 150 \cdot F(\alpha),$$

entsprechend $E = 2000000$, $K'' = 3333$.

Wenn man hiernach für verschiedene Werthe von α die entsprechenden Werthe von $\frac{l}{d}$ und von $\frac{d_1}{d} = \alpha^{\frac{3}{4}}$ berechnet, so erhält man daraus umgekehrt für gegebene Werthe von $\frac{l}{d}$ die entsprechenden von $\frac{d_1}{d}$ durch Interpolation.

Man findet für:

$\alpha = 1$	0,9	0,8	0,7	0,6	0,5	0,4
$\frac{l}{d} = 0$	7,78	11,56	15,02	18,50	22,78	28,02
$\frac{d_1}{d} = 1$	0,924	0,846	0,765	0,682	0,595	0,503.

B. Einfach gekrümmter stabförmiger Körper.

153. — Die Mittellinie des Stabes sei ursprünglich (vor der Belastung) eine Curve von einfacher Krümmung; ihre Ebene enthalte die Richtungslinien aller äusseren Kräfte (cf. Nr. 125). Es wird ferner vorausgesetzt, dass diese Ebene und die in der Mittellinie selbst sie rechtwinkelig schneidende Cylinderfläche die Oerter der Schwerpunktshauptaxen aller Querschnitte seien, was insbesondere dann der Fall ist, wenn die Ebene der Mittellinie den Stab in zwei symmetrische Hälften theilt; bei der Belastung bleibt dann die Mittellinie eine ebene Curve, und die Biegungsebene, d. i. die Ebene der elastischen Linie oder deformirten Mittellinie fällt mit der ursprünglichen Mittellinie zusammen.

Vor der Belastung sei:

$OO_1 = ds$ ein Bogenelement,

r der entsprechende Krümmungshalbmesser,

$d\varphi$ der entsprechende Contingenzwinkel

der Mittellinie, also $ds = r d\varphi$.

F und F_1 seien die den Punkten O und O_1 entsprechenden Querschnitte,

η der Abstand eines Punktes A in F von der Biegungsaxe, positiv auf der convexen, negativ auf der concaven Seite der Mittellinie;

dann ist der gegenseitige Abstand AA_1 zwischen F und F_1 , von A aus längs einer um die Krümmungsaxe mit dem Radius $r + \eta$ beschriebenen Cylinderfläche gemessen:

$$ds_\eta = (r + \eta) d\varphi = ds + \eta \cdot d\varphi$$

und wenn er infolge der Belastung um die verhältnissmässig kleine Grösse

$$\Delta ds_\eta = \Delta ds + \eta \cdot \Delta d\varphi$$

sich ändert, so ist die Ausdehnung ε und entsprechende Spannung σ im Punkte A :

$$\varepsilon = \frac{\Delta ds_\eta}{ds_\eta} = \frac{\Delta ds + \eta \cdot \Delta d\varphi}{ds + \eta \cdot d\varphi}; \quad \sigma = E\varepsilon$$

oder mit

$$\begin{aligned} \frac{\Delta ds}{ds} &= \varepsilon_0; \quad \frac{\Delta d\varphi}{d\varphi} = \omega \\ \varepsilon^*) &= \frac{\varepsilon_0 + \omega \frac{\eta}{r}}{1 + \frac{\eta}{r}}; \quad \sigma = E\varepsilon. \end{aligned}$$

154. — In diesem Ausdrucke von ε müssen ε_0 und ω mit Rücksicht auf das Gleichgewicht zwischen den Spannungen der verschiedenen Flächenelemente von F und dem System der äusseren Kräfte für diesen Querschnitt ausgedrückt werden. Ist zu dem Ende

P die algebraische Summe der zu F senkrechten Componenten der äusseren Kräfte, positiv oder negativ, jenachdem sie einem resultirenden Zug oder Druck entspricht,

M die Momentensumme dieser äusseren Kräfte in Beziehung auf die Biegungsaxe des Querschnitts F , positiv oder negativ, jenachdem auf Verstärkung oder Verminderung der Krümmung (Verkleinerung oder Vergrösserung von r) hinwirkend, und ist

dF ein unendlich schmaler Flächenstreifen des Querschnitts, im Abstände η parallel der Biegungsaxe,

*) Bei einem ursprünglich geraden Stabe ist $d\varphi = 0$, aber

$$\Delta d\varphi = \frac{ds(1 + \varepsilon_0)}{r},$$

unter ϱ den Krümmungsradius der elastischen Linie verstanden; also

$$\varepsilon = \frac{\Delta ds + \eta \frac{ds(1 + \varepsilon_0)}{r}}{ds} = \varepsilon_0 + (1 + \varepsilon_0) \frac{\eta}{\varrho}. \quad \text{Cf. Nr. 41.}$$

so sind die Gleichgewichtsbedingungen (abgesehen von der in die Ebene von F fallenden resultirenden Schubkraft R : cf. Nr. 125):

$$P = \int \sigma dF; \quad M = \int \sigma dF \eta.$$

Bringt man den Ausdruck von ε zuvor auf die Form:

$$\varepsilon = \varepsilon_0 + (\omega - \varepsilon_0) \frac{\eta}{r} = \varepsilon_0 + (\omega - \varepsilon_0) \frac{\eta}{r} \left(1 - \frac{\eta}{r} + \frac{\eta^2}{r^2} - \dots \right),$$

so liefert die Substitution von $\sigma = E\varepsilon$ in obigen Gleichungen mit Rücksicht darauf, dass

$$\int dF = F; \quad \int \eta dF = 0$$

ist, und wenn

$$\int \eta^2 dF = Ff^2; \quad \int \eta^3 dF = Fg^3; \quad \int \eta^4 dF = Fh^4 \dots$$

$$\text{und } \frac{f^2}{r^2} - \frac{g^3}{r^3} + \frac{h^4}{r^4} - \dots = \alpha$$

gesetzt wird:

$$\varepsilon_0 = \frac{1}{EF} \left(P + \frac{M}{r} \right)$$

$$\omega = \frac{1}{EF} \left(P + \frac{M}{r} \frac{1 + \alpha}{\alpha} \right).$$

155. — Die Substitution dieser Ausdrücke von ε_0 und ω in

$$\sigma = E\varepsilon = E \left[\varepsilon_0 + (\omega - \varepsilon_0) \frac{\eta}{r + \eta} \right]$$

gibt für die Spannung in einem beliebigen Punkte eines beliebigen Querschnitts:

$$F\sigma = P + \frac{M}{r} + \frac{M}{r\alpha} \frac{\eta}{r + \eta}.$$

Die grössten Absolutwerthe von σ finden in denjenigen Punkten eines Querschnitts statt, welche von der Biegungsaxe am weitesten entfernt sind; diese grössten Abstände seien e_1 für die convexe, e_2 für die concave Seite der elastischen Fläche, sofern nicht $e_1 = e_2$ ist und dann mit e bezeichnet wird.

