Die Festigkeitslehre mit besonderer Rücksicht auf die Bedürfnisse des Maschinenbaues

Grashof, Franz

Berlin, 1866

Fünftes Capitel Drehungs-Elasticität und Festigkeit

urn:nbn:de:bsz:31-274080

FÜNFTES CAPITEL.

Drehungs-Elasticität und Festigkeit.

186. — Nach der Definition in Nr. 18 wird hierunter derjenige Fall verstanden, in welchem die äusseren Kräfte sich für jeden Querschnitt des stabförmigen Körpers durch ein resultirendes Kräftepaar ersetzen lassen, dessen Ebene dem Querschnitte parallel ist und dessen Moment hier mit M bezeichnet werden soll. Die Mittellinie des Körpers wird im Allgemeinen als eine gerade Linie (geometrische Axe) vorausgesetzt, gegen welche die Richtungslinien der äusseren Kräfte rechtwinkelig und windschief gerichtet sind, so dass sie in Ebenen liegen, welche die Axe rechtwinkelig schneiden. Denkt man die Kräfte in diesen Ebenen an deren Schnittpunkte mit der Axe versetzt, so erhält man ausser einem Systeme von Kräftepaaren im Allgemeinen noch ein System von Kräften, welche den Körper auf Biegungs-Elasticität und Festigkeit in Anspruch nehmen, von welchen aber ebenso wie von dem eigenen Gewichte des Körpers in diesem Capitel abstrahirt wird.

Für jeden Querschnitt eines zwischen den Ebenen zweier auf einander folgender Kräftepaare liegenden Stücks AB des Körpers ist das resultirende Moment M gleich gross = der algebraischen Summe der Momente der von dort bis zum Ende des Körpers angreifenden Kräftepaare. Ein constanter Querschnitt eines solchen Stücks AB, wie er im Folgenden vorausgesetzt wird, entspricht also hier zugleich der Forderung eines Körpers von gleichem Widerstande.

Sind A und A_1 zwei correspondirende materielle Punkte der unendlich nahe benachbarten Querschnitte F und F_1 (AA_1 parallel der Axe vor der Einwirkung von M), so lässt sich die durch M bewirkte relative Verdrehung von F und F_1 betrachten als das Resultat eines gewissen Systems von Verschiebungen γ, welche der Richtung und Grösse nach mit der Lage der Punkte A und A_1 sich ändern und für gewisse Punkte O und O_1 = Null sind. Der Drehungsmittelpunkt O hat in allen Querschnitten des Stabstücks AB dieselbe Lage, und der Ort dieser Punkte O ist also eine mit der geometrischen Axe parallele oder zusammenfallende Gerade: Drehungsaxe.

Den Verschiebungen γ in den verschiedenen Punkten A eines Querschnitts entsprechen Tangentialspannungen τ von derselben Richtung und welche der Grösse nach zu γ ein constantes Verhältniss haben, sofern, wie vorausgesetzt wird, der Körper entweder isotrop ist oder homogen mit einer ausgezeichneten Elasticitätsaxe im Sinne der geometrischen und der Drehungsaxe. Den Maximalwerth von τ zu finden, welcher in irgend einem Punkte des Querschnitts bei gegebener Form desselben und bei gegebenem Drehungsmomente M stattfindet, ist die Hauptaufgabe dieses Capitels; indem derselbe = einem gegebenen Werthe t sein soll, ist die erforderliche Grösse des Querschnitts oder die zulässige Grösse des Moments M bestimmt. Ausserdem ist der specifische Drehungswinkel ϑ zu berechnen, d. i. der Winkel, um welchen zwei materiell gedachte Querschnitte F und F_1 in der Entfernung $OO_1 = 1$ gegeneinander verdreht werden.

A. Gewöhnliche Theorie.

187. — Man geht gewöhnlich von der Annahme aus, dass bei der Verdrehung die materiellen Querschnitte vollkommen unverändert, insbesondere auch vollkommen eben bleiben. Die Verschiebung γ und Tangentialspannung τ im Punkte A eines Querschnitts sind dann senkrecht gegen OA gerichtet und dem Abstande $OA = r$ vom Drehungsmittelpunkte O proportional, so dass, wenn y und z die Coordinaten des Punktes A sind bezogen auf die im Querschnitte angenommenen rechtwinkeligen Axen OY und OZ, und wenn ferner τ_1 der Werth von τ für $r = 1$ ist, für die Componenten von τ nach den Richtungen OY und OZ*) die Gleichungen gelten:

$$\tau_z = -\tau_1 . z; \quad \tau_y = \tau_1 . y$$

vorausgesetzt, dass τ gerichtet ist im Sinne einer Drehung von OY gegen OZ. Hiermit folgt aus den beiden ersten der 3 Gleichgewichtsbedingungen:

$$\int \tau_z . dF = 0; \quad \int \tau_y . dF = 0; \quad \int \tau dF . r = M,$$

worin $dF = dy\ dz$ ein unendlich kleines Flächenelement 2^{ter} Ordnung des Querschnitts bedeutet:

$$\int z dF = 0 \text{ und } \int y dF = 0;$$

d. h. der Drehungsmittelpunkt O fällt mit dem Schwerpunkte von F, die Drehungsaxe OX mit der geometrischen Axe zusammen.

---

*) Nach der Bezeichnungsweise in Nr. 10 würden diese Spannungscomponenten mit τ_{xy} und τ_{xz} zu bezeichnen sein, wofür aber ebenso wie in der Folge die kürzeren Bezeichnungen τ_z und τ_y gewählt sind: cf. Nr. 211.

Aus der dritten Gleichung folgt, wenn mit

$$A = \int r^2 dF$$

das Trägheitsmoment von F in Beziehung auf OX bezeichnet wird, und wenn e der Maximalwerth von r ist:

$$\tau = \frac{Mr}{A};\ max.\,\tau = \frac{Me}{A}.$$

Sind $B = \int z^2 dF$ und $C = \int y^2 dF$ die Trägheitsmomente von F in Beziehung auf OY und OZ, so ist:

$$A = B + C.$$

Ist der Querschnitt ein reguläres Polygon, s die Seite, e der Radius des umbeschriebenen Kreises, so ist (cf. Nr. 47):

$$B = C;\ A = \frac{F}{6}\left(3e^2 - \frac{s^2}{2}\right),$$

insbesondere für einen Kreis vom Radius e oder Durchmesser d:

$$A = \frac{Fe^2}{2} = \frac{\pi e^4}{2} = \frac{\pi d^4}{32}.$$

188. — Der specifische Drehungswinkel ϑ ist = der Verschiebung γ_1 im Abstande = 1 von O, also

$$\vartheta = \frac{\tau_1}{G} = \frac{M}{AG};$$

in Graden ausgedrückt:

$$\vartheta^o = \frac{180}{\pi}\,\vartheta.$$

Für Metalle, überhaupt isotrope Körper, ist hierbei nach Nr. 169

$$G = \frac{1}{2}\,\frac{m}{m+1}\,E = \frac{3}{8}\,E \text{ bis } \frac{2}{5}\,E$$

zu setzen; für Hölzer kann die Constante G nur aus Versuchen über die Verdrehung selbst entnommen werden, und ist danach im Durchschnitte zu setzen:

$G = 7000$ für Kiefernholz,
$G = 8000$ „ Eichenholz,
$G = 12000$ „ Buchenholz.

