

Badische Landesbibliothek Karlsruhe

Digitale Sammlung der Badischen Landesbibliothek Karlsruhe

Die Festigkeitslehre mit besonderer Rücksicht auf die Bedürfnisse des Maschinenbaues

Grashof, Franz

Berlin, 1866

Siebentes Capitel Zusammengesetzte Elasticität und Festigkeit

[urn:nbn:de:bsz:31-274080](https://nbn-resolving.org/urn:nbn:de:bsz:31-274080)

SIEBENTES CAPITEL.

Zusammengesetzte Elasticität und Festigkeit.

229. — Die in Nr. 5 bezeichnete allgemeine Hauptaufgabe der Festigkeitslehre erfordert die Ermittlung der Maximalwerthe von ϵ' und ϵ'' , d. h. der grössten Absolutwerthe der positiven und der negativen Ausdehnung, welche in einem beliebigen Punkte eines Körpers nach irgend welchen Richtungen stattfinden, wenn die Gestalt und die Art der Belastung des Körpers gegeben sind. Diese Ermittlung ist (cf. Nr. 224) enthalten in der Bestimmung der 3 Hauptausdehnungen für den betreffenden Punkt, welche im Allgemeinen auf folgende Weise gefunden werden.

Die Ausdrücke (Nr. 228):

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x &= 2G \left(\frac{d\xi}{dx} + \frac{\mu}{m-2} \right); & \tau_x &= G \left(\frac{d\eta}{dz} + \frac{d\zeta}{dy} \right) \\ \sigma_y &= 2G \left(\frac{d\eta}{dy} + \frac{\mu}{m-2} \right); & \tau_y &= G \left(\frac{d\zeta}{dx} + \frac{d\xi}{dz} \right) \\ \sigma_z &= 2G \left(\frac{d\zeta}{dz} + \frac{\mu}{m-2} \right); & \tau_z &= G \left(\frac{d\xi}{dy} + \frac{d\eta}{dx} \right) \end{aligned} \right\} \dots \dots \text{(VI)}$$

worin $\mu = \frac{d\xi}{dx} + \frac{d\eta}{dy} + \frac{d\zeta}{dz}$

und $G = \frac{1}{2} \frac{m}{m+1} E$

ist, werden in die Gleichungen (Nr. 211):

$$\left. \begin{aligned} \frac{d\sigma_x}{dx} + \frac{d\tau_y}{dz} + \frac{d\tau_z}{dy} + X &= 0 \\ \frac{d\sigma_y}{dy} + \frac{d\tau_x}{dz} + \frac{d\tau_z}{dx} + Y &= 0 \\ \frac{d\sigma_z}{dz} + \frac{d\tau_x}{dy} + \frac{d\tau_y}{dx} + Z &= 0 \end{aligned} \right\} \dots \dots \text{(I)}$$

eingeführt, welche dadurch 3 simultane partielle Differentialgleichungen 2ter Ordnung für die Functionen ξ, η, ζ der ursprünglichen Coordinaten x, y, z des betrachteten beliebigen Körperpunktes werden. Durch die Integration dieser Gleichungen werden Constante oder vielmehr im Allgemeinen Functionen eingeführt, welche nur in Beziehung auf diejenige Veränderliche constant sind, d. h. diejenige Veränderliche nicht enthalten, nach welcher

eben integrirt wird, und diese Functionen sind durch die Oberflächenbedingungen bestimmt, nämlich theils dadurch, dass die Spannungskomponenten

$$p \cos \lambda, p \cos \mu, p \cos \nu$$

in den Gleichungen (Nr. 212):

$$\left. \begin{aligned} p \cos \lambda &= \sigma_x \cos \alpha + \tau_y \cos \gamma + \tau_z \cos \beta \\ p \cos \mu &= \sigma_y \cos \beta + \tau_x \cos \alpha + \tau_z \cos \gamma \\ p \cos \nu &= \sigma_z \cos \gamma + \tau_x \cos \beta + \tau_y \cos \alpha \end{aligned} \right\} \dots (II)$$

für die Punkte der Körperoberfläche gegebene Werthe haben, theils dadurch, dass ξ, η, ζ selbst für gewisse Punkte gegeben, insbesondere = Null gegeben sind (feste Unterstützungspunkte) oder auch zu den betreffenden Pressungen in gewissen Beziehungen stehen (nachgiebige, elastische Unterlagen).

Wenn ξ, η, ζ so als Functionen von x, y, z gefunden sind, findet man entweder

$$\sigma_x \quad \sigma_y \quad \sigma_z \quad \tau_x \quad \tau_y \quad \tau_z$$

nach (VI), dann die Hauptspannungen als Wurzeln der Gleichung (Nr. 220):

$$(\sigma_x - \sigma)(\sigma_y - \sigma)(\sigma_z - \sigma) - (\sigma_x - \sigma)\tau_x^2 - (\sigma_y - \sigma)\tau_y^2 - (\sigma_z - \sigma)\tau_z^2 + 2\tau_x\tau_y\tau_z = 0 \dots (III)$$

und endlich die Hauptausdehnungen (Nr. 226):

$$\left. \begin{aligned} E \varepsilon_1 &= \sigma_1 - \frac{\sigma_2 + \sigma_3}{m} \\ E \varepsilon_2 &= \sigma_2 - \frac{\sigma_3 + \sigma_1}{m} \\ E \varepsilon_3 &= \sigma_3 - \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{m} \end{aligned} \right\} \dots (V),$$

oder auch die Ausdehnungen und Verschiebungen

$$\varepsilon_x \quad \varepsilon_y \quad \varepsilon_z \quad \gamma_x \quad \gamma_y \quad \gamma_z$$

mittels der Gleichungen (Nr. 221):

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{d\xi}{dx}; \quad \gamma_x = \frac{d\eta}{dz} + \frac{d\zeta}{dy} \\ \varepsilon_y &= \frac{d\eta}{dy}; \quad \gamma_y = \frac{d\zeta}{dx} + \frac{d\xi}{dz} \\ \varepsilon_z &= \frac{d\zeta}{dz}; \quad \gamma_z = \frac{d\xi}{dy} + \frac{d\eta}{dx} \end{aligned} \right\} \dots (IV)$$

und dann die Hauptausdehnungen als Wurzeln der Gleichung (Nr. 225):

$$4(\varepsilon_x - \varepsilon)(\varepsilon_y - \varepsilon)(\varepsilon_z - \varepsilon) - (\varepsilon_x - \varepsilon)\gamma_x^2 - (\varepsilon_y - \varepsilon)\gamma_y^2 - (\varepsilon_z - \varepsilon)\gamma_z^2 + \gamma_x\gamma_y\gamma_z = 0 \dots (III, a).$$

230. — Von besonderen Fällen sind namentlich diejenigen bemerkenswerth, in welchen die Gleichung (III) oder (III, a) sich in eine lineare und eine quadratische Gleichung zerlegen lässt. Dies ist erstlich dann der Fall, wenn für eine der Coordinatenaxen die Tangentialspannung = Null ist und für die beiden anderen die Normalspannungen gleich sind, wenn also z. B.

$$\tau_x = 0 \text{ und } \sigma_y = \sigma_z$$

ist. Dann zerfällt Gleichung (III) in die beiden Gleichungen:

$$\sigma_y - \sigma = 0 \text{ und } (\sigma_x - \sigma)(\sigma_y - \sigma) - \tau_y^2 - \tau_z^2 = 0,$$

woraus folgt, wenn

$$\tau = \sqrt{\tau_y^2 + \tau_z^2}$$

gesetzt wird: $\sigma_1 = \sigma_y$

$$\left. \begin{array}{l} \sigma_2 \\ \sigma_3 \end{array} \right\} = \frac{\sigma_x + \sigma_y \pm \sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau^2}}{2};$$

das obere Zeichen der Wurzel entspricht σ_2 , das untere σ_3 . Bildet ferner die Richtung

der ersten Hauptspannung σ_1 die Winkel $\alpha_1 \quad \beta_1 \quad \gamma_1$

„ zweiten „ „ σ_2 „ „ „ $\alpha_2 \quad \beta_2 \quad \gamma_2$

„ dritten „ „ σ_3 „ „ „ $\alpha_3 \quad \beta_3 \quad \gamma_3$

mit den Axen der x, y, z , so findet man nach Nr. 220:

$$\cos \alpha_1 = 0 \quad \cos \beta_1 = \frac{\tau_y}{\tau} \quad \cos \gamma_1 = -\frac{\tau_z}{\tau}$$

$$\cos \left(\frac{\alpha_2}{\alpha_3} \right) = \frac{\sigma - \sigma_y}{\sqrt{n}}; \quad \cos \left(\frac{\beta_2}{\beta_3} \right) = \frac{\tau_x}{\sqrt{n}}; \quad \cos \left(\frac{\gamma_2}{\gamma_3} \right) = \frac{\tau_y}{\sqrt{n}};$$

die letzteren Ausdrücke, worin

$$n = (\sigma - \sigma_y)^2 + \tau^2$$

ist, liefern die Cosinus der Richtungswinkel der zweiten oder dritten Hauptspannung, jenachdem darin $\sigma = \sigma_2$ oder $\sigma = \sigma_3$ gesetzt wird.

Es lässt sich hieraus folgern, dass die erste Hauptspannung σ_1 parallel der Ebene YZ senkrecht zur resultierenden Tangentialspannung τ gerichtet ist, dass also die beiden anderen σ_2 und σ_3 in der Ebene liegen, welche durch die Richtungslinie von τ parallel der x -Axe geht; in dieser Ebene ist ihre Lage bestimmt durch den Winkel zwischen σ_2 und τ , für welchen man findet:

$$\operatorname{tg}(\tau, \sigma_2) = \frac{\sigma_2 - \sigma_y}{\tau} = \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2\tau} + \sqrt{1 + \left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2\tau} \right)^2},$$

vorausgesetzt, dass der Winkel (τ, σ_2) gerechnet wird von der Richtung τ durch den rechten Winkel zur positiven x -Axe und eventualiter darüber hinaus.

Mit Hilfe der Gleichungen (V) ergibt sich endlich:

$$E\varepsilon_1 = -\frac{1}{m}\sigma_x + \frac{m-1}{m}\sigma_y$$

$$E \left(\begin{array}{l} \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \end{array} \right) = \frac{m-1}{2m}\sigma_x + \frac{m-3}{2m}\sigma_y \pm \frac{m+1}{2m}\sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau^2}.$$

Ist insbesondere $\sigma_y = \sigma_z = 0$, so wird:

$$\sigma_1 = 0; \quad \left. \begin{array}{l} \sigma_2 \\ \sigma_3 \end{array} \right\} = \frac{\sigma_x \pm \sqrt{\sigma_x^2 + 4\tau^2}}{2}$$

$$\operatorname{tg}(\tau, \sigma_2) = \frac{\sigma_2}{\tau} = \frac{\sigma_x}{2\tau} + \sqrt{1 + \left(\frac{\sigma_x}{2\tau} \right)^2}$$

$$E\varepsilon_1 = -\frac{1}{m}\sigma_x; \quad E \left(\begin{array}{l} \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \end{array} \right) = \frac{m-1}{2m}\sigma_x \pm \frac{m+1}{2m}\sqrt{\sigma_x^2 + 4\tau^2}.$$

231. — Die Gleichung (III) zerfällt auch dann in eine lineare und eine quadratische Gleichung, wenn zwei der Tangentialspannungen $\tau_x, \tau_y, \tau_z = \text{Null}$ sind. Ist z. B.

$$\tau_y = \tau_z = 0,$$

so zerfällt Gleichung (III) in:

$$\sigma_x - \sigma = 0 \quad \text{und} \quad (\sigma_y - \sigma)(\sigma_z - \sigma) - \tau_x^2 = 0,$$

woraus folgt:

$$\begin{aligned} \sigma_1 &= \sigma_x \\ \sigma_2 \left. \begin{array}{l} \\ \end{array} \right\} &= \frac{\sigma_y + \sigma_z \pm \sqrt{(\sigma_y - \sigma_z)^2 + 4\tau_x^2}}{2}. \end{aligned}$$

Die erste Hauptspannung σ_1 fällt auch der Richtung nach mit σ_x , d. h. mit der x -Axe zusammen; die Richtungen von σ_2 und σ_3 in der yz -Ebene sind dann bestimmt durch den Winkel β_2 , den σ_2 mit der y -Axe bildet und für welchen man nach Nr. 220 findet:

$$\operatorname{tg} \beta_2 = \frac{\tau_x}{\sigma_2 - \sigma_x} = \frac{\sigma_2 - \sigma_y}{\tau_x} = \frac{\sigma_z - \sigma_y}{2\tau_x} + \sqrt{1 + \left(\frac{\sigma_z - \sigma_y}{2\tau_x}\right)^2}.$$

Die Hauptausdehnungen ergeben sich nach Gl. (V):

$$\begin{aligned} E\varepsilon_1 &= \sigma_x - \frac{\sigma_y + \sigma_z}{m} \\ E \begin{pmatrix} \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \end{pmatrix} &= -\frac{1}{m}\sigma_x + \frac{m-1}{2m}(\sigma_y + \sigma_z) \pm \frac{m+1}{2m}\sqrt{(\sigma_y - \sigma_z)^2 + 4\tau_x^2}. \end{aligned}$$

A. Gerader stabförmiger Körper.

I. Allgemeines Problem.

232. — O sei ein Punkt der Mittellinie des Körpers, also der Schwerpunkt des betreffenden Querschnitts F . Er wird zum Anfangspunkte eines rechtwinkligen Axensystems OX, OY, OZ genommen von solcher Lage, dass OX mit der ursprünglich geraden Mittellinie, die Ebene YZ mit dem ursprünglich ebenen Querschnitt F zusammenfällt, und zwar sollen die Axen OY und OZ in den Hauptaxen des Querschnitts liegen, dessen Trägheitsmomente

$$\begin{array}{lll} \text{für die Axen} & OX & OY & OZ \\ \text{resp. mit} & A & B & C \end{array}$$

bezeichnet werden.

Wegen der Deformation des Körpers unter der Einwirkung der belastenden Kräfte erfordert indessen das Axensystem eine bestimmtere Fixirung nach Massgabe von Nr. 209, und zwar werde festgesetzt, dass, wenn im ursprünglichen Zustande P ein Punkt der y -Axe im Abstände dy von O , Q ein Punkt der z -Axe im Abstände dz von O ist, immer O der Anfangspunkt, P ein Punkt der y -Axe und Q ein Punkt der yz -Ebene sein soll, wie auch diese materiellen Punkte O, P, Q verrückt werden mögen. Diese Art der Fixirung des Axensystems gegen den seiner Form nach ver-

änderlichen Körper wird dadurch ausgedrückt, dass für den Anfangspunkt, d. h. für

$$\begin{aligned} & x = 0 & y = 0 & z = 0 \\ \text{gesetzt wird: } & \xi = 0 & \eta = 0 & \zeta = 0 \\ & \frac{d\xi}{dy} = 0 & & \frac{d\zeta}{dy} = 0 \\ & \frac{d\xi}{dz} = 0. & & \end{aligned}$$

Unter den äusseren Kräften für den Querschnitt YZ werden alle diejenigen verstanden, welche den von diesem Querschnitte an gerechnet auf der Seite der positiven x -Axe gelegenen Theil des stabförmigen Körpers angehen; es seien

$$R_x \quad R_y \quad R_z$$

die Componentensummen dieser Kräfte, algebraisch verstanden, so dass positive Werthe den Richtungen OX, OY, OZ , negative den entgegengesetzten Richtungen entsprechen, und

$$M_x \quad M_y \quad M_z$$

die Momentensummen in Beziehung auf die Axen, in der Weise algebraisch verstanden, dass positive Werthe den Drehungsrichtungen YZ, ZX, XY entsprechen.