Ist ρ der Krümmungsradius der elastischen Linie im Punkte O , d. h. der durch die Deformation der Mittellinie geänderte Werth von r , so ergibt sich aus

$$ds = r d\varphi$$

$$\frac{\Delta ds}{ds} = \frac{\Delta d\varphi}{d\varphi} + \frac{\Delta r}{r}$$

oder

$$\varepsilon_0 = \omega + \frac{\rho - r}{r}$$

und daraus:

$$\rho = r - \frac{M}{EF\alpha}.$$

156. — Wenn die Biegungsaxe den Querschnitt in zwei symmetrische Hälften theilt, so ist:

$$\int \eta^3 dF = 0; \int \eta^5 dF = 0 \dots$$

und

$$\alpha = \frac{f^2}{r^2} + \frac{h^4}{r^4} + \dots$$

Insbesondere für einen rechteckigen Querschnitt findet man:

$$\alpha = \frac{1}{3} \frac{e^2}{r^2} + \frac{1}{5} \frac{e^4}{r^4} + \frac{1}{7} \frac{e^6}{r^6} + \dots$$

und für einen Kreis oder eine Ellipse:

$$\alpha = \frac{1}{4} \frac{e^2}{r^2} + \frac{1}{8} \frac{e^4}{r^4} + \frac{5}{64} \frac{e^6}{r^6} + \dots$$

Der Bruch $\frac{e}{r}$ ist gewöhnlich klein genug, um die Glieder mit den höheren Potenzen, als der vierten, vernachlässigen zu dürfen.

157. — Die Grössen P und M , welche bekannt sein müssen, um nach der Formel in Nr. 155 die Spannung σ in jedem Punkte berechnen zu können, enthalten neben den gegebenen primären auch die secundären äusseren Kräfte, d. h. die Reactionen von Stützpunkten und Befestigungen, welche häufig nur mit Rücksicht auf die Deformation der Mittellinie gefunden werden können.

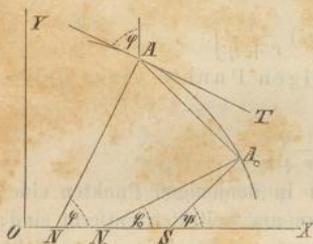


Fig. 25.

Sind zu dem Ende (Fig. 25) OX und OY rechtwinkelige Coordinatenachsen in der Mittelebene,

A_0 und A zwei Punkte der Mittellinie mit den Coordinaten x_0, y_0 und x, y , φ_0 und φ die Winkel der x -Axe mit den Normalen A_0N_0 und AN der Mittellinie in den Punkten A_0 und A ,

so ist die Aenderung, welche die gegenseitige Neigung dieser Normalen durch die Deformation der Mittellinie erfährt:

$$\Delta(\varphi - \varphi_0) = \int_{\varphi_0}^{\varphi} \omega d\varphi$$

und wenn diese Aenderung für ein Paar von Punkten A_0 und A den Bedingungen der Aufgabe gemäss gegeben ist, so erhält man dadurch bei Substitution des Ausdruckes von ω nach Nr. 154 eine Bestimmungsgleichung für die in P und M vorkommenden unbekanntenen Constanten.

Nöthigen Falls können ferner die Aenderungen

$$\Delta(x - x_0) \text{ und } \Delta(y - y_0)$$

der Coordinatenunterschiede in Betracht gezogen werden, welche vielleicht für dasselbe oder für ein anderes Paar von Punkten A_0 und A gegeben sind. Dieselben sind bedingt durch die kleinen Aenderungen ω und ε_0 für

alle Elemente des zwischenliegenden Bogens A_0A zusammen genommen. Was zunächst die Differentiale

$$d\Delta(x - x_0) \text{ und } d\Delta(y - y_0)$$

betrifft, welche von der Aenderung $\Delta d\varphi$ des Contingenzwinkels und der Ausdehnung ε_0 des Bogenelementes bei A herrühren, so wird vermöge der einer Drehung um die Biegungsaxe A gleich kommenden Aenderung $\Delta d\varphi$ der Punkt A_0 relativ gegen den Punkt A nach der Richtung A_0S der Senkrechten zur Sehne AA_0 verschoben und zwar um die Strecke $AA_0 \cdot \Delta d\varphi$; vermöge der Ausdehnung ε_0 dagegen erfolgt eine relative Verschiebung parallel der Tangente AT im Punkte A um die Strecke $\varepsilon_0 ds$. Daraus ergibt sich, wenn der Winkel A_0SX mit ψ bezeichnet wird:

$$\begin{aligned} d\Delta(x_0 - x) &= -AA_0 \cdot \Delta d\varphi \cdot \cos \psi + \varepsilon_0 ds \cdot \sin \varphi \\ &= -\Delta d\varphi (y - y_0) - \varepsilon_0 dx; \\ d\Delta(y - y_0) &= AA_0 \cdot \Delta d\varphi \cdot \sin \psi + \varepsilon_0 ds \cdot \cos \varphi \\ &= \Delta d\varphi (x_0 - x) + \varepsilon_0 dy; \end{aligned}$$

folglich:

$$\begin{aligned} \Delta(x - x_0) &= \int_{\varphi_0}^{\varphi} y \omega d\varphi - y_0 \int_{\varphi_0}^{\varphi} \omega d\varphi + \int_{x_0}^x \varepsilon_0 dx \\ \Delta(y - y_0) &= -\int_{\varphi_0}^{\varphi} x \omega d\varphi + x_0 \int_{\varphi_0}^{\varphi} \omega d\varphi + \int_{y_0}^y \varepsilon_0 dy, \end{aligned}$$

worin für ε_0 und ω die Werthe aus Nr. 154 einzusetzen sind. Diese Gleichungen sind nur näherungsweise richtig, wenn unter den auf den rechten Seiten vorkommenden Coordinaten diejenigen der ursprünglichen Mittellinie verstanden werden; meistens ist aber die Deformation so gering, dass die so gewonnene erste Annäherung völlig ausreicht.