189. — Eine Transmissionswelle mit kreisförmigem Querschnitte habe ein Kraftmoment $= M$ Kilogramm-Centimeter oder N Pferdestärken bei n Umgängen pro Minute zu übertragen; soll dabei $max.\,\tau = t$ Kilogr. pro □ Centimeter sein, so ist nach Nr. 187 der erforderliche Durchmesser:

$$d = \sqrt[3]{\frac{16}{\pi t}}\,.\sqrt[3]{M} = \sqrt[3]{\frac{16\,.\,71620}{\pi t}}\,.\sqrt[3]{\frac{N}{n}} \text{ Centim.}$$

Wird also nach Redtenbacher im Durchschnitt gesetzt

für schmiedeeiserne resp. gusseiserne Wellen:

$$d = 12\sqrt[3]{\frac{N}{n}} \quad „\ d = 16\sqrt[3]{\frac{N}{n}},$$

so ist entsprechend . $t = 211$ resp. $t = 89$,
also auch . . . . $d = 0{,}289\sqrt[3]{M}$ „ $d = 0{,}385\sqrt[3]{M}$.*)

Dabei ist nach Nr. 188 der Verdrehungswinkel in Graden pro 1 Centimeter Wellenlänge:

$$\vartheta^0 = \frac{360}{\pi}\,\frac{t}{G}\,\frac{1}{d};$$

insbesondere für **Schmiedeeisen** und **Gusseisen**

$$\begin{array}{lcc} \text{mit} & t = 211 & „ \quad 89 \\ \text{und} & G = 800000 & „ \quad 400000 \\ & \vartheta^0 = \dfrac{1}{33d} & „ \quad \dfrac{1}{39d}. \end{array}$$

190. — Bei **sehr langen Wellenleitungen** kann es unter Umständen der Fall sein, dass zugleich die Rücksicht auf einen nicht zu grossen Verdrehungswinkel bei der Wahl des Durchmessers d in Betracht kommt; ist aber

$$\vartheta^0 = \frac{180}{\pi}\,\vartheta = \frac{180}{\pi}\,\frac{M}{\frac{\pi d^4}{32}\cdot G}$$

gegeben, so folgt:

$$d = \sqrt[4]{\frac{180.32}{\pi^2 G\vartheta^0}}\cdot\sqrt[4]{M} = \sqrt[4]{\frac{180.32.71620}{\pi^2 G\vartheta^0}}\cdot\sqrt[4]{\frac{N}{n}}.$$

Setzt man nach **Redtenbacher** für dergleichen lange Transmissionswellen aus Schmiedeeisen:

$$d = 12\sqrt[4]{\frac{N}{n}},$$

so ist entsprechend: $d = 0{,}734\sqrt[4]{M}$
und mit $G = 800000$: $\vartheta^0 = \dfrac{1}{397}$

d. h. nahe 1^0 Verdrehung auf 4 Meter Wellenlänge. Diese Constructionsregel giebt natürlich nur dann grössere Sicherheit, als die frühere sub Nr. 189, wenn $N < n$ ist.

191. — Die den obigen Formeln zu Grunde liegende Annahme, dass die materiellen Querschnitte des Stabes bei seiner Verdrehung vollkommen eben bleiben und dass mithin die Tangentialspannung τ in jedem Punkte A des Querschnitts senkrecht zu dessen Verbindungslinie mit dem Drehungsmittelpunkte oder Schwerpunkte O gerichtet sei, ist übrigens nur in dem einzigen Falle gerechtfertigt, dass der Querschnitt ein **Kreis** ist. Denn wenn insbesondere A ein Punkt im Umfange des Querschnitts, AT Tangente, AN Normale desselben und AS senkrecht zur Querschnittsebene TAN die betreffende Seite der cylindrischen Staboberfläche ist, so kann

*) In Betreff der für einen gegebenen Fall passenden Werthe von t ist der Beurtheilung der jeweiligen Umstände ein ziemlich weiter Spielraum zu lassen; bei Winden z. B. und anderen durch Kurbel und Menschenkraft bewegten Maschinen, sowie in manchen anderen Fällen, in denen heftige Stösse nicht zu befürchten sind, darf t wesentlich grösser genommen werden, als 211 resp. 89.

bei dem Fehlen entsprechender äusserer Kräfte in der Berührungsebene TAS keine Tangentialspannung, insbesondere auch keine solche nach der Richtung AS stattfinden, es muss also (cf. Nr. 10) $\tau_{ns} = 0$, mithin auch $\tau_{sn} = 0$, d. h. es muss die Tangentialspannung im Querschnitte für jeden Punkt seines Umfangs nach der Tangente desselben gerichtet sein.

Dieser Bedingung entspricht die obige Annahme in der That nur dann, wenn der Querschnitt ein Kreis ist; in allen anderen Fällen muss die Richtung von τ sich von der zu der Verbindungslinie OA senkrechten Richtung um so mehr entfernen und der Richtung der Tangente am Querschnittsumfange um so mehr nähern, je mehr der Punkt A in einem von O aus gezogenen Strahle sich von O entfernt und dem Schnittpunkte dieses Strahls mit dem Umfange nähert, ein Verhalten, womit dann offenbar auch eine unverändert ebene Beschaffenheit des materiellen Querschnitts nicht mehr verträglich ist.

B. Corrigirte Theorie.

192. — Es wird hierbei vorausgesetzt, dass der Querschnitt zwei zu einander senkrechte Symmetrieaxen habe, welche zur Bestimmung der Lage eines Punktes A im Querschnitte F als Coordinatenaxen OY und OZ angenommen werden; O ist der Schwerpunkt von F, OX die geometrische Axe des Stabes.

$$B = \int z^2\, dF \text{ und } C = \int y^2\, dF$$

seien die Trägheitsmomente von F in Beziehung auf OY und OZ.