Wenn nun noch Form und Grösse F des Querschnitts YZ gegeben sind, so besteht die Aufgabe zunächst darin, die Spannungen zu ermitteln, welche in den verschiedenen Punkten des Querschnitts hervorgerufen werden.

233. — Offenbar ist die Aufgabe, in dieser Allgemeinheit ausgesprochen, noch nicht bestimmt. Vor Allem könnten, sofern nur der einzelne Querschnitt und die durch die 6 Grössen R und M charakterisirten äusseren Einwirkungen gegeben wären, dadurch, wenn überhaupt, jedenfalls nur diejenigen Spannungen:

$$\sigma_x \quad \tau_y \quad \tau_z$$

bestimmt sein, welche sich auf die Flächenelemente dieses Querschnitts selbst als Spannungsebenen beziehen, während die Spannungen

$$\sigma_y \quad \sigma_z \quad \tau_x$$

unbestimmt blieben, und es ist also nöthig, ein gewisses Stück des Körpers zu betrachten, welches sich vom Querschnitte YZ bis zu einem um $OO_1 = l$ im Sinne der positiven x -Axe von jenem entfernten Querschnitte erstrecken möge. Die Form dieses Körperstücks, welche vollständig gegeben sein muss, sei cylindrisch, also der Querschnitt constant; für einen veränderlichen Querschnitt gelten dann die Resultate der folgenden Untersuchung nur näherungsweise und unter der Voraussetzung, dass $OO_1 = l$ unendlich klein ist.

Denkt man den Körper durch den Querschnitt F_1 bei O_1 zerschnitten und an der so entstandenen Endfläche des betrachteten Körperstücks OO_1

$$\text{die Kräfte } R_x \quad R_y \quad R_z$$

$$\text{und Kräftepaare } M_x \quad M_y \quad M_z$$

angebracht, worauf sich die jenseits des Querschnitts F_1 angreifenden äusseren Kräfte reduciren lassen, wenn sie an den Punkt O_1 versetzt werden, so ist dadurch der Gleichgewichtszustand des betrachteten Körperstücks immer noch nicht bestimmt, weil es unendlich viele Systeme von äusseren Kräften, in den Elementen der Endfläche F_1 angreifend, giebt, die sich auf

die Kräfte $R'_x \ R'_y \ R'_z$ am Punkte O_1

und die Kräftepaare $M'_x \ M'_y \ M'_z$

reduciren lassen, desgl. unendlich viele Systeme äusserer Kräfte, an den Elementen der cylindrischen Oberfläche und an den Massenelementen im Inneren des betrachteten Körperstücks angreifend, welche zusammen mit den 3 Kräften R' und 3 Kräftepaaren M' sich auf

die Kräfte $R_x \ R_y \ R_z$ im Punkte O

und die Kräftepaare $M_x \ M_y \ M_z$

reduciren lassen, und weil jedem besonderen solchen Kräftesysteme auch ein besonderer Gleichgewichtszustand des betrachteten Körperstücks entsprechen muss.

Abgesehen davon indessen, dass bei solcher Specialisirung des Systems der äusseren Kräfte die wünschenswerthe Allgemeinheit der Lösung verloren ginge, ist man auch bisher kaum in irgend einem Falle überhaupt im Stande gewesen, die Probleme der Elasticitätslehre in solchem Sinne streng durchzuführen; man sieht sich vielmehr genöthigt, die Aufgabe umzukehren: eine gewisse Art des Gleichgewichtszustandes vorauszusetzen und die äusseren Kräfte zu bestimmen, welche denselben herbeiführen würden, um daraus schliesslich die freilich nur mehr oder weniger angenähert richtige Folgerung zu ziehen, dass ein System von Kräften, welches dem gefundenen bezüglich der Wirkung an dem starren Körper äquivalent wäre, den vorausgesetzten Gleichgewichtszustand des elastischen Körpers zur Folge haben werde.

234. — Entsprechend den Annahmen, welche den Untersuchungen über stabförmige Körper in den vorhergehenden Capiteln zu Grunde liegen, werde nun auch hier ein solcher Gleichgewichtszustand des betrachteten Körperstücks vorausgesetzt, dass in allen Punkten desselben

$$\sigma_y = \sigma_z = \tau_x = 0$$

ist, dass also die fadenförmigen Elemente von der Länge l und vom Querschnitte $dydz$, woraus man das Körperstück bestehend denken kann, keinerlei Zug oder Druck aufeinander ausüben, noch auch eine Verschiebung, d. h. eine Aenderung der vollkommen rechteckigen Beschaffenheit ihrer Querschnitte erleiden. *)

*) Das Problem, betreffend die Bestimmung derjenigen äusseren Kräfte, welche einen solchen Gleichgewichtszustand zur Folge haben, ist in voller Allgemeinheit von de Saint-

Damit dies möglich sei, dürfen weder auf die cylindrische Oberfläche noch auf die Massenelemente im Inneren Kräfte wirken, welche senkrecht zur x -Axe gerichtet sind; hier soll aber die noch weiter gehende Voraussetzung gemacht werden, dass überhaupt keine Kräfte auf die cylindrische Oberfläche, noch auf das Innere des betrachteten Körperstücks nach irgend einer Richtung wirken, wodurch insbesondere auch von der eigenen Schwere abstrahirt wird und die äusseren Kräfte auf diejenigen reducirt werden, welche in der Endfläche F_1 angreifen.

Entsprechend der Voraussetzung:

$$\sigma_y = \sigma_z = 0 \text{ ist nun: } \frac{d\eta}{dy} = \frac{d\zeta}{dz} = -\frac{1}{m} \frac{d\xi}{dx} \dots \dots (1)$$

$$\text{und entsprechend } \tau_x = 0: \frac{d\eta}{dz} + \frac{d\zeta}{dy} = 0 \dots \dots (2),$$

während man nach den Gleichungen (VI) mit Rücksicht auf (1) hat:

$$\sigma_x = 2G \frac{m+1}{m} \frac{d\xi}{dx} = E \frac{d\xi}{dx}$$

$$\tau_y = G \left(\frac{d\zeta}{dx} + \frac{d\xi}{dz} \right)$$

$$\tau_z = G \left(\frac{d\xi}{dy} + \frac{d\eta}{dx} \right).$$

Die Einführung dieser Ausdrücke in die Gleichungen (I) zusammen mit

$$\sigma_y = \sigma_z = \tau_x = X = Y = Z = 0$$

liefert mit Berücksichtigung der Relation (1):

$$2 \frac{d^2\xi}{dx^2} + \frac{d^2\xi}{dy^2} + \frac{d^2\xi}{dz^2} = 0 \dots \dots (3)$$

$$\frac{d^2\xi}{dx dy} + \frac{d^2\eta}{dx^2} = 0 \dots \dots (4)$$

$$\frac{d^2\xi}{dx dz} + \frac{d^2\zeta}{dx^2} = 0 \dots \dots (5).$$

Zu diesen Gleichungen (1) bis (5), welche in jedem Punkte erfüllt sein müssen, kommen zur Bestimmung der Functionen ξ , η , ζ , wodurch dann auch die gesuchten Spannungen σ_x , τ_y und τ_z bestimmt sind, noch die Grenzbedingungen, und zwar erstens diejenigen, welche die Lage der Coordinatenaxen gegen den Körper charakterisiren (Nr. 232) und welche mit Rücksicht auf Gl. (2) dahin erweitert werden können, dass im Anfangspunkte, also für $x = y = z = 0$ sein muss:

$$\xi = \eta = \zeta = \frac{d\xi}{dy} = \frac{d\xi}{dz} = \frac{d\eta}{dz} = \frac{d\zeta}{dy} = 0 \dots \dots (6),$$

Venant behandelt worden. Die folgende Darstellung schliesst sich in der Hauptsache der von Clebsch (Theorie der Elasticität fester Körper) dem Problem zu Theil gewordenen Behandlungsweise an.

und zweitens die Gleichungen (II), welche für jeden Punkt der cylindrischen Oberfläche erfüllt sein müssen, wenn man darin $p = 0$ setzt. Mit $\sigma_y = \sigma_z = \tau_x = 0$ und $\cos \alpha = 0$, entsprechend der zur x -Axe senkrechten Richtung jeder Normalen der cylindrischen Oberfläche, werden aber die beiden letzten der 3 Gleichungen (II) identisch, während die erste wegen $\cos \gamma = \sin \beta^*$ die Oberflächenbedingung:

$$\left(\frac{d\xi}{dy} + \frac{d\eta}{dx}\right) \cos \beta + \left(\frac{d\xi}{dz} + \frac{d\zeta}{dx}\right) \sin \beta = 0 \dots (7)$$

liefert.

235. — Durch die Combination der Gleichungen (1) bis (5) in voriger Nr. erhält man:

$$\frac{d^3 \xi}{dx^3} = 0; \quad \frac{d^3 \xi}{dx dy dz} = 0; \quad \frac{d^3 \xi}{dx dy^2} = 0; \quad \frac{d^3 \xi}{dx dz^2} = 0^{**}$$

oder $\frac{d^2}{dx^2} \left(\frac{d\xi}{dx}\right) = \frac{d^2}{dy^2} \left(\frac{d\xi}{dx}\right) = \frac{d^2}{dz^2} \left(\frac{d\xi}{dx}\right) = \frac{d^2}{dy dz} \left(\frac{d\xi}{dx}\right) = 0,$

welchen Gleichungen dadurch genügt werden kann, dass $\frac{d\xi}{dx} =$ einer ganzen Function von x, y, z gesetzt wird, die jede einzelne dieser Veränderlichen höchstens in der ersten Potenz enthält, während auch ein Glied mit dem Produkte yz nicht vorkommt. Die allgemeine Form einer solchen Function ist:

$$\frac{d\xi}{dx} = a + a_1 y + a_2 z + x(b + b_1 y + b_2 z),$$

woraus nach Gl. (1) folgt:

$$\frac{d\eta}{dy} = \frac{d\zeta}{dz} = -\frac{1}{m}(a + a_1 y + a_2 z) - \frac{x}{m}(b + b_1 y + b_2 z)$$

und durch Integration resp. nach x, y, z :

$$\xi = x(a + a_1 y + a_2 z) + \frac{x^2}{2}(b + b_1 y + b_2 z) + f(y, z)$$

*) Während in den allgemeinen Gleichungen (II) die Winkel α, β, γ nur von 0 bis π gerechnet sind, setzt die Ersetzung von γ durch β vermittels der Relation $\cos \gamma = \sin \beta$ voraus, dass der Winkel β jetzt parallel der Ebene YZ im Sinne von der positiven y -Axe durch den rechten Winkel zur positiven z -Axe von 0 bis 2π gerechnet werde.

**) Die erste dieser Gleichungen ergibt sich, wenn unter den Ziffern die damit bezeichneten Gleichungen der vorigen Nr. verstanden werden, aus der Combination:

$$\frac{d(3)}{dx} - \frac{d(4)}{dy} - \frac{d(5)}{dz}$$

mit Rücksicht auf Gl. (1); die zweite aus der Combination:

$$\frac{d(4)}{dz} + \frac{d(5)}{dy}$$

mit Rücksicht auf Gl. (2); die beiden letzten endlich aus:

$$\frac{d(3)}{dx} \text{ und } \frac{d(4)}{dy} - \frac{d(5)}{dz}$$

mit Rücksicht auf (1) und auf die schon gefundene Gleichung: $\frac{d^3 \xi}{dx^3} = 0.$

$$\eta = -\frac{1}{m} \left(ay + a_1 \frac{y^2}{2} + a_2 yz \right) - \frac{x}{m} \left(by + b_1 \frac{y^2}{2} + b_2 yz \right) + \varphi(x, z)$$

$$\zeta = -\frac{1}{m} \left(az + a_1 yz + a_2 \frac{z^2}{2} \right) - \frac{x}{m} \left(bz + b_1 yz + b_2 \frac{z^2}{2} \right) + \psi(x, y).$$

Vollständig entsprechen diese Gleichungen vorläufig nur der ersten der 7 Gleichungen in Nr. 234, und es bleiben die Functionen f , φ , ψ noch den übrigen gemäss zu bestimmen.