I. Krumme stabförmige Körper von constantem Querschnitte.

158. — Berechnung von Ringen, insbesondere Kettenringen, welche diametral gezogen werden.

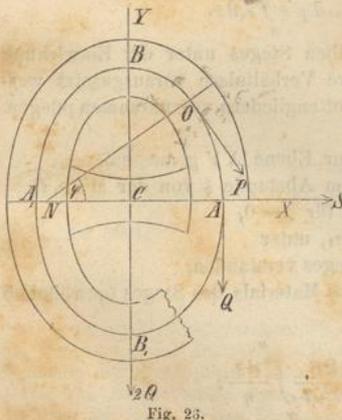


Fig. 25.

Die Mittellinie des Ringes (Fig. 26) ist eine in Beziehung auf zwei rechtwinkelige Axen CX und CY symmetrische geschlossene Curve mit den Halbachsen $CA = a$, $CB = b$. Bei B und B_1 wird der Ring, welcher im Sinne der x -Axe im Allgemeinen mit einem eingesetzten Stege versehen sei, durch die gleichen Kräfte $2Q$ nach den Richtungen CB resp. CB_1 gezogen. In den vier Quadranten sind unter diesen Umständen alle Verhältnisse gleich, und es brauchen dieselben nur für einen solchen Quadranten AB untersucht zu werden; insbesondere ist es die Aufgabe, die Spannungen σ_1 und σ zu ermitteln, welche im äussersten und innersten Punkte des beliebigen Querschnitts bei O (in den Abständen e_1 resp. e_2 von der

9*

Biegungsaxe) stattfinden, zu welchem Zwecke zuvor die Grössen P und M für diesen Querschnitt gefunden werden müssen.

x, y sind die Coordinaten des Punktes O ,

φ ist der Winkel zwischen der Normalen ON und der x -Axe.

Am Zustande des Quadranten AB wird nichts geändert, wenn man den Ring im Querschnitte B befestigt und im Querschnitte A zerschneidet, in der Schnittfläche aber die äussere Kraft Q nach der Richtung YC wirkend anbringt, ferner die Kraft S nach der Richtung CX wirkend = dem halben Gegendrucke, den der Steg dem auf ihn ausgeübten Drucke entgegengesetzt (die andere Hälfte wirkt an dem weggeschnittenen Quadranten AB_1) und endlich ein Kräftepaar $[A]$, welches, positiv oder negativ jenachdem einer Verstärkung oder Verminderung der Krümmung entsprechend, dem Spannungsmomente des Querschnittes A gleich ist. Hiernach hat man:

$$P = Q \cos \varphi + S \sin \varphi$$

$$M = [A] + Q(a-x) - S y = M_0 - Qx - S y,$$

wenn

$$M_0 = [A] + Qa$$

gesetzt wird.

Werden A und B als die in Fig. 25 mit A_0 und A bezeichneten Punkte angenommen, so ist für sie $\Delta(\varphi - \varphi_0) = 0$, also

$$0 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \omega d\varphi.$$

Ist der Ring ohne Steg, also $S = 0$, so ist durch diese Gleichung die einzige Unbekannte M_0 bestimmt; anderenfalls ist noch eine zweite Bestimmungsgleichung der Unbekannten M_0 und S nöthig, welche dadurch erhalten wird, dass die Verkürzung der Halbaxe CA :

$$-\Delta a = -\Delta(x_0 - x) = \Delta(x - x_0),$$

unter $x_0 = a$ und $x = 0$ die x -Coordinaten derselben Endpunkte A und B verstanden, auf doppelte Weise ausgedrückt werden kann.

Einmal ist nach Nr. 157:

$$-\Delta a = \Delta(x - x_0) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} y \omega d\varphi + \int_a^0 \epsilon_0 dx.$$

Anderseits ist $-\Delta a$ die Verkürzung des halben Steges unter der Einwirkung des Druckes $2S$, zu deren Berechnung mittlere Verhältnisse vorausgesetzt werden mögen, wie sie bei derartig ausgesteiften Kettengliedern vorzukommen pflegen. Ist der Querschnitt des Steges ein Rechteck,

β dessen constante Breite (senkrecht zur Ebene XY gemessen),

η die veränderliche Dicke oder Höhe im Abstände ξ von der Mitte C ,

η_0 die kleinste Höhe in der Mitte, also für $\xi = 0$,

η_1 die grösste Höhe am Ende für $\xi = a_1$, unter

a_1 (etwas $< a$) die halbe Länge des Steges verstanden,

so ist, wenn noch E_1 den Elasticitätsmodul des Materials des Steges (gewöhnlich Gusseisen) bezeichnet:

$$-\Delta a = \int_0^{a_1} \frac{2S}{E_1 \beta \eta} d\xi = \frac{2S}{E_1 \beta} \int_0^{a_1} \frac{d\xi}{\eta}.$$

Daraus ergibt sich, wenn

$$\eta = \frac{\eta_0}{1 - n\epsilon^2}$$

als Gleichung der das Profil des Steges beiderseits begrenzenden Curve angenommen und die Constante n so bestimmt wird, dass $\eta_1 = \frac{3}{2} \eta_0$ ist:

$$-\Delta a = \frac{16}{9} \frac{S a_1}{E_1 F_1},$$

wo mit F_1 der kleinste Querschnitt $= \beta \eta_0$ bezeichnet ist. Wird endlich dieser letztere zum Querschnitte F des Ringes in das Verhältniss

$$\frac{F_1}{F} = \frac{16}{9\pi}$$

gesetzt (entsprechend dem gewöhnlichen Falle, dass F_1 ein Quadrat und dessen Seite $\beta = \eta_0 = \frac{2}{3}$ vom Durchmesser des cylindrischen Ketteneisens ist), so folgt:

$$-\Delta a = \pi \frac{S a_1}{E_1 F},$$

wofür schliesslich mit sehr kleinem Fehler*) gesetzt werden kann:

$$-\Delta a = \frac{3 S a}{E_1 F}.$$

Die zweite Bestimmungsgleichung der unbekanntenen Constanten M_0 und S ist dann:

$$\frac{3 S a}{E_1 F} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} y \omega d\varphi + \int_a^0 \epsilon_0 dx.$$

159. — Kreisförmiger Ring ohne Steg.

