Die Festigkeitslehre mit besonderer Rücksicht auf die Bedürfnisse des Maschinenbaues

Grashof, Franz

Berlin, 1866

Sechstes Capitel Allgemeine Beziehungen zwischen den Spannungen, Ausdehnungen und Verschiebungen im Inneren eines duch äussere Kräfte angegriffenem Köpers

urn:nbn:de:bsz:31-274080

SECHSTES CAPITEL.

Allgemeine Beziehungen zwischen den Spannungen, Ausdehnungen und Verschiebungen im Inneren eines durch äussere Kräfte angegriffenen elastischen Körpers.

A. Die Spannungen.

209. — A sei ein beliebiger Punkt des Körpers mit den Coordinaten x, y, z, bezogen auf ein rechtwinkeliges Axensystem OX, OY, OZ von fester Lage gegen den Körper, wozu mit Rücksicht auf die Veränderlichkeit der Form des Körpers unter der Einwirkung der äusseren Kräfte erforderlich und genügend ist, dass ein Punkt des Körpers, die durch diesen und durch einen zweiten Punkt gehende Gerade, endlich die durch diese Gerade und durch einen dritten Punkt gehende Ebene feste Lagen gegen die Coordinatenaxen haben; die genannten 3 Punkte können dabei unendlich nahe beisammen liegen.

F sei eine beliebige durch A gelegte Ebene, deren Normale AB die Winkel α, β, γ mit den Coordinatenaxen bildet,

p die Spannung im Punkte A der Ebene F, d. h. der auf die Flächeneinheit bezogene Zug oder Druck, welchen bei der Belastung des Körpers die an die Ebene F beiderseits angrenzenden Körpertheile bei A gegenseitig auf einander ausüben (cf. Nr. 9). Die Zweideutigkeit der Richtung von p wird dadurch beseitigt, dass p betrachtet wird als derjenige Zug oder Druck, welchen der nach der Richtung AB gelegene Körpertheil auf den jenseits F liegenden ausübt.

Die so bestimmte Richtung von p bildet mit der Richtung AB einen Winkel φ, der jeden Werth von 0 bis π haben kann; λ, μ, ν seien die Winkel zwischen der Richtung von p und den Coordinatenaxen.

$\sigma = p \cos\varphi$ ist die Normalspannung im Punkte A der Ebene F oder im Punkte A nach der Richtung AB; sie ist positiv oder negativ, eine Spannung im engeren Sinne oder eine Pressung, einem gegenseitigen Zuge oder Drucke entsprechend, jenachdem φ spitz oder stumpf ist.

$\tau = p \sin\varphi$ ist die **Tangentialspannung** im Punkte A der Ebene F; sie ist absolut wie p, kann aber in der Ebene F in Componenten nach gewissen Richtungen zerlegt werden, die dann positiv oder negativ sind, jenachdem diese Richtungen mit der Richtung von τ spitze oder stumpfe Winkel bilden.

Werden durch den Punkt A insbesondere 3 Ebenen

$$YAZ \qquad ZAX \qquad XAY$$

parallel den Coordinatenebenen gelegt, so seien

$$p_x \qquad p_y \qquad p_z$$

die Spannungen im Punkte A jener Ebenen, der Richtung nach betrachtet als Kräfte, welche von den nach den Richtungen AX, AY, AZ gelegenen Körpertheilen auf die jenseits der bezeichneten Ebenen liegenden Körpertheile ausgeübt werden.

p_x lässt sich zerlegen in eine Normalspannung σ_x und in eine Tangentialspannung, welche wiederum nach den Richtungen AY und AZ in die Componenten τ_{xy} und τ_{xz} zerlegt werden möge. Wird ebenso mit p_y und p_z verfahren, so ergeben sich 9 Spannungscomponenten:

Ebene	YAZ;	p_x mit den Componenten	σ_x	τ_{xy}	τ_{xz}
„	ZAX;	p_y „ „ „	σ_y	τ_{yz}	τ_{yx}
„	XAY;	p_z „ „ „	σ_z	τ_{zx}	τ_{zy}.

210. — Diese 9 Spannungscomponenten sind durch 6 Gleichungen verbunden, zu deren Herleitung der folgende **Hülfssatz** vorausgeschickt werde:

Ist f ein nach jeder Richtung unendlich kleines Element der Spannungsebene F, so ist die Momentensumme der Spannungen in f für jede durch den Schwerpunkt von f gehende Axe eine unendlich kleine Grösse von der 4ten Ordnung.

Selbstverständlich ist diese Momentensumme unendlich klein von der 3ten Ordnung für jede durch einen beliebigen Punkt von f gezogene Axe; dass sie aber insbesondere unendlich klein der 4ten Ordnung wird, wenn man jenen Punkt mit dem Schwerpunkte von f zusammenfallen lässt, ergiebt sich leicht aus der Definition des Schwerpunktes und mit Rücksicht auf die **stetige** Veränderlichkeit der Spannung von Punkt zu Punkt der betreffenden Spannungsebene.

211. — Denkt man nun vom Punkte A als Eckpunkt aus ein unendlich kleines Parallelepipedum construirt, dessen Kanten $= dx,\ dy,\ dz$ den Coordinatenaxen parallel sind, so sind die Kräfte, mit welchen die umgebende Körpermasse auf die drei um den Punkt A herumliegenden Seitenflächen nach den Richtungen AX, AY, AZ einwirkt, bei Vernachlässigung unendlich kleiner Grössen höherer Ordnung:

