Die Festigkeitslehre mit besonderer Rücksicht auf die Bedürfnisse des Maschinenbaues

Grashof, Franz

Berlin, 1866

Viertes Capitel Schub-Elasticität und Festigkeit

urn:nbn:de:bsz:31-274080

VIERTES CAPITEL.

Schub-Elasticität und Festigkeit.

A. Beziehungen zwischen den Constanten der Schubelasticität und der Zug- oder Druckelasticität.

167. — Jede Aenderung der relativen Lage der materiellen Punkte eines Körpers kann auf positive oder negative Ausdehnungen ε zurückgeführt werden, welche in den verschiedenen Punkten des Körpers nach verschiedenen Richtungen hin stattfinden; eine Verschiebung γ (cf. Nr. 7) ist nur der Inbegriff eines bestimmten Systems von Ausdehnungen ε in demselben Punkte nach allen möglichen Richtungen, und es sind deshalb die Constanten der Schubelasticität nothwendiger Weise von denjenigen der Zug- oder Druckelasticität abhängig.

Ist γ die Verschiebung im Punkte A einer Ebene F, so wird das entsprechende, durch γ individualisirte System von Ausdehnungen im Punkte A bestimmt, indem man die Ausdehnung ε nach der beliebigen Richtung AB ausdrückt, welche eine gegebene Lage gegen die Ebene F und gegen die Verschiebungsrichtung derselben hat. Es seien zu dem Ende AX, AY, AZ rechtwinkelige Axen, AX und AY in der Ebene F, AX von gleicher Richtung mit der Verschiebung γ. Die Richtung AB bilde mit AZ den Winkel φ und die Projection AB' auf die Ebene XY mit AX den Winkel ψ.

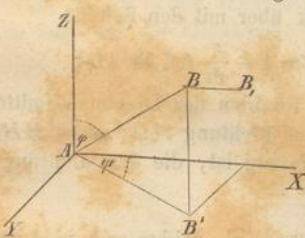

Fig. 30.

Sind dann noch dx, dy, dz die Coordinaten des Punktes B, $AB = ds$, so ist die Verschiebung von B gegen F:

$$BB_1 = \gamma dz$$

und die Ausdehnung ε nach der Richtung AB:

$$\varepsilon = \frac{BB_1 \,.\, \cos(BAX)}{ds} = \frac{\gamma dz \,.\, \sin\varphi \cos\psi}{ds} = \gamma \sin\varphi \cos\varphi \cos\psi.$$

Sie ist am grössten oder kleinsten für $\psi = 0$, $\varphi = \pm \frac{\pi}{4}$ und zwar:

$$\varphi = \frac{\pi}{4};\ max.\ \varepsilon = \varepsilon' = \frac{\gamma}{2}$$

$$\varphi = -\frac{\pi}{4};\ min.\ \varepsilon = -\varepsilon'' = -\frac{\gamma}{2}.$$

Diese Beziehungen gelten allgemein, von welcher Art das Material des Körpers sein möge; ist es aber insbesondere isotrop, für welchen Fall allein die gegenseitige Abhängigkeit der betreffenden Constanten hier nachgewiesen werden soll,*) so folgt, dass der höchstens zulässige Werth von γ für irgend eine Ebene XY und irgend eine Verschiebungsrichtung AX derselben doppelt so gross ist, als der kleinere der für irgend eine Richtung AB höchstens zugelassenen Werthe von ε' oder ε''. Oder auch, wenn bei einem isotropen Material

k' der höchstens zugelassene Werth von $E\varepsilon'$,
k'' " " " " " $E\varepsilon''$,
k der event. kleinere beider Werthe k' und k'',
G der Schubelasticitätsmodul (cf. Nr. 12) ist, so ist der höchstens zulässige Werth t einer Tangentialspannung τ:

$$t = 2\frac{G}{E}k.$$

168. — Das Verhältniss $\frac{t}{k}$ ist hiernach bedingt durch das Verhältniss der beiden Modul G und E. Um letzteres zu finden,**) sei das Quadrat ABA_1B_1 (Fig. 31) der zu dem einen Kantensysteme senkrechte Schnitt eines Würfels, von welchem jede Kante = 1 ist. Werden an den gegenüberliegenden Seitenebenen AB und A_1B_1 dieses Würfels die normalen Zugkräfte σ angebracht, so geht das Quadrat ABA_1B_1 in ein Rechteck über mit den Seiten:

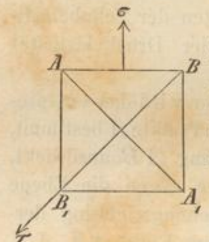

Fig. 31.

$$AB_1 = 1 + \varepsilon;\ AB = 1 - \frac{\varepsilon}{m}\ \text{(cf. Nr. 11)};$$

gleichzeitig findet in allen Punkten der Diagonalschnitte AA_1 und BB_1 eine Verschiebung γ nach der Richtung AA_1 resp. BB_1 statt, welche nach Nr. 8 = der kleinen Aenderung ist, die der ursprüng-

*) Das Holz als dasjenige technisch wichtige Baumaterial, welches auch nicht näherungsweise als isotrop gelten kann, hat zugleich eine solche Structur, welche es nöthig macht, die für jeden Fall in die Rechnung einzuführende Constante aus besonderen Versuchen abzuleiten, welche eben diesem Falle entsprechen. Ein stetiger Zusammenhang der kleinsten Theile nach allen Richtungen ist beim Holze nicht vorhanden, sondern es kommen zweierlei Widerstände ganz verschiedener Art in Betracht: die Elasticität und Festigkeit der Holzfasern an und für sich und des Bindemittels, wodurch sie unter sich zusammenhängen.