In diesem einfachsten Specialfalle ist $a = b =$ dem Radius r der kreisförmigen Mittellinie;

$$P = Q \cos \varphi; \quad M = M_0 - Q r \cos \varphi.$$

Aus der Gleichung $0 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \omega d\varphi$ ergibt sich:

$$M_0 = \frac{2 Q r}{(1 + \alpha) \pi}$$

und damit:

$$\sigma = \left[\frac{2}{(1 + \alpha) \pi} + \frac{1}{\alpha} \left(\frac{2}{(1 + \alpha) \pi} - \cos \varphi \right) \frac{\eta}{r + \eta} \right] \frac{Q}{F}.$$

Die eminenten Werthe von σ finden statt in den äussersten und innersten Punkten ($\eta = e_1$ und $\eta = -e_2$) der Querschnitte bei A und B ($\varphi = 0$ und $\varphi = \frac{\pi}{2}$); sie sind:

*) Ist auch im Allgemeinen $3a$ etwas $> \pi a_1$, so ist doch zu berücksichtigen, dass die Verkürzung der Dimension $CA = a$ streng genommen nicht von der Zusammenrückung des Steges allein herrührt, indem der Druck $2S$ sich mehr oder weniger in die Masse des Ringes hinein erstreckt und ausserdem auch schon durch die unmittelbare Wirkung des Zuges Q eine Zusammenziehung des Ringquerschnitts bei A bedingt wird.

$$\text{bei } A \left\{ \begin{aligned} \sigma_1 &= \left[\frac{2}{(1+\alpha)\pi} - \frac{1}{\alpha} \left(1 - \frac{2}{(1+\alpha)\pi} \right) \frac{e_1}{r+e_1} \right] \frac{Q}{F} \\ \sigma_2 &= \left[\frac{2}{(1+\alpha)\pi} + \frac{1}{\alpha} \left(1 - \frac{2}{(1+\alpha)\pi} \right) \frac{e_2}{r-e_2} \right] \frac{Q}{F} \end{aligned} \right.$$

$$\text{bei } B \left\{ \begin{aligned} \sigma_1 &= \frac{2}{(1+\alpha)\pi} \left(1 + \frac{1}{\alpha} \frac{e_1}{r+e_1} \right) \frac{Q}{F} \\ \sigma_2 &= \frac{2}{(1+\alpha)\pi} \left(1 - \frac{1}{\alpha} \frac{e_2}{r-e_2} \right) \frac{Q}{F} \end{aligned} \right.$$

Ist z. B. der Querschnitt des Ringes ein Kreis mit dem Radius $e_1 = e_2 = e$, so findet man die Coefficienten von $\frac{Q}{F}$, welche angeben, wie viel Mal die betreffende Spannung grösser ist, als die gleichförmig vertheilte Spannung eines durch die Kraft Q centrisch gezogenen Stabes von demselben Querschnitte F sein würde, für:

	A		B	
	σ_1	σ_2	σ_1	σ_2
$r = 3e$	-2,634	7,124	5,892	-9,928
$r = 4e$	-4,010	8,353	8,403	-12,334

Ist $r > 4e$, so behalten die 4 eminenten Spannungen immer dieselbe Reihenfolge hinsichtlich ihrer absoluten Grösse wie für $r = 4e$, und es ist also überhaupt in allen vorkommenden Fällen ($r > 3e$) die negative Spannung des inneren Punktes bei B absolut genommen die grösste von allen. Ihr Absolutwerth k lässt sich auf die Form bringen:

$$k = \frac{2}{\pi} \left(4 \frac{r}{e} + 3 + \frac{e}{r} + \frac{5}{4} \frac{e^2}{r^2} + \dots \right) \frac{Q}{F}$$

und es ergibt sich danach bei Vernachlässigung der nicht geschriebenen Glieder der Reihe,

z. B. für $\frac{r}{e} =$	3,	4	5	6
$k \frac{F}{Q} =$	9,85	12,30	14,80	17,32.

160. — Ovale Kettenglieder von Rundeisen.

Bei gegebenen Halbaxen $CA = a$ und $CB = b$ der ovalen Mittellinie (Fig. 26) und unter sonst gleichen Umständen hat eine kleine Aenderung des geometrischen Charakters der Mittellinie ohne Zweifel nur einen untergeordneten Einfluss

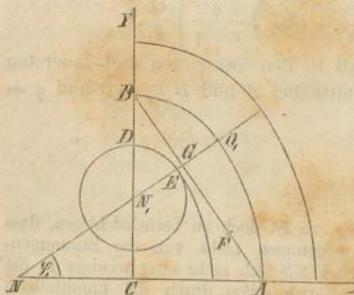


Fig. 27.

auf die Tragfähigkeit des Kettengliedes, und es wird insbesondere wenig darauf ankommen, ob die Curve AB als der Quadrant einer Ellipse oder als aus zwei Kreisbögen zusammengesetzt betrachtet wird, deren Mittelpunkte N und N_1 in CA und CB liegen, und welche in einem gewissen Punkte O_1 mit einer gemeinschaftlichen Tangente in einander übergehen: Fig. 27. Die letztere Form, welche hier vorausgesetzt werden soll, gestattet nicht nur eine leichtere Rechnung,

sondern ist sogar bei zweckmässiger Wahl der Verhältnisse der Ellipse vorzuziehen.