236. — Abgesehen zunächst von den Grenzbedingungen müssen die Functionen φ und ψ in den Ausdrücken von η und ζ den Gleichungen (2), (4) und (5) in Nr. 234 entsprechend gemacht werden. Aus (4) und (5) folgt aber mit Rücksicht auf den Ausdruck von $\frac{d\xi}{dx}$ in voriger Nr.:

$$\frac{d^2 \eta}{dx^2} = -\frac{d}{dy} \left(\frac{d\xi}{dx} \right) = -a_1 - b_1 x$$

$$\frac{d^2 \zeta}{dx^2} = -\frac{d}{dz} \left(\frac{d\xi}{dx} \right) = -a_2 - b_2 x,$$

$$\text{also } \eta = \varphi_1(y, z) + x \cdot \varphi_2(y, z) - a_1 \frac{x^2}{2} - b_1 \frac{x^3}{6}$$

$$\zeta = \psi_1(y, z) + x \cdot \psi_2(y, z) - a_2 \frac{x^2}{2} - b_2 \frac{x^3}{6}.$$

Die Vergleichung dieser Ausdrücke von η und ζ mit den in Nr. 235 erhaltenen lehrt, dass die Functionen φ_1 und φ_2 kein y , ψ_1 und ψ_2 kein z enthalten können, und dass mithin zu setzen ist:

$$\eta = -\frac{1}{m} \left(ay + a_1 \frac{y^2}{2} + a_2 yz \right) - \frac{x}{m} \left(by + b_1 \frac{y^2}{2} + b_2 yz \right) + \varphi_1(z) + x \cdot \varphi_2(z) - a_1 \frac{x^2}{2} - b_1 \frac{x^3}{6}$$

$$\zeta = -\frac{1}{m} \left(az + a_1 yz + a_2 \frac{z^2}{2} \right) - \frac{x}{m} \left(bz + b_1 yz + b_2 \frac{z^2}{2} \right) + \psi_1(y) + x \cdot \psi_2(y) - a_2 \frac{x^2}{2} - b_2 \frac{x^3}{6}.$$

Durch die Einführung dieser Ausdrücke, welche vorläufig erst den Gleichungen (1), (4) und (5) genügen, in die Gleichung (2) erhält man:

$$\left. \begin{aligned} -\frac{a_2}{m} y - x \frac{b_2}{m} y + \varphi'_1(z) + x \cdot \varphi'_2(z) \\ -\frac{a_1}{m} z - x \frac{b_1}{m} z + \psi'_1(y) + x \cdot \psi'_2(y) \end{aligned} \right\} = 0,$$

also

$$\varphi'_1(z) = a_0 + \frac{a_1}{m} z \quad \varphi'_2(z) = b_0 + \frac{b_1}{m} z$$

$$\psi'_1(y) = -a_0 + \frac{a_2}{m} y \quad \psi'_2(y) = -b_0 + \frac{b_2}{m} y$$

$$\varphi_1(z) = a' + a_0 z + \frac{a_1}{m} \frac{z^2}{2} \quad \varphi_2(z) = b' + b_0 z + \frac{b_1}{m} \frac{z^2}{2}$$

$$\psi_1(y) = a'' - a_0 y + \frac{a_2}{m} \frac{y^2}{2} \quad \psi_2(y) = b'' - b_0 y + \frac{b_2}{m} \frac{y^2}{2}$$

und damit endlich:

$$\eta = -\frac{1}{m} \left(a y + a_1 \frac{y^2 - z^2}{2} + a_2 y z \right) - \frac{x}{m} \left(b y + b_1 \frac{y^2 - z^2}{2} + b_2 y z \right)$$

$$+ a' + a_0 z + x (b' + b_0 z) - a_1 \frac{x^2}{2} - b_1 \frac{x^3}{6}$$

$$\xi = -\frac{1}{m} \left(a z + a_1 y z + a_2 \frac{z^2 - y^2}{2} \right) - \frac{x}{m} \left(b z + b_1 y z + b_2 \frac{z^2 - y^2}{2} \right)$$

$$+ a'' - a_0 y + x (b'' - b_0 y) - a_2 \frac{x^2}{2} - b_2 \frac{x^3}{6}.$$

Die Function $f(y, z)$ im Ausdrücke von ξ (Nr. 235) muss nur der Gleichung (3) in Nr. 234 entsprechen, welche dafür die Bestimmungs-gleichung:

$$2(b + b_1 y + b_2 z) + \frac{d^2 f}{dy^2} + \frac{d^2 f}{dz^2} = 0$$

liefert; dieselbe wird einfacher, wenn

$$f(y, z) = -b \frac{y^2 + z^2}{2} - b_1 y z^2 - b_2 y^2 z + F(y, z),$$

also $\xi = x(a + a_1 y + a_2 z) + \frac{x^2}{2}(b + b_1 y + b_2 z) -$

$$-b \frac{y^2 + z^2}{2} - b_1 y z^2 - b_2 y^2 z + F(y, z)$$

gesetzt wird. Dann ist nämlich die Function $F(y, z)$ an die Gleichung gebunden:

$$\frac{d^2 F}{dy^2} + \frac{d^2 F}{dz^2} = 0.$$

237. — Durch die Grenzbedingungen wird die Function $F(y, z)$ näher bestimmt, sowie auch die in den Ausdrücken von ξ, η, ζ vorkom-menden Constanten

$$\begin{array}{cccccc} a & a_1 & a_2 & a_0 & a' & a'' \\ b & b_1 & b_2 & b_0 & b' & b'' \end{array}$$

dadurch auf eine geringere Zahl reducirt werden.

Zunächst folgt aus den Bedingungen (6) sub Nr. 234:

$$a' = 0; \quad a'' = 0; \quad a_0 = 0$$

$$F_0 = 0; \quad \left(\frac{dF}{dy}\right)_0 = 0; \quad \left(\frac{dF}{dz}\right)_0 = 0,$$

wobei der Zeiger 0 den Werth der betreffenden Function für den Anfangs-punkt der Coordinaten bezeichnet, oder vielmehr für $y = z = 0$, da x in der Function nicht vorkommt.

Die Oberflächenbedingung (7) in Nr. 234 erhält eine einfachere Form, wenn

$$F(y, z) = Q - b'y - b''z$$

gesetzt wird, unter Q eine neue Function von y und z verstanden, welche der Differentialgleichung

$$\frac{d^2 Q}{dy^2} + \frac{d^2 Q}{dz^2} = 0$$

entspricht und die Eigenschaft hat, für $y = z = 0$ zu verschwinden, während die obigen Gleichungen

$$\left(\frac{dF}{dy}\right)_0 = 0 \text{ und } \left(\frac{dF}{dz}\right)_0 = 0$$

jetzt ersetzt werden durch:

$$b' = \left(\frac{dQ}{dy}\right)_0; \quad b'' = \left(\frac{dQ}{dz}\right)_0.$$

Die zur näheren Bestimmung von Q dienende Gleichung (7) aber wird:

$$\begin{aligned} & \left(b_0 z - b \frac{m+1}{m} y - b_1 \frac{y^2 + (2m-1)z^2}{2m} - b_2 \frac{2m+1}{m} yz + \frac{dQ}{dy} \right) \cos \beta + \\ & + \left(-b_0 y - b \frac{m+1}{m} z - b_1 \frac{2m+1}{m} yz - b_2 \frac{z^2 + (2m-1)y^2}{2m} + \frac{dQ}{dz} \right) \sin \beta = 0. \end{aligned}$$

238. — Den Bedingungen für die Function Q kann dadurch entsprochen werden, dass gesetzt wird:

$$Q = bq + b_0 Q_0 + b_1 Q_1 + b_2 Q_2,$$

unter q , Q_0 , Q_1 und Q_2 Functionen von y und z verstanden von solcher Art, dass dieser Ausdruck von Q allen jenen Bedingungen genügt, welche Werthe die Constanten b , b_0 , b_1 und b_2 auch haben mögen, insbesondere also auch dann, wenn je 3 derselben = Null gesetzt werden. Diese Zerlegung der Function Q ist zunächst dadurch wichtig, dass sie den Werth der Constanten $b = \text{Null}$ ergibt. In der That müsste, wenn $b_0 = b_1 = b_2 = 0$ gesetzt wird, die Function q so beschaffen sein, dass für alle Werthe von y und z

$$\frac{d^2 q}{dy^2} + \frac{d^2 q}{dz^2} = 0$$

und für diejenigen Werthe von y und z , welche dem Umfange eines Querschnitts angehören,

$$\frac{dq}{dy} \cos \beta + \frac{dq}{dz} \sin \beta = \frac{m+1}{m} (y \cos \beta + z \sin \beta)$$

ist, unter β den Winkel der Normale dieses Umfangs mit der y -Axe verstanden; allein es lässt sich zeigen, dass diese beiden Gleichungen einander widersprechen, dass also q unmöglich ist, mithin $b = 0$ gesetzt werden muss.

Es bleibt sonach nur übrig:

$$Q = b_0 Q_0 + b_1 Q_1 + b_2 Q_2,$$

unter Q_0 , Q_1 und Q_2 Functionen von y und z verstanden, welche für $y = z = 0$ verschwinden, welche ferner für alle Werthe von y und z den Gleichungen:

$$\frac{d^2 Q_0}{dy^2} + \frac{d^2 Q_0}{dz^2} = 0$$

$$\frac{d^2 Q_1}{dy^2} + \frac{d^2 Q_1}{dz^2} = 0$$

$$\frac{d^2 Q_2}{dy^2} + \frac{d^2 Q_2}{dz^2} = 0$$

und insbesondere für den Umfang des Querschnitts den Gleichungen:

$$\frac{dQ_0}{dy} \cos \beta + \frac{dQ_0}{dz} \sin \beta = y \sin \beta - z \cos \beta$$

$$\frac{dQ_1}{dy} \cos \beta + \frac{dQ_1}{dz} \sin \beta = \frac{y^2 + (2m-1)z^2}{2m} \cos \beta + \frac{2m+1}{m} yz \sin \beta$$

$$\frac{dQ_2}{dy} \cos \beta + \frac{dQ_2}{dz} \sin \beta = \frac{z^2 + (2m-1)y^2}{2m} \sin \beta + \frac{2m+1}{m} yz \cos \beta$$

entsprechen und dadurch wesentlich von der Form des Querschnitts abhängig sind.

239. — Die Einführung der in den beiden vorigen Nummern erhaltenen Werthe:

$$d = a'' = a_0 = b = 0$$

$$F(y, z) = Q - b'y - b'z$$

$$b' = \left(\frac{dQ}{dy}\right)_0; \quad b'' = \left(\frac{dQ}{dz}\right)_0$$

in die für ξ, η, ζ sub Nr. 236 gewonnenen Ausdrücke liefert:

$$\xi = x(a + a_1 y + a_2 z) + b_1 y \left(\frac{x^2}{2} - z^2\right) + b_2 z \left(\frac{x^2}{2} - y^2\right) + Q - y \left(\frac{dQ}{dy}\right)_0 - z \left(\frac{dQ}{dz}\right)_0$$

$$\eta = -a \frac{y}{m} - a_1 \left(\frac{x^2}{2} + \frac{y^2 - z^2}{2m}\right) - a_2 \frac{yz}{m} + b_0 xz - b_1 x \left(\frac{x^2}{6} + \frac{y^2 - z^2}{2m}\right) - b_2 \frac{xyz}{m} + x \left(\frac{dQ}{dy}\right)_0$$

$$\zeta = -a \frac{z}{m} - a_1 \frac{yz}{m} - a_2 \left(\frac{x^2}{2} + \frac{z^2 - y^2}{2m}\right) - b_0 xy - b_1 \frac{xyz}{m} - b_2 x \left(\frac{x^2}{6} + \frac{z^2 - y^2}{2m}\right) + x \left(\frac{dQ}{dz}\right)_0$$

und endlich damit nach den Gleichungen (Nr. 234):

$$\sigma_x = E \frac{d\xi}{dx}; \quad \tau_y = G \left(\frac{d\xi}{dz} + \frac{d\zeta}{dx}\right); \quad \tau_z = G \left(\frac{d\xi}{dy} + \frac{d\eta}{dx}\right)$$

die Spannungen in einem beliebigen Punkte des betrachteten Körperstücks:

$$\frac{1}{E} \sigma_x = a + a_1 y + a_2 z + x(b_1 y + b_2 z)$$

$$\frac{1}{G} \tau_y = -b_0 y - b_1 \frac{2m+1}{m} yz - b_2 \frac{z^2 + (2m-1)y^2}{2m} + \frac{dQ}{dz}$$

$$\frac{1}{G} \tau_z = b_0 z - b_1 \frac{y^2 + (2m-1)z^2}{2m} - b_2 \frac{2m+1}{m} yz + \frac{dQ}{dy}$$

Die Spannungen für einen beliebigen Punkt des Anfangs-
querschnitts YZ ergeben sich daraus mit $x = 0$, wodurch aber nur σ_x
einen besonderen Werth annimmt, während τ_y und τ_z in entsprechenden
Punkten aller Querschnitte des betrachteten Körperstücks gleich sind.

240. — Das Stattfinden des vorausgesetzten Gleichgewichtszustandes
erfordert nun streng genommen, dass in den Flächenelementen der End-
fläche F_1 des betrachteten Körperstücks $OO_1 = l$ solche äussere Kräfte
wirken, welche sich durch Multiplication von $dydz$ mit den obigen
Werthen von σ_x , τ_y und τ_z für $x = l$ ergeben. Ist aber das System der
äusseren Kräfte für den Querschnitt YZ nach Nr. 232 nur durch

$$R_x \quad R_y \quad R_z \quad M_x \quad M_y \quad M_z$$

gegeben, so lassen sich näherungsweise die Spannungen im Querschnitte YZ
nach Nr. 233 den obigen für $x = 0$ gleich setzen, falls nur die übrig ge-
bliebenen 6 Constanten

$$a \quad a_1 \quad a_2 \quad b_0 \quad b_1 \quad b_2$$

so bestimmt werden, dass

$$R_x = \int \sigma_x \cdot dF \quad R_y = \int \tau_z \cdot dF \quad R_z = \int \tau_y \cdot dF$$

$$M_x = \int (y\tau_y - z\tau_z) dF; \quad M_y = \int z\sigma_x \cdot dF; \quad -M_z = \int y\sigma_x \cdot dF$$

ist, die Integrale über den ganzen Querschnitt F ausgedehnt gedacht.
Diese Gleichungen reichen zur fraglichen Bestimmung gerade aus und
geben mit Rücksicht darauf, dass nach den Annahmen und Bezeichnungen
in Nr. 232

$$\int y dF = \int z dF = \int yz dF = 0$$

$$B = \int z^2 dF; \quad C = \int y^2 dF; \quad A = B + C$$

ist:

$$a = \frac{R_x}{EF}; \quad a_1 = \frac{-M_z}{EC}; \quad a_2 = \frac{M_y}{EB}$$

sowie für b_0 , b_1 und b_2 die Gleichungen:

$$\frac{R_y}{G} = -b_1 \frac{C + (2m-1)B}{2m} + \int \frac{dQ}{dy} dF$$

$$\frac{R_z}{G} = -b_2 \frac{B + (2m-1)C}{2m} + \int \frac{dQ}{dz} dF$$

$$\frac{M_x}{G} = -b_0 A - b_1 \int \frac{(4m+1)y^2 - (2m-1)z^2}{2m} z dF$$

$$+ b_2 \int \frac{(4m+1)z^2 - (2m-1)y^2}{2m} y dF + \int \left(y \frac{dQ}{dz} - z \frac{dQ}{dy} \right) dF.$$

241. — Die Constanten b_0 , b_1 und b_2 erscheinen hiernach als abhängig
von den Functionen Q_0 , Q_1 und Q_2 , auf welche die Function

$$Q = b_0 Q_0 + b_1 Q_1 + b_2 Q_2 \quad (\text{Nr. 238})$$

zurückgeführt wurde; indessen ist es ein bemerkenswerther Umstand, dass,
wenn auch diese Functionen selbst nur für bestimmte Querschnittsformen
bestimmbar sind, doch die beiden Integrale

$$\int \frac{dQ}{dy} dF \text{ und } \int \frac{dQ}{dz} dF$$

und damit auch die Constanten b_1 und b_2 allgemein ausgedrückt werden können. Auf Grund der Bedingungen, denen die Function Q unterworfen ist (Nr. 237), findet man nämlich mit Hilfe eines gewissen Verfahrens der theilweisen Integration:

$$\int \frac{dQ}{dy} dF = \int \left(\frac{d(yY)}{dy} + \frac{d(yZ)}{dz} \right) dF$$

$$\int \frac{dQ}{dz} dF = \int \left(\frac{d(zZ)}{dz} + \frac{d(zY)}{dy} \right) dF,$$

worin

$$Y = -b_0 z + b_1 \frac{y^2 + (2m-1)z^2}{2m} + b_2 \frac{2m+1}{m} yz$$

$$Z = b_0 y + b_1 \frac{2m+1}{m} yz + b_2 \frac{z^2 + (2m-1)y^2}{2m}$$

ist. Die Einführung dieser Werthe liefert dann mit:

$$\int y dF = \int z dF = \int yz dF = 0; \quad B = \int z^2 dF; \quad C = \int y^2 dF$$

$$\int \frac{dQ}{dy} dF = b_1 \frac{(4m+5)C + (2m-1)B}{2m}$$

$$\int \frac{dQ}{dz} dF = b_2 \frac{(4m+5)B + (2m-1)C}{2m},$$

folglich nach Nr. 240:

$$b_1 = \frac{1}{2} \frac{m}{m+1} \frac{R_y}{GC} = \frac{R_y}{EC}; \quad b_2 = \frac{1}{2} \frac{m}{m+1} \frac{R_z}{GB} = \frac{R_z}{EB}.$$

Somit lässt sich nur die Constante b_0 nicht ohne Specialisirung der Querschnittsform allgemein ausdrücken; zudem ist es bemerkenswerth, dass, während

$$\begin{array}{l} \text{die Constanten } a \quad a_1 \quad a_2 \quad b_1 \quad b_2 \\ \text{nur resp. von } R_x \quad M_z \quad M_y \quad R_y \quad R_z \end{array}$$

abhängen, die Constante b_0 dagegen im Allgemeinen nicht nur von M_x , sondern zugleich von b_1 und b_2 , also von R_y und R_z abhängig ist.