**) Cf. Clebsch, Theorie der Elasticität fester Körper, §. 3.

lich rechte Winkel der Diagonalen AA_1 und BB_1 erfahren hat. Es ist also:

$$tg\,(BB_1A) = tg\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\gamma}{2}\right) = \frac{1 - \frac{\gamma}{2}}{1 + \frac{\gamma}{2}} = \frac{1 - \frac{\varepsilon}{m}}{1 + \varepsilon}$$

oder mit Vernachlässigung kleiner Grössen höherer Ordnung:

$$\gamma = \left(1 + \frac{1}{m}\right)\varepsilon = \frac{m+1}{m}\,\varepsilon.$$

Wird aber der Würfel in der Diagonalebene BB_1 zerschnitten, so erfordert das Gleichgewicht die Anbringung einer Normalkraft und einer Tangentialkraft in der Schnittebene, letztere $= \tau$ pro Flächeneinheit von solcher Grösse, dass

$$BB_1 . \tau = AB . \sigma \sqrt{\frac{1}{2}}, \text{ also } \tau = \frac{1}{2}\sigma$$

ist, und aus dieser und der obigen Gleichung folgt mit $\frac{\tau}{\gamma} = G$ und $\frac{\sigma}{\varepsilon} = E$:

$$G = \frac{1}{2}\,\frac{m}{m+1}\,E.$$

169. — Die Constante m, welche durch theoretische Entwickelungen von Navier, Poisson, Cauchy, Dienger u. A. übereinstimmend $= 4$ gefunden wurde, scheint den Versuchen von Wertheim und Regnault zufolge in der That etwas kleiner, auch für verschiedene Körper nicht ganz gleich zu sein. Bei diesen Versuchen wurde zugleich die Längen- und die Volumänderung hohler Stäbe infolge eines der Länge nach ausgeübten Zuges gemessen, die Volumänderung dadurch, dass die Höhlung mit einer Flüssigkeit angefüllt und mit einer Capillarröhre von bekannter Weite verbunden wurde, in welche die Flüssigkeit hineinreichte. Sind

l, d, v die Länge, die Weite und das Volumen der Höhlung im ursprünglichen Zustande,

Δl, Δd, Δv deren Aenderungen infolge des ausgeübten Zuges,

so folgt aus der Gleichung

$$\frac{v + \Delta v}{v} = \frac{(l + \Delta l) . (d + \Delta d)^2}{l d^2}$$

mit $\frac{\Delta d}{d} = -\frac{1}{m}\,\frac{\Delta l}{l}$ und bei Vernachlässigung kleiner Grössen höherer Ordnung:

$$m = \frac{2\frac{\Delta l}{l}}{\frac{\Delta l}{l} - \frac{\Delta v}{l}}.$$

Auf solche Weise fanden Wertheim und Regnault nahe übereinstimmend für Kupfer, Messing und Glas: $m = 3$. Nach späteren Versuchen von Wertheim ergab sich

für Messing: $m = 2{,}84$ bis $3{,}05$, im Mittel $m = 2{,}94$

für Eisenblech: $m = 3{,}25$ bis $4{,}05$, im Mittel $m = 3{,}64$

Bis auf Weiteres kann nur gesagt werden, dass für isotrope Körper im Allgemeinen

$$m = 3 \text{ bis } 4$$

sei, und ist damit nach Nr. 167 und 168:

$$\frac{t}{k} = \frac{m}{m+1} = \frac{3}{4} \text{ bis } \frac{4}{5}$$

$$\frac{G}{E} = \frac{1}{2}\,\frac{m}{m+1} = \frac{3}{8} \text{ bis } \frac{2}{5}.$$

170. — Die inneren Zustände, welche nach Ueberschreitung der Elasticitätsgrenze eintreten, entziehen sich der theoretischen Untersuchung; insbesondere kann zwischen der Schubfestigkeit T und der Zug- oder Druckfestigkeit K' und K'' eines Materials ein einfacher Zusammenhang nicht erwartet werden.

Directe Versuche über die Schubfestigkeit sind gleichwohl nur selten mit anderen Materialien angestellt worden, als mit Schmiedeeisen (wichtig wegen seiner Verwendung zu Keilen, Bolzen, Nieten etc.), wobei sich im Durchschnitte T nur wenig kleiner, als die unter sich selbst nahe gleichen Werthe K' und K'' ergeben hat, zuweilen indessen auch nur $T = \frac{2}{3}K'$. Einige Versuche über die Schubfestigkeit des Holzes beziehen sich auf den Fall der Abschiebung nach der Richtung der natürlichen Fasern und haben insbesondere für Tannenholz nach Barlow ergeben:

$$T = 42 \text{ Kil. pro Quadratcentim.*)}$$

B. Stabförmiger Körper unter dem Einflusse einer im Querschnitte wirkenden Schubkraft R.

I. Gesetz, nach welchem die Tangentialspannungen im Querschnitte vertheilt sind.

171. — Die Kraft R, von welcher vorausgesetzt wird, dass ihre Richtungslinie, in der Ebene des Querschnitts F liegend, durch den Schwerpunkt O desselben geht, bedingt Tangentialspannungen in den Flächenelementen von F, deren Resultante $= R$ ist. Dieselben können im Allgemeinen unter gewissen Winkeln gegen die Richtung von R geneigt sein, also in je zwei Componenten nach der Richtung von R und senkrecht dagegen zerfallen, so dass die Summe der ersteren Componenten $= R$ ist, während die letzteren für alle Elemente des ganzen Querschnitts zusammengenommen sich gegen-

*) Hiernach sind z. B. die erforderlichen Dimensionen des unteren Zapfens eines Dachsparrens sowie des Brüstungsholzes vor dem Zapfenloche zu beurtheilen, damit durch den horizontalen Sparrenschub weder der Zapfen ab-, noch das Brüstungsholz hinausgeschoben werde.

seitig aufheben (cf. Nr. 249—252); hier soll von den letzteren Componenten abstrahirt werden.

Um das Gesetz zu erkennen, nach welchem diese wie R gerichteten Tangentialspannungen von einem zum anderen Flächenelemente sich ändern, wird vorläufig ein stabförmiger Körper von endlicher Länge vorausgesetzt, auf welchen äussere Kräfte wirken von solcher Art, dass sie sich für einen Querschnitt F ersetzen lassen durch die oben genannte Resultante R in Verbindung mit einem Kräftepaare M, dessen Ebene den Querschnitt in der Richtungslinie von R rechtwinkelig schneidet. Letztere sei zudem eine Hauptaxe für den Schwerpunkt O von F, so dass die Biegungsaxe mit der anderen Hauptaxe und der Axe des Paares M zusammenfällt (cf. Nr. 120).

Von O aus werden die rechtwinkeligen Coordinatenaxen OX, OY, OZ so gezogen, dass die Ebene YZ in den Querschnitt und die Axe OY in die Biegungsaxe fällt. dF sei ein Flächenelement des Querschnitts im Abstande z parallel OY, seine Länge $= y$, also $dF = y dz$.

Es wird angenommen, dass die Tangentialspannung τ ebenso wie die Normalspannung σ in allen Punkten des Flächenstreifens dF gleich gross sei;*) sie ist zudem in jedem Punkte von einer ebenso grossen Tangentialspannung begleitet, welche in dem durch den betreffenden Punkt parallel der xy-Ebene gelegten Schnitte nach der Richtung der x-Axe stattfindet ($\tau_{xz} = \tau_{zx}$: cf. Nr. 10).

a. Gerader stabförmiger Körper.