Sind $NA = r$ und $N_1B = r_1$ die Radien der beiden Kreisbögen AO_1 und BO_1 und ist $BD = e$ der Radius des Querschnitts des Rundeisens, woraus die Kette gebildet ist, so müssen, um ein Klemmen der in einander hängenden Kettenglieder zu verhüten, jene Kreisbögen, deren es bei gegebenen Werthen von a und b unendlich viele giebt, jedenfalls so gewählt werden, dass $N_1D \equiv e$, also

$$r_1 \equiv 2e$$

ist; man erhält aber eine Form, welche sich der Ellipse mit den Halbachsen a und b bei möglichst grossem Werthe von r_1 nahe anschliesst, wenn man die Radien r und r_1 der Bedingung gemäss bestimmt, dass

$$\frac{r_1}{r} = \max.$$

ist. Diese Forderung führt zu den Werthen:

$$r = \frac{a^2 + b^2 + (b-a) \sqrt{a^2 + b^2}}{2a}$$

$$r_1 = \frac{a^2 + b^2 - (b-a) \sqrt{a^2 + b^2}}{2b}$$

entsprechend der folgenden Construction (Fig. 27):

$AF = b - a$; $BG = FG$; NN_1 senkrecht zu AB im Punkte G .

Diese Construction vorausgesetzt, wird der Bedingung

$$r_1 \equiv 2e$$

entsprochen, wenn die Verhältnisse

$$\alpha = \frac{a}{e} \text{ und } \beta = \frac{b}{e}$$

so gewählt werden, dass:

$$8\beta - (4 - \alpha)(\alpha^2 + \beta^2) \equiv 0$$

ist. Dem Ungleichheitszeichen entspricht eine Berührung der beiden aufeinander folgenden Kettenglieder in dem einzigen Punkte D , dem Gleichheitszeichen aber als Grenzfall eine gegenseitige Berührung in 2 Kreisbögen, die sich im Punkte D rechtwinkelig schneiden; DE (Fig. 27) ist die Hälfte eines dieser Kreisbögen. Diesem Grenzfall möglichst nahe zu kommen, ist vortheilhaft, weil dadurch die Verstärkung der Krümmung des Bogens BO_1 , welche mit vorzugsweise gefährlichen Spannungen im Querschnitte bei B verbunden ist, fast ganz verhindert wird.

161. — Bei einem Kettengliede ohne Steg muss jedenfalls $\alpha > 2$ und $\beta > 3$ sein; mit dem üblichen Werthe $\alpha = 2,5$ liefert die Gleichung

$$8\beta - (4 - \alpha)(\alpha^2 + \beta^2) = 0$$

$$\beta = \frac{16 \pm \sqrt{31}}{6} = \begin{cases} 3,595 \\ 1,739. \end{cases}$$

Die einzig hier brauchbare grössere Wurzel entspricht, auch den üblichen Verhältnissen. Mit $\alpha = 2,5$ und $\beta = 3,6$ findet man

$$\frac{r}{e} = 4,8; \quad \frac{r_1}{e} = 2$$

und, wenn (Fig. 27) $CN = c$, $CN_1 = c_1$ und Winkel $CNN_1 = \varphi_1$ gesetzt wird,

$$\frac{c}{e} = 2,3; \quad \frac{c_1}{e} = 1,6; \quad \varphi_1 = \arctg \frac{c_1}{c} = 34^\circ 50'.$$

Wenn nun auch unter diesen Verhältnissen von einer Veränderung der Krümmung des Bogens BO_1 keine Rede sein kann, so schliesst das doch nicht aus, dass der materiell gedachte Querschnitt bei O_1 wegen der Ausdehnung der äusseren und der Zusammendrückung der inneren Theile des dem Bogen BO_1 entsprechenden Ringstücks eine (jedenfalls negative) Aenderung $\Delta\varphi_1$ seiner Neigung gegen die x -Axe erfahren kann. Indem also hier für irgend einen Querschnitt des Ringstücks AO_1 nach Nr. 158

$$P = Q \cos \varphi; \quad M = M_0 - Qx = M_0 - Q(r \cos \varphi - c)$$

ist, so hat man zur Bestimmung von M_0 die Gleichung:

$$\Delta\varphi_1 = \int_0^{\varphi_1} \omega d\varphi,$$

woraus mit dem Ausdrücke von ω nach Nr. 154 und wenn

$$\delta = \frac{EF}{Q} \frac{\alpha}{1 + \alpha} \frac{\Delta\varphi_1}{\varphi_1}$$

gesetzt wird, sich ergibt:

$$\frac{M_0}{r} = Q \left(\delta + \frac{\sin \varphi_1}{(1 + \alpha) \varphi_1} - \frac{c}{r} \right)$$

und dann durch Einsetzung der Werthe von P und M nach Nr. 155:

$$\sigma = \left[\delta + \frac{\sin \varphi_1}{(1 + \alpha) \varphi_1} + \frac{1}{\alpha} \left(\delta + \frac{\sin \varphi_1}{(1 + \alpha) \varphi_1} - \cos \varphi \right) \frac{\eta}{r + \eta} \right] \frac{Q}{F}.$$

Dieser Ausdruck, worin den oben bestimmten Verhältnissen des Ringes entsprechend

$$\alpha = 0,01109; \quad \frac{1}{\alpha} = 90,171; \quad \frac{\sin \varphi_1}{(1 + \alpha) \varphi_1} = 0,92924$$

ist, gilt natürlich nur für $0 < \varphi < \varphi_1$; innerhalb dieser Grenzen finden ihmzufolge die eminenten Werthe von σ in den äussersten und innersten Punkten der Querschnitte bei A und O_1 statt, und es werden dieselben, wenn vorläufig $\Delta\varphi_1$, also auch $\delta = \text{Null}$ gesetzt wird, wie folgt gefunden:

$$\begin{array}{l} \text{Querschnitt bei } A \left\{ \begin{array}{l} \eta = e; \quad \sigma_1 = -0,171 \frac{Q}{F} \\ \eta = -e; \quad \sigma_2 = 2,608 \frac{Q}{F} \end{array} \right. \\ \text{Querschnitt bei } O_1 \left\{ \begin{array}{l} \eta = e; \quad \sigma_1 = 2,615 \frac{Q}{F} \\ \eta = -e; \quad \sigma_2 = -1,643 \frac{Q}{F} \end{array} \right. \end{array}$$