Als selbstverständlich darf a priori angenommen werden, dass die Drehungsaxe mit der geometrischen Axe OX zusammenfällt und dass die materiell gedachten Symmetrieaxen OY und OZ irgend eines Querschnitts auch bei der Verdrehung stets zu einander und zu OX senkrechte gerade Linien bleiben.

Die Verdrehung eines Querschnitts gegen einen anderen wird dann gemessen durch den Winkel, welchen die Symmetrieaxen beider Querschnitte miteinander bilden.

I. Die Maximalspannung.

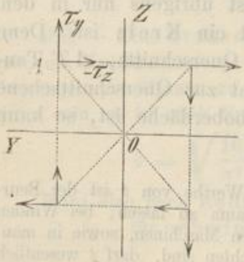

Fig. 34.

193. — Im Punkte A mit den Coordinaten y, z sei

$\tau_{xy} = \tau_z$ die Tangentialspannung nach der Richtung OY,

$\tau_{xz} = \tau_y$ die Tangentialspannung nach der Richtung OZ;

τ_z und τ_y sind Functionen von y und z, und zwar ist der vorausgesetzten Symmetrie wegen (Fig. 34) der Ausdruck von τ_z nothwendig so beschaffen, dass er ungeändert bleibt, wenn y entgegengesetzt genommen wird, dass er aber selbst entgegengesetzt wird, wenn z entgegengesetzt genommen wird.

Nimmt man also an, es lasse sich τ_z in eine nach ganzen Potenzen von y und z fortschreitende Reihe entwickeln, so kann dieselbe nur solche Glieder haben, welche gerade Potenzen von y und ungerade Potenzen von z enthalten, und wenn man demgemäss

$$\tau_z = mz + m_1 y^2 z + m_2 z^3$$

setzt, so sind dabei nur die Glieder von der 5ten Ordnung incl. an weggelassen. In gleicher Weise ist

$$\tau_y = ny + n_1 y z^2 + n_2 y^3$$

zu setzen. Zur Bestimmung der Coefficienten dienen:

1) die Bedingungen des Gleichgewichts zwischen den Spannungen im ganzen Querschnitte und dem äusseren Kraftmomente M;
2) die Bedingungen des Gleichgewichts der auf die Oberfläche eines unendlich kleinen Körperelements wirkenden inneren Kräfte;
3) die Bedingung, dass die Spannung τ im Umfange des Querschnitts tangential an denselben gerichtet sein muss (Nr. 191).*)

194. — Das Gleichgewicht zwischen den Spannungen im Querschnitte und dem äusseren Kraftmomente M wird ausgedrückt durch die Gleichungen:

$$\int \tau_z . dF = 0; \int \tau_y . dF = 0; \int (y\tau_y - z\tau_z)\, dF = M.$$

Werden darin für τ_z und τ_y die Ausdrücke aus Nr. 193 substituirt, so finden sich die beiden ersten Gleichungen mit Rücksicht auf die Symmetrie des Querschnitts unabhängig von den 6 Coefficienten m und n erfüllt; die dritte Gleichung aber liefert als erste Bedingung:

$$nC - mB + (n_1 - m_1)\int y^2 z^2 dF + n_2 \int y^4 dF - m_2 \int z^4 dF = M \,..\, (1).$$

195. — Wenn man vom Punkte A als Eckpunkt aus ein unendlich kleines Parallelepipedum construirt denkt, dessen Kanten $= dx, dy, dz$ resp. den Axen OX, OY, OZ parallel sind, so wirken auf die zur x-Axe senkrechten Seitenflächen die Kräfte:

$- \tau_z$ und $\tau_z + \dfrac{d\tau_z}{dx}\, dx$ nach der Richtung OY

$- \tau_y$ und $\tau_y + \dfrac{d\tau_y}{dx}\, dx$ „ „ „ OZ,

auf die zur y-Axe senkrechten Seitenflächen die Kräfte:

$- \tau_z$ und $\tau_z + \dfrac{d\tau_z}{dy}\, dy$ nach der Richtung OX

und auf die zur z-Axe senkrechten Seitenflächen die Kräfte:

$- \tau_y$ und $\tau_y + \dfrac{d\tau_y}{dz}\, dz$ nach der Richtung OX,

*) Wenn die 6 Coefficienten m und n sich diesen 3 Bedingungen entsprechend nicht bestimmen liessen, so müssten noch weitere Glieder mit höheren Potenzen von y und z hinzugenommen werden.

alle Kräfte auf die Flächeneinheit bezogen, also beziehungsweise noch mit $dydz$, $dzdx$, $dxdy$ zu multipliciren. Dem Gleichgewichte dieser inneren Kräfte entsprechen die Gleichungen:*)

$$\frac{d\tau_z}{dy} + \frac{d\tau_y}{dz} = 0; \quad \frac{d\tau_z}{dx} = 0; \quad \frac{d\tau_y}{dx} = 0;$$

die beiden letzten sind dadurch erfüllt, dass die Coefficienten der für τ_z und τ_y angenommenen Ausdrücke (Nr. 193) als constant (unabhängig von x im Bereiche eines Stabstücks, für welches M constant ist) vorausgesetzt werden, die erste Gleichung aber führt zu der zweiten Bedingung:

$$m_1 + n_1 = 0 \ . \ . \ . \ (2).$$

a. Allgemeine Näherungsformel.

196. — Die noch übrige Bedingung, dass die Tangentialspannung τ im Umfange des Querschnitts tangential an denselben gerichtet sein muss, führt bei verschiedenen Querschnittsformen zu verschiedenen Bestimmungsgleichungen der Coefficienten m und n; wenn man aber für das Rechteck und für die Raute als zwei extreme Fälle die betreffende Rechnung durchführt, so wird man das Resultat derselben, insoweit es für beide Fälle übereinstimmt, als näherungsweise gültig für jede convexe Querschnittsform betrachten dürfen, welche zwei zu einander senkrechte Symmetrieaxen hat.

Wenn insbesondere für das Rechteck

die der y-Axe parallelen Seiten $= 2b$,

„ „ z-Axe „ „ $= 2c$

gesetzt werden, so muss

$\tau_z = 0$ sein für $y = \pm b$ und jeden Werth von z,

$\tau_y = 0$ „ „ $z = \pm c$ „ „ „ „ y.