172. — Betrachtet man das Körperelement, welches vom Querschnitte F, von einem im Abstande dx davon entfernten zweiten Querschnitte und von einem im Abstande z mit der xy-Ebene parallel geführten Schnitte begrenzt wird, so müssen, indem nach der x-Axe gerichtete äussere Kräfte nicht auf das Körperelement wirken, die entgegengesetzt gerichteten Normalspannungen der beiden erstgenannten Begrenzungsebenen

$$= \int_z^e \sigma dF \text{ und } \int_z^e \sigma dF + \frac{d}{dx}\Big(\int_z^e \sigma dF\Big) . dx$$

(unter e den Maximalwerth von z verstanden) mit der gleichfalls nach der x-Axe gerichteten Tangentialspannung der dritten Begrenzungsebene

$$= \tau y dx$$

im Gleichgewichte sein, woraus mit $\sigma = \dfrac{Mz}{J}$ (Nr. 43) absolut genommen folgt:

$$\tau y = \frac{d}{dx}\left(\int_z^e \sigma dF\right) = \frac{d}{dx}\left(\frac{M}{J}\int_z^e z dF\right).$$

*) Auch dies ist im Allgemeinen nicht nöthig und in der That nicht genau der Fall, wie die strengere Untersuchung im siebenten Capitel (Nr. 249—252) lehrt.

Dabei ist (Nr. 42 und 58) absolut genommen $\frac{dM}{dx} = R$, also auch, wenn der Querschnitt constant ist:

$$\tau y = \frac{R}{J} \int_z^e z\,dF.$$

Diese Gleichung, welche bei veränderlichem Querschnitte nur als Näherungsformel zu betrachten ist (der Wahrheit um so näher kommend, je kleiner die Aenderungen der Querdimensionen im Vergleich mit der Aenderung von x sind), lehrt, dass τy von der Biegungsaxe aus nach beiden Seiten abnimmt, also auch τ, wenn y nicht abnimmt. Wenn aber die Breite y selbst von der Biegungsaxe aus abnimmt, so kann es sein, dass τ zuerst zunimmt und seinen Maximalwerth in einer gewissen Entfernung auf beiden Seiten von der Biegungsaxe erreicht Für $z = e$ ist jedenfalls $\tau = 0$*), folglich eine Querschnittsform, für welche τ constant wäre, nicht möglich.

173 — Nach der Formel:

$$\tau = \frac{R}{Jy} \int_z^e z\,dF$$

findet man z. B. für einen rechteckigen Querschnitt, dessen Seiten parallel OY und OZ sind:

$$\tau = \frac{3}{2}\frac{R}{F}\left(1 - \frac{z^2}{e^2}\right)$$

$$max.\,\tau = \frac{3}{2}\frac{R}{F} \text{ für } z = 0.$$

Für einen Kreis mit dem Radius e ist im Abstande z von der Biegungsaxe:

$$\tau = \frac{4}{3}\frac{R}{F}\left(1 - \frac{z^2}{e^2}\right)$$

$$max.\,\tau = \frac{4}{3}\frac{R}{F} \text{ für } z = 0.$$

Ist aber z. B. der Querschnitt ein übereck liegendes Quadrat (Diagonalen mit den Axen OY und OZ zusammenfallend), so ist nicht mehr τ in der Biegungsaxe am grössten, denn man findet:

$$\tau = \frac{R}{F}\left(1 + \frac{z}{e} - 2\frac{z^2}{e^2}\right)$$

$$max.\,\tau = \frac{9}{8}\frac{R}{F} \text{ für } z = \frac{e}{4}.$$

---

*) Wäre $y = 0$ für $z = e$, so würde aus der Gleichung $\tau = \frac{0}{0}$ folgen; allein für $= e - dz$ wäre:

$$\tau y = \frac{R}{J}\,e\,dF = \frac{R}{J}\,e y\,dz;\ \tau = \frac{Re}{J}\,dz,$$

d. h. verschwindend klein. In der That wäre das Gegentheil nur dadurch möglich, dass an der Oberfläche des zwischen zwei unendlich nahen Querschnitten enthaltenen Körperelements eine äussere Kraft von endlicher Grösse nach der Richtung der x-Axe wirkte.

Wenn die Breite y des Querschnitts in der Biegungsaxe am kleinsten ist, so kann der ebendaselbst stattfindende Maximalwerth von τ viel Mal grösser sein, als $\frac{R}{F}$. Bei einem doppelt-Tförmigen Querschnitte z. B. (Fig. 5, Nr. 48) ist für $b = b_1$ und $d = d_1$:

$$max.\tau = \frac{3}{4}\frac{R}{a}\frac{be^2-(b-a)f^2}{be^3-(b-a)f^3}$$
$$= \frac{3}{2}\frac{R}{F}\frac{[be-(b-a)f].[be^2-(b-a)f^2]}{a[be^3-(b-a)f^3]}.$$

Der Coefficient von $\frac{3}{2}\frac{R}{F}$ hat 1 zur Grenze, wenn a in die Grenze b oder f in die Grenze e übergeht; er wächst dagegen ins Unendliche, wenn $\frac{a}{b}$ bis Null abnimmt, und zwar um so schneller, je kleiner gleichzeitig $\frac{f}{e}$ ist.

174. — Wenn man von den verschiedenen Punkten der z-Axe aus die entsprechenden Werthe von σ und τ als gerade Linien parallel der x-Axe abträgt, so werden die Endpunkte der ersteren Linien durch eine Gerade OC, die Endpunkte der letzteren durch eine Curve AB (Fig. 32) verbunden; für den Fall eines rechteckigen oder kreisförmigen Querschnitts z. B. ist AB eine Parabel mit der Hauptaxe OX. Durch das Zusammenwirken von σ und τ in demselben Punkte wird nach den Regeln der zusammengesetzten Elasticität ein Maximalwerth der Ausdehnung ε nach einer gewissen Richtung in jenem Punkte bedingt (cf. Nr. 253), und es ist nicht nöthig, dass der grösste dieser Maximalwerthe von ε mit dem grössten Werthe $= k$ von σ (für $z = e$) oder mit dem grössten Werthe $= t$ von τ (in der Regel für $z = 0$) zusammentreffe. Wenn aber ebenso, wie für $\sigma = k$ immer $\tau = 0$ ist, auch umgekehrt für $\tau = t$ (wie u. A. beim rechteckigen und kreisförmigen Querschnitte) $\sigma = 0$ ist, und wenn ferner die Curve AB nicht etwa bis zu verhältnissmässig grossen Werthen von z nahe parallel der z-Axe verläuft (wie es bei einem in der Mitte eingeschnürten, z. B. dem doppelt-T förmigen Querschnitte der Fall ist), so lässt sich a priori erwarten und es wird durch die nähere Untersuchung (Nr. 259) bestätigt, dass behufs Ermittelung des absolut grössten Werthes von ε resp. $E\varepsilon$ ein nur kleiner Fehler begangen wird, wenn entweder die Tangentialspannungen oder die Normalspannungen ganz vernachlässigt werden, je nachdem nur wenig

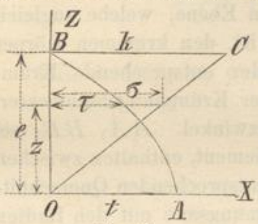

Fig. 32.

$$k > \frac{m+1}{m}t \text{ (cf. Nr. 169)}$$

ist.