Eine rationelle Berechnung von $\Delta\varphi_1$ ist wohl kaum möglich; nimmt man aber an, dass die Spannungsverhältnisse, wie sie im Querschnitte bei O_1 stattfinden, insbesondere also auch die eminenten Spannungen

$$\sigma_1 = m_1 \frac{Q}{F} \quad \text{und} \quad \sigma_2 = m_2 \frac{Q}{F}$$

in unveränderter Weise bis zum Querschnitte bei B sich fortsetzen, so ist, vorausgesetzt, dass die materiellen Querschnitte überhaupt eben bleiben und wenn der Winkel

$$BN_1O_1 = \frac{\pi}{2} - \varphi_1 = \varphi_2$$

gesetzt wird, offenbar:

$$\Delta\varphi_1 = -\frac{1}{2e} \left[\frac{\sigma_1}{E} (r_1 + e) \varphi_2 - \frac{\sigma_2}{E} (r_1 - e) \varphi_2 \right] = -\frac{(3\sigma_1 - \sigma_2) \varphi_2}{2E} = -\frac{(3m_1 - m_2) Q \varphi_2}{2EF}$$

$$\text{also } \delta = -(3m_1 - m_2) \frac{1}{2} \frac{\alpha}{1 + \alpha} \frac{q_2}{q_1} = -0,008782 (3m_1 - m_2).$$

Wenn man nun vorläufig $m_1 = 2,615$ und $m_2 = -1,643$ setzt und mit dem so bestimmten δ die obigen 4 eminenten Spannungen auf's Neue berechnet, so findet man wesentlich andere Werthe, denen dann auch wieder ein anderer Werth von δ entspricht u. s. f.; setzt man diese Rechnung fort bis zwei aufeinander folgende Werthe von δ in 4 Decimalstellen übereinstimmen, so ergibt sich schliesslich: *)

$$\begin{array}{l} \text{Querschnitt bei } A \left\{ \begin{array}{l} \sigma_1 = -1,014 \frac{Q}{F} \\ \sigma_2 = 3,766 \quad \text{,,} \end{array} \right. \\ \text{Querschnitt bei } O_1 \left\{ \begin{array}{l} \sigma_1 = 1,772 \quad \text{,,} \\ \sigma_2 = -0,486 \quad \text{,,} \end{array} \right. \end{array}$$

162. — Bei einem Kettengliede mit Steg muss jedenfalls $\beta > 3 + \frac{1}{2}$ Höhe des Steges sein, und mit dem durchschnittlich üblichen Verhältnisse $\beta = 4$ liefert die Gleichung:

$$\begin{aligned} 8\beta - (4 - \alpha) (\alpha^2 + \beta^2) &= 0 \\ \alpha &= 2,59. \end{aligned}$$

Von der ziemlich umständlichen theoretischen Bestimmung der Maximalspannung ist hier kaum ein praktischer Gewinn zu erwarten, indem bei den üblichen Verhältnissen von dergl. Kettengliedern ihre Tragkraft nur wenig kleiner ist, als diejenige eines geraden Stabes vom Querschnitte $2F$. Nach Versuchen über die Tragkraft von Ankerketten mit ausgesteiften Gliedern, welche die englische Admiralität anstellen liess, ergab sich die Zugkraft, durch welche die Kette zerrissen wird, im Durchschnitte

$$2Q = 1,6 KF,$$

*) Ob dieser Maximalwerth: $3,766 \frac{Q}{F}$ oder der $\Delta q_1 = 0$ entsprechende: $2,615 \frac{Q}{F}$

Wahrheit näher kommt, ist wohl nur durch vergleichende Belastungsversuche eines solchen Kettengliedes und eines gleich dicken geraden Rundeisenstabes aus demselben Eisen zu entscheiden, wobei es hauptsächlich darauf ankommen würde, diejenigen Belastungen zu ermitteln, welche eben eine merklich bleibende Deformation zur Folge haben.

Schlieper in Grüne bei Iserlohn machen, wie Redtenbacher (Maschinenbau I, p. 129) anführt, für die von ihnen verfertigten Ketten die Angabe:

$$d = 0,032 \sqrt{2Q},$$

unter d den erforderlichen Durchmesser in Centimetern des Ketteneisens für die Maximalzugkraft $= 2Q$ Kilogr. der Kette verstanden, und sie garantiren dabei vierfache Sicherheit gegen Zerreißen. Nach der ersten der obigen Rechnungsweisen ($\Delta q_1 = 0$) würde sich die Maximalspannung der so proportionirten Kettenglieder $= 1626$, nach der zweiten $= 2341$ Kilogr. pro Quadratcent. ergeben, was, wenn jene Angabe zuverlässig ist, eher zu Gunsten der ersten, als der zweiten Rechnungsweise sprechen würde. Die Bruchbelastung giebt hier übrigens, selbst abgesehen von anderen Umständen, schon deswegen keinen sicheren Anhalt für die Beurtheilung der Theorie, weil die Dimension α sich vor dem Bruche wesentlich verkleinert und dadurch auch die Maximalspannung wesentlich kleiner wird.

Im Allgemeinen wird es zu empfehlen sein, den für die gegebene Maximallast $= 2Q$ der Kette passenden Durchmesser des Ketteneisens nach der Formel:

$$d = \frac{1}{25} \sqrt{2Q}$$

zu berechnen, entsprechend einer Maximalspannung $= 1040$ resp. 1498 Kil. pro Quadratcentimeter nach der ersten resp. zweiten Rechnungsweise.

unter K die absolute Festigkeit des betreffenden Eisens verstanden, welche im Mittel etwa 4300 Kil. pro Quadratcentim. betrug. Blicke das Vertheilungsgesetz der Spannungen bis zum Bruche unverändert, so würde hieraus bei irgend einer auf das Kettenglied ausgeübten Zugkraft $2Q$ die Maximalspannung

$$= 1,25 \frac{Q}{F}$$

zu folgern sein.

163. — Berechnung eines Schwungringes, d. h. eines um seine geometrische Axe, mit welcher er durch symmetrisch vertheilte, radial gerichtete gerade Arme verbunden ist, mit einer gewissen Geschwindigkeit rotirenden kreisrunden Ringes. Die belastende Kraft ist hier die Centrifugalkraft, indem von der unmittelbaren Wirkung der Schwere abgesehen wird.