Daraus folgt:

$$m_1 = -\frac{m}{b^2}; \ m_2 = 0; \ n_1 = -\frac{n}{c^2}; \ n_2 = 0,$$

und es ist also jetzt:

$$\tau_z = mz\left(1 - \frac{y^2}{b^2}\right); \ \tau_y = ny\left(1 - \frac{z^2}{c^2}\right),$$

während die Gleichungen (1) und (2) zur Bestimmung von m und n übergehen in:

$$nC - mB - \left(\frac{n}{c^2} - \frac{m}{b^2}\right)\int y^2 z^2 dF = M$$

$$\frac{m}{b^2} + \frac{n}{c^2} = 0;$$

---

*) Durch diese 3 Gleichungen werden die algebraischen Summen der Kräfte nach den Richtungen OX, OY, OZ = Null gesetzt; die 3 Momentengleichungen werden identisch, weil durch die Bezeichnungen

$$\tau_z \text{ für } \tau_{xy} \text{ und } \tau_{yx}, \ \tau_y \text{ für } \tau_{zx} \text{ und } \tau_{xz}$$

die aus eben diesen Momentengleichungen sonst hervorgehenden Relationen

$$\tau_{xy} = \tau_{yx} \text{ und } \tau_{zx} = \tau_{xz}$$

nach Nr. 10 als bekannt vorausgesetzt wurden.

die letzte Gleichung kann wegen

$$B = \frac{4}{3}\, b c^3; \; C = \frac{4}{3}\, b^3 c$$

auch geschrieben werden:

$$nC + mB = 0.$$

197. — Für die **Raute** sei
die in der y-Axe liegende Diagonale $= 2b$,
„ „ „ z-Axe „ „ $= 2c$.

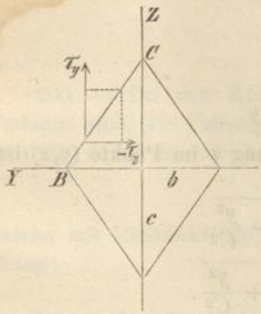

Fig. 35.

Die Bedingung, dass in allen Punkten der Seite BC (Fig. 35) die Richtung der resultirenden Tangentialspannung mit ihr zusammenfallen muss (worin mit Rücksicht auf die der Symmetrie angepasste Form der Ausdrücke von τ_z und τ_y zugleich liegt, dass dieses auch in allen Punkten der anderen drei Seiten der Fall ist), wird hier durch die Gleichung ausgedrückt:

$$-\tau_z : \tau_y = b : c \text{ oder } c\tau_z + b\tau_y = 0,$$

welche durch alle Werthe von y und z erfüllt werden muss, die der geraden Linie BC entsprechen, also durch jeden Werth von y, falls

$$z = -\frac{c}{b}\, y + c = c\left(1 - \frac{y}{b}\right)$$

gesetzt wird. Durch diese Substitution wird die linke Seite der obigen Gleichung eine ganze Function 3ten Grades von y, und indem die Coefficienten von y^0, y, y^2 und y^3 einzeln $= 0$ gesetzt werden, erhält man 4 Gleichungen, woraus folgt:

$$m_1 = -\frac{m}{b^2} - 2\,\frac{n}{c^2}; \; m_2 = -\frac{m}{c^2}$$

$$n_1 = -\frac{n}{c^2} - 2\,\frac{m}{b^2}; \; n_2 = -\frac{n}{b^2}.$$

Damit wird jetzt:

$$\tau_z = mz\left(1 - \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2}\right) - 2nz\,\frac{y^2}{c^2}$$

$$\tau_y = ny\left(1 - \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2}\right) - 2my\,\frac{z^2}{b^2},$$

während die Gleichungen (1) und (2) zur Bestimmung von m und n übergehen in:

$$nC - mB + \left(\frac{n}{c^2} - \frac{m}{b^2}\right)\int y^2 z^2 dF - \frac{n}{b^2}\int y^4 dF + \frac{m}{c^2}\int z^4 dF = M$$

$$\frac{m}{b^2} + \frac{n}{c^2} = 0;$$

die letzte Gleichung kann wegen

$$B = \frac{bc^3}{3}; \; C = \frac{b^3 c}{3}$$

auch geschrieben werden: $nC + mB = 0.$

198. — Die in den beiden vorigen Nummern für das Rechteck und die Raute gefundenen Resultate lassen sich zur Uebereinstimmung bringen, wenn die vorübergehend berücksichtigten Glieder der 3ten Ordnung in den Ausdrücken von τ_z und τ_y nachträglich wieder weggelassen werden, wenn also gesetzt wird:

$$\tau_z = mz\,;\ \tau_y = ny;$$

Gl. (1) geht dadurch über in:

$$nC - mB = M,$$

wodurch in Verbindung mit der für Rechteck und Raute übereinstimmend gefundenen Gleichung*)

$$nC + mB = 0$$

die Coefficienten m und n, mithin

$$\tau_z = -\frac{M}{2B}\,z\,;\ \tau_y = \frac{M}{2C}\,y$$

bestimmt sind. Die resultirende Tangentialspannung τ im Punkte (y,z) ist sonach:

$$\tau = \sqrt{\tau_z{}^2 + \tau_y{}^2} = \frac{M}{2}\sqrt{\frac{z^2}{B^2} + \frac{y^2}{C^2}}$$

$$max.\ \tau = t = \frac{M}{2}\cdot\ max.\sqrt{\frac{z^2}{B^2} + \frac{y^2}{C^2}}.$$

$$\text{Mit } B = C \text{ wird } \tau = \frac{M}{2B}\sqrt{z^2 + y^2} = \frac{Mr}{A}$$

in Uebereinstimmung mit Nr. 187, und es hat also der hier gefundene allgemeine Ausdruck von τ dieselbe Bedeutung als Näherungsformel für ungleiche Hauptträgheitsmomente B und C des Querschnitts, wie jener frühere Ausdruck für $B = C$.

b. Besondere Querschnittsformen.

199. — Ein Ausdruck von τ, welcher für andere Fälle dieselbe Berechtigung haben soll, wie die Formel $\tau = \dfrac{Mr}{A}$ für den Kreis, muss für jede Querschnittsform besonders abgeleitet werden.