242. — Die Einführung der in den beiden vorigen Nummern gefundenen Werthe der Constanten

$$a \quad a_1 \quad a_2 \quad b_1 \quad b_2$$

in die Ausdrücke von σ_x , τ_y und τ_z für $x=0$, d. h. für den Querschnitt YZ liefert mit Rücksicht auf

$$Q = b_0 Q_0 + b_1 Q_1 + b_2 Q_2$$

$$\sigma_x = \frac{R_x}{F} + \frac{M_y}{B} z - \frac{M_z}{C} y$$

$$\tau_y = G b_0 \left(\frac{dQ_0}{dz} - y \right) + \frac{1}{2} \frac{m}{m+1} \frac{R_y}{C} \left(\frac{dQ_1}{dz} - \frac{2m+1}{m} yz \right) +$$

$$+ \frac{1}{2} \frac{m}{m+1} \frac{R_z}{B} \left(\frac{dQ_2}{dz} - \frac{z^2 + (2m-1)y^2}{2m} \right)$$

$$\tau_z = Gb_0 \left(\frac{dQ_0}{dy} + z \right) + \frac{1}{2} \frac{m}{m+1} \frac{R_y}{C} \left(\frac{dQ_1}{dy} - \frac{y^2 + (2m-1)z^2}{2m} \right) + \frac{1}{2} \frac{m}{m+1} \frac{R_z}{B} \left(\frac{dQ_2}{dy} - \frac{2m+1}{m} yz \right).$$

Dabei ist:

$$Gb_0 = \frac{-M_x - \frac{1}{2} \frac{m}{m+1} \frac{R_y}{C} \left[J_1 - \int \left(y \frac{dQ_1}{dz} - z \frac{dQ_1}{dy} \right) dF \right] + \frac{1}{2} \frac{m}{m+1} \frac{R_z}{B} \left[J_2 + \int \left(y \frac{dQ_2}{dz} - z \frac{dQ_2}{dy} \right) dF \right]}{A - \int \left(y \frac{dQ_0}{dz} - z \frac{dQ_0}{dy} \right) dF}$$

$$J_1 = \int \frac{(4m+1)y^2 - (2m-1)z^2}{2m} z dF$$

$$J_2 = \int \frac{(4m+1)z^2 - (2m-1)y^2}{2m} z dF.$$

Der allgemeine Charakter dieser Formeln besteht darin, dass die resultierenden Spannungen in irgend einem Punkte des Querschnitts die Summen derjenigen Spannungen gleicher Art sind, welche von den Einzelwirkungen

$$R_x \quad R_y \quad R_z \quad M_x \quad M_y \quad M_z$$

herrühren; ebenso verhält es sich mit den Verrückungen ξ, η, ζ , welche nach Nr. 239 lineare Functionen der Constanten

$$a \quad a_1 \quad a_2 \quad b_0 \quad b_1 \quad b_2$$

und somit auch der Grössen R und M sind.

Die Normalspannung σ_x hängt nur von

$$R_x, \quad M_y \quad \text{und} \quad M_z$$

ab, und zwar von M_y und M_z in gleicher Weise; die Tangentialspannungen τ_y und τ_z hängen nur von

$$M_x, \quad R_y \quad \text{und} \quad R_z$$

und zwar von R_y und R_z in gleicher Weise ab.

243. — In den meisten Fällen der Anwendung ist der Querschnitt in Beziehung auf eine der Schwerpunkthauptaxen OY und OZ oder in Beziehung auf beide symmetrisch.

Ist OZ Symmetrieaxe, so ist $\cos\beta$ eine ungerade, $\sin\beta$ eine gerade Function von y^* ; den Grenzbedingungen der Functionen Q_0, Q_1 und Q_2 (Nr. 238) ist es dann entsprechend, mit den allgemeinen Bedingungsgleichungen dieser Functionen aber nicht im Widerspruche,

Q_0 und Q_1 ungeraden Functionen,

Q_2 einer geraden Function von y

gleich zu setzen. Sofern nun, unter $f(y)$ eine ungerade Function von y verstanden, das Integral

$$\int f(y) \cdot dF = 0$$

*) $f(y)$ ist eine gerade Function von y , wenn $f(-y) = f(y)$

„ ungerade „ „ „ „ $f(-y) = -f(y)$

ist. Der Differentialquotient nach y ist im ersten Falle eine ungerade, im zweiten eine gerade Function von y .

ist, wenn es über den ganzen in Beziehung auf die z -Axe symmetrischen Querschnitt ausgedehnt wird, so verschwindet in diesem Falle das Glied mit R_z in dem Ausdrucke von b_0 (Nr. 242), und es wird also:

$$Gb_0 = \frac{-M_x - \frac{1}{2} \frac{m}{m+1} \frac{R_y}{C} \left[J_1 - \int \left(y \frac{dQ_1}{dz} - z \frac{dQ_1}{dy} \right) dF \right]}{A - \int \left(y \frac{dQ_0}{dz} - z \frac{dQ_0}{dy} \right) dF}.$$

Ist OY Symmetrieaxe, so ist $\cos\beta$ eine gerade, $\sin\beta$ eine ungerade Function von z ;

Q_0 und Q_2 sind ungeraden Functionen,

Q_1 ist einer geraden Function von z

gleich zu setzen, und im Ausdrucke von b_0 verschwindet das Glied mit R_y .

Ist endlich der Querschnitt in Beziehung auf beide Schwerpunkthauptaxen symmetrisch, so ist

Q_0 ungerade für y und z ,

Q_1 ungerade für y , gerade für z ,

Q_2 gerade für y , ungerade für z

und die Constante b_0 ist dann nur noch von M_x abhängig, nämlich:

$$Gb_0 = \frac{-M_x}{A - \int \left(y \frac{dQ_0}{dz} - z \frac{dQ_0}{dy} \right) dF}.$$

244. — An der Lösung des allgemeinen Problems fehlt jetzt nur noch die Bestimmung der Functionen Q_0 , Q_1 und Q_2 . Zu dem Ende kann man bemerken, dass der gemeinschaftlichen partiellen Differentialgleichung

$$\frac{d^2f}{dy^2} + \frac{d^2f}{dz^2} = 0,$$

welcher nach Nr. 238 diese Functionen entsprechen sollen, allgemein genügt wird durch die Function:

$$f(y, z) = \varphi(y + zi) + \psi(y - zi),$$

unter φ und ψ beliebige Functionen verstanden, während zur Abkürzung $\sqrt{-1} = i$ gesetzt ist. Ein particuläres Integral von algebraischer Form, welches zunächst wenigstens dem Falle entspricht, dass der Querschnitt durch irgend welche algebraische Linien begrenzt wird, ist:

$$f(y, z) = \Sigma \frac{\alpha + \frac{\beta}{i}}{2} (y + zi)^n + \Sigma \frac{\alpha - \frac{\beta}{i}}{2} (y - zi)^n,$$

wo unter den Summenzeichen alle Summanden begriffen sind, welche aus der allgemeinen Form durch die Substitutionen

$$n = 0, 1, 2, 3 \dots$$

hervorgehen. Werden dabei die entsprechenden Werthe der Constanten α und β mit

$$\alpha \text{ und } \beta, \alpha_1 \text{ und } \beta_1, \alpha_2 \text{ und } \beta_2, \alpha_3 \text{ und } \beta_3 \dots$$

bezeichnet, so liefert die Entwicklung:

$$f(y, z) = \alpha + \alpha_1 y + \beta_1 z + \alpha_2 (y^2 - z^2) + \beta_2 \cdot 2yz + \\ + \alpha_3 (y^3 - 3yz^2) + \beta_3 (3y^2z - z^3) + \\ + \alpha_4 (y^4 - 6y^2z^2 + z^4) + \beta_4 (4y^3z - 4yz^3) + \dots,$$

eine Function, welche auch leicht nachträglich durch Ausführung der Differentiationen als der vorausgesetzten Differentialgleichung entsprechend verificirt werden kann.

Ist nun der Querschnitt von algebraischen Linien begrenzt, so dass wegen

$$\frac{\sin \beta}{\cos \beta} = - \frac{dy}{dz}$$

$\cos \beta$ und $\sin \beta$ ganzen algebraischen Functionen von y und z proportional sind, so können die Constanten

$$\alpha \quad \alpha_1 \quad \alpha_2 \dots \beta_1 \quad \beta_2 \dots$$

den Grenzbedingungen (Nr. 238) entsprechend bestimmt werden; wegen der gemeinschaftlichen Eigenschaft der Functionen Q_0 , Q_1 und Q_2 , für $y = z = 0$ zu verschwinden, ist α immer = 0.

Wäre der Querschnitt von transcendenten Linien begrenzt, so könnte man dieselben näherungsweise durch algebraische ersetzen oder, was auf dasselbe hinausläuft, die Proportionalwerthe von $\cos \beta$ und $\sin \beta$ in Reihen entwickeln, welche nach ganzen Potenzen von y und z fortschreiten, dabei aber die Glieder von einer gewissen Ordnung an vernachlässigen.

II. Besondere Fälle.

a. Einfache Fälle.

245. — Die einfachen Fälle sind diejenigen, in welchen von den 6 Grössen

$$R_x \quad R_y \quad R_z \quad M_x \quad M_y \quad M_z$$

alle ausser einer = Null sind; nur 4 von diesen 6 Fällen sind wesentlich verschieden.

Ist 1) nur R_x nicht = Null, so wird nach Nr. 242:

$$\sigma_x = \frac{R_x}{F}; \quad \tau_y = \tau_z = 0;$$

im ersten Capitel ist dieser Fall ausführlicher behandelt worden.

Ist 2) nur M_y oder M_z nicht = Null, so wird:

$$\sigma_x = \frac{M_y}{B} z \quad \text{oder} \quad = \frac{-M_z}{C} y; \quad \tau_y = \tau_z = 0$$

in Uebereinstimmung mit den Fundamentalgleichungen, welche den Untersuchungen des zweiten Capitels zu Grunde gelegt wurden.

246. — Ist 3) nur M_x nicht = Null, so ist nach Nr. 242:

$$\sigma_x = 0; \quad \tau_y = Gb_0 \left(\frac{dQ_0}{dz} - y \right); \quad \tau_z = Gb_0 \left(\frac{dQ_0}{dy} + z \right)$$

und bei Voraussetzung eines doppelt symmetrischen Querschnitts nach Nr. 243:

$$Gb_0 = \frac{-M_x}{A - \left(y \frac{dQ_0}{dz} - z \frac{dQ_0}{dy} \right) dF}$$

Die Function Q_0 ist ungerade für y und z (Nr. 243), deshalb nach Nr. 244:

$$Q_0 = \alpha_1 y + \beta_1 z + 2\beta_2 yz + \alpha_3 y^3 - \beta_3 z^3 + 4\beta_1 (y^3 z - yz^3) + \dots$$

$$\frac{dQ_0}{dy} = \alpha_1 + 2\beta_2 z + 3\alpha_3 y^2 + 4\beta_4 (3y^2 z - z^3) + \dots$$

$$\frac{dQ_0}{dz} = \beta_1 + 2\beta_2 y - 3\beta_3 z^2 + 4\beta_4 (y^3 - 3yz^2) + \dots$$

und die in diesen Ausdrücken vorkommenden constanten Coefficienten sind dadurch bestimmt, dass nach Nr. 238 für jeden Punkt des Umfangs

$$\left(\frac{dQ_0}{dy} + z \right) \cos \beta + \left(\frac{dQ_0}{dz} - y \right) \sin \beta = 0$$

sein muss, eine Gleichung, welche auch geschrieben werden kann:

$$\frac{\tau_y}{\tau_z} = -\cot \beta = \frac{dz}{dy}$$

und welche mithin ausdrückt, dass die resultirende Spannung τ in allen Punkten des Umfangs tangential an denselben gerichtet ist (cf. Nr. 191).

Die Resultate, zu denen man auf solche Weise gelangt, stimmen überein mit denen, welche im fünften Capitel sub B. von einem weniger allgemeinen Gesichtspunkte aus direct erhalten wurden.

247. — Für die Ellipse z. B. mit der Gleichung

$$\frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

ist $\frac{\sin \beta}{\cos \beta} = -\frac{dy}{dz} = \frac{b^2 z}{c^2 y}$, womit man findet:

$$Q_0 = \frac{b^2 - c^2}{b^2 + c^2} yz = \frac{C - B}{C + B} yz; \quad Gb_0 = -\frac{B + C}{4BC} M_x$$

$$\tau_y = \frac{M_x}{2C} y; \quad \tau_z = -\frac{M_x}{2B} z$$

in Uebereinstimmung mit Nr. 200. Wegen

$$\left(\frac{dQ_0}{dy} \right)_0 = \left(\frac{dQ_0}{dz} \right)_0 = 0$$

ist ferner nach Nr. 239:

$$\eta = b_0 xz; \quad \zeta = -b_0 xy,$$

also der spezifische Drehungswinkel nach Nr. 202:

$$\vartheta = \left(\frac{d^2 \zeta}{dx dy} \right)_{z=0} = - \left(\frac{d^2 \eta}{dx dz} \right)_{y=0} = -b_0 = \frac{M_x}{4BC} \frac{G}{B+C}$$

in Uebereinstimmung mit Nr. 204. Endlich ist nach Nr. 239 die Gleichung der windschiefen Querschnittsfläche:

$$\xi = b_0 Q_0 = - \mathfrak{A} Q_0 = \frac{B-C}{B+C} \mathfrak{A} \cdot yz$$

in Uebereinstimmung mit Nr. 205.