Der Querschnitt $= F_1$ jedes Arms wird ebenso wie derjenige $= F$ des Ringes als constant vorausgesetzt, und es seien ferner:

w die Winkelgeschwindigkeit,

r der Radius, $v = rw$ die Peripheriegeschwindigkeit der Mittellinie des Ringes,

E der Elasticitätsmodul, m die spezifische Masse (Masse der Volumeneinheit) des Materials, woraus der Ring besteht,

E_1 und m_1 die entsprechenden Grössen für das Material der Arme,

2γ der Winkel, unter welchem die Mittellinien CB und CB_1 (Fig. 28) zweier aufeinander folgender Arme gegeneinander geneigt sind.

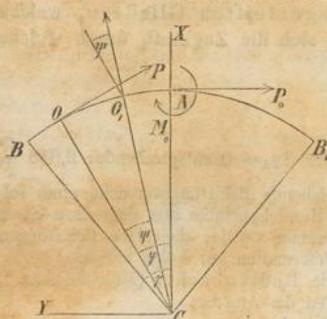


Fig. 28.

Ist CA die als x -Axe angenommene Mittellinie dieses Winkels, so brauchen nur die Spannungsverhältnisse des Ringstücks AB untersucht zu werden, indem sich dieselben $\frac{2\pi}{\gamma}$ Mal wiederholen. O sei ein beliebiger Punkt des Bogens AB der Mittellinie, Winkel $OCX = \varphi$, O_1 ein Punkt des Bogens AO , Winkel $OCO_1 = \psi$.

Im Querschnitte bei A findet keine Schubkraft, sondern nur eine resultirende Normalspannung $= P_0$ und ein resultirendes Spannungsmoment $= M_0$ statt, welche, äusserlich an der Schnittfläche angebracht, das Ringstück AB in unveränderter Art im Gleichgewichte erhalten, wenn durch den Querschnitt bei A ein Schnitt geführt wird.

Ist $Cd\psi$ die Centrifugalkraft eines Ringelementes zwischen zwei unter dem Winkel $d\psi$ gegen einander geneigten Querschnitten, so findet man mit den in Nr. 154 erklärten Bezeichnungen:

$$Cd\psi = f w^2 \cdot m \cdot dF (r + \eta)^2 d\psi = m F v^2 \left(1 + \frac{f^2}{r^2}\right) d\psi,$$

ferner, wenn

$$C - P_0 = A; P_0 + \frac{M_0}{r} = B$$

gesetzt wird:

$$P = P_0 \cos \varphi + \int_0^{\varphi} C d\psi \cdot \sin \psi = C - A \cos \varphi$$

$$M = M_0 + P_0 r (1 - \cos \varphi) - \int_0^{\varphi} C d\psi \cdot r \sin \psi = r (B - C + A \cos \varphi)$$

und damit nach Nr. 155:

$$F\sigma = B + \frac{1}{\alpha} (B - C + A \cos \varphi) \frac{\eta}{r + \eta}.$$

Hieraus erkennt man, dass die eminenten und deshalb einzig zu berechnenden Spannungen in den äussersten und innersten Punkten der Querschnitte bei A und B stattfinden; um sie aber berechnen zu können, müssen zuvor die Werthe der Constanten A und B ermittelt werden, welche statt der ursprünglichen Unbekannten P_0 und M_0 eingeführt wurden. Zu dem Ende hat man nach Nr. 154:

$$\varepsilon_0 = \frac{B}{EF}; \quad \omega = \frac{1}{EF\alpha} [B(1 + \alpha) - C + A \cos \varphi]$$

und weil die Querschnitte bei A und B ihre gegenseitige Neigung nicht ändern, so ist

$$0 = \int_0^{\gamma} \omega d\varphi,$$

woraus die erste Bestimmungsgleichung:

$$0 = [B(1 + \alpha) - C] \gamma + A \sin \gamma. \quad (1)$$

hervorgeht. Eine zweite ergibt sich daraus, dass die Verlängerung Δr des Arms CB auf doppelte Weise ausgedrückt werden kann. Erstlich ist nach Nr. 157, wenn hier A und B als die dort (Fig. 25) mit A_0 und A bezeichneten Punkte angenommen werden,

$$\Delta(y - y_0) = \Delta r \cdot \sin \gamma = - \int_0^{\gamma} x \omega d\varphi + \frac{B}{EF} r \sin \gamma,$$

woraus durch Entwicklung des Integrals mit $x = r \cos \varphi$ und wenn

$$\frac{\cos \gamma}{2} + \frac{1}{2} \frac{\gamma}{\sin \gamma} - \frac{\sin \gamma}{\gamma} = f(\gamma)$$

gesetzt wird, unter Berücksichtigung von Gl. (1) die Gleichung hervorgeht:

$$EF \frac{\Delta r}{r} = B - A \frac{f(\gamma)}{\alpha}.$$

$\frac{\Delta r}{r}$ besteht aus 2 Theilen:

$$\frac{\Delta r}{r} = \frac{\Delta_1 r}{r} + \frac{\Delta_2 r}{r}.$$

Der erste Theil führt her von der nach CB gerichteten Wirkung R des Ringstücks, von welchem B die Mitte ist, nämlich (wenn hier der Winkel ψ von CB aus gerechnet wird):

$$R = 2 \int_0^{\gamma} C d\psi \cos \psi - 2 P_0 \sin \gamma = 2 A \sin \gamma$$

und es ist also, wenn der Arm als von der Axe bis zur Mittellinie des Ringes reichend in Rechnung gestellt wird:

$$\frac{\Delta_1 r}{r} = \frac{R}{E_1 F_1} = \frac{2 A \sin \gamma}{E_1 F_1};$$

der zweite Theil ist bedingt durch die Centrifugalkraft des Arms selbst und wird unter derselben Voraussetzung gefunden:

$$\frac{\Delta_2 r}{r} = \frac{C_1}{E_1 F_1}; \quad C_1 = \frac{m_1 F_1 v^2}{3}.$$

Die zweite Bestimmungsgleichung der Unbekannten A und B ist danach:*)

$$\frac{EF}{E_1 F_1} (2A \sin \gamma + C_1) = B - A \frac{f(\gamma)}{\alpha} \dots (2).$$