Wenn insbesondere der Körper von der Länge l an einem Ende befestigt und am anderen, freien Ende durch eine Kraft P senkrecht zur Längenrichtung (zur x-Axe) angegriffen ist, so findet man, dass

$$k = \frac{m+1}{m}\, t = \frac{4}{3}\, t \text{ (mit } m = 3)$$

ist, wenn für den rechteckigen Querschnitt $l = \frac{1}{3} h$

„ „ kreisförmigen „ $l = \frac{2}{9} h$

ist, unter h die nach der z-Axe gemessene Höhe des Rechtecks resp. den Durchmesser des Kreises verstanden.

Man sieht daraus, wie verhältnissmässig klein bei solchen Querschnittsformen die freie Länge eines stabförmigen Körpers schon werden darf, bevor die Vernachlässigung der Schubkraft R bei den Aufgaben des zweiten und dritten Capitels mit einem wesentlichen Fehler verbunden ist, und dass bei den dort bestimmten Körpern von gleichem Widerstande die Correction der Querschnitte sich auf die nächste Nähe desjenigen Querschnitts beschränken darf, für welchen $M = 0$ ist.

b. Einfach gekrümmter stabförmiger Körper.

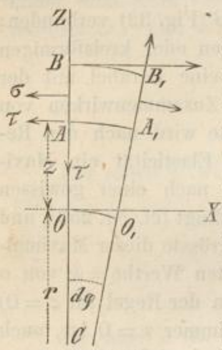

Fig. 33.

175. — Es sei (Fig. 33) $OO_1 = ds$ ein Bogenelement der Mittellinie, deren Ebene, welche zugleich die Ebene des Momentes M ist, den krummen Körper symmetrisch theilt; C sei der entsprechende Krümmungsmittelpunkt, $CO = r$ der Krümmungshalbmesser, $OCO_1 = d\varphi$ der Contingenzwinkel. $AA_1\ BB_1$ sei ein unendlich kleines Körperelement, enthalten zwischen den den Punkten O und O_1 entsprechenden Querschnitten und zweien um die Krümmungsaxe mit den Radien $r + z$ und $r + z + dz$ beschriebenen Cylinderflächen.

Die positiven Axen OX, OY, OZ (Nr. 171) seien so genommen, dass OX die Richtung OO_1, OZ die Richtung CO, OY die übliche Richtung der Axe einer im Sinne ZX stattfindenden Drehung hat. Die Kraft R und das Kräftepaar M seien algebraisch verstanden in der Weise, dass, wenn R und M betrachtet werden als Resultat desjenigen Systems der äusseren Kräfte, welche an dem vom Querschnitte YZ aus nach der Richtung OX gelegenen Körpertheile angreifen, R positiv ist, wenn nach OZ gerichtet, M dagegen positiv, wenn seine Axe nach OY gerichtet ist; ein positives M verstärkt dann die Krümmung der Mittellinie bei O, und es ist:

$$R = + \frac{dM}{ds}.$$

Die Schnittflächen

$$AB \qquad AA_1 \qquad A_1B_1 \qquad BB_1,$$

wodurch das Körperelement begrenzt ist, sind

$$= dz \qquad (r+z)\, d\varphi \qquad dz \qquad (r+z+dz)\, d\varphi$$

multiplicirt mit den betreffenden Breiten:

$$y \qquad y \qquad y + \frac{dy}{d\varphi}\, d\varphi \qquad y + \frac{dy}{dz}\, dz,$$

und wenn die mit den Breiten multiplicirten Spannungen, welche auf die Seitenflächen AB und AA_1 des isolirt gedachten Körperelements nach den Richtungen der Pfeile σ, τ und τ (Fig. 33) wirken, mit

$$\sigma y \qquad \tau y \qquad \tau y$$

bezeichnet werden, so sind die entsprechenden, entgegengesetzt gerichteten Spannungen der gegenüberliegenden Seitenflächen $A_1 B_1$ und BB_1 mit

$$\sigma y + \frac{d(\sigma y)}{d\varphi}\, d\varphi; \qquad \tau y + \frac{d(\tau y)}{d\varphi}\, d\varphi; \qquad \tau y + \frac{d(\tau y)}{dz}\, dz$$

zu bezeichnen.

Wegen des Gleichgewichts der Kräfte an dem betrachteten Körperelemente muss nun u. A. ihre Componentensumme nach $OX = 0$ sein, und diese Bedingung führt bei Vernachlässigung unendlich kleiner Grössen höherer Ordnung zu der Gleichung:

$$\frac{d(\sigma y)}{d\varphi} + (r + z)\, \frac{d(\tau y)}{dz} + 2\tau y = 0$$

oder mit $ds = r\, d\varphi$:

$$\frac{d(\tau y)}{dz} + \frac{2}{r+z}\, \tau y = -\frac{r}{r+z}\, \frac{d(\sigma y)}{ds}.\text{*)}$$

176. — Für eine **gerade Mittellinie** geht diese Gleichung mit

$$r = \infty\; ;\; ds = dx$$

über in:

$$\frac{d\,(\tau y)}{dz} = -\frac{d\,(\sigma y)}{dx}$$

$$\frac{d(\tau y)}{dz}\, dz = -\frac{d(\sigma y dz)}{dx} = -\frac{d(\sigma dF)}{dx},$$

---

*) Von den beiden übrigen Gleichgewichtsbedingungen des hier vorliegenden Systems von Kräften in einer Ebene führt die = Null gesetzte Componentensumme nach der Richtung OZ zu der Gleichung:

$$\frac{d\,(\tau y)}{d\varphi} = \sigma y$$

und bestimmt sonach das Aenderungsgesetz von τ nach der Richtung OX, welches übrigens von selbst sich ergiebt, wenn erst für jeden einzelnen Querschnitt τ als Function von z bekannt ist.