248. — Für das Rechteck mit den Seiten $2b$ (parallel der y -Axe) und $2c$ (parallel der z -Axe) ist in allen Punkten der Seiten $2c$ des Umfangs:

$$\cos \beta = \pm 1; \sin \beta = 0; y = \pm b,$$

womit die Grenzbedingung liefert:

$$a_1 + 3b^2 a_3 = 0; 2\beta_2 + 1 + 12b^2 \beta_4 = 0; \beta_4 = 0,$$

falls die Entwicklung der Function Q_0 nur bis zu den Gliedern von der 4^{ten} Ordnung incl. fortgesetzt wird. In allen Punkten der Seiten $2b$ des Umfangs ist:

$$\cos \beta = 0; \sin \beta = \pm 1; z = \pm c,$$

womit die Grenzbedingung giebt:

$$\beta_1 - 3c^2 \beta_3 = 0; 2\beta_2 - 1 - 12c^2 \beta_4 = 0; \beta_4 = 0.$$

Demgemäss kann $a_1 = a_3 = \beta_1 = \beta_3 = \beta_4 = 0$ gesetzt werden; was aber β_2 betrifft, so erhält man dafür 2 Werthe, die sich widersprechen, und es wird dieser Widerspruch auch dadurch nicht beseitigt, dass die Entwicklung der Function Q_0 bis zu einer grösseren, aber endlichen Zahl von Gliedern fortgesetzt wird. Wenn man aber in den Ausdrücken von $\frac{dQ_0}{dy}$ und $\frac{dQ_0}{dz}$ (Nr. 246) den Gliedern mit z^3 und y^3 Coefficienten beilegte, welche von β_4 verschieden sind, um dadurch möglicher Weise dem Einflusse der fortgelassenen folgenden Glieder Rechnung zu tragen, so ergeben sich diese Coefficienten = 0 und somit:

$$\frac{dQ_0}{dy} = 2\beta_2 z + 12\beta_4 y^2 z; \quad \frac{dQ_0}{dz} = 2\beta_2 y - 12\beta_4 y z^2,$$

wodurch der Gleichung:

$$\frac{d^2 Q_0}{dy^2} + \frac{d^2 Q_0}{dz^2} = 0$$

nicht widersprochen wird und sich ergibt:

$$2\beta_2 = \frac{b^2 - c^2}{b^2 + c^2}; \quad 12\beta_4 = - \frac{2}{b^2 + c^2}.$$

$$\text{Damit wird: } G b_0 = - \frac{9}{32} \frac{b^2 + c^2}{b^3 c^3} M_x$$

und in Uebereinstimmung mit Nr. 199:

$$\tau_y = \frac{9}{16} \frac{M_x}{b^3 c} y \left(1 - \frac{z^2}{c^2} \right); \quad \tau_z = - \frac{9}{16} \frac{M_x}{b c^3} z \left(1 - \frac{y^2}{b^2} \right),$$

ferner nach Nr. 239:

$$\eta = b_0 xz; \quad \zeta = - b_0 xy,$$

$$\text{sonach } \mathfrak{A} = - b_0 = \frac{9}{32} \frac{M_x}{G} \frac{b^2 + c^2}{b^3 c^3} \text{ (cf. Nr. 204).}$$

Wenn man endlich im Ausdrucke von Q_0 auch noch die Glieder von der 4ten Ordnung fortlässt, also

$$Q_0 = 2\beta_2 yz = \frac{b^2 - c^2}{b^2 + c^2} yz = \frac{C - B}{C + B} yz$$

setzt, so ist nach Nr. 239:

$$\xi = b_0 Q_0 = -\mathcal{J} Q_0 = \frac{B - C}{B + C} \mathcal{J} \cdot yz$$

in Uebereinstimmung mit Nr. 205.

249. — Eine nähere Untersuchung erfordert der Fall, dass

4) nur R_y oder R_z nicht = Null

ist, nachdem in dem von der Schubelasticität handelnden vierten Capitel die Vertheilung der Tangentialspannungen im Querschnitte nur unter Abstraction von den zur Richtung der resultirenden Schubkraft R_y resp. R_z senkrechten Spannungen τ_y resp. τ_z und auf Grund der Annahme untersucht worden ist, dass die einzig berücksichtigten, nach R_y resp. R_z gerichteten Spannungen τ_z resp. τ_y blosse Functionen von y resp. z seien.

Es sei insbesondere R_z allein nicht = Null, und es werde angenommen, dass zugleich die Hauptaxe OZ den Querschnitt symmetrisch theilt. Nach Nr. 243 ist dann $b_0 = 0$ und deshalb nach Nr. 242:

$$\tau_y = \frac{1}{2} \frac{m}{m+1} \frac{R_z}{B} \left(\frac{dQ_2}{dz} - \frac{z^2 + (2m-1)y^2}{2m} \right)$$

$$\tau_z = \frac{1}{2} \frac{m}{m+1} \frac{R_z}{B} \left(\frac{dQ_2}{dy} - \frac{2m+1}{m} yz \right).$$

Nach Nr. 243 ist Q_2 eine gerade Function von y und deshalb nach Nr. 244:

$$Q_2 = \beta_1 z + \alpha_2 (y^2 - z^2) + \beta_3 (3y^2 z - z^3) + \alpha_4 (y^4 - 6y^2 z^2 + z^4) + \dots$$

$$\frac{dQ_2}{dy} = 2\alpha_2 y + 6\beta_3 yz + 4\alpha_4 (y^3 - 3yz^2) + \dots$$

$$\frac{dQ_2}{dz} = \beta_1 - 2\alpha_2 z + 3\beta_3 (y^2 - z^2) + 4\alpha_4 (-3y^2 z + z^3) + \dots,$$

wobei die Constanten α und β bestimmt sind durch die Grenzbedingung (cf. Nr. 238):

$$\left(\frac{dQ_2}{dy} - \frac{2m+1}{m} yz \right) \cos \beta + \left(\frac{dQ_2}{dz} - \frac{z^2 + (2m-1)y^2}{2m} \right) \sin \beta = 0,$$

welche ausdrückt, dass die resultirende Tangentialspannung $\tau = \sqrt{\tau_y^2 + \tau_z^2}$ in allen Punkten des Umfangs nach der Tangente desselben gerichtet sein muss.

Als Gleichung der gekrümmten Querschnittsfläche erhält man aus dem Ausdrucke von ξ in Nr. 239 mit $x = 0$ und $Q = b_2 Q_2$:

$$\begin{aligned} \xi &= b_2 \left[-y^2 z + Q_2 - y \left(\frac{dQ_2}{dy} \right)_0 - z \left(\frac{dQ_2}{dz} \right)_0 \right] \\ &= \frac{R_z}{EB} (-y^2 z + Q_2 - \beta_1 z). \end{aligned}$$

Diese Fläche wird nicht nur von Ebenen, welche der xz -Ebene, sondern im Allgemeinen auch von solchen, welche der xy -Ebene parallel sind, in krummen Linien geschnitten.

Wenn auch die y -Axe den Querschnitt symmetrisch theilt, so ist Q_2 eine ungerade Function von z (cf. Nr. 243), also:

$$Q_2 = \beta_1 z + \beta_3 (3y^2 z - z^3) + \dots$$

$$\frac{dQ_2}{dy} = 6\beta_3 y z + \dots; \quad \frac{dQ_2}{dz} = \beta_1 + 3\beta_3 (y^2 - z^2) + \dots$$

$$\xi = \frac{R_z}{EB} [-y^2 z + \beta_3 (3y^2 z - z^3) + \dots].$$

250. — Für einen elliptischen Querschnitt mit der Umfangsgleichung:

$$\frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

findet man, wenn

$$\frac{b^2 + 2 \frac{m+1}{m} c^2}{b^2 + 3c^2} = \alpha$$

gesetzt wird,

$$\beta_1 = \alpha c^2; \quad 3\beta_3 = \alpha - \frac{1}{2m};$$

alle übrigen Coefficienten von $Q_2 = \text{Null}$; damit:

$$\tau_y = \frac{1}{2} \frac{m}{m+1} \frac{R_z}{B} [\alpha (c^2 - z^2) - (1-\alpha) y^2]$$

$$\tau_z = -\frac{R_z}{B} \left(1 - \frac{m}{m+1} \alpha \right) y z.$$

Wenn insbesondere die Ellipse in einen Kreis übergeht, so ergibt sich mit $b=c=r$ und wegen $B = F \frac{r^2}{4}$:

$$\tau_y = \frac{3m+2}{2m+2} \frac{R_z}{F} \left(1 - \frac{z^2}{r^2} - \frac{m-2}{3m+2} \frac{y^2}{r^2} \right)$$

$$\tau_z = -\frac{m+2}{m+1} \frac{R_z}{F} \frac{y z}{r^2}.$$

Die Werthe von τ_y und τ_z , sowie von $\tau = \sqrt{\tau_y^2 + \tau_z^2}$, welche sich hiernach mit $m=3$ für einige Punkte des Querschnitts (im Umfange und in der z -Axe) ergeben, sind in der folgenden Tabelle zusammengestellt zur Vergleichung mit denjenigen hier mit τ_1 bezeichneten Werthen von τ resp. τ_y , welche nach Nr. 173 denselben Werthen von z entsprechen würden.

	$\tau_y : \frac{R_z}{F}$		$-\tau_z : \frac{R_z}{F}$		$\tau : \frac{R_z}{F}$		$\tau_1 : \frac{R_z}{F}$ (Nr. 173)
	$y=0$	$y=\sqrt{r^2-z^2}$	$y=0$	$y=\sqrt{r^2-z^2}$	$y=0$	$y=\sqrt{r^2-z^2}$	
$z=0$	1,375	1,25	0	0	1,375	1,25	1,333
$z = \frac{1}{4} r$	1,289	1,172	0	0,303	1,289	1,210	1,25
$z = \frac{1}{2} r$	1,031	0,937	0	0,541	1,031	1,082	1
$z = \frac{3}{4} r$	0,602	0,547	0	0,620	0,602	0,827	0,583
$z = r$	0	0	0	0	0	0	0

251. — Wenn man für einen rechteckigen Querschnitt mit den Seiten $2b$ parallel OY und $2c$ parallel OZ die Entwicklung der Function Q_2 auf die Glieder bis zur 4^{ten} Ordnung incl. beschränkt (welche freilich wegen der Symmetrie bezüglich auf die y -Axe verschwinden: cf. Nr. 249), so findet man die Grenzbedingungen, welche die der y -Axe parallelen Seiten des Umfangs liefern, unverträglich mit denen, welche die anderen Seiten ergeben, und es wird dieser Widerspruch auch dadurch nicht gehoben, dass die Entwicklung von Q_2 bis zu einer grösseren, endlichen Zahl von Gliedern fortgesetzt wird. Beide Umfangsbedingungen lassen sich aber vereinigen, wenn im Ausdrücke von $\frac{dQ_2}{dz}$ (Nr. 249) dem Gliede mit y^2 ein von $3\beta_3$ verschiedener Coefficient beigelegt, nämlich

$$\frac{dQ_2}{dy} = 6\beta_3 y z; \quad \frac{dQ_2}{dz} = \beta_1 - 3\beta_3 z^2 + 3\beta_4 y^2$$

gesetzt wird, was unbeschadet der Gleichung:

$$\frac{d^2 Q_2}{dy^2} + \frac{d^2 Q_2}{dz^2} = 0$$

geschehen kann. Dann folgt:

$$\beta_1 = \frac{m+1}{m} c^2; \quad 3\beta_3 = \frac{2m+1}{2m}; \quad 3\beta_4 = \frac{2m-1}{2m}$$

und damit wegen $B = F \frac{c^2}{3}$:

$$\tau_y = \frac{3}{2} \frac{R_z}{F} \left(1 - \frac{z^2}{c^2} \right); \quad \tau_z = 0$$

in Uebereinstimmung mit Nr. 173.

252. — Der Ausdruck von τ in Nr. 172 ist im Allgemeinen nur ein Mittelwerth von τ_y für die verschiedenen Punkte einer zur Richtungslinie der Schubkraft R_z senkrechten Geraden des Querschnitts. Die Beispiele der beiden vorigen Nummern lassen aber erkennen, dass die Substitution dieses Mittelwerths τ für das veränderliche τ_y unter gleichzeitiger Vernachlässigung von τ_z mit einem um so kleineren Fehler verbunden ist,

je weniger die Tangenten des Umfangs in den Endpunkten der betreffenden zur z -Axe (zu R_z) senkrechten Geraden gegen die z -Axe geneigt sind und je weiter zugleich diese Gerade von der y -Axe entfernt ist, weil in der grössten Entfernung von der y -Axe sich alle Tangentialspannungen auf Null reduciren. Die Beibehaltung des in Nr. 172 ermittelten, für alle Querschnittsformen gültigen, angenäherten Vertheilungsgesetzes der durch eine Schubkraft R_z bedingten Tangentialspannungen im Querschnitte ist also besonders dann vom Gesichtspunkte des praktischen Bedürfnisses aus unbedenklich, wenn der Umfang des Querschnitts von der y -Axe aus nach beiden Seiten hin zunächst nahe parallel der z -Axe bleibt und nur in grösserer Entfernung von der y -Axe einen grösseren Winkel mit der z -Axe bildet, also dort, wo überhaupt die Tangentialspannungen kleiner werden und deswegen einen bestimmenden Einfluss auf den Maximalwerth der Ausdehnung ε , der aus der Verbindung mit etwa gleichzeitigen anderen Einwirkungen resultirt, in geringerem Grade ausüben.

Bei einem doppelt-Tförmigen Querschnitte (Fig. 5, Nr. 48) z. B. ist es ganz richtig, für den schmalen Mitteltheil die Tangentialspannung in allen Abständen z von der y -Axe (Biegungsaxe bei dem gleichzeitigen Vorhandensein eines Kraftmomentes M_y) nach Nr. 172 zu berechnen; nur bei der plötzlichen Verbreiterung des Querschnitts zu den beiden Flanschen würde dies fehlerhaft sein: hier muss eine wesentlich ungleiche Vertheilung von τ_y nach abnehmender Grösse von der z -Axe aus seitwärts eintreten und zugleich eine Seitenspannung τ_z hinzukommen, womit zugleich eine Krümmung der Flanschen nach der Seite hin verbunden ist. In der That aber wird hier auch — abgesehen von jener Tendenz zur seitlichen Verwerfung, der bei sehr breiten und dünnen Flanschen durch entsprechende Absteifungen entgegengewirkt werden kann — der Einfluss der Tangentialspannung ohne Bedeutung für die resultirende Anstrengung des Materials, welche vielmehr nur in der schmalen Mittelwand wesentlich dadurch bedingt wird.

b. Zusammengesetzte Fälle.