164. — Gewöhnlich sind die Querschnitten des Ringes im Vergleich mit r klein genug, um mit einem nur sehr kleinen Fehler

$$\alpha = \frac{f^2}{r^2} \text{ (cf. Nr. 154)}$$

setzen zu können, besonders wenn der Querschnitt F symmetrisch in Beziehung auf die Biegungsaxe ist (cf. Nr. 156). Wird dann noch

$$\frac{EF}{E_1 F_1} = p; \quad \frac{m_1 E}{3m E_1} = q,$$

also

$$\frac{EF}{E_1 F_1} \cdot \frac{C_1}{C} = \frac{q}{1 + \frac{f^2}{r^2}} = \frac{q}{1 + \alpha}$$

gesetzt, so erhält man aus den Gleichungen (1) und (2) der vorigen Nr.:

$$A = \frac{1 - q}{\frac{\sin \gamma}{r} + (1 + \alpha) \left(\frac{f(\gamma)}{\alpha} + 2p \sin \gamma \right)} C = \alpha C$$

$$B = \frac{1 - \alpha \frac{\sin \gamma}{r}}{1 + \alpha} C = b C$$

und endlich mit $C = m F v^2 (1 + \alpha)$:

$$\sigma = \left[b + \frac{1}{\alpha} (b - 1 + \alpha \cos \varphi) \frac{\eta}{r + \eta} \right] m v^2 (1 + \alpha)$$

Kilogr. pro Quadratmeter, wenn m und v durch das Kilogramm und Meter als Einheiten ausgedrückt werden.

Es sei z. B. $\gamma = 30^\circ = 0,52360$, also $f(\gamma) = 0,00169$, 6 Armen entsprechend, ferner

$$E_1 = E \text{ und } m_1 = m, \text{ also } q = \frac{1}{3}$$

entsprechend einerlei Material von Ring und Armen,

$$F_1 = \frac{1}{3} F, \text{ also } p = 3,$$

der Querschnitt F ein Rechteck, dessen radiale Dimension $= \frac{r}{7}$, also

$$\frac{e}{r} = \frac{1}{14}; \quad \alpha = \frac{1}{3} \frac{e^2}{r^2} = \frac{1}{588} \text{ (cf. Nr. 156),}$$

so findet man

$$\alpha = 0,1345; \quad b = 0,8700$$

$$\sigma = \left[0,8700 + 588 \left(-0,1300 + 0,1345 \cdot \cos \varphi \right) \frac{\eta}{r + \eta} \right] m v^2 (1 + \alpha),$$

*) Zur Ausgleichung des Fehlers, welcher dadurch begangen wurde, dass die wirkliche Länge des Arms $= r$, also etwas zu gross gesetzt wurde, kann man bei der Anwendung seinen Querschnitt F_1 etwas grösser in Rechnung stellen, als er wirklich ist.

Ist a der Radius des Kreises, nach welchem der Mittelschnitt (Fig. 29) des Hakens von Innen begrenzt ist, so lässt sich für den Punkt A der Mittellinie setzen:

$$r = a + e_2$$

und es ist also nach Nr. 155, wenn P die den Haken belastende Kraft ist, wegen

$$P = P; M = -Pr$$

$$\sigma = -\frac{1}{a} \frac{\eta}{a + e_2 + \eta} \frac{P}{F};$$

insbesondere im äussersten und innersten Punkte des Querschnitts bei A :

$$\sigma_1 = -\frac{1}{a} \frac{e_1}{a + e_1 + e_2} \frac{P}{F}; \quad \sigma_2 = \frac{1}{a} \frac{e_2}{a} \frac{P}{F}.$$

106. — Bei kreisförmigem Querschnitte des Hakens mit dem Radius e bei A ist $e_1 = e_2 = e$ und σ_2 der grösste Absolutwerth von σ . Wird derselbe $= k$ gesetzt, so erhält man mit Rücksicht auf den Ausdruck von a nach Nr. 156, wovon hier wenigstens 3 Glieder berücksichtigt werden müssen, also

$$a = \frac{1}{4} \left(\frac{e}{a+e} \right)^2 + \frac{1}{8} \left(\frac{e}{a+e} \right)^4 + \frac{5}{64} \left(\frac{e}{a+e} \right)^6 + \dots$$

zur Berechnung von $e = xa$ die Gleichung:

$$x \left(\frac{x}{1+x} \right)^2 \cdot \left[1 + \frac{1}{2} \left(\frac{x}{1+x} \right)^2 + \frac{5}{16} \left(\frac{x}{1+x} \right)^4 + \dots \right] = \frac{4P}{\pi k a^2}.$$

Ist d der Durchmesser des Ketteneisens einer mit dem Haken zu verbindenden Kette von gleicher Tragkraft mit dem Haken, also nach Nr. 161:

$$d = \frac{1}{25} \sqrt{P},$$

so nimmt man passend $a = d$ bis $\frac{3}{2} d$

$$= \frac{1}{25} \sqrt{P} \text{ bis } \frac{3}{50} \sqrt{P};$$

und wenn d der Durchmesser eines in den Haken einzuhängenden Hanfseils von derselben Tragkraft, also nach Nr. 29:

$$d = \frac{1}{9} \sqrt{P}$$

ist, so pflegt $a = \frac{3}{4} d$ bis d

$$= \frac{1}{12} \sqrt{P} \text{ bis } \frac{1}{9} \sqrt{P}$$

genommen zu werden. Mit $k = 1400$ als der nach Nr. 14 keinesfalls zu überschreitenden Spannung des Schmiedeeisens findet man dann für den Kettenhaken

$$\begin{array}{ll} \text{mit } a = d & a = \frac{3}{2} d \\ e = 1,392 a & e = 0,944 a \\ 2e = 0,111 \sqrt{P} & 2e = 0,113 \sqrt{P} \end{array}$$

und für den Seilhaken

$$\begin{array}{ll} \text{mit } a = \frac{3}{4} d & a = d \\ e = 0,703 a & e = 0,549 a \\ 2e = 0,117 \sqrt{P} & 2e = 0,122 \sqrt{P}. \end{array}$$