Die Momentengleichung für irgend eine auf der Kraftebene ZX senkrechte Axe führt zu einer identischen Gleichung; sie würde die Relation $\tau_{xz} = \tau_{zx}$ geliefert haben, wenn dieselbe nicht schon im Ansatz der Gleichung als bekannt vorausgesetzt worden wäre. —

Es muss übrigens bemerkt werden, dass die Gleichung

$$\frac{d\,(\tau y)}{d\varphi} = \sigma y$$

nur durch die Annahme hier überflüssig wird, dass das Vertheilungsgesetz der Normalspannungen σ dasselbe sei, welches sich in den vorhergehenden Capiteln bei Vernachlässigung der Schubkraft R auf Grund der Voraussetzung eines stets eben und zur elastischen Linie senkrecht bleibenden Querschnitts ergeben hatte. Wenn nun auch streng woraus, weil $\tau y = 0$ ist für $z = e$,

$$\tau y = -\int_e^z \frac{d(\sigma dF)}{dx} = \frac{d}{dx}\int_z^e \sigma dF$$

folgt, d. i. dieselbe Gleichung, welche für diesen Fall in Nr. 172 schon angeführt wurde, und welche auch näherungsweise gelten kann, wenn r im Vergleich mit e sehr gross ist.

177. — Ist aber $\frac{r}{e}$ nicht sehr gross, so hat man nach Nr. 155 mit $P = 0$:

$$\sigma = \frac{M}{Fr}\left(1 + \frac{1}{\alpha}\frac{z}{r+z}\right),$$

also mit $\frac{dM}{ds} = R$, wenn sowohl der Querschnitt, als auch der Krümmungsradius r constant sind oder wenn näherungsweise von der event. geringen Veränderlichkeit dieser Elemente abgesehen wird:

$$\frac{d(\sigma y)}{ds} = \frac{Ry}{Fr}\left(1 + \frac{1}{\alpha}\frac{z}{r+z}\right).$$

Dadurch wird die in Nr. 175 gewonnene Differentialgleichung zur Bestimmung von τ:

$$\frac{d(\tau y)}{dz} + \frac{2}{r+z}\tau y = -\frac{Ry}{F(r+z)}\left(1 + \frac{1}{\alpha}\frac{z}{r+z}\right).$$

Ihre allgemeine Form ist:

$$\frac{d(\tau y)}{dz} + \tau y \,.\, f(z) = \varphi(z)$$

mit dem bekannten Integral (unter e hier die Basis der natürlichen Logarithmen verstanden):

$$\tau y = e^{-\int f(z)\,.\,dz} \,.\, \left[\int\left(e^{\int f(z)\,.\,dz} \,.\, \varphi(z)\,.\,dz\right) + C\right],$$

und die Einsetzung der Werthe von $f(z)$ und $\varphi(z)$ liefert:

$$(r+z)^2\,\tau y = -\frac{R}{F}\left(r\int dF + \frac{1+\alpha}{\alpha}\int z dF\right) + C.$$

Die Constante C ist bestimmt

für positive Werthe von z durch: $z = e_1$; $\tau y = 0$

„ negative „ „ „ „ : $z = -e_2$; $\tau y = 0$;

damit wird, wenn im einen oder anderen Falle e_1 resp. e_2 durch e bezeichnet wird:

$$\tau y = \frac{R}{F(r+z)^2}\,.\left(r\int_z^{\pm e} dF + \frac{1+\alpha}{\alpha}\int_z^{\pm e} z dF\right)$$

---

genommen diese willkürliche Annahme eben durch jene Gleichung ersetzt werden müsste, um so ein System von zwei Differentialgleichungen zur gleichzeitigen Bestimmung der sich gegenseitig bedingenden Spannungen σ und τ zu erhalten, so ist doch ein praktisches Bedürfniss zu einer solchen Complication der Aufgaben einstweilen nicht vorhanden.

oder, wenn z absolut genommen wird:

$$\tau y = \frac{R}{F(r \pm z)^2}\left(\pm r \int_z^e dF + \frac{1+\alpha}{\alpha}\int_z^e z\,dF\right).$$

Beim Durchgange durch die Biegungsaxe (Breite daselbst $= y_0$) fände hiernach ein plötzlicher Zuwachs von τ statt um den Betrag:

$$\Delta \tau = \frac{R}{Fry_0}\left(\int_0^{e_1} dF + \int_0^{e_2} dF\right) = \frac{R}{ry_0}.$$

Inwiefern etwa dieses auffallende Resultat der Unvollkommenheit der Theorie zur Last fällt, möge dahingestellt bleiben; im Folgenden soll einfacher gesetzt werden:*)

$$\tau y = \frac{R}{F(r \pm z)^2}\,\frac{1}{\alpha}\int_z^e z\,dF,$$

wodurch die Bedingung, dass $\tau y = 0$ sein muss für $z = e_1$ resp. e_2, gewahrt bleibt unter Beseitigung der Discontinuität der Spannungen in der Biegungsaxe, und wodurch jedenfalls ein um so geringerer Fehler begangen wird, je grösser r ist. Denn wegen

$$\alpha = \frac{f^2}{r^2} - \frac{g^3}{r^3} + \ldots \text{ und } Ff^2 = J$$

geht sowohl die oben entwickelte, als die hier dafür substituirte Formel in die Gleichung:

$$\tau y = \frac{R}{J}\int_z^e z\,dF \quad \text{(Nr. 172)}$$

über, wenn man r ohne Ende wachsen lässt.

178. — Für einen **rechteckigen Querschnitt** findet man hiernach

$$\tau = \frac{R}{F}\,\frac{1}{2\alpha}\,\frac{e^2 - z^2}{(r \pm z)^2}$$

am grössten auf der concaven Seite der Mittellinie im Abstande $= \frac{e^2}{r}$ von der Biegungsaxe, also

$$max.\,\tau = \frac{R}{F}\,\frac{1}{2\alpha}\,\frac{\frac{e^2}{r^2}}{1 + \frac{e^2}{r^2}}.$$

---

*) Wollte man setzen:

$$\tau y = \frac{R}{F(r \pm z)^2}\,\frac{1+\alpha}{\alpha}\int_z^e z\,dF,$$

so würde, wie die Probe lehrt,

$$\int_0^{e_1} \tau y\,dz + \int_0^{e_2} \tau y\,dz = (1+\alpha)R$$

sein anstatt $= R$, wie es sein muss und wie es sowohl bei der oben entwickelten, als bei der hier dafür substituirten Formel der Fall ist.

$$\text{oder mit } \alpha = \frac{1}{3}\frac{e^2}{r^2} + \frac{1}{5}\frac{e^4}{r^4} + \ldots \text{ (Nr. 156):}$$

$$max.\, \tau = \frac{3}{2}\frac{R}{F}\left(1 + \frac{2}{5}\frac{e^2}{r^2} + \ldots\right).$$