Für das Rechteck ist nur die in Nr. 196 begonnene Rechnung durchzuführen. Wegen

$$\int y^2 z^2 dF = \int_{-b}^{b} y^2 dy \int_{-c}^{c} z^2 dz = \frac{4}{9}\ b^3 c^3 = \frac{Bb^2}{3} = \frac{Cc^2}{3}$$

erhält man m und n aus den Gleichungen:

$$nC - mB = \frac{3}{2}\,M$$

$$nC + mB = 0$$

---

*) Diese aus der Gl. (2) hervorgegangene Gleichung wäre nicht gefunden worden, wenn man von vornherein die Glieder von der 3ten Ordnung in den Ausdrücken von τ_z und τ_y weggelassen hätte.

und damit:

$$\tau_z = -\frac{3}{4}\frac{M}{B}z\left(1-\frac{y^2}{b^2}\right) = -\frac{9}{16}\frac{M}{bc^3}z\left(1-\frac{y^2}{b^2}\right)$$

$$\tau_y = \frac{3}{4}\frac{M}{C}y\left(1-\frac{z^2}{c^2}\right) = \frac{9}{16}\frac{M}{b^3c}y\left(1-\frac{z^2}{c^2}\right)$$

$$\tau = \frac{9}{16}\frac{M}{bc}\sqrt{\frac{z^2}{c^4}\left(1-\frac{y^2}{b^2}\right)^2 + \frac{y^2}{b^4}\left(1-\frac{z^2}{c^2}\right)^2}.$$

Ist $b \leqq c$, so ist τ am grössten für $y = \pm b$ und $z = 0$, d. h. in den Mittelpunkten der längeren Seiten, und zwar

$$max.\ \tau = t = \frac{9}{16}\frac{M}{b^2c}\ ^{*}).$$

200. — Bei der Ellipse wird, wenn y und z die Coordinaten des Umfangs sind, die Umfangs- oder Oberflächenbedingung 3) sub Nr. 193 ausgedrückt durch die Gleichung:

$$\frac{\tau_y}{\tau_z} = \frac{dz}{dy},$$

welche mit Rücksicht auf die Ausdrücke von τ_y und τ_z und auf die Gleichung:

$$\frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

der Ellipse (b und c Halbaxen) übergeht in:

$$\frac{n + n_1 z^2 + n_2 y^2}{m + m_1 y^2 + m_2 z^2} = -\frac{c^2}{b^2}.$$

Sie wird erfüllt, wenn

$$m_1 = m_2 = n_1 = n_2 = 0$$

und $nb^2 + mc^2 = 0$ oder wegen

$$B = \frac{\pi b c^3}{4};\ C = \frac{\pi b^3 c}{4}$$

$$nC + mB = 0$$

gesetzt wird. Weil nun hierdurch zugleich die Bedingung (2) erfüllt ist, während Gl. (1) in

$$nC - mB = M$$

übergeht, so erkennt man, dass die in Nr. 198 für irgend einen doppeltsymmetrischen Querschnitt gefundene Näherungsformel:

$$\tau = \frac{M}{2}\sqrt{\frac{z^2}{B^2} + \frac{y^2}{C^2}}$$

---

*) Sind t_1, t_2 und t_3 die Werthe von $t = max.\ \tau$ nach den Formeln sub Nr. 187, 198 und 199, so ist immer $t_1 < t_2 < t_3$,

$$\text{nämlich } \frac{t_2}{t_1} = \frac{b^2 + c^2}{2bc} = 1 \text{ bis } \infty$$

$$\frac{t_3}{t_2} = \frac{3}{2}\frac{c}{\sqrt{b^2+c^2}} = 1{,}06\ldots \text{ bis } 1{,}5$$

$$\text{wenn } \frac{b}{c} = 1 \text{ bis } 0.$$

Die Formel $t = \frac{9}{16}\frac{M}{b^2c}$ ist zugleich am richtigsten, am sichersten und am einfachsten.

bei dem elliptischen Querschnitte allen gestellten Anforderungen entspricht, mithin hier dieselbe Berechtigung hat wie die Formel $\tau = \frac{Mr}{A}$ für den Kreis.

Der Maximalwerth von τ findet in den Endpunkten der kleinen Axe statt und ist für $b \leqq c$:

$$max.\ \tau = t = \frac{2M}{\pi b^2 c} \ ^{*)}.$$

II. Der Drehungswinkel.

201. — Zur Ableitung einer corrigirten Formel für den specifischen Drehungswinkel ϑ ist die Bemerkung vorauszuschicken, dass die in Nr. 8 erklärten Verschiebungen, welche in irgend einem Punkte A eines Körpers bei dessen Belastung und entsprechender Deformation stattfinden, sich folgendermassen ausdrücken lassen durch die mit der Deformation verbundenen kleinen Aenderungen ξ, η, ζ der rechtwinkeligen Coordinaten x, y, z jenes Punktes:

$$\gamma_{yz} = \gamma_{zy} = \frac{d\eta}{dz} + \frac{d\zeta}{dy}$$

$$\gamma_{zx} = \gamma_{xz} = \frac{d\zeta}{dx} + \frac{d\xi}{dz}$$

$$\gamma_{xy} = \gamma_{yx} = \frac{d\xi}{dy} + \frac{d\eta}{dx}.$$

Wenn in der That $AB = dy$ und $AC = dz$ zwei im ursprünglichen Zustande parallel der y-Axe und der z-Axe von A aus gezogene unendlich kleine materielle gerade Linien sind, so ist

$\frac{d\eta}{dz}\,dz$ die relative Verrückung des Punktes C gegen den Punkt A im Sinne der y-Axe und

$\frac{d\zeta}{dy}\,dy$ die relative Verrückung des Punktes B gegen den Punkt A im Sinne der z-Axe, also

$\frac{d\eta}{dz}$ die Drehung von AC um A im Sinne ZY,

$\frac{d\zeta}{dy}$ „ „ „ AB „ A „ „ YZ und somit

$\frac{d\eta}{dz} + \frac{d\zeta}{dy}$ die Verkleinerung des ursprünglich rechten Winkels ABC, welche nach Nr. 8 auch $= \gamma_{yz} = \gamma_{zy}$ ist.

---

*) Wird dieser Werth mit t_2 bezeichnet zum Unterschiede von $t_1 = \frac{Mr}{A}$, so ist ebenso wie beim Rechtecke:

$$\frac{t_2}{t_1} = \frac{b^2 + c^2}{2bc} = 1 \text{ bis } \infty$$

$$\text{für } \frac{b}{c} = 1 \text{ bis } 0.$$

202. — Ist nun insbesondere A ein Punkt des Querschnitts YZ des der Verdrehung unterworfenen stabförmigen Körpers und A_1 der entsprechende Punkt (mit denselben ursprünglichen Coordinaten y, z) des im Sinne der x-Axe um dx von jenem entfernten Querschnitts $Y_1 Z_1$, sind ferner $AB = dy$ und $A_1 B_1 = dy$ ursprünglich parallel der y-Axe, so erfahren diese unendlich kleinen materiellen Geraden AB und $A_1 B_1$ durch die Verdrehung des Körpers im Allgemeinen eine sehr kleine Neigung gegen die yz-Ebene und eine unendlich kleine Verdrehung gegeneinander.