Richtung	AX	AY	AZ
	$-\sigma_x\, dy\, dz$	$-\tau_{xy}\, dy\, dz$	$-\tau_{xz}\, dy\, dz$
	$-\tau_{yx}\, dz\, dx$	$-\sigma_y\, dz\, dx$	$-\tau_{yz}\, dz\, dx$
	$-\tau_{zx}\, dx\, dy$	$-\tau_{zy}\, dx\, dy$	$-\sigma_z\, dx\, dy$

und diejenigen Kräfte, welche auf die 3 übrigen Seitenflächen ausgeübt werden, die um den Eckpunkt herumliegen, dessen Coordinaten $x + dx$, $y + dy$, $z + dz$ sind:

$$\left(\sigma_x + \frac{d\sigma_x}{dx}\,dx\right) dy\,dz;\ \left(\tau_{xy} + \frac{d\tau_{xy}}{dx}\,dx\right) dy\,dz;\ \left(\tau_{xz} + \frac{d\tau_{xz}}{dx}\,dx\right) dy\,dz$$

$$\left(\tau_{yx} + \frac{d\tau_{yx}}{dy}\,dy\right) dz\,dx;\ \left(\sigma_y + \frac{d\sigma_y}{dy}\,dy\right) dz\,dx;\ \left(\tau_{yz} + \frac{d\tau_{yz}}{dy}\,dy\right) dz\,dx$$

$$\left(\tau_{zx} + \frac{d\tau_{zx}}{dz}\,dz\right) dx\,dy;\ \left(\tau_{zy} + \frac{d\tau_{zy}}{dz}\,dz\right) dx\,dy;\ \left(\sigma_z + \frac{d\sigma_z}{dz}\,dz\right) dx\,dy.$$

Endlich kann auf die Masse des Parallelepipedums selbst noch eine äussere Kraft wirken (insbesondere z. B. die Schwerkraft), deren Componenten nach den Coordinatenaxen sind:

$$X\,dx\,dy\,dz \qquad Y\,dx\,dy\,dz \qquad Z\,dx\,dy\,dz,$$

unter X, Y, Z die Componenten dieser auf die Volumeinheit bezogenen Kraft verstanden.

Das Gleichgewicht aller dieser 21 Kräfte an dem Parallelepipedum wird durch die bekannten 6 Gleichungen ausgedrückt. Die drei ersten derselben geben nach Division mit dem gemeinschaftlichen Faktor $dx\,dy\,dz$:

$$\frac{d\sigma_x}{dx} + \frac{d\tau_{yx}}{dy} + \frac{d\tau_{zx}}{dz} + X = 0$$
$$\frac{d\tau_{xy}}{dx} + \frac{d\sigma_y}{dy} + \frac{d\tau_{zy}}{dz} + Y = 0$$
$$\frac{d\tau_{xz}}{dx} + \frac{d\tau_{yz}}{dy} + \frac{d\sigma_z}{dz} + Z = 0.$$

Die drei übrigen Gleichgewichtsbedingungen, nämlich die Momentengleichungen für 3 Axen, die man durch den Mittelpunkt des Parallelepipedums parallel seinen Kanten gezogen denken möge, führen mit Rücksicht auf den Hülfssatz sub Nr. 210 zu den einfachen Beziehungen (cf. Nr. 10):

$$\tau_{yz} = \tau_{zy}\ ;\ \tau_{zx} = \tau_{xz}\ ;\ \tau_{xy} = \tau_{yx}.$$

In der Folge möge kürzer

$$\tau_{yz} = \tau_{zy} \text{ mit } \tau_x$$
$$\tau_{zx} = \tau_{xz} \text{ mit } \tau_y$$
$$\tau_{xy} = \tau_{yx} \text{ mit } \tau_z$$

bezeichnet werden; dann sind also die 6 Spannungen

$$\sigma_x \quad \sigma_y \quad \sigma_z \quad \tau_x \quad \tau_y \quad \tau_z$$

an die folgenden 3 Gleichungen gebunden:

$$\left.\begin{aligned} \frac{d\sigma_x}{dx} + \frac{d\tau_y}{dz} + \frac{d\tau_z}{dy} + X = 0 \\ \frac{d\sigma_y}{dy} + \frac{d\tau_z}{dx} + \frac{d\tau_x}{dz} + Y = 0 \\ \frac{d\sigma_z}{dz} + \frac{d\tau_x}{dy} + \frac{d\tau_y}{dx} + Z = 0 \end{aligned}\right\} \ldots (I).$$

212. — Durch die 6 Spannungen

$$\sigma_x \quad \sigma_y \quad \sigma_z \quad \tau_x \quad \tau_y \quad \tau_z$$

ist die Spannung p der Richtung (Winkel mit den Axen λ, μ, ν) und Grösse nach bestimmt, welche im Punkte A einer Ebene F stattfindet, deren Normale AB die Winkel α, β, γ mit den Axen bildet. Schneidet man nämlich von der durch die Ebenen YAZ, ZAX, XAY begrenzten körperlichen Ecke ein unendlich kleines Tetraeder ab durch eine zu AB senkrechte Ebene, welche die Kanten AX, AY, AZ in den Punkten a, b, c schneiden möge, so sind, wenn die Seitenebene $abc = f$ gesetzt wird, die drei übrigen:

$$bAc = f\cos\alpha;\ cAa = f\cos\beta;\ aAb = f\cos\gamma,$$

und das Gleichgewicht der Kräfte an diesem Tretaeder führt zu den Gleichungen:

$$\left.\begin{aligned} p\cos\lambda &= \sigma_x\cos\alpha + \tau_y\cos\gamma + \tau_z\cos\beta \\ p\cos\mu &= \sigma_y\cos\beta + \tau_z\cos\alpha + \tau_x\cos\gamma \\ p\cos\nu &= \sigma_z\cos\gamma + \tau_x\cos\beta + \tau_y\cos\alpha \end{aligned}\right\} \ldots \text{(II)}.$$

Die auf die Masse des Tretaeders selbst wirkende äussere Kraft kommt in diesen Gleichungen nicht vor, weil sie mit dem Volumen unendlich klein von der 3ten Ordnung ist, während die auf die Begrenzungsflächen wirkenden Spannungskräfte mit diesen Flächen unendlich klein von der 2ten Ordnung sind.

Sofern die rechten Seiten der Gleichungen (II) beziehungsweise gleich sind den Componenten von p_x, p_y, p_z (cf. Nr. 209) nach der Richtung AB, so liegt darin das folgende Gesetz:

Sind AB und AC zwei beliebige Richtungen, so ist für den Punkt A die nach AB genommene Spannung in der zu AC senkrechten Ebene = der nach AC genommenen Spannung in der zu AB senkrechten Ebene. Es ist dies die Verallgemeinerung des Gesetzes, welches für zwei sich rechtwinkelig schneidende Richtungen durch die Gleichungen:

$$\tau_{yz} = \tau_{zy};\ \tau_{zx} = \tau_{xz};\ \tau_{xy} = \tau_{yx} \ \text{(Nr. 211)}$$

ausgedrückt wurde.