Für einen kreisförmigen Querschnitt ist:

$$\tau = \frac{R}{F}\frac{1}{3\alpha}\frac{e^2 - z^2}{(r \pm z)^2}$$

am grössten auch auf der concaven Seite im Abstande $= \frac{e^2}{r}$ von der Biegungsaxe:

$$max.\, \tau = \frac{R}{F}\frac{1}{3\alpha}\frac{\frac{e^2}{r^2}}{1 + \frac{e^2}{r^2}}$$

$$\text{oder mit } \alpha = \frac{1}{4}\frac{e^2}{r^2} + \frac{1}{8}\frac{e^4}{r^4} + \frac{5}{64}\frac{e^6}{r^6} + \ldots \text{ (Nr. 156):}$$

$$max.\, \tau = \frac{4}{3}\frac{R}{F}\left(1 + \frac{1}{2}\frac{e^2}{r^2} + \frac{7}{16}\frac{e^4}{r^4} + \ldots\right).$$

II. Einfache Schub-Elasticität und Festigkeit eines stabförmigen Körpers.

179. — Darunter wird der Fall verstanden, dass das auf Biegung hinwirkende Kraftmoment M verschwindend klein ist gegen die Schubkraft R, und dass mithin durch letztere allein die Anstrengung des Materials bedingt ist. Da das im Vorhergehenden sub I. ermittelte Vertheilungsgesetz der Tangentialspannung im Querschnitte von der Grösse des Momentes M nicht abhängig gefunden wurde, so muss man schliessen, dass es auch im vorliegenden Grenzfalle $M = 0$ noch zutreffe.

Die betreffenden Werthe der grössten Tangentialspannung τ mögen zunächst dazu benutzt werden, die frühere Untersuchung einiger vorzugsweise auf Biegungs-Elasticität in Anspruch genommener Körper gleichen Widerstandes insofern zu corrigiren, als ihre früher nur angedeutete erforderliche Verstärkung in den Querschnitten $M = 0$ näher bestimmt werden soll. Ist aber

- a der Werth der veränderlichen Dimension in demjenigen Querschnitte, für welchen M am grössten,
- a_1 derselbe in demjenigen Querschnitte, für welchen $M = 0$ ist,
- k der Maximalwerth von σ im ersteren,
- t " " " τ im letzteren Querschnitte,

so ist, wenn in beiden das Material in gleichem Grade in Anspruch genommen werden soll, das Verhältniss $\frac{a_1}{a}$ bestimmt durch die Gleichung:

$$k = \frac{m+1}{m}t \quad \text{(cf. Nr. 169),}$$

sofern von der im ersteren Querschnitte gleichzeitig etwa vorhandenen Schubkraft ohne in Betracht kommenden Fehler abgesehen werden kann.

180. — Wenn insbesondere der Körper AB bei A befestigt und am freien Ende B durch eine Kraft senkrecht zur Längenrichtung $AB = l$ angegriffen ist, so findet man für den Fall eines rechteckigen Querschnitts von constanter Breite (Nr. 111), wenn
h die Höhe bei A,
h_1 „ „ „ B ist:

$$\frac{h_1}{h} = \frac{m+1}{4m}\frac{h}{l} = \frac{1}{3}\frac{h}{l} \text{ mit } m = 3;$$

für den Fall eines rechteckigen Querschnitts von constanter Höhe h (Nr. 112), wenn
b die Breite bei A,
b_1 „ „ „ B ist:

$$\frac{b_1}{b} = \frac{m+1}{4m}\frac{h}{l} = \frac{1}{3}\frac{h}{l} \text{ mit } m = 3;$$

für den Fall eines kreisförmigen Querschnitts (Nr. 113), wenn
r der Radius bei A,
r_1 „ „ „ B ist:

$$\frac{r_1}{r} = \sqrt{\frac{m+1}{3m}\frac{r}{l}} = \frac{2}{3}\sqrt{\frac{r}{l}} \text{ mit } m = 3.$$

181. — Der Körper AB sei beiderseits unterstützt.

Bei Belastung in einem gewissen Punkte C zwischen A und B (Nr. 115) verhalten sich dann beide Theile AC und BC wie wenn sie bei C befestigt und bei A resp. B durch eine Kraft = dem Stützendrucke angegriffen würden: cf. Nr. 180.

Ist aber die Last beweglich, so dass ihr Angriffspunkt C jede Lage zwischen A und B annehmen kann (Nr. 116), so muss für den Fall eines rechteckigen Querschnitts von constanter Breite, wenn
h dessen Höhe in der Mitte von AB,
h_1 „ „ an den Enden A und B,
a die halbe Länge AB ist:

$$\frac{h_1}{h} = \frac{m+1}{2m}\frac{h}{a} = \frac{2}{3}\frac{h}{a} \text{ mit } m = 3$$

sein. Dasselbe Verhältniss entspricht der Forderung für den Fall einer gleichförmig auf der ganzen Länge $AB = 2a$ vertheilten Belastung bei gleichfalls rechteckigem Querschnitte von constanter Breite (Nr. 117).

Besteht aber in diesem Falle gleichförmig vertheilter Belastung der Träger $AB = 2a$ aus zwei bogenförmigen flachen Gurten mit constanten Querschnitten (Nr. 118), die hier einander gleich $= F$ vorausgesetzt werden sollen, und ist h die Bogenhöhe (halbe Höhe des Trägers) in der Mitte, so muss der rechteckige Gesammtquerschnitt $= 2F_1$ der vereinigten Gurte an den Enden A und B mindestens so gross gemacht werden, dass

$$\frac{F_1}{F} = 3\frac{m+1}{m}\frac{h}{a} = \frac{4h}{a} \text{ mit } m = 3$$

ist; eine Verstärkung der Gurte wird also hier nöthig, wenn $a < 4h$ ist.