$\frac{d\zeta}{dx}\, dx$ ist die Verrückung des Punktes A_1 gegen den Punkt A im Sinne der z-Axe, also

$\frac{d^2\zeta}{dx\, dy}\, dx\, dy$ der Ueberschuss der Verrückung von B_1 gegen B über die Verrückung von A_1 gegen A im Sinne der z-Axe, und

$\frac{d^2\zeta}{dx\, dy}\, dx$ der Winkel, um welchen in der yz-Ebene die Projection von $A_1 B_1$ gegen diejenige von AB im Sinne YZ verdreht wurde.

Setzt man in diesem letzten Ausdrucke, welcher eine Function von y und z ist, $z =$ Null, so ist

$$\left(\frac{d^2\zeta}{dx\, dy}\right)_{z=0} . \, dx$$

die Verdrehung der Hauptaxe $O_1 Y_1$ gegen OY im Sinne YZ. Ebenso ist

$$-\left(\frac{d^2\eta}{dx\, dz}\right)_{y=0} . \, dx$$

die Verdrehung von $O_1 Z_1$ gegen OZ im gleichen Sinne YZ, und da diese beiden Drehungswinkel $= \vartheta\, dx$ sind, so hat man:

$$\vartheta = \left(\frac{d^2\zeta}{dx\, dy}\right)_{z=0} = -\left(\frac{d^2\eta}{dx\, dz}\right)_{y=0} .$$

203. Aus den Gleichungen:

$$\tau_z = \tau_{xy} = G\gamma_{xy}$$
$$\tau_y = \tau_{xz} = G\gamma_{xz}$$

folgt jetzt durch Einsetzung der allgemeinen Ausdrücke von τ_z und τ_y nach Nr. 193 sowie von γ_{xy} und γ_{xz} nach Nr. 201:

$$mz + m_1 y^2 z + m_2 z^3 = G\left(\frac{d\xi}{dy} + \frac{d\eta}{dx}\right)$$
$$ny + n_1 y z^2 + n_2 y^3 = G\left(\frac{d\xi}{dz} + \frac{d\zeta}{dx}\right)$$

und wenn die erste Gleichung nach z, die zweite nach y abgeleitet, dann in der ersten $y = 0$, in der zweiten $z = 0$ gesetzt wird, mit Rücksicht auf Nr. 202:

$$m + 3m_2 z^2 = G\left[\left(\frac{d^2\xi}{dy dz}\right)_{y=0} - \vartheta\right]$$
$$n + 3n_2 y^2 = G\left[\left(\frac{d^2\xi}{dy dz}\right)_{z=0} + \vartheta\right].$$

Setzt man endlich in der ersten dieser Gleichungen noch $z = 0$, in der zweiten noch $y = 0$, so folgt durch Subtraction beider:

$$\vartheta = \frac{n - m}{2G}.$$

204. — Für die Ellipse und näherungsweise für irgend einen doppelt-symmetrischen Querschnitt ist nach Nr. 198 und 200:

$$n = \frac{M}{2C}; \; m = -\frac{M}{2B},$$

also

$$\vartheta = \frac{M}{4G}\left(\frac{1}{B} + \frac{1}{C}\right) = \frac{M}{\frac{4BC}{B+C}G}.$$

Mit $B = C$ wird dieses $\vartheta = \frac{M}{2BG} = \frac{M}{AG}$ in Uebereinstimmung mit Nr. 188*).

Für die Ellipse insbesondere wird, wenn b und c die Halbaxen sind:

$$\vartheta = \frac{1}{\pi}\,\frac{M}{G}\,\frac{b^2 + c^2}{b^3 c^3}.$$

Für das Rechteck ist nach Nr. 199 nur $\frac{3}{2}M$ statt M zu setzen, also:

$$\vartheta = \frac{\frac{3}{2}M}{\frac{4BC}{B+C}G} = \frac{9}{32}\,\frac{M}{G}\,\frac{b^2 + c^2}{b^3 c^3},$$

unter b und c die halben Seiten verstanden.

205. — Die Gleichung der krummen Fläche, in welche der materielle Querschnitt durch die Verdrehung übergeht, wird erhalten, indem man die Verrückung ξ eines beliebigen Punktes des ursprünglich ebenen Querschnitts YZ im Sinne der x-Axe als Function seiner Coordinaten y, z ausdrückt. Wird angenommen, diese Function lasse sich in eine nach ganzen Potenzen von y und z fortschreitende Reihe entwickeln, so können, damit $\xi = 0$ werde für $y = 0$ oder $z = 0$ d. h. für alle Punkte der Symmetrieaxen (cf. Nr. 192), nur solche Glieder vorkommen, welche zugleich y und z enthalten, und wenn sonach bis zu den Gliedern von der 4ten Ordnung

$$\xi = ayz + by^2z + cyz^2 + dy^3z + ey^2z^2 + fyz^3$$

*) Ist $B \gtreqless C$ so ist, wenn

$$\frac{M}{AG} = \frac{M}{(B+C)G} = \vartheta_1 \text{ und } \frac{M}{\frac{4BC}{B+C}G} = \vartheta_2$$

gesetzt wird,

$$\frac{\vartheta_2}{\vartheta_1} = \frac{(B+C)^2}{4BC} = 1 \text{ bis } \infty$$

$$\text{für } \frac{C}{B} = 1 \text{ bis } 0.$$

gesetzt wird, so folgt aus den Gleichungen (Nr. 203):

$$\left.\begin{aligned}\left(\frac{d^2\xi}{dy\,dz}\right)_{y=0} &= \frac{m+3m_2z^2}{G}+\vartheta\\ \left(\frac{d^2\xi}{dy\,dz}\right)_{z=0} &= \frac{n+3n_2y^2}{G}-\vartheta\end{aligned}\right\}\ \vartheta=\frac{n-m}{2G}$$

$$a=\frac{n+m}{2G};\ b=c=0;\ d=\frac{n_2}{G};\ f=\frac{m^2}{G};$$

e bleibt unbestimmt, muss aber $=0$ gesetzt werden, weil die Symmetrie erfordert, dass der Ausdruck von ξ entweder nur gerade oder nur ungerade Potenzen von y und z enthält. Demnach ist

$$\xi=\frac{yz}{G}\left(\frac{n+m}{2}+n_2y^2+m_2z^2\right).$$

Für einen rechteckigen und einen elliptischen Querschnitt ist $m_2=n_2=0$ und

$$\frac{n+m}{2G}=\frac{n+m}{n-m}\,\vartheta=\frac{\frac{1}{C}-\frac{1}{B}}{\frac{1}{C}+\frac{1}{B}}\,\vartheta=\frac{B-C}{B+C}\,\vartheta,$$

folglich:

$$\xi=\frac{B-C}{B+C}\,\vartheta\,.\,yz.$$

Der gekrümmte Querschnitt ist also eine windschiefe Fläche, welche aus 4 symmetrischen Theilen besteht, die durch die Axen OY und OZ von einander getrennt werden und von denen zwei gegenüberliegende vor der Ebene YZ, die beiden anderen dahinter liegen. Diese Fläche ist um so stärker gekrümmt, je grösser ϑ ist und je mehr B und C verschieden sind; mit $B=C$ geht sie, wenigstens für Rechteck und Ellipse, sonst aber näherungsweise in der Nähe des Mittelpunktes O, in eine Ebene über.