213. — Wenn man die Gleichungen (II) quadrirt und dann addirt, so erhält man mit

$$\begin{aligned} P_x &= (\sigma_y + \sigma_z)\ \tau_x + \tau_y\,\tau_z \\ P_y &= (\sigma_z + \sigma_x)\ \tau_y + \tau_z\,\tau_x \\ P_z &= (\sigma_x + \sigma_y)\ \tau_z + \tau_x\,\tau_y \end{aligned}$$

$$p^2 = p_x^2\cos^2\alpha + p_y^2\cos^2\beta + p_z^2\cos^2\gamma + 2P_x\cos\beta\cos\gamma + 2P_y\cos\gamma\cos\alpha + 2P_z\cos\alpha\cos\beta.$$

Werden nach Analogie dieser Gleichung die Quadrate der Spannungen p_1, p_2, p_3 ausgedrückt, welche im Schnittpunkte A von 3 beliebigen sich rechtwinkelig schneidenden Ebenen stattfinden, so liefert die Addition dieser 3 Ausdrücke die Gleichung:

$$p_1^2 + p_2^2 + p_3^2 = p_x^2 + p_y^2 + p_z^2$$

d. h. die Summe der Quadrate der Spannungen in 3 Ebenen,

welche in einem Punkte A sich rechtwinkelig schneiden, ist für diesen Punkt constant.

214. — Man erhält eine **geometrische Darstellung des Aenderungsgesetzes der Grösse von p mit der Lage der zugehörigen Spannungsebene** für einen gegebenen Punkt A, indem man auf jeder von A aus gezogenen Richtung AB eine Länge $r = \frac{1}{p}$ = dem reciproken Werthe der Spannung in der zu AB senkrechten Ebene abgetragen und die Endpunkte dieser Strecken r durch eine stetige Fläche verbunden denkt. Sind

$$\xi = r\cos\alpha\,;\ \eta = r\cos\beta\,;\ \zeta = r\cos\gamma$$

die auf die Axen AX, AY, AZ bezogenen Coordinaten eines solchen Endpunktes, also eines beliebigen Punktes der Fläche, so ergiebt sich vermittels der Gleichung für p^2 sub Nr. 213 die folgende Gleichung dieser Fläche:

$$1 = p_x{}^2\xi^2 + p_y{}^2\eta^2 + p_z{}^2\zeta^2 + 2P_x\eta\zeta + 2P_y\zeta\xi + 2P_z\xi\eta,$$

d. i. die Mittelpunktsgleichung eines Ellipsoids. Wäre dasselbe gegeben, so fände man die Grösse der Spannung p im Mittelpunkte A irgend einer Diametralebene sofort = dem reciproken Werthe des zu ihr senkrechten Radius.

Auch ergiebt sich, dass diejenigen beiden Ebenen, in welchen im Punkte A die Spannung p am grössten und am kleinsten ist, sich rechtwinkelig schneiden, indem sie mit zweien der 3 Symmetrie- oder Hauptdiametralebenen des Ellipsoids zusammenfallen.

215. — **Die Normalspannung σ im Punkte A nach der Richtung** AB bildet mit der resultirenden Spannung p in der zu AB senkrechten Ebene im Allgemeinen einen gewissen Winkel φ (Nr. 209), und es ist:

$$\sigma = p\cos\varphi = p\,(\cos\lambda\cos\alpha + \cos\mu\cos\beta + \cos\nu\cos\gamma),$$

also mit Rücksicht auf die Gleichungen (II):

$$\sigma = \sigma_x\cos^2\alpha + \sigma_y\cos^2\beta + \sigma_z\cos^2\gamma + 2\tau_x\cos\beta\cos\gamma + 2\tau_y\cos\gamma\cos\alpha + 2\tau_z\cos\alpha\cos\beta.$$

Diese Gleichung, welche in Beziehung auf α, β, γ von derselben Form ist wie die Gleichung für p^2 in Nr. 213, gestattet ähnliche Folgerungen wie dort; insbesondere ergiebt sich, **dass für jeden Punkt** die (algebraische) **Summe der Normalspannungen nach je 3 sich rechtwinkelig schneidenden Richtungen constant ist.**

216. — **Zur geometrischen Darstellung des Aenderungsgesetzes von σ mit der Richtung** AB möge auf dieser die Länge $r = \frac{1}{\sqrt{\pm\sigma}}$ = dem reciproken Werthe der Quadratwurzel aus dem Absolutwerthe von σ abgetragen und ebenso mit jeder anderen von A aus zu ziehenden Richtung AB verfahren werden. Sind dann wieder ξ, η, ζ die auf die Axen AX, AY, AZ bezogenen Coordinaten der Endpunkte dieser Strecken r oder der sie verbindenden stetigen Fläche, so ergiebt sich die Gleichung der letzteren aus dem Ausdrucke von σ (Nr. 215):

$$\pm 1 = \sigma_x \xi^2 + \sigma_y \eta^2 + \sigma_z \zeta^2 + 2\tau_x \eta \zeta + 2\tau_y \zeta \xi + 2\tau_z \xi \eta,$$

d. i. die Mittelpunktsgleichung einer Fläche 2ten Grades, welche, wenn sie gegeben ist, die Normalspannung σ im Mittelpunkte A nach der Richtung eines Radius r sofort $= \pm \frac{1}{r^2}$ bestimmt.

Eine Fläche 2ten Grades hat 3 zu einander senkrechte Hauptaxen, für welche als Coordinatenaxen die Glieder mit den Producten der Coordinaten aus der Gleichung der Fläche verschwinden, für welche also hier

$$\tau_x = \tau_y = \tau_z = 0$$

ist. Daraus folgt, dass es in jedem Punkte A des Körpers 3 zu einander senkrechte Ebenen giebt, in welchen die Tangentialspannungen für diesen Punkt = Null und zu denen also die betreffenden Spannungen p senkrecht sind. Diese Spannungen, deren Richtungen mit den Hauptaxen der vorgenannten Fläche 2ten Grades zusammenfallen, heissen die Hauptspannungen für den betreffenden Punkt und seien mit

$$\sigma_1 \quad \sigma_2 \quad \sigma_3$$

bezeichnet.