182. — Als Ergänzung der Berechnung eines Seil- oder Kettenhakens mit kreisförmigem Querschnitte (Nr. 166) ist noch der erforderliche Radius e_1 des Querschnittes bei B (Fig. 29), in welchem die Belastung P lediglich als Schubkraft wirkt, zu bestimmen. Setzt man zu dem Ende

$$e_1 = ya;\; r = a + e_1 = (1+y)\,a,$$

so ist nach Nr. 178 die grösste Tangentialspannung im Querschnitte B

$$= \frac{4}{3}\frac{P}{\pi y^2 a^2}\left[1 + \frac{1}{2}\left(\frac{y}{1+y}\right)^2 + \frac{7}{16}\left(\frac{y}{1+y}\right)^4 + \ldots\right]$$

und indem dieselbe auch $= \frac{m}{m+1}k$ sein soll, unter k die grösste Normalspannung σ im Querschnitte A (Radius $= e$) verstanden, so hat man für y die Gleichung:

$$y^2 = \frac{m+1}{m}\frac{4P}{3\pi k a^2}\left[1 + \frac{1}{2}\left(\frac{y}{1+y}\right)^2 + \frac{7}{16}\left(\frac{y}{1+y}\right)^4 + \ldots\right].$$

Daraus ergiebt sich mit $m = 3$ und $k = 1400$

für den Kettenhaken mit $a = \frac{1}{25}\sqrt{P}$ bis $\frac{3}{50}\sqrt{P}$

$$e_1 = 0{,}518\,a \quad „ \quad 0{,}341\,a$$
$$= 0{,}372\,e \quad „ \quad 0{,}361\,e;$$

für den Seilhaken mit $a = \frac{1}{12}\sqrt{P}$ bis $\frac{1}{9}\sqrt{P}$

$$e_1 = 0{,}244\,a \quad „ \quad 0{,}182\,a$$
$$= 0{,}347\,e \quad „ \quad 0{,}331\,e.$$

Zur Sicherung gegen eine zufällig etwas schiefe Richtung der Kraft P, wodurch auch im Querschnitte B ein Moment M hinzukommt, kann man $\frac{e_1}{e}$ etwas grösser rechnen.

183. — Vernietung von Blechen.

Bei dem gewöhnlichen Verfahren der warmen Nietung, wobei das Niet rothglühend durch die sich entsprechenden Nietlöcher getrieben und aus dem vorstehenden Theile des Schaftes der Schliesskopf durch Hämmern gebildet wird, ist es nicht die auf das Niet wirkende Schubkraft allein, welche seine Spannung bei der fertigen und belasteten Construction bedingt; zum Theil ist diese Spannung eine durch die Zusammenziehung des erkaltenden Nietes verursachte Längenspannung, und es kann infolge der dadurch bedingten ebenso grossen Pressung zwischen den vernieteten Blechen und den Nietköpfen sogar der Fall sein, dass die dieser Pressung entsprechende Reibung die Schubkraft ganz aufhebt und die Tangentialspannung im Nietquerschnitte gar nicht zur Entwickelung kommen lässt.

Die Grösse jener Längenspannung ist indessen von so verschiedenen und zum Theil nur so unsicher in Rechnung zu stellenden Umständen (von dem Temperaturgrade, dem Ausdehnungscoefficienten und der Länge des Nietschaftes, von dem bei der Stauchung des Schliesskopfes auf den Setzkopf des Nietes ausgeübten Gegendrucke, von der Miterwärmung der umgebenden Blechtheile durch das heisse Niet, von der Zusammendrückbarkeit des Blechs etc.) abhängig, dass es nur durch Versuche und zwar indirect durch Messung der entsprechenden Reibung möglich ist, ein sicheres Urtheil darüber zu gewinnen. Solche Versuche haben ergeben, dass die Reibung in jeder der beiden einem Niete angehörigen Reibungsflächen wenigstens 500, also die Längenspannung des Niets bei einem auf höchstens $= \frac{1}{3}$ zu schätzenden Reibungscoefficienten wenigstens 1500 Kilogr. pro Quadratcentimeter des Nietquerschnitts beträgt, eine Spannugg, bei welcher schon an sich ohne Hinzutritt einer Tangentialspannung die Elasticitätsgrenze erreicht ist.*)

Unter diesen Umständen ist man genöthigt, die Widerstandsfähigkeit der Niete auf Grund specieller Versuche zu beurtheilen, bei welchen die Belastung bis zum Bruche gesteigert wurde. Solche Versuche, welche u. A. besonders von W. Fairbairn angestellt worden sind, haben ergeben, dass, damit der Bruch einer einfachen Nietung mit gleicher Wahrscheinlichkeit durch die Abscheerung der Niete wie durch das Reissen des Blechs herbeigeführt werde, die Niete zusammen ungefähr denselben Querschnitt haben müssen wie das zwischen den Nietlöchern übrig gebliebene Blech. Bei der Berechnung einer Vernietung pflegt man hiernach so zu verfahren, als ob die ganze auf relative Verschiebung der vernieteten Bleche hinwirkende Kraft eine in den Nietquerschnitten gleichförmig vertheilte Tangentialspannung τ hervorriefe, welche infolge entsprechender Wahl der Verhältnisse = der im Bleche selbst hervorgerufenen grössten Normalspannung σ sein soll. Dazu kommt als zweites Erforderniss einer rationellen Vernietung, dass durch dieselbe das Blech so wenig geschwächt werde, als mit Rücksicht auf die jeweiligen Umstände, insbesondere z. B. die Forderung eines sehr dichten Abschlusses der Fuge möglich ist.

184. — Ist bei der einfachen Vernietung (Ueberblattung der Bleche mit einer Nietreihe zwischen den Blechrändern)

b die Blechstärke,

d der Durchmesser der Nietbolzen,

e die Entfernung zweier aufeinander folgender Nietlöcher von Mitte zu Mitte,

so entspricht der Forderung $\tau = \sigma$ (Nr. 183) die Gleichung:

$$\frac{\pi d^2}{4} = (e - d)b,$$

*) Bei Versuchen, welche in England bei Gelegenheit des Baues der Britannia-Brücke, und bei anderen, welche später in Frankreich angestellt wurden, hatte man zwei Blechstreifen mittels zweier die Stossfuge von beiden Seiten überdeckender Stossplatten durch zwei Niete so zusammengenietet, dass die Nietbolzen in den gestossenen Blechplatten Spielraum hatten, und fand dann die Zugkraft, welche das Gleiten der letzteren zwischen den sie einklemmenden Stossplatten bewirkte, = 1000 bis 1400 Kil. pro Quadratcentimeter des Nietquerschnitts. Bei Versuchen, welche im Auftrage der französischen Regierung über die Anwendung des Gussstahlblechs zu Dampfkesseln angestellt wurden, ergab sich jene Zugkraft für rothwarm angetriebene Gussstahlniete im Mittel aus zwei Versuchen = 1310 Kil., und als zwei Blechstreifen, der eine mit ovalem Nietloche, direct mit übergreifenden Rändern durch ein Gussstahlniet verbunden wurden, im Mittel aus zwei weiteren Versuchen = 1730 Kil. pro Quadratcentimeter, welcher bedeutend grössere Werth ohne Zweifel der in diesem Falle etwas schiefen Zugrichtung und der dadurch bedingten einseitigen Pressung der Nietköpfe gegen die Bleche zuzuschreiben ist. In allen Fällen war hierbei die Reibung in zwei Reibungsflächen zu überwinden.