206. — Die Prüfung der hier dargestellten Theorie der Drehungselasticität durch Vergleichung mit den Ergebnissen von Versuchen kann nur mit Hülfe des Ausdrucks für den Drehungswinkel geschehen, weil die Spannung im Inneren eines Körpers sich nicht beobachten lässt; auch Versuche über das zum Abwürgen eines Stabes erforderliche Kraftmoment in Verbindung mit der anderweitig bekannten Schubfestigkeit des betreffenden Materials können keinen Aufschluss geben, weil dabei Zustände eintreten, auf welche die ein vollkommen elastisches Verhalten voraussetzende Theorie selbst nicht näherungsweise mehr passt.

Durch Messung des Drehungswinkels prismatischer Stäbe aus isotropem Materiale, insbesondere aus verschiedenen Metallen, hat Wertheim gefunden, dass, wenn $G=\frac{3}{8}E$ (cf. Nr. 169) gesetzt wird, die Formel

$$\vartheta=\frac{M}{\frac{4BC}{B+C}G}$$

eine gute Uebereinstimmung gewährt für kreisförmige, kreisringförmige und elliptische Querschnitte; dagegen liefert jenen Versuchen zufolge die oben für den rechteckigen Querschnitt entwickelte Formel:

$$\vartheta = \frac{\frac{3}{2} M}{\frac{4BC}{B+C} G}$$

im Allgemeinen etwas zu grosse Werthe, um so mehr, je mehr das Rechteck einem Quadrate sich nähert, für welchen Grenzfall der Coefficient von M nur etwa $= 1,2$ zu setzen ist. Wird allgemein

$$\vartheta = \frac{\alpha M}{\frac{4BC}{B+C} G}$$

gesetzt, so ist also mit $G = \frac{3}{8} E$ (isotroper Körper)*) durchschnittlich:

$\alpha = 1$ für kreisförmige und elliptische,
$\alpha = 1,2$ für quadratische und
$\alpha = 1,2$ bis $1,5$ für mehr und mehr längliche rechteckige Querschnitte.

Uebrigens wurde dieser Correctionscoefficient α nicht nur von der Querschnittsform, sondern zugleich einigermassen von M und von der Länge l des Stabes abhängig gefunden: α nimmt etwas zu, wenn M zunimmt oder l abnimmt; auch wurde schon bei mässiger Grösse von M ein Theil von ϑ nach der Entlastung bleibend gefunden, welcher mit M rasch zunahm und unter sonst gleichen Umständen bei längeren Stäben verhältnissmässig grösser war, als bei kurzen.

Diese letzteren Thatsachen hängen zusammen mit der bei der obigen Theorie ausser Acht gelassenen Compression in transversaler Richtung, wovon die Verdrehung eines Stabes stets in gewissem, und zwar, wie es scheint, von der Länge abhängigem Grade begleitet wird; die entsprechende Volumenverminderung bestimmte Wertheim durch die Flüssigkeitsmenge, welche aus dem mit der betreffenden Flüssigkeit erfüllten Inneren eines hohlen Stabes bei dessen Verdrehung hinausgetrieben wurde (cf. Nr. 169), und fand sie bei isotropen Körpern proportional ϑ^2.

207. — Eine Spiralfeder von constantem Querschnitte, deren Mittellinie auf einer beliebigen Umdrehungsfläche liegen möge, sei am einen Ende befestigt, am anderen durch eine Kraft P angegriffen, deren Richtungslinie mit der Axe der Spirale, d. h. der Axe jener Umdrehungsfläche zusammenfällt. Es soll die Ausdehnung oder Zusammendrückung δ berechnet werden, welche die Spiralfeder in der Richtung ihrer Axe erfährt.

Diese Aufgabe, welche der Anwendung von dergl. Spiralfedern zu Federwagen und anderen Dynamometern, zu Eisenbahnwagenpuffern etc. zu Grunde

*) In Betreff der für einige Holzarten einzusetzenden Werthe von G siehe Nr. 188.

liegt, ist streng genommen ziemlich complicirt, lässt sich aber näherungsweise unter gewissen Voraussetzungen, die bei den genannten Anwendungen meistens zutreffen, auf die blosse Verdrehung der einzelnen Längenelemente der Feder um ihre als geradlinig zu betrachtenden Mittellinien (nämlich die Bogenelemente ds der ganzen spiralförmigen Mittellinie) zurückführen.

Die Axe der Spiralfeder werde vertical stehend gedacht, und von einem beliebigen Punkte O ihrer Mittellinie aus sei

OX nach der Tangente,
OY nach dem Krümmungshalbmesser gerichtet,
OZ senkrecht zu OX und OY.

Die Normalebene YZ enthält den Querschnitt der Feder, welcher in Beziehung auf OY und OZ gewöhnlich symmetrisch ist. In einer durch O gelegten Horizontalebene sei

OA nach dem Durchschnittspunkte A dieser Horizontalebene mit der Axe AB der Spiralfeder gezogen (B Angriffspunkt von P),
OH sei die Horizontalprojection von OX, Winkel $HOX = \lambda$,
ON senkrecht zu OA, Winkel $HON = \mu$, Winkel $XON = \nu$;

dann ist
$$\cos\nu = \cos\lambda \, . \cos\mu.$$

$\varrho = f(\varphi)$ sei die Polargleichung der Horizontalprojection der Spirale für den Durchgang der Axe AB durch die Projectionsebene als Pol, der Winkel φ gerechnet von demjenigen (gewöhnlich grössten) Fahrstrahle $\varrho = r$ aus, welcher nach dem festen Endpunkte der Spirale hin gezogen ist.

Nun ist δ bedingt durch die Deformationen der einzelnen Längenelemente $OO_1 = ds$; um letztere auf ihre elementaren Bestandtheile zurückzuführen, werde die Kraft P von ihrem Angriffspunkte B an den Punkt O versetzt und hier zerlegt in die Seitenkräfte:

$P_x = P\sin\lambda$ nach der Richtung OX und
$P_{yz} = P\cos\lambda$ in der Querschnittsebene YZ.