217. — Die Normalspannung nach der Richtung AB, welche mit den Richtungen der Hauptspannungen die Winkel α, β, γ bildet, ist jetzt:

$$\sigma = \sigma_1 \cos^2\alpha + \sigma_2 \cos^2\beta + \sigma_3 \cos^2\gamma$$

und die Gleichung der Fläche 2ten Grades, deren in AB fallender Halbmesser $= \frac{1}{\sqrt{\pm\sigma}}$ ist, wird für die Richtungen der Hauptspannungen als Coordinatenaxen:

$$\pm 1 = \sigma_1 \xi^2 + \sigma_2 \eta^2 + \sigma_3 \zeta^2.$$

Sind alle Hauptspannungen positiv, so gilt hierbei das Zeichen +, sind sie negativ, so gilt das Zeichen −; in beiden Fällen ist die Fläche ein Ellipsoid und σ ist nach jeder Richtung im ersten Falle positiv, im zweiten Falle negativ.

Sind aber die Hauptspannungen theils positiv, theils negativ, so gelten beide Vorzeichen, und die den beiden Gleichungen entsprechenden Flächen sind 2 Hyperboloide, welche sich gegenseitig ergänzen und durch einen gemeinschaftlichen Asymptotenkegel mit der Gleichung:

$$0 = \sigma_1 \xi^2 + \sigma_2 \eta^2 + \sigma_3 \zeta^2$$

von einander getrennt sind; die Normalspannung σ ist positiv, negativ oder Null, je nachdem die Richtung AB das eine oder das andere Hyperboloid trifft oder aber in der Kegelfläche liegt.

In allen Fällen ist unter den 3 Hauptspannungen die grösste positive und die kleinste negative (dem Absolutwerthe nach folglich auch grösste)

Normalspannung enthalten, welche im Punkte A nach irgend einer Richtung stattfindet.

218. — Mit $\tau_x = \tau_y = \tau_z = 0$ wird auch (Nr. 213):

$$P_x = P_y = P_z = 0$$

und es fallen sonach die Hauptaxen des in Nr. 214 besprochenen Ellipsoids mit den Richtungen der Hauptspannungen zusammen. Auf letztere als Coordinatenaxen bezogen wird die Gleichung jenes Ellipsoids:

$$1 = \sigma_1{}^2 \xi^2 + \sigma_2{}^2 \eta^2 + \sigma_3{}^2 \zeta^2$$

und für die Spannung p in der Ebene, deren Normale die Winkel α, β, γ mit den Richtungen der Hauptspannungen bildet, erhält man die Gleichung:

$$p^2 = \sigma_1{}^2 \cos^2\alpha + \sigma_2{}^2 \cos^2\beta + \sigma_3{}^2 \cos^2\gamma.$$

219. — Durch das Ellipsoid

$$1 = \sigma_1{}^2 \xi^2 + \sigma_2{}^2 \eta^2 + \sigma_3{}^2 \zeta^2$$

wird nur die Grösse der Spannung p geometrisch dargestellt, welche im Punkte A irgend einer Ebene F stattfindet, deren Normale AB die Winkel α, β, γ mit den zu Coordinatenaxen genommenen Richtungen der Hauptspannungen bildet, und selbst wenn die Fläche

$$\pm 1 = \sigma_1 \xi^2 + \sigma_2 \eta^2 + \sigma_3 \zeta^2$$

zur Darstellung der Normalspannung σ nach der Richtung AB zu Hülfe genommen wird, so ist dadurch die Richtung AC der Spannung p noch nicht bestimmt, sondern nur ihr Winkel $\varphi = arc \cos \dfrac{\sigma}{p}$ mit der Richtung AB.

Zur geometrischen Darstellung von p nach Grösse und Richtung zugleich dient die gleichfalls auf die Richtungen der Hauptspannungen als Coordinatenaxen bezogene Fläche:

$$\pm 1 = \frac{\xi^2}{\sigma_1} + \frac{\eta^2}{\sigma_2} + \frac{\zeta^2}{\sigma_3},$$

welche einem Ellipsoide oder zwei sich ergänzenden Hyperboloiden entspricht, je nachdem die Hauptspannungen gleiche oder ungleiche Zeichen haben. Ist nämlich C (Coordinaten: ξ, η, ζ) der Durchschnittspunkt dieser Fläche mit der Richtung AC (Winkel mit den Axen $= \lambda$, μ, ν), F_1 die Berührungsebene im Punkte C, B der Schnittpunkt von F_1 mit AB, ferner

$$AC = r,\ AB = s,\ BC = t,$$

so ist:

$$\xi = r \cos\lambda;\quad \eta = r\cos\mu;\quad \zeta = r\cos\nu$$

und nach dem Satze sub Nr. 212:

$$p\cos\lambda = \sigma_1 \cos\alpha;\quad p\cos\mu = \sigma_2 \cos\beta;\quad p\cos\nu = \sigma_3\cos\gamma.$$

Sind also a, b, c die Winkel, welche die Normale der Fläche im Punkte C mit den Axen bildet, so verhält sich:

$$\cos a : \cos b : \cos c = \frac{\xi}{\sigma_1} : \frac{\eta}{\sigma_2} : \frac{\zeta}{\sigma_3}$$
$$= \cos\alpha : \cos\beta : \cos\gamma,$$

woraus folgt, dass F_1 parallel F und dass mithin die Spannung p nach dem der Spannungsebene F conjugirten Durchmesser der obigen Fläche gerichtet ist.