253. — Bei dem im Vorhergehenden (Nr. 232 u. ff.) untersuchten allgemeinen Problem war in jedem Punkte irgend eines Querschnitts des geraden stabförmigen Körpers

$$\sigma_y = \sigma_z = \tau_x = 0.$$

Wenn also mit σ der Absolutwerth der Normalspannung σ_x und mit $\tau = \sqrt{\tau_y^2 + \tau_z^2}$ die resultirende Tangentialspannung bezeichnet wird, so sind die grössten Werthe ε' und ε'' der Ausdehnung und der Zusammenrückung in dem betreffenden Punkte nach Nr. 230 bestimmt durch:

$$E\varepsilon' = \pm \frac{m-1}{2m} \sigma + \frac{m+1}{2m} \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2}$$

$$E\varepsilon'' = \mp \frac{m-1}{2m} \sigma + \frac{m+1}{2m} \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2},$$

wobei die oberen oder unteren Zeichen gelten, jenachdem σ eine Spannung im engeren Sinne oder eine Pressung bedeutet. Beide Werthe $E\varepsilon'$ und $E\varepsilon''$ ändern sich von Punkt zu Punkt, und es soll

$$\max. (E\varepsilon') \cong k'; \max. (E\varepsilon'') \cong k''$$

sein. Ist $k' = k'' = k$ oder sind k' und k'' in geringerem Verhältnisse verschieden, als die Maximalwerthe von $E\varepsilon'$ und $E\varepsilon''$, so ist nur der grössere dieser beiden Werthe massgebend, nämlich

$$\max. (E\varepsilon) = \max. \left(\frac{m-1}{2m} \sigma + \frac{m+1}{2m} \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2} \right),$$

welcher höchstens $= k$ sein soll, wenn $k' = k'' = k$ gesetzt wird, oder höchstens $= k'$ resp. k'' , jenachdem σ eine Spannung im engeren Sinne oder eine Pressung ist.

Von den Combinationen, welche die unter **a.** betrachteten einfachen Specialfälle 1) bis 4) zulassen, haben besonders die folgenden praktisches Interesse:

- 1) und 2): Zug oder Druck und Biegung,
- 1) und 3): Zug oder Druck und Verdrehung,
- 2) und 3): Biegung und Verdrehung,
- 2) und 4): Biegung und Verschiebung.

Die erste dieser 4 Combinationen ist schon im dritten Capitel als zusammengesetzte Biegungs-Elasticität und Festigkeit ausführlich behandelt worden.

1. Zug oder Druck und Verdrehung.

254. — Ist P die nach der Axe des geraden Stabes ziehend oder drückend wirkende Kraft, M das auf Verdrehung um die Axe wirkende Kraftmoment, so erzeugt P eine gleichförmig im Querschnitte vertheilte Spannung σ , M aber eine Spannung τ , die in einem gewissen Punkte des Umfangs am grössten ist, und in diesem letzteren Punkte findet deshalb auch der grösste Absolutwerth von $E\varepsilon$ statt.

Ist insbesondere der Querschnitt ein Kreis mit dem Radius r , so ist:

$$\sigma = \frac{P}{\pi r^2}; \max. \tau = \frac{2M}{\pi r^3} \quad (\text{Nr. 187})$$

$$\max. (E\varepsilon) = \frac{P}{\pi r^2} \left(\frac{m-1}{2m} + \frac{m+1}{2m} \sqrt{1 + \left(\frac{4M}{Pr} \right)^2} \right).$$

255. — Nach dieser Formel ist z. B. die Anstrengung zu beurtheilen, welche eine Schraube auszuhalten hat, wenn sie oder die zugehörige Mutter entgegen dem Widerstande P durch das Kraftmoment M gedreht wird; unter r ist dabei der innere Radius des Schraubengewindes, d. h. der Radius des vollen Schraubenkerns zu verstehen.

M und P stehen hierbei in einer gewissen Beziehung zu einander, und zwar ist, wenn

a der mittlere Radius des Gewindes,

α der mittlere Steigungswinkel,

$\mu = \text{tg } \varrho$ der Coefficient der Gewindereibung ist,

für eine Schraube mit flachem Gewinde:

$$\frac{M}{Pa} = \frac{tg\alpha + \mu}{1 - \mu tg\alpha} = tg(\alpha + \varrho)$$

und für eine Schraube mit scharfem Gewinde, wenn noch 2β dessen Kantwinkel oder $\frac{\pi}{2} - \beta$ den Neigungswinkel der Axe gegen die Erzeugungslinie der Schraubensfläche bedeutet:

$$\frac{M}{Pa} = \frac{tg\alpha + \mu \cos\alpha \sqrt{1 + tg^2\alpha + tg^2\beta}}{1 - \mu \sin\alpha \sqrt{1 + tg^2\alpha + tg^2\beta}}$$

oder näherungsweise wegen der Kleinheit von α und bei Einführung eines üblichen Mittelwerthes von β :

$$\frac{M}{Pa} = \frac{tg\alpha + 1,12\mu}{1 - 1,12\mu tg\alpha}$$

Zum Anziehen der Mutter einer Befestigungsschraube ist zwar, um den Druck P auszuüben, wegen der hinzukommenden Reibung an der Grundfläche der Mutter ein grösseres Kraftmoment, als dieses M , erforderlich; doch wird nur durch den hier mit M bezeichneten Theil dieses Kraftmoments, welcher der Steigung der Schraube und der Reibung im Gewinde entspricht, der Schraubenbolzen auf Verdrehung in Anspruch genommen.

2. Biegung und Verdrehung.

256. — Auf den geraden stabförmigen Körper wirken Kräfte, welche rechtwinkelig und im Allgemeinen windschief gegen die Axe gerichtet sind; für einen beliebigen Querschnitt F geben sie ein auf Biegung wirkendes Moment M_1 , dessen Ebene rechtwinkelig zu F , und ein auf Drehung wirkendes Moment M_2 , dessen Ebene parallel F ist. M_1 ändert sich im Allgemeinen beständig von einem zum anderen Querschnitte, M_2 nur plötzlich in denjenigen Querschnittsebenen, in denen solche äussere Kräfte liegen, deren Richtungslinien die Axe nicht schneiden.

Die durch M_1 bedingte grösste Normalspannung σ des betrachteten Querschnitts findet in dem von der Biegungsaxe entferntesten Punkte A_1 , die durch M_2 bedingte grösste Tangentialspannung τ im Allgemeinen in einem anderen Punkte A_2 des Umfangs statt; fallen die Punkte A_1 und A_2 zusammen, so ist ebendasselbst auch ε am grössten.

Sind die Hauptträgheitsmomente B und C des Querschnitts einander gleich = J , so ist (cf. Nr. 188) näherungsweise (streng genommen nur für den Kreis):

$$\max. \tau = \frac{M_2 e}{2J}$$

in demjenigen Punkte A_2 , dessen Entfernung vom Schwerpunkte am grössten = e ist; liegt dieser Punkt in der Ebene des Momentes M_1 , so fällt er mit A_1 zusammen und es ist:

$$\max. \sigma = \frac{M_1 e}{J}$$

$$\max. (E\varepsilon) = \frac{e}{J} \left(\frac{m-1}{2m} M_1 + \frac{m+1}{2m} \sqrt{M_1^2 + M_2^2} \right).$$

257. — Nach dieser Formel ist insbesondere die Anstrengung einer Transmissionswelle zu beurtheilen, wenn bei grösserer Länge der Welle die Schwerkkräfte und Theilrisskräfte von Rädern, Riemscheiben etc. nicht so klein sind oder nicht so nahe bei den Lagern angreifen, dass ihre biegende Wirkung gegen die verdrehende Wirkung des übertragenen Kraftmomentes vernachlässigt werden darf. Indem bei der Rotation der Welle die Ebene des Momentes M_1 ihre Lage im Raum nicht ändert, geht der Punkt des Umfangs, in welchem τ am grössten ist, abwechselungsweise auf der einen und anderen Seite der Biegungsaxe durch diese Ebene von M_1 hindurch, und es ist deshalb der obige Ausdruck von $\max. (E\epsilon)$ wechselsweise $= \max. (E\epsilon')$ und $= \max. (E\epsilon'')$. Ist also k der kleinere der beiden höchstens zugelassenen Werthe k' und k'' von $E\epsilon'$ resp. $E\epsilon''$, so sind die Dimensionen des Querschnitts der Bedingung

$$k = \frac{e}{J} \left(\frac{m-1}{2m} M_1 + \frac{m+1}{2m} \sqrt{M_1^2 + M_2^2} \right)$$

gemäss zu bestimmen, worin für M_1 der grösste Werth des Biegemomentes für irgend einen Querschnitt desjenigen Wellenstücks zu setzen ist, wodurch das Drehungsmoment M_2 übertragen wird.*) Für eine cylindrische Welle vom Durchmesser d ist insbesondere

$$\frac{e}{J} = \frac{32}{\pi d^3}.$$

3. Biegung und Verschiebung.

258. — Für irgend einen Querschnitt sei M das auf Biegung wirkende Kraftmoment, R die resultirende Schubkraft; die Ebene von M theile den Querschnitt in zwei symmetrische Hälften, und der Schnitt (die Symmetriexaxe) sei die Richtungslinie von R . Die Biegungsaxe ist dann senkrecht zu diesem Schnitt, und wenn

*) Zur angenäherten Berechnung eines Ausdrucks von der Form $\sqrt{x^2 + y^2}$ ist es nützlich zu bemerken, dass man setzen kann:

$$\sqrt{x^2 + y^2} = ax + by,$$

wenn nur den Coefficienten a und b angemessene Werthe beigelegt werden, welche um so richtiger bestimmt werden können, zwischen je engeren Grenzen das Verhältniss $\frac{y}{x}$ liegend vorausgesetzt wird.

Ist nur $\frac{y}{x} < 1$ gegeben, so ist zu setzen:

$$\sqrt{x^2 + y^2} = 0,96x + 0,4y$$

mit einem Fehler von höchstens 4 Procent des wahren Werthes der zu berechnenden Wurzelgrösse; für $\frac{y}{x} < \frac{1}{2}$ ist:

$$\sqrt{x^2 + y^2} = 0,986x + 0,23y$$

mit einem Fehler von höchstens $\frac{4}{3}$ Procent, für $\frac{1}{2} < \frac{y}{x} < 1$:

$$\sqrt{x^2 + y^2} = 0,816x + 0,59y$$

mit einem Fehler von höchstens $\frac{2}{3}$ Procent des wahren Werthes.

J das Trägheitsmoment des Querschnitts in Beziehung auf die Biegungsaxe,
 y die Breite im Abstände z von der letzteren,
 e den Maximalwerth von z ,
 $dF = y dz$ einen der Biegungsaxe parallelen Flächenstreifen bedeutet,
 so ist in allen Punkten der Breitenlinie y :

$$\sigma = \frac{Mz}{J}$$

und näherungsweise nach Nr. 172:

$$\tau = \frac{R}{Jy_z} \int z dF;$$

folglich nach Nr. 253 für den ganzen Querschnitt:

$$\max. (E\varepsilon) = \frac{M}{J} \cdot \max. \left(\frac{m-1}{2m} z + \frac{m+1}{2m} \sqrt{z^2 + \left[\frac{2R}{My_z} \int z dF \right]^2} \right).$$

Der dem Maximum entsprechende Werth von z ist von der Form des Querschnitts und von dem Verhältnisse zwischen M und R abhängig.

259. — Es sei z. B. ein parallelepipedischer Körper, dessen Querschnitt ein Rechteck mit den Seiten b und c ist; am einen Ende befestigt, am anderen frei und hier, im Abstände a von der Befestigungsstelle, durch die parallel den Seiten c wirkende und die Axe rechtwinkelig schneidende Kraft P angegriffen. Die gefährlichste Wirkung findet dann in dem unmittelbar an der Befestigungsstelle liegenden Querschnitt statt, und zwar ergibt die obige Formel mit

$$y = b; \quad e = \frac{c}{2}; \quad J = \frac{bc^3}{12}; \quad R = P; \quad M = Pa$$

für eine Breitenlinie im Abstände $z = \alpha \frac{c}{2}$ von der Biegungsaxe jenes Querschnitts:

$$E\varepsilon = \frac{6Pa}{bc^2} \left(\frac{m-1}{2m} \alpha + \frac{m+1}{2m} \sqrt{\alpha^2 + \frac{c^2}{4a^2} (1-\alpha^2)^2} \right),$$

z. B. mit $m = 4$:

$$E\varepsilon = \frac{3Pa}{4bc^2} \cdot f(\alpha); \quad f(\alpha) = 3\alpha + 5 \sqrt{\alpha^2 + \frac{c^2}{4a^2} (1-\alpha^2)^2}.$$

Die Art und Weise, wie sich $f(\alpha)$ mit α ändert und wie dieses Aenderungsgesetz durch den Werth des Verhältnisses $\frac{a}{c}$ bedingt wird, macht die folgende tabellarische Zusammenstellung anschaulich.

α	$\frac{a}{c} = \frac{1}{16}$	$\frac{a}{c} = \frac{2}{16}$	$\frac{a}{c} = \frac{4}{16}$	$\frac{a}{c} = \frac{5}{16}$	$\frac{a}{c} = \frac{6}{16}$	$\frac{a}{c} = \frac{8}{16}$
	$f(\alpha)$	$f(\alpha)$	$f(\alpha)$	$f(\alpha)$	$f(\alpha)$	$f(\alpha)$
0	40	20	10	8	6,667	5
0,1	39,903	20,106	10,213	8,236	6,919	5,275
0,2	beständige Abnahme bis ...	19,813	10,252	8,345	7,078	5,503
0,3		beständige Abnahme bis ...	10,123	8,333	7,149	5,691
0,4		9,835	8,211	7,146	5,852	
0,5		9,406	8	7,090	6,007	
0,6		8,868	7,734	7,016	6,186	
0,7		8,285	7,476	6,979	6,430	
0,8		7,781	7,329	7,065	6,786	
0,9		8,590	7,585	7,450	7,375	7,299
1	8	8	8	8	8	8

Hiernach ist für $\frac{a}{c} = \frac{5}{16} : f(0) = f\left(\frac{1}{2}\right) = f(1) = 8$ und zwischen $f(0)$ und $f\left(\frac{1}{2}\right)$ liegt ein Maximum, zwischen $f\left(\frac{1}{2}\right)$ und $f(1)$ ein Minimum von $f(\alpha)$.

Für grössere Werthe von $\frac{a}{c}$ bleiben zwar das Maximum und das Minimum einstweilen noch bestehen, allein sehr bald, z. B. schon für $\frac{a}{c} = \frac{3}{8}$ wird das Maximum kleiner, als der unveränderliche Grenzwert $f(1) = 8$. Wird $\frac{a}{c}$ noch grösser, so verschwinden das Maximum und das Minimum von $f(\alpha)$ gänzlich, und z. B. schon für $\frac{a}{c} = \frac{1}{2}$ findet eine beständige Zunahme statt von $f(0)$ bis $f(1)$.

Wird $\frac{a}{c} < \frac{5}{16}$, so wird zunächst das Maximum verhältnissmässig weniger von $f(0)$, das Minimum verhältnissmässig weniger von $f(1)$ verschieden; alsbald bei weiterer Abnahme von $\frac{a}{c}$ verschwindet zunächst das Minimum gänzlich, z. B. schon für $\frac{a}{c} = \frac{1}{8}$, später auch das Maximum, z. B. schon für $\frac{a}{c} = \frac{1}{16}$, bei welchem wie bei jedem noch kleineren Verhältnisse $\frac{a}{c}$ eine beständige Abnahme von $f(0)$ bis $f(1)$ stattfindet.