Das durch die Versetzung von P eingeführte Kräftepaar
$$M = P\varrho$$
mit der Axe ON werde zerlegt in die Seitenpaare:

$M_x = P\varrho\cos\nu$ mit der Axe OX und
$M_{yz} = P\varrho\sin\nu$, dessen Axe in der Ebene YZ liegt.

P_x bewirkt eine Aenderung der Länge von OO_1,
P_{yz} eine Verschiebung der Endquerschnitte dieses Längenelements,
M_x eine Verdrehung desselben um seine Axe OX,
M_{yz} eine Veränderung seiner Krümmung.

Streng genommen wirken alle diese Umstände zusammen, um die Ausdehnung oder Zusammendrückung δ der Spiralfeder hervorzubringen, wozu noch kommt, dass die Gleichung $\varrho = f(\varphi)$ mit dem Belastungszustande der Feder sich etwas ändert, besonders wenn der Angriffspunkt B der Kraft P frei zur Seite ausweichen kann, während, wenn er geradlinig in der Axe der Spirale geführt wird, dadurch Seitenkräfte in den Führungen hervorgerufen werden, welche die Grössen
$$P_x \qquad P_{yz} \qquad M_x \qquad M_{yz}$$
modificiren.

208. — In Betreff der seitlichen Ausweichung des Angriffspunktes B resp. des Seitendruckes der Führung heben sich die Wirkungen je zweier Federelemente,

welche den Winkeln φ und $\varphi + \pi$ entsprechen, grösstentheils gegenseitig auf, so dass die Gesammtwirkung mit um so geringerem Fehler vernachlässigt werden kann, je weniger der Maximalwerth von φ, d. h. der gesammte Windungswinkel der Spirale sich von einem ganzen Vielfachen von 2π unterscheidet oder auch je weniger der etwaige Unterschied wegen einer sehr grossen Zahl von überhaupt vorhandenen Windungen verhältnissmässig ins Gewicht fällt. Eine solche Spirale vorausgesetzt, werde ferner angenommen, dass λ und μ sehr kleine Winkel sind, so dass näherungsweise

$$P_x = 0;\ P_{yz} = P;\ M_x = P\varrho;\ M_{yz} = 0$$

gesetzt werden kann.

Die Wirkung des Momentes M_x besteht in einer Verdrehung des Federelementes um seine Axe OX, und zwar nach Nr. 206 um den Winkel:

$$\vartheta ds = \frac{\alpha P\varrho}{AG} ds,$$

wenn die Function $\frac{4BC}{B+C} = A$ gesetzt wird.

Die entsprechende Drehung um ON beträgt:

$$\vartheta ds \,.\, cos\nu = \vartheta \varrho d\varphi$$

und bewirkt eine Verschiebung des Punktes B nach der Richtung der Axe BA

$$= \vartheta \varrho^2 d\varphi = \frac{\alpha P}{AG} \varrho^3 d\varphi.$$

Die Kraft $P_{yz} = P$ bewirkt Verschiebungen der Querschnitte gegeneinander, die zwar auch eine gewisse Verrückung des Punktes B nach der Richtung der Axe zur Folge haben, indessen ist diese, verglichen mit der durch M_x bedingten Verrückung des Punktes B, nur eine kleine Grösse der zweiten Ordnung, wenn, wie hier noch angenommen werden soll, die Querschnittsdimensionen klein im Vergleich mit ϱ sind*.) Sonach ist näherungsweise zu setzen, wenn n die Zahl der Windungen bedeutet:

$$\delta = \frac{\alpha P}{AG} \int_0^{n.2\pi} \varrho^3 d\varphi.$$

---

*) Diejenige Verrückung des Punktes B nach der Richtung der Axe, welche durch die gegenseitige Verschiebung der beiden Endflächen $= F$ des Längenelements ds der Spiralfeder bedingt wird, ist:

$$ds' = \gamma_0 \cdot \varrho d\varphi,$$

unter γ_0 die specifische Verschiebung im Schwerpunkte O verstanden (cf. Nr. 265), also ein Ausdruck von der Art:

$$ds' = \alpha_1 \frac{P}{GF} \varrho d\varphi,$$

in welchem α_1 ein der Einheit vergleichbarer, übrigens von der Querschnittsform abhängiger Zahlencoefficient ist. Wird nun hiermit die durch M_x bedingte Verrückung des Punktes B:

$$ds'' = \frac{\alpha P}{AG} \varrho^3 d\varphi = \alpha \frac{P}{GF} \frac{\varrho^2}{a^2} \varrho d\varphi$$

verglichen, wobei $A = Fa^2$ gesetzt wurde, also a eine den Querschnittsdimensionen vergleichbare Länge bedeutet, so folgt:

$$\frac{ds'}{ds''} = \frac{\alpha_1}{\alpha} \frac{a^2}{\varrho^2}.$$

Für die **cylindrische Spirale** ist mit $\varrho = \text{Const.} = r$:

$$\delta_1 = 2\pi n \frac{\alpha P}{AG} r^3,$$

für eine **conische Spirale** mit

$$\varrho = r - \frac{\varphi}{2\pi n}(r - r_1)$$

$$\delta_2 = \frac{\pi n}{2} \frac{\alpha P}{AG} \frac{r^4 - r_1^4}{r - r_1} = \frac{1}{4}\left(1 + \frac{r_1}{r}\right)\left(1 + \frac{r_1^2}{r^2}\right)\delta_1,$$

durchschnittlich etwa $\delta_2 = 0{,}3\,\delta_1$ entsprechend $r_1 = \frac{1}{6} r$.

Ist insbesondere der Querschnitt der Feder ein **Kreis** vom Durchmesser d oder ein **Rechteck** mit den Seilen b und c, so ist

$$\text{mit } \alpha = \ \ 1: \ \delta_1 = 64 n \frac{P}{G} \frac{r^3}{d^4}$$

$$\text{„ } \alpha = 1{,}5: \ \delta_1 = 9\pi n \frac{P}{G} \frac{r^3 (b^2 + c^2)}{b^3 c^3}.$$

Die durch die Belastung hervorgerufene **grösste Tangentialspannung** t ist sowohl bei der cylindrischen wie bei der conischen Spiralfeder:

$$t = \frac{16}{\pi} \frac{Pr}{d^3} \ \text{ resp. } \ t = \frac{9}{2} \frac{Pr}{b^2 c} \ (b < c).$$

Sind z. B. P, δ, t und der Querschnitt gegeben, so findet man r aus der Gleichung für t, dann n aus der Gleichung für δ.