Durch Substitution in der Gleichung der Fläche erhält man ferner:

$$\pm 1 = r^2 \left(\frac{\cos^2 \lambda}{\sigma_1} + \frac{\cos^2 \mu}{\sigma_2} + \frac{\cos^2 \nu}{\sigma_3} \right) = \frac{r^2}{p} \cos\varphi$$

und mit $\pm r\cos\varphi = AB = s$:

$$p = rs.$$

Für die Normalspannung σ und die Tangentialspannung τ hat man:

$$\sigma = p\cos\varphi = \pm p\frac{s}{r} = \pm s^2$$

$$\tau = p\sin\varphi = \ p\frac{t}{r} = st.$$

220. — Zur Bestimmung der Hauptspannungen nach Grösse und Richtung vermittels der auf beliebig gewählte Axen bezogenen Spannungen:

$$\sigma_x \quad \sigma_y \quad \sigma_z \quad \tau_x \quad \tau_y \quad \tau_z$$

dient die Erwägung, dass in den Gleichungen (II)

$$\lambda = \alpha, \quad \mu = \beta, \quad \nu = \gamma$$

wird, wenn $p = \sigma$ eine Hauptspannung ist. So erhält man die Gleichungen:

$$\begin{aligned} (\sigma_x - \sigma)\cos\alpha + \tau_z\cos\beta + \tau_y\cos\gamma &= 0 \\ \tau_z\cos\alpha + (\sigma_y - \sigma)\cos\beta + \tau_x\cos\gamma &= 0 \\ \tau_y\cos\alpha + \tau_x\cos\beta + (\sigma_z - \sigma)\cos\gamma &= 0, \end{aligned}$$

woraus folgt:

$$\begin{aligned} &\cos\alpha : \cos\beta : \cos\gamma = \\ &= (\sigma_y-\sigma)(\sigma_z-\sigma) - \tau_x^2 : \tau_x\tau_y - \tau_z(\sigma_z-\sigma) : \tau_z\tau_x - \tau_y(\sigma_y-\sigma) \\ &= \tau_x\tau_y - \tau_z(\sigma_z-\sigma) : (\sigma_z-\sigma)(\sigma_x-\sigma) - \tau_y^2 : \tau_y\tau_z - \tau_x(\sigma_x-\sigma) \\ &= \tau_z\tau_x - \tau_y(\sigma_y-\sigma) : \tau_y\tau_z - \tau_x(\sigma_x-\sigma) : (\sigma_x-\sigma)(\sigma_y-\sigma) - \tau_z^2. \end{aligned}$$

Die Substitution der ersten, zweiten oder dritten dieser Verhältnisswerthe für $\cos\alpha$, $\cos\beta$ $\cos\gamma$ in der ersten resp. zweiten oder dritten der obigen 3 Gleichungen liefert die cubische Gleichung:

$$(\sigma_x-\sigma)(\sigma_y-\sigma)(\sigma_z-\sigma) - (\sigma_x-\sigma)\tau_x^2 - (\sigma_y-\sigma)\tau_y^2 - (\sigma_z-\sigma)\tau_z^2 + \\ + 2\tau_x\tau_y\tau_z = 0 \quad \ldots \quad \text{(III)},$$

deren nothwendig reelle Wurzeln

$$\sigma = \sigma_1; \quad \sigma = \sigma_2; \quad \sigma = \sigma_3$$

den Hauptspannungen gleich sind. Zur Bestimmung der Winkel α, β, γ irgend einer dieser Hauptspannungen mit den Coordinatenaxen kann jedes der obigen 3 Doppelverhältnisse:

$$\cos\alpha : \cos\beta : \cos\gamma$$

in Verbindung mit der Gleichung:

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$$

dienen, indem man für σ den Werth der betreffenden Hauptspannung substituirt. Uebersichtlicher gestaltet sich die Bestimmung dieser Winkel, wenn man aus jenen Doppelverhältnissen durch Combination noch die folgenden ableitet:

$$\cos^2\alpha : \cos^2\beta : \cos^2\gamma =$$
$$= (\sigma_y-\sigma)(\sigma_z-\sigma) - \tau_x^2 : (\sigma_z-\sigma)(\sigma_x-\sigma) - \tau_y^2 : (\sigma_x-\sigma)(\sigma_y-\sigma) - \tau_z^2$$

und $\cos\beta\cos\gamma : \cos\gamma\cos\alpha : \cos\alpha\cos\beta =$

$$= \tau_y\tau_z - \tau_x(\sigma_x-\sigma) : \tau_z\tau_x - \tau_y(\sigma_y-\sigma) : \tau_x\tau_y - \tau_z(\sigma_z-\sigma).$$

Aus ersterem folgt mit

$$n = (\sigma_y-\sigma)(\sigma_z-\sigma) + (\sigma_z-\sigma)(\sigma_x-\sigma) + (\sigma_x-\sigma)(\sigma_y-\sigma) - \tau_x^2 - \tau_y^2 - \tau_z^2$$

$$\cos\alpha = \pm\sqrt{\frac{(\sigma_y-\sigma)(\sigma_z-\sigma) - \tau_x^2}{n}}$$

$$\cos\beta = \pm\sqrt{\frac{(\sigma_z-\sigma)(\sigma_x-\sigma) - \tau_y^2}{n}}$$

$$\cos\gamma = \pm\sqrt{\frac{(\sigma_x-\sigma)(\sigma_y-\sigma) - \tau_z^2}{n}}.$$

Bei einem dieser 3 Wurzelwerthe kann das Vorzeichen beliebig genommen werden, wonach dann die Zeichen der beiden anderen durch das Doppelverhältniss der Cosinus-Producte oder durch die ursprünglichen Doppelverhältnisse der einfachen Cosinus bestimmt sind.

B. Die Ausdehnungen und Verschiebungen.

221. — Es seien im Punkte A (Coordinaten: x, y, z):

ε_x $\quad\varepsilon_y\quad$ ε_z die Ausdehnungen nach den Richtungen AX $\quad AY\quad$ AZ;

γ_{xy} und γ_{xz}; γ_{yz} und γ_{yx}; γ_{zx} und γ_{zy} die Verschiebungen der Ebenen . . . . YAZ $\quad ZAX\quad$ XAY nach den Richtungen AY und AZ; AZ und AX; AX und AY.

Die letzteren sind zu 2 und 2 einander gleich (cf. Nr. 8), und zwar

$$\gamma_{yz} = \gamma_{zy};\ \gamma_{zx} = \gamma_{xz};\ \gamma_{xy} = \gamma_{yx}$$

= beziehungsweise den kleinen Aenderungen der ursprünglich rechten Winkel der vorgenannten Ebenen an den Kanten AX, AY, AZ; in der Folge soll deshalb kürzer

$$\gamma_{yz} = \gamma_{zy} \text{ mit } \gamma_x$$
$$\gamma_{zx} = \gamma_{xz} \text{ mit } \gamma_y$$
$$\gamma_{xy} = \gamma_{yx} \text{ mit } \gamma_z$$

bezeichnet werden.