Uebrigens ist das etwa noch vorhandene Maximum für $\frac{a}{c} \cong \frac{5}{16}$ stets nur so wenig $> f(1)$ und für $\frac{a}{c} \cong \frac{5}{16}$ stets nur so wenig $> f(0)$, dass man mit einem für praktische Anwendungen meistens unwesentlichen Fehler, je nachdem

$$\frac{a}{c} \cong \frac{5}{16}, \text{ d. h. } \cong \frac{m+1}{4m}$$

ist, das grösste $f(a) = f(1)$ oder $= f(0)$ setzen, d. h. den Körper auf blosse Biegungsfestigkeit oder auf blosse Schubfestigkeit berechnen darf.

260. — Das rechteckige Gewinde einer Schraube von schwacher Steigung, welche nach der Richtung ihrer Axe den Druck P auszuüben hat, ist, soweit es in der Mutter enthalten ist, als ein prismatischer Körper wie der in der vorigen Nr. untersuchte zu betrachten, dessen Dimension b die beiden anderen bedeutend übertrifft; es ist nämlich $b =$ dem Umfange des Schraubenkerns multiplicirt mit der Anzahl der in der Mutter enthaltenen Windungen, $c =$ der Dicke des Gewindes zu setzen.

Wenn das Gewinde ohne irgend einen Spielraum in das entsprechende Muttergewinde passt, so ist eine Biegung unmöglich, die Maximalanstrengung folglich nach der in der Anhaftungsfläche hervorgerufenen grössten Tangentialspannung zu beurtheilen, welche nach Nr. 173:

$$\text{max. } \tau = \frac{3}{2} \frac{P}{bc}$$

ist. Ist aber ein Spielraum vorhanden, der bis zu einem gewissen Grade eine Biegung zulässt, so ist die Dimension a der vorigen Nr. $= \frac{t}{2} =$ der halben Tiefe (dem halben Vorsprung) des Gewindes zu setzen, wenn man den Druck P in der mittleren Schraubenlinie concentrirt denkt, in welcher in der That nahezu die entgegengesetzt gebogenen Gewinde der Schraube und der Mutter sich berühren müssten; sofern nun $t \cong c$ ist, wäre $\frac{t}{2c} = \frac{a}{c} \cong \frac{1}{2}$, also gewiss $> \frac{m+1}{4m}$, das Gewinde folglich nur auf Biegung zu berechnen, wodurch die grösste Spannung:

$$\text{max. } \sigma = \frac{P \cdot \frac{t}{2} \cdot \frac{c}{2}}{bc^2} = \frac{3Pt}{12c^2}$$

hervorgerufen wird.*)

Ist d der Durchmesser des Schraubenkerns (der innere Durchmesser des Gewindes), h die Höhe der Mutter, so kann man auch setzen:

$$bc = \frac{\pi dh}{2}$$

und deshalb im 1^{ten} Falle: $\text{max. } \tau = \frac{3P}{\pi dh}$,

im 2^{ten} Falle: $\text{max. } \sigma = \frac{6Pt}{\pi dhc} = \frac{6P}{\pi dh}$ mit $t = c$.

*) Zur Ermöglichung einer die Elasticitätsgrenze nicht überschreitenden Biegung bedarf es nur eines äusserst geringen Spielraums; wenn freilich die Belastung bis zum Bruch gesteigert wird, so kann es sein, dass jener Spielraum nicht mehr genügt und deshalb die schliessliche Zerstörung des Gewindes mehr durch Abschiebung, als durch Biegung erfolgt.

Dieselben Formeln gelten für das Muttergewinde, wenn unter d der äussere (grössere) Durchmesser verstanden wird; die Mutter läuft also geringere Gefahr einer übermässigen Anstrengung, sofern nicht etwa die Festigkeit des Materials, woraus sie besteht, in bedeutenderem Masse, als im Verhältnisse des inneren zum äusseren Gewindedurchmesser, kleiner ist, als die Festigkeit des Materials der Schraubenspindel.

261. — Aus der Untersuchung in Nr. 259 ist zu schliessen, dass auch in anderen Fällen, sofern nur nicht der Querschnitt in der Biegungsaxe sich auf eine geringere Breite zusammenzieht und deshalb τ erst in grösserer Entfernung von derselben mit wachsendem z merklich abnimmt, der Körper ohne grossen Fehler auf blosse Biegefestigkeit oder auf blosse Schubfestigkeit berechnet werden darf, jenachdem

$$E\varepsilon \text{ für } z = e \geq E\varepsilon \text{ für } z = 0$$

ist, folglich, mit Rücksicht auf die allgemeinere Formel für $E\varepsilon$ in Nr. 258, jenachdem

$$\frac{Me}{J} \geq \frac{m+1}{m} \frac{R}{Jy_0} \int_0^e z dF \text{ oder } \frac{M}{R} \geq \frac{m+1}{m} \frac{\int_0^e z dF}{ey_0}$$

ist, unter y_0 die Breite in der Biegungsaxe verstanden. (Cf. Nr. 174.) Dass insbesondere für den kreisförmigen Querschnitt diese Bemerkung mit ungefähr demselben Rechte gilt, wie für den rechteckigen, folgt aus dem analogen Abhängigkeitsgesetze zwischen x und z in beiden Fällen: cf. Nr. 173.

262. — Bei einem doppelt-Tförmigen Querschnitte (Fig. 5, Nr. 48), der in Beziehung auf die Biegungsaxe symmetrisch vorausgesetzt werden möge ($b = b_1$ und $d = d_1$), darf man die Dimensionen b , d und e blos mit Rücksicht auf das Biegemoment M bestimmen; die Dimension a dagegen ist von M und R zugleich abhängig zu machen, nämlich von dem grössten Werthe von ε , der irgend einem Werthe von $z < f$ ($= e - d$) entspricht. In dieser Beziehung genügt es, den grösseren der beiden Grenzwerte von $E\varepsilon$, welche $z = 0$ und $z = f$ entsprechen, als massgebend zu Grunde zu legen; dieselben sind:

$$z = 0; E\varepsilon_0 = \frac{m+1}{m} \frac{R}{J} \frac{H_0}{a}$$

$$z = f; E\varepsilon_1 = \frac{M}{J} \left(\frac{m-1}{2m} f + \frac{m+1}{2m} \sqrt{f^2 + 4 \left(\frac{R}{M} \frac{H_1}{a} \right)^2} \right)$$

$$\text{mit } J = \frac{2}{3} [be^3 - (b-a)f^3]$$

$$H_1 = \int_f^e z dF = bd \left(e - \frac{d}{2} \right) = b \frac{e^2 - f^2}{2}$$

$$H_0 = \int_0^e z dF = H_1 + \frac{af^2}{2}.$$

Welcher von diesen beiden Grenzwerten der grössere ist, hängt von den Dimensionsverhältnissen und von dem Verhältnisse $\frac{M}{R}$ ab; man findet $E\varepsilon_1 \geq E\varepsilon_0$ jenachdem

$$\frac{M^2}{R^2} + \frac{m^2 - 1}{m} \frac{H_0}{af} \frac{M}{R} \geq \frac{(m+1)^2}{m} \frac{H_0^2 - H_1^2}{a^2 f^2}$$

oder $\frac{M}{R} \geq \frac{m+1}{m} \frac{1}{af} \left(-\frac{m-1}{2} H_0 + \sqrt{\left(\frac{m+1}{2}\right)^2 H_0^2 - m H_1^2} \right)$

ist, für $m = 3$ z. B. jenachdem

$$\frac{M}{R} \geq \frac{4}{3af} \left(-H_0 + \sqrt{4H_0^2 - 3H_1^2} \right).$$

263. — Die rationellste Querschnittsform wäre diejenige, bei welcher in jedem Abstände z von der Biegungsaxe

$$E\varepsilon = \text{Const.} = \frac{Me}{J}$$

oder:

$$\frac{m-1}{2m} z + \frac{m+1}{2m} \sqrt{z^2 + \left[\frac{2R}{My} \int z dF \right]^2} = e$$

ist, eine Bedingung, welche, wenn

$$z = \alpha e \text{ und } \sqrt{1 - \frac{m-1}{m} \alpha - \frac{1}{m} \alpha^2} = f(\alpha)$$

gesetzt wird, auf die Form:

$$\frac{Re}{My} \int_0^1 y \alpha d\alpha = \frac{m}{m+1} \cdot f(\alpha)$$

gebracht werden kann und zu der Differentialgleichung führt:

$$\frac{dy}{y} = - \frac{df(\alpha) + \frac{m+1}{m} \frac{Re}{M} \alpha d\alpha}{f(\alpha)}$$

Die Integration giebt, wenn α den Werth von y für $\alpha = 0$ bedeutet:

$$\lg \frac{y}{a} = - \lg f(\alpha) - \frac{Re}{M} \cdot \varphi(\alpha)$$

$$\varphi(\alpha) = 0,43429 \dots (m+1) \left[1 - f(\alpha) - \frac{m-1}{2\sqrt{m}} \left(\arcsin \frac{2\alpha + m - 1}{m+1} - \arcsin \frac{m-1}{m+1} \right) \right].$$

Die Logarithmen sind gemeine. Insbesondere für $m = 4$ sind die $\alpha = 0,1; 0,2 \dots 0,9$ entsprechenden Werthe von $-\lg f(\alpha)$ und $\varphi(\alpha)$, so wie auch die Werthe von $\frac{y}{a}$, welche sich damit ergeben, wenn beispielsweise

$$\frac{M}{Re} = 5$$

gesetzt wird,*) in der folgenden Tabelle zusammengestellt.

*) Wenn ein an beiden Enden unterstützter Balken in der Mitte die Last P trägt, so wächst M vom Ende bis zur Mitte von 0 bis $\frac{Pl}{4}$ oder von 0 bis $5Pe$, wenn etwa

α	$-\lg f(\alpha)$	$\varphi(\alpha)$	$\frac{y}{a}$
0,1	0,01752	0,00280	1,040
0,2	0,03786	0,01144	1,085
0,3	0,06175	0,02677	1,139
0,4	0,09023	0,04938	1,203
0,5	0,12494	0,08065	1,285
0,6	0,16862	0,12256	1,394
0,7	0,22642	0,17811	1,552
0,8	0,30990	0,25337	1,816
0,9	0,45593	0,36348	2,417

Für $\alpha = 1$ ergibt sich $\frac{y}{a} = \infty$, und es ist deshalb vollkommen diese ideale Querschnittsform nicht zu realisiren.

264. — Eine nur angenäherte Verwirklichung ist übrigens auch schon dadurch geboten, dass das hier zu Grunde liegende Vertheilungsgesetz der Tangentialspannung τ selbst nur angenähert richtig ist und um so unrichtiger wird, je mehr sich der Umfang des Querschnitts gegen die z -Axe neigt, während α der Grenze 1 sich nähert (cf. Nr. 252). Begnügt man sich deshalb, nur von $\alpha = 0$ bis $\alpha = \alpha_1$ der Forderung $E\varepsilon = \frac{Me}{J}$ zu entsprechen, während von $\alpha = \alpha_1$ bis $\alpha = 1$ die Breite y constant $= b$ gemacht wird, so ist mit $y = A\alpha$, unter A die in voriger Nr. bestimmte, von dem Verhältnisse $\frac{M}{Re}$ abhängige Function von α verstanden:

$$\int_0^e z dF = e^2 \int_0^1 y \alpha da = e^2 \left(a \int_0^{\alpha_1} A \alpha da + b \frac{1 - \alpha_1^2}{2} \right)$$

$$J = 2 \int_0^e z^2 dF = 2e^3 \int_0^1 y \alpha^2 da = 2e^3 \left(a \int_0^{\alpha_1} A \alpha^2 da + b \frac{1 - \alpha_1^3}{3} \right).$$

Ist nun der von $\alpha = 0$ bis $\alpha = \alpha_1$ constante Werth von $E\varepsilon$, welcher insbesondere für $\alpha = 0$ den Ausdruck:

$$\frac{m+1}{m} \frac{R}{Ja} \int_0^e z dF$$

hat, $= k$ gegeben, so sind durch die beiden Gleichungen

$$\frac{Me}{J} = \frac{m+1}{m} \frac{R}{Ja} \int_0^e z dF = k$$

$l = 20e$ oder die Länge das 10fache der Höhe wäre; R wäre dabei constant $= \frac{P}{2}$,

also $\frac{M}{Re} = 0$ bis 10, so dass die Voraussetzung $\frac{M}{Re} = 5$ dem Mittelwerthe oder demjenigen Querschnitte eines solchen Balkens entspräche, welcher auf $\frac{1}{4}$ der Länge vom Ende aus gerechnet liegt.

mit Rücksicht auf die obigen Ausdrücke von $\int_0^e z dF$ und J zwei der 4 Grössen a , b , e , a_1 bestimmt, wenn die übrigen gegeben sind. Sind etwa e und a_1 gegeben, so sind a und b bestimmt durch

$$\frac{b}{a} = \frac{\frac{m}{m+1} \frac{M}{Re} - \int_0^{a_1} A da}{\frac{1-a_1^2}{2}}$$

und

$$\int_0^{a_1} A a^2 da + b \frac{1-a_1^3}{3} = \frac{M}{2e^2 k}.$$

Die Integrale $\int_0^{a_1} A da$ und $\int_0^{a_1} A a^2 da$ sind durch mechanische Quadratur zu berechnen, nachdem die Zahlenwerthe von $A = \frac{y}{a}$ für den betreffenden Querschnitt und für eine Werthreihe von a nach der vorigen Nr. berechnet wurden. Für das dort gerechnete Beispiel findet man

$$\text{mit } a_1 = 0,8 \text{ oder } 0,9$$

$$\frac{b}{a} = 19,8 \text{ resp. } 35,6.$$

Weil aber M und $\frac{M}{Re}$ von einem zum anderen Querschnitte eines Trägers sich ändern, so müsste die ganze Rechnung für eine Reihe von Querschnitten wiederholt werden, um so zu derjenigen Trägerform zu gelangen, bei welcher die Widerstandstähigkeit des Materials den Umständen gemäss so vollkommen als möglich verwerthet ist.)*

265. — Schliesslich ist zu bemerken, dass auch die Biegung eines geraden stabförmigen Körpers unter der Einwirkung von Kräften, welche seine Axe rechtwinkelig schneiden, zum Theil durch die verschiebende Wirkung der Kräfte R für die verschiedenen Querschnitte bedingt ist.