woraus folgt:

$$\frac{e}{b} = \frac{\pi}{4}\left(\frac{d}{b}\right)^2 + \frac{d}{b},$$

und die verhältnissmässige Verschwächung des Blechs ist:

$$\frac{e-d}{e} = \frac{1}{1 + \frac{4}{\pi}\frac{b}{d}}.$$

Ausser durch Abscheerung der Nietbolzen oder durch Reissen des Blechs zwischen den Nietlöchern könnte die Vernietung auch dadurch zerstört werden, dass die zwischen dem Nietbolzen und dem Blechrande befindliche Masse hinausgeschoben wird, wenn die Entfernung $= a$ dieses Randes vom Mittelpunkte des Nietloches zu klein ist. In der That ist freilich der Vorgang hierbei nicht so einfach, sondern es ist wahrscheinlicher, dass event. nur eine einzige Rissfläche $= \left(a - \frac{d}{2}\right) b$ an der schwächsten Stelle sich bilden und durch Biegung des Blechs eine Oeffnung für den Durchgang des Nietbolzens darbieten würde. Man geht aber sicher, wenn etwa

$$ab = \frac{\pi d^2}{4}, \text{ also } a = e - d$$

gesetzt wird.

Das Verhältniss $\frac{d}{b}$ ist im Allgemeinen $= 1{,}5$ bis $2{,}5$; je kleiner es genommen wird, desto kleiner wird $\frac{e}{b}$, desto dichter also die Fuge; je grösser es genommen wird, desto grösser wird $\frac{e-d}{e}$, desto geringer also die Verschwächung des Blechs.*) Man findet

für $\frac{d}{b} =$	1,5	2	2,5
$\frac{e}{b} =$	3,27	5,14	7,41
$\frac{a}{b} = \frac{e-d}{b} =$	1,77	3,14	4,91
$\frac{e-d}{e} =$	0,54	0,61	0,66.

*) Mit dieser geringeren Schwächung des Blechs in Betreff des Widerstandes gegen eine Zugkraft ist freilich eine andere Gefahr verbunden, bestehend in einer übermässigen Grösse des Normaldrucks zwischen dem Nietbolzen und seiner halbcylindrischen Stützfläche im Nietloche. Wird dieser Normaldruck constant $= p$ pro Flächeneinheit dieser Stützfläche angenommen, so ist $p =$ dem resultirenden Drucke dividirt durch bd; sollte also p nicht grösser, als $\sigma = \tau$ sein, so müsste

$$bd \geqq \frac{\pi d^2}{4}; \quad \frac{d}{b} \leqq \frac{4}{\pi} = 1{,}27$$

gemacht werden, während bei dem Verhältnisse $\frac{d}{b} = 2{,}5$ schon p fast doppelt so gross, als σ oder τ wäre. Dieses Verhältniss $\frac{d}{b} = 2{,}5$ ist deshalb als eine keinesfalls zu überschreitende Grenze zu betrachten, weil sonst das Entstehen aufgeworfener Ränder an den Nietlöchern zu befürchten wäre, wenn auch die übrigen Theile der Vernietung noch nicht bis zum Maximum ihrer zulässigen Spannung angestrengt sind.

Dieselben Regeln gelten auch für jede der beiden Nietreihen einer einfachen Bandvernietung (stumpf an den Rändern zusammengestossene Bleche mit einem die Stossfuge überdeckenden Blechbande), vorausgesetzt, dass die Bleche der Einwirkung einer äusseren Kraft unterworfen sind, welche sie auseinander zu ziehen strebt; wenn aber umgekehrt die Bleche in der Stossfuge gegeneinander gepresst werden, ein Fall, für welchen die Bandvernietung besonders zweckmässig ist, so entzieht sich die geringe und fast nur durch Zufälligkeiten der Ausführung bedingte Anstrengung der Niete ganz der Berechnung, und kann in diesem Falle der kleinste obiger Werthe von $\frac{d}{b}$ mit dem grössten Werthe von $\frac{e}{b}$ combinirt, also etwa $\frac{d}{b} = 1{,}5$ bei $\frac{e}{b} = 7{,}5$ gesetzt werden.

185. — Bei der doppelten Vernietung (Ueberblattung der Bleche mit 2 gegen einander versetzten Nietreihen zwischen den Blechrändern) mögen d_1, e_1 und a_1 dieselben Bedeutungen haben wie d, e und a bei der einfachen Vernietung. Dann ist zu setzen:

$$2\,\frac{\pi d_1^2}{4} = (e_1 - d_1)\,b,\ \text{also}\ \frac{e_1}{b} = \frac{\pi}{2}\left(\frac{d_1}{b}\right)^2 + \frac{d_1}{b}$$

$$a_1 b = \frac{\pi d_1^2}{4},\ \text{also}\ a_1 = \frac{e_1 - d_1}{2}.$$

Man findet für $\frac{d_1}{b} = 1{,}5 \quad 2 \quad 2{,}5$

$$\frac{e_1}{b} = 5{,}03 \quad 8{,}28 \quad 12{,}32$$

$$\frac{a_1}{b} = 1{,}77 \quad 3{,}14 \quad 4{,}91$$

$$\frac{e_1 - d_1}{e_1} = 0{,}70 \quad 0{,}76 \quad 0{,}80.$$

Noch etwas grösser stellt sich in Beziehung auf die geringere Schwächung des Blechs der Vortheil der doppelten Vernietung heraus, wenn man dabei ebenso viel, aber verhältnissmässig dickere Niete anwendet, als bei der einfachen Vernietung; denn für $e_1 = 2e$

und $\frac{d}{b} = 1{,}5 \quad 2 \quad 2{,}5$

findet man $\frac{d_1}{b} = 1{,}75 \quad 2{,}26 \quad 2{,}77$

$$\frac{e_1 - d_1}{e_1} = 0{,}73 \quad 0{,}78 \quad 0{,}81.$$

Dieselben Regeln gelten auch für eine doppelte Bandvernietung (stumpf an den Rändern zusammengestossene Bleche mit zweien die Stossfuge von beiden Seiten überdeckenden Blechbändern), vorausgesetzt, dass die Bleche einer äusseren Kraft unterworfen sind, welche sie auseinander zu ziehen strebt; im entgegengesetzten Falle kann $\frac{d_1}{b} = 1{,}5$ bei $\frac{e_1}{b} = 12$ gesetzt werden. Die Schubkraft vertheilt sich hier unter 2 Querschnitte desselben Nietbolzens.