Sind ferner ξ, η, ζ die mit der Deformation verbundenen kleinen Aenderungen der Coordinaten x, y, z des Punktes A, so ist:

$$\left.\begin{aligned}\varepsilon_x &= \frac{d\xi}{dx};\ \gamma_x = \frac{d\eta}{dz} + \frac{d\zeta}{dy}\\ \varepsilon_y &= \frac{d\eta}{dy};\ \gamma_y = \frac{d\zeta}{dx} + \frac{d\xi}{dz}\\ \varepsilon_z &= \frac{d\zeta}{dz};\ \gamma_z = \frac{d\xi}{dy} + \frac{d\eta}{dx}\end{aligned}\right\} \ldots\ldots (IV).$$

In Betreff der Verschiebungen cf. Nr. 201. Was die Ausdehnungen betrifft, so ist, wenn auf AX die unendlich kleine Länge $AA_1 = dx$ abgetragen wird, $\frac{d\xi}{dx}dx$ die relative Verrückung von A_1 gegen A nach der Richtung AX, d. h. die totale Ausdehnung, mithin $\frac{d\xi}{dx}$ die specifische Ausdehnung von AA_1.

222. — Durch die 6 Grössen

$$\varepsilon_x \quad \varepsilon_y \quad \varepsilon_z \quad \gamma_x \quad \gamma_y \quad \gamma_z$$

lässt sich die Ausdehnung ε im Punkte A nach der Richtung AB, welche mit den Axen die Winkel α, β, γ bildet, ausdrücken. Ist nämlich B ein Punkt dieser Richtung mit den Coordinaten

$$x + dx, \quad y + dy, \quad z + dz,$$

so sind deren Aenderungen:

$$\xi_1 = \xi + \frac{d\xi}{dx}dx + \frac{d\xi}{dy}dy + \frac{d\xi}{dz}dz$$

$$\eta_1 = \eta + \frac{d\eta}{dx}dx + \frac{d\eta}{dy}dy + \frac{d\eta}{dz}dz$$

$$\zeta_1 = \zeta + \frac{d\zeta}{dx}dx + \frac{d\zeta}{dy}dy + \frac{d\zeta}{dz}dz,$$

während die ursprüngliche Länge $AB = ds$ in $ds\,(1 + \varepsilon)$ übergeht. Aus den Gleichungen:

$$ds^2(1+\varepsilon)^2 = (dx + \xi_1 - \xi)^2 + (dy + \eta_1 - \eta)^2 + (dz + \zeta_1 - \zeta)^2$$
$$\text{und } ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2$$

folgt dann bei Vernachlässigung der kleinen Grössen von der 2ten Ordnung:

$$\varepsilon\, ds^2 = (\xi_1 - \xi)\,dx + (\eta_1 - \eta)\,dy + (\zeta_1 - \zeta)\,dz$$

und daraus durch Einsetzung der Werthe von ξ_1, η_1, ζ_1, ferner mit

$$\cos\alpha = \frac{dx}{ds}; \quad \cos\beta = \frac{dy}{ds}; \quad \cos\gamma = \frac{dz}{ds}$$

und mit Rücksicht auf die Gleichungen (IV):

$$\varepsilon = \varepsilon_x \cos^2\alpha + \varepsilon_y \cos^2\beta + \varepsilon_z \cos^2\gamma + \gamma_x \cos\beta\cos\gamma + \gamma_y \cos\gamma\cos\alpha + \gamma_z \cos\alpha\cos\beta.$$

223. — Dieser Ausdruck von ε hat in Beziehung auf α, β, γ dieselbe Form wie der Ausdruck von σ sub Nr. 215, gestattet also auch ähnliche Folgerungen, wie jener. Insbesondere ergiebt sich zunächst, dass für jeden Punkt die Summe der Ausdehnungen nach je 3 sich rechtwinkelig schneidenden Richtungen constant ist.

Zugleich hat hier diese constante Summe eine bemerkenswerthe Bedeutung. Da nämlich der Inhalt des Parallelepipedums $dx\,dy\,dz$ nur durch die Aenderungen der Abstände, nicht durch die gegenseitigen Verschiebungen seiner parallelen Seitenflächen sich ändert, so ist der geänderte Inhalt bei Vernachlässigung kleiner Grössen höherer Ordnung:

$$dx\,(1 + \varepsilon_x) \,.\, dy\,(1 + \varepsilon_y) \,.\, dz\,(1 + \varepsilon_z) = dx\,dy\,dz\,(1 + \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z),$$

und es hat also die constante Summe

$$\varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z$$

die Bedeutung des Volumenausdehnungs-Coefficienten in dem betreffenden Punkte.

224. — Auch lässt sich ε wie σ durch den positiv oder negativ genommenen reciproken Werth des Quadrats des Halbmessers einer Fläche 2ten Grades geometrisch darstellen (Nr. 216). Wird diese Fläche auf ihre Hauptaxen als Coordinatenaxen bezogen, so verschwinden aus ihrer Gleichung die Glieder mit den Producten der Coordinaten, wird also

$$\gamma_x = \gamma_y = \gamma_z = 0;$$

es giebt sonach in jedem Punkte 3 zu einander senkrechte Ebenen, deren Verschiebungen für diesen Punkt $= 0$ sind und welche natürlich dieselben sind wie diejenigen Ebenen, in welchen

$$\tau_x = \tau_y = \tau_z = 0$$

ist. Die Ausdehnungen nach den zu diesen Ebenen senkrechten, d. h. nach den Richtungen der Hauptspannungen heissen Hauptausdehnungen und seien mit

$$\varepsilon_1 \quad \varepsilon_2 \quad \varepsilon_3$$

bezeichnet; unter ihnen befindet sich die grösste und die kleinste Ausdehnung (algebraisch verstanden), welche in dem betreffenden Punkte nach irgend einer Richtung stattfindet.

Nach einer Richtung, welche mit diesen 3 ausgezeichneten Richtungen die Winkel α, β, γ bildet, ist:

$$\varepsilon = \varepsilon_1 \cos^2\alpha + \varepsilon_2 \cos^2\beta + \varepsilon_3 \cos^2\gamma.$$

225. — Zur Bestimmung der Hauptausdehnungen nach Grösse und Richtung vermittels der auf beliebig gewählte Axen bezogenen Ausdehnungen und Verschiebungen

$$\varepsilon_x \quad \varepsilon_y \quad \varepsilon_z \quad \gamma_x \quad \gamma_y \quad \gamma_z$$

dient die Erwägung, dass eine Hauptausdehnung als ein Maximal- oder Minimalwerth von ε charakterisirt werden kann, welcher sonach unverändert bleibt, wenn die Richtung unendlich wenig geändert wird. Setzt man also in der Gleichung für ε sub Nr. 222

$$\varepsilon(\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma) \text{ für } \varepsilon$$

und differenzirt die Gleichung nach einander in Beziehung auf α, β und γ, so wird, wenn man dabei ε als Constante behandelt, dieselbe ebendadurch als eine Hauptausdehnung charakterisirt, für welche so die folgenden 3 Gleichungen erhalten werden:

$$2(\varepsilon_x - \varepsilon)\cos\alpha + \gamma_z \cos\beta + \gamma_y \cos\gamma = 0$$
$$\gamma_z \cos\alpha + 2(\varepsilon_y - \varepsilon)\cos\beta + \gamma_x \cos\gamma = 0$$
$$\gamma_y \cos\alpha + \gamma_x \cos\beta + 2(\varepsilon_z - \varepsilon)\cos\gamma = 0.$$

Sie unterscheiden sich von den Gleichungen zur Bestimmung der Hauptspannungen (Nr. 220) nur dadurch, dass 2ε an die Stelle von σ und γ an die Stelle von τ getreten ist; durch dieselben Substitutionen erhält man deshalb auch für ε die cubische Gleichung:

$$4(\varepsilon_x-\varepsilon)(\varepsilon_y-\varepsilon)(\varepsilon_z-\varepsilon)-(\varepsilon_x-\varepsilon)\gamma_x{}^2-(\varepsilon_y-\varepsilon)\gamma_y{}^2-(\varepsilon_z-\varepsilon)\gamma_z{}^2+$$
$$+\gamma_x\gamma_y\gamma_z=0 \quad \ldots \quad \text{(IIIa)}$$

sowie die dortigen entsprechenden Ausdrücke von $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ *).

C. Beziehungen zwischen den Spannungen, Ausdehnungen und Verschiebungen.

226. — Die in diesem Capitel unter **A.** und **B.** dargestellten Gesetze sind unabhängig von der physikalischen Beschaffenheit des Körpers; die Beziehungen aber, welche zwischen den Normal- und Tangentialspannungen einerseits und den Ausdehnungen und Verschiebungen anderseits stattfinden, sind wesentlich durch die Molekularbeschaffenheit des Körpers bedingt. Hier werden nur isotrope Körper vorausgesetzt, weil das Holz als dasjenige unter den technisch verwendeten Materialien, welches auch nicht näherungsweise als isotrop gelten kann, seiner discontinuirlichen Molekularbeschaffenheit wegen überhaupt kaum Gegenstand von allgemeinen Untersuchungen der nachfolgenden Art sein kann, sondern vielmehr bei seiner verschiedenartigen Verwendung als Constructionsmaterial den betreffenden Rechnungen nur solche Erfahrungswerthe mit Sicherheit zu Grunde zu legen sind, welche aus Versuchen unter Verhältnissen abgeleitet wurden, die denen des betreffenden Falles der Anwendung ganz analog sind.

Wenn auf einen solchen isotropen Körper nur nach einer Richtung ein äusserer Zug (algebraisch verstanden, so dass ein negativer Zug einen Druck bedeutet) ausgeübt wird, so ist die dadurch nach dieser Richtung, etwa nach der Richtung der x-Axe, hervorgerufene Normalspannung eine Hauptspannung $=\sigma_1$ und zwar $\sigma_1 = E\varepsilon_x$, sofern die Stärke des Zuges eine solche Grenze nicht überschreitet, dass das Verhältniss der Spannung zur entsprechenden Ausdehnung ε_x dem Elasticitätsmodul E gleich gesetzt werden darf (Nr. 11); zugleich ist damit nach jeder zur Zugrichtung senkrechten Richtung eine Ausdehnung $=-\frac{\varepsilon_x}{m}$ verbunden.*)

Ebenso ist für einen nur nach der Richtung der y-Axe ausgeübten Zug: $\sigma_2 = E\varepsilon_y$ und nach jeder dazu senkrechten Richtung die Ausdehnung

*) Dieselbe Betrachtnng, welche hier zur Bestimmung der Hauptausdehnungen benutzt wurde, hätte auch in Nr. 220 in Betreff der Hauptspannungen zu Grunde gelegt werden können, und würde dann die Analogie der Gleichungen für $\sigma_1\sigma_2\sigma_3$ und $\varepsilon_1\varepsilon_2\varepsilon_3$ schon aus der Analogie der Gleichungen für σ und ε sub Nr. 215 und Nr. 222 haben gefolgert werden können. Sie kann auch so ausgedrückt werden, dass ε an die Stelle von σ und $\frac{1}{2}\gamma$ an die Stelle von τ tritt.

*) Ueber den Werth von m cf. Nr. 169.

$= -\frac{\varepsilon_y}{m}$, sowie für einen nur nach der Richtung der z-Axe ausgeübten Zug: $\sigma_3 = E\varepsilon_z$ und nach jeder dazu senkrechten Richtung die Ausdehnung $= -\frac{\varepsilon_z}{m}$.

Finden die genannten 3 Züge gleichzeitig statt, so bleiben die Spannungen σ_1, σ_2, σ_3 Hauptspannungen, die Hauptausdehnungen aber werden:

$$\varepsilon_1 = \varepsilon_x - \frac{\varepsilon_y + \varepsilon_z}{m}, \text{ analog } \varepsilon_2 \text{ und } \varepsilon_3,$$

woraus zur Berechnung der Hauptausdehnungen durch die Hauptspannungen die Gleichungen folgen:

$$\left.\begin{aligned} E\varepsilon_1 &= \sigma_1 - \frac{\sigma_2 + \sigma_3}{m} \\ E\varepsilon_2 &= \sigma_2 - \frac{\sigma_3 + \sigma_1}{m} \\ E\varepsilon_3 &= \sigma_3 - \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{m} \end{aligned}\right\} \ldots (\mathrm{V}).$$

Zur umgekehrten Berechnung der Hauptspannungen durch die Hauptausdehnungen hat man nur diese Gleichungen nach σ_1, σ_2, σ_3 aufzulösen und findet so, wenn der Volumenausdehnungs-Coefficient

$$\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 = \mu$$

und die Constante

$$\frac{1}{2}\,\frac{m}{m+1}\,E = G$$

gesetzt wird*):

$$\sigma_1 = 2G\left(\varepsilon_1 + \frac{\mu}{m-2}\right)$$
$$\sigma_2 = 2G\left(\varepsilon_2 + \frac{\mu}{m-2}\right)$$
$$\sigma_3 = 2G\left(\varepsilon_3 + \frac{\mu}{m-2}\right).$$

227. — Diese Gleichungen gelten aber nicht nur für die Richtungen der Hauptspannungen, sondern für beliebige 3 zu einander senkrechte Richtungen; denn für eine beliebige Richtung, welche mit denen der Hauptspannungen die Winkel α, β, γ bildet, ist

$$\sigma = \sigma_1 \cos^2\alpha + \sigma_2 \cos^2\beta + \sigma_3 \cos^2\gamma \text{ nach Nr. 217}$$
$$= 2G\left(\varepsilon_1 \cos^2\alpha + \varepsilon_2 \cos^2\beta + \varepsilon_3 \cos^2\gamma + \frac{\mu}{m-2}\right) \text{ nach Nr. 226}$$
$$= 2G\left(\varepsilon + \frac{\mu}{m-2}\right) \text{ nach Nr. 224;}$$

*) Dass dieses G der Schubelasticitätsmodul ist, wie schon in Nr. 168 durch eine besondere Betrachtung gefunden wurde, braucht hier nicht als bekannt vorausgesetzt zu werden, wird sich vielmehr aus dieser allgemeineren Untersuchung von selbst ergeben: Nr. 228.

insbesondere also auch für beliebige rechtwinkelige Coordinatenaxen:

$$\begin{array}{l|l} \sigma_x = 2G\left(\varepsilon_x + \frac{\mu}{m-2}\right) & E\varepsilon_x = \sigma_x - \frac{\sigma_y + \sigma_z}{m} \\ \sigma_y = 2G\left(\varepsilon_y + \frac{\mu}{m-2}\right) & E\varepsilon_y = \sigma_y - \frac{\sigma_z + \sigma_x}{m} \\ \sigma_z = 2G\left(\varepsilon_z + \frac{\mu}{m-2}\right) & E\varepsilon_z = \sigma_z - \frac{\sigma_x + \sigma_y}{m} \end{array}$$
$$\mu = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z.$$

Mit $\sigma_y = \sigma_z = 0$ folgt hieraus: $\varepsilon_y = \varepsilon_z = -\frac{1}{m}\varepsilon_x$ als Verallgemeinerung des Fundamentalgesetzes, von welchem in Nr. 226 ausgegangen wurde für den besonderen Fall, dass σ_x eine Hauptspannung ist.

228. — Die Bedeutung der Constanten G ergiebt sich daraus, dass die Normalspannung σ nach einer Richtung, welche mit den beliebigen Coordinatenaxen die Winkel α, β, γ bildet,

$$\sigma = 2G\left(\varepsilon + \frac{\mu}{m-2}\right) \text{ nach Nr. 222 auch}$$
$$= 2G\left[\varepsilon_x \cos^2\alpha + \varepsilon_y \cos^2\beta + \varepsilon_z \cos^2\gamma + \gamma_x \cos\beta\cos\gamma + \gamma_y \cos\gamma\cos\alpha \right.$$
$$\left. + \gamma_z \cos\alpha\cos\beta + \frac{\mu}{m-2}(\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma)\right]$$

ist, während nach Nr. 215:

$$\sigma = \sigma_x\cos^2\alpha + \sigma_y\cos^2\beta + \sigma_z\cos^2\gamma + 2\tau_x\cos\beta\cos\gamma + 2\tau_y\cos\gamma\cos\alpha$$
$$+ 2\tau_z\cos\alpha\cos\beta$$

ist. Aus der Vergleichung beider Ausdrücke von σ ergiebt sich mit Rücksicht auf Nr. 227:

$$(G\gamma_x - \tau_x)\cos\beta\cos\gamma + (G\gamma_y - \tau_y)\cos\gamma\cos\alpha + (G\gamma_z - \tau_z)\cos\alpha\cos\beta = 0$$

für jede Richtung α, β, γ, also:

$$\tau_x = G\gamma_x;\quad \tau_y = G\gamma_y;\quad \tau_z = G\gamma_z,$$

wodurch G als der Schubelasticitätsmodul charakterisirt ist.

Mit Rücksicht auf die Gleichungen (IV) lassen sich schliesslich die Spannungen $\sigma_x\ \sigma_y\ \sigma_z\ \tau_x\ \tau_y\ \tau_z$ folgendermassen durch die Coordinatenänderungen $\xi\ \eta\ \zeta$ ausdrücken:

$$\left.\begin{array}{l} \sigma_x = 2G\left(\frac{d\xi}{dx} + \frac{\mu}{m-2}\right);\quad \tau_x = G\left(\frac{d\eta}{dz} + \frac{d\zeta}{dy}\right) \\ \sigma_y = 2G\left(\frac{d\eta}{dy} + \frac{\mu}{m-2}\right);\quad \tau_y = G\left(\frac{d\zeta}{dx} + \frac{d\xi}{dz}\right) \\ \sigma_z = 2G\left(\frac{d\zeta}{dz} + \frac{\mu}{m-2}\right);\quad \tau_z = G\left(\frac{d\xi}{dy} + \frac{d\eta}{dx}\right) \\ \mu = \frac{d\xi}{dx} + \frac{d\eta}{dy} + \frac{d\zeta}{dz};\quad G = \frac{1}{2}\frac{m}{m+1}E \end{array}\right\} \ldots \text{(VI).}$$