Sind O und O_1 zwei Punkte der Axe eines prismatischen Stabes in der Entfernung x von einander, und wird O als Anfangspunkt der Coordinatenachsen angenommen, so dass O_1 in der positiven x -Axe liegt, so erhält man die Verrückung von O_1 gegen O nach der Richtung OZ , d. h. die auf die

*) Es bedarf wohl kaum der Erwähnung, dass diese Aufgabe mehr ein theoretisches, als praktisches Interesse hat, indem die Modell- oder sonstigen Herstellungskosten eines solchen Trägers ohne Zweifel die Materialersparniss im Vergleich mit einem gewöhnlichen doppelt-Tförmigen Träger mehr als aufwiegen würden. Bei einem Blechträger wird bis zu einem gewissen Grade schon von selbst der theoretischen Form entsprochen durch die Winkeleisen, welche die Mittelwand mit den Gurtungen verbinden.

xz -Ebene und die x -Axe bezogene Durchbiegung bei O_1 aus dem Ausdrucke von ζ in Nr. 239 mit $y = z = 0$:

$$\zeta = -a_2 \frac{x^2}{2} - b_2 \frac{x^3}{6} + x \left(\frac{dQ}{dz} \right)_0$$

oder weil nach derselben Nr.

$$\left(\frac{dQ}{dz} \right)_0 = \frac{\tau_0}{G} = \gamma_0$$

ist, unter τ_0 den Werth von τ_y für $y = z = 0$ und unter γ_0 die entsprechende Verschiebung verstanden, auch:

$$\zeta = -a_2 \frac{x^2}{2} - b_2 \frac{x^3}{6} + \gamma_0 x.$$

Dabei ist nur vorausgesetzt, dass zwischen den Querschnitten bei O und O_1 keine äusseren Kräfte auf die Oberfläche des Körpers wirken, und es ist nach Nr. 240 und 241:

$$a_2 = \frac{M}{EJ}; \quad b_2 = \frac{R}{EJ},$$

wenn M (positiv für die Drehungsrichtung zx), R (positiv für die Richtung OZ) und J die in Nr. 258 erklärten Bedeutungen haben.

Wenn insbesondere auf den von der yz -Ebene nach der Richtung OX hin liegenden Stabtheil keine anderen Kräfte wirken, als eine in O_1 angreifende und nach der z -Axe gerichtete Kraft P , so ist

$$R = P \text{ und } M = -Px$$

$$\zeta = \frac{P}{EJ} \frac{x^3}{3} + \gamma_0 x.$$

Der erste Summand ist hier diejenige Durchbiegung, welche sich nach den Formeln des zweiten Capitels ergibt, der zweite folglich die Correction mit Rücksicht auf die Verschiebung der Querschnitte, und es ist daraus allgemein zu schliessen, dass die nach den Regeln des zweiten Capitels in irgend einem Falle berechnete Durchbiegung durch einen Summanden von der Form

$$\int \gamma_0 dx = \frac{1}{G} \int \tau_0 dx$$

corrigirt werden muss. Mit

$$\tau_0 = \frac{R}{Jy_0} \int z dF$$

nach Nr. 172 (y_0 = Breite in der Biegungsaxe) ist aber für den obigen speciellen Fall:

$$\gamma_0 x = \frac{P}{GJ} \frac{x}{y_0} \int z dF = \frac{P}{EJ} \frac{x^3}{3} \frac{3E}{Gx^2 y_0} \int z dF$$

und $\frac{3E}{Gx^2 y_0} \int z dF$ eine kleine Grösse der 2^{ten} Ordnung, wenn die Querschnittsdimensionen klein im Vergleich mit der Länge x sind. In solchen Fällen kann deshalb überhaupt ohne wesentlichen Fehler von der fraglichen Correction Abstand genommen werden.

B. Plattenförmige Körper.

266. — Es häufen sich hier die Schwierigkeiten einer strengen Behandlung, so dass man darauf hingewiesen wird, vor Allem zunächst die einfachsten Specialfälle zu untersuchen, deren Resultate dann als Anhaltspunkte für die Beurtheilung weniger einfacher Fälle dienen können.

Ausser einer solchen Vereinfachung, worauf schon die Untersuchung der stabförmigen Körper sub A. beruhte und welche in der Voraussetzung solcher Körperformen und Belastungszustände besteht, die es gestatten, gewisse der 6 Spannungen

$$\sigma_x \quad \sigma_y \quad \sigma_z \quad \tau_x \quad \tau_y \quad \tau_z$$

mit voraussichtlich nur kleinem Fehler für alle Punkte des Körpers a priori = Null zu setzen, wird aber eine weitere Vereinfachung durch die Voraussetzung solcher Körperformen und Belastungszustände herbeigeführt, wobei sich a priori Schaaren von Linien oder von Flächen der Art im Körper angeben lassen, dass in allen Punkten je einer solchen Linie oder Fläche derselbe Spannungszustand, sowie eine gleich grosse und senkrecht zu der betreffenden Linie oder Fläche gleicher Spannung gerichtete Verrückung stattfindet. Die im Allgemeinen drei Verrückungscomponenten ξ, η, ζ werden dadurch offenbar im Falle der Linien gleicher Spannung auf nur zwei, im Falle der Flächen gleicher Spannung auf nur eine reducirt.

In einem solchen Falle ist es dann auch angemessen, das rechtwinkelige Coordinatensystem durch ein anderes zu ersetzen, welches sich den Linien oder Flächen gleicher Spannung anschliesst, sowie den Körper in entsprechend andere Elemente zu zerlegen, wodurch natürlich die Bedingungen des Gleichgewichts zwischen den Spannungen und der äusseren Kraft eines solchen Körperelements von anderer Form werden, als die allgemeinen Gleichungen (I) in Nr. 229.

I. Kugelschale mit gleichförmiger Dicke und symmetrischer Belastung.

267. — Die gleichförmig dicke Wand eines kugelförmigen Gefässes sei einem gleichförmigen inneren und äusseren Normaldrucke ausgesetzt;

r_1 sei der innere, r_2 der äussere Radius,

p_1 " " " , p_2 " " " Druck auf die Einheit der Oberfläche.

Eine beliebige zwischen den beiden Oberflächen liegende, mit ihnen concentrische Kugelfläche, deren Radius = r sei, ist eine Fläche gleicher Spannung; für einen beliebigen Punkt derselben sei

ρ die Verrückung nach der Richtung des Radius r , positiv, wenn auswärts gerichtet,

σ_r die Normalspannung in radialer Richtung,

σ_φ die nach jeder tangentialen Richtung gleich grosse Normalspannung.

Alle diese Grössen sind Functionen bloß von r ; σ_r und σ_φ sind Hauptspannungen.

Für einen beliebigen Punkt der Kugelfläche mit dem Radius r ist ferner:

$\frac{dQ}{dr}$ die Ausdehnung nach der Richtung des Radius,

$\frac{Q}{r}$ die Ausdehnung nach jeder tangentialen Richtung,

also der Volumenausdehnungskoeffizient:

$$\mu = \frac{dQ}{dr} + 2 \frac{Q}{r}$$

und nach den Gleichungen (VI) in Nr. 229:

$$\sigma_r = 2G \left(\frac{dQ}{dr} + \frac{\mu}{m-2} \right) = \frac{2G}{m-2} \left[(m-1) \frac{dQ}{dr} + 2 \frac{Q}{r} \right]$$

$$\sigma_\varphi = 2G \left(\frac{Q}{r} + \frac{\mu}{m-2} \right) = \frac{2G}{m-2} \left(\frac{dQ}{dr} + m \frac{Q}{r} \right).$$

Denkt man nun von zwei Radien, welche den Winkel $d\varphi$ mit einander bilden, den einen um den anderen gedreht und dadurch aus der Kugelschale, deren innerer Radius = r und deren äusserer Radius = $r + dr$ ist, ein unendlich kleines Körperelement herausgeschnitten, so wird dasselbe begrenzt von den als eben zu betrachtenden Calotten:

$$\pi r^2 d\varphi^2 \text{ und } \pi (r + dr)^2 d\varphi^2$$

und von der Kegelfläche: $2\pi r d\varphi dr$. Die Spannungen dieser Flächen sind Normalspannungen und auf die Flächeneinheit bezogen resp.

$$= \sigma_r; \sigma_r + \frac{d\sigma_r}{dr} dr; \sigma_\varphi.$$

Abgesehen von einer auf die Masse des Körperelements etwa wirkenden äusseren Kraft wird nun das Gleichgewicht der Spannungen seiner Oberfläche ausgedrückt durch die Gleichung:

$$\left(\sigma_r + \frac{d\sigma_r}{dr} dr \right) \cdot \pi (r + dr)^2 d\varphi^2 = \sigma_r \cdot \pi r^2 d\varphi^2 + \sigma_\varphi d\varphi \cdot 2\pi r d\varphi dr,$$

welche bei Weglassung der unendlich kleinen Glieder von höherer, als der dritten Ordnung, sich auf die folgende Gleichung reducirt, die sonach hier an die Stelle der Gleichungen (I) in Nr. 229 tritt:

$$\frac{d\sigma_r}{dr} = \frac{2}{r} (\sigma_\varphi - \sigma_r).$$

Mit Rücksicht auf die obigen Ausdrücke von σ_r und σ_φ geht sie über in:

$$\frac{d^2 Q}{dr^2} + 2 \frac{dQ}{dr} = 0 \text{ und liefert: } \frac{dQ}{dr} + 2 \frac{Q}{r} = \mu = \text{Const.},$$

woraus durch eine zweite Integration, wodurch eine neue Constante c eingeführt wird, folgt:

$$\frac{Q}{r} = \frac{\mu}{3} + \frac{c}{r^3}; \quad \frac{dQ}{dr} = \frac{\mu}{3} - 2 \frac{c}{r^3},$$

folglich:

$$\sigma_r = 2G \left(\frac{\mu}{3} - 2 \frac{c}{r^3} + \frac{\mu}{m-2} \right) = A - 2 \frac{B}{r^3}$$

$$\sigma_\varphi = 2G \left(\frac{\mu}{3} + \frac{c}{r^3} + \frac{\mu}{m-2} \right) = A + \frac{B}{r^3},$$

wenn die aus μ und c zusammengesetzten Constanten kürzer mit A und B bezeichnet werden. Die letzteren sind dadurch bestimmt, dass

$$\sigma_r = -p_1 \text{ sein muss für } r = r_1$$

$$\text{und } \sigma_r = -p_2 \text{ „ „ „ „ } r = r_2.$$

Die Einsetzung der hiernach bestimmten Werthe von A und B giebt:

$$\sigma_r = \frac{1}{r_2^3 - r_1^3} \left[p_1 r_1^3 - p_2 r_2^3 + (p_2 - p_1) \frac{r_1^3 r_2^3}{r^3} \right]$$

$$\sigma_\varphi = \frac{1}{r_2^3 - r_1^3} \left[p_1 r_1^3 - p_2 r_2^3 + (p_1 - p_2) \frac{r_1^3 r_2^3}{2r^3} \right]$$

und endlich für die entsprechenden Hauptausdehnungen ε_r und ε_φ (cf. Nr. 229, Gl. V):

$$E\varepsilon_r = \sigma_r - \frac{2\sigma_\varphi}{m} = \frac{1}{r_2^3 - r_1^3} \left[\frac{m-2}{m} (p_1 r_1^3 - p_2 r_2^3) + \frac{m+1}{m} (p_2 - p_1) \frac{r_1^3 r_2^3}{r^3} \right]$$

$$E\varepsilon_\varphi = \sigma_\varphi - \frac{\sigma_r + \sigma_\varphi}{m} = \frac{1}{r_2^3 - r_1^3} \left[\frac{m-2}{m} (p_1 r_1^3 - p_2 r_2^3) + \frac{m+1}{2m} (p_1 - p_2) \frac{r_1^3 r_2^3}{r^3} \right].$$

268. Wenn die kleinere der beiden Pressungen p_1 und p_2 nicht wesentlich grösser, als der atmosphärische Druck ist, so kann man sie = 0 und die andere = dem Ueberdrucke p ($= p_1 - p_2$ resp. $= p_2 - p_1$) setzen, um so mehr, als ja die Festigkeitscoefficienten, mit denen man schliesslich rechnet, aus Versuchen in der atmosphärischen Luft, nicht etwa im leeren Raume, ohne weitere Reduction abgeleitet werden.

Für inneren Ueberdruck ($p_1 > p_2$) ist dann mit $p_2 = 0$ und $p_1 = p$:

$$E\varepsilon_r = - \frac{p r_1^3}{r_2^3 - r_1^3} \left(\frac{m+1}{m} \frac{r_2^3}{r^3} - \frac{m-2}{m} \right)$$

$$E\varepsilon_\varphi = \frac{p r_1^3}{r_2^3 - r_1^3} \left(\frac{m+1}{2m} \frac{r_2^3}{r^3} + \frac{m-2}{m} \right)$$

$$\text{max. } (-E\varepsilon_r) = p \frac{(m+1)r_2^3 - (m-2)r_1^3}{m(r_2^3 - r_1^3)} \text{ für } r = r_1$$

$$\text{max. } (E\varepsilon_\varphi) = p \frac{(m+1)r_2^3 + 2(m-2)r_1^3}{2m(r_2^3 - r_1^3)} \text{ für } r = r_1.$$

Die grösste Anstrengung des Materials findet folglich an der Innenfläche der Kugelschale statt. Soll eine positive Ausdehnung höchstens $= \frac{k'}{E}$, der Absolutwerth einer negativen Ausdehnung höch-

stens $= \frac{k''}{E}$ sein, so erhält man

$$\text{entsprechend } \max. (-E\varepsilon_r) = k' : \frac{r_2}{r_1} = \sqrt[3]{\frac{mk' - (m-2)p}{mk' - (m+1)p}}$$

$$\text{entsprechend } \max. (E\varepsilon_\varphi) = k' : \frac{r_2}{r_1} = \sqrt[3]{\frac{2mk' + 2(m-2)p}{2mk' - (m+1)p}}$$

und es ist $\frac{r_2}{r_1}$ zur Berechnung der Wandstärke $\delta = r_2 - r_1$ bei gegebenem Werthe von r_1 oder r_2 dem grösseren dieser beiden Wurzelwerthe gleich zu setzen, also = dem ersten oder zweiten, jenachdem

$$k' \geq \frac{m-1}{2} k' - \frac{(m+1)(m-2)}{2m} p$$

ist. Mit $k' = k'' = k$ ist der erste Ausdruck der grössere, also

$$\frac{r_2}{r_1} = \sqrt[3]{\frac{mk - (m-2)p}{mk - (m+1)p}}$$

zu setzen, wenn

$$\frac{p}{k} > \frac{m(m-3)}{(m+1)(m-2)}$$

ist, was für $m=3$ immer stattfindet. Jedenfalls muss $p < \frac{m}{m+1} k$ sein, widrigenfalls der Forderung durch keine noch so grosse Wandstärke entsprochen werden könnte. Ist aber $\frac{p}{k}$ ein kleiner Bruch, so kann näherungsweise gesetzt werden*):

$$\frac{\delta}{r_1} = \frac{1}{m} \frac{p}{k} \left(1 + \frac{p}{k} \right).$$

269. — Für äusseren Ueberdruck ($p_2 > p_1$) ist mit $p_1 = 0$ und $p_2 = p$:

$$E\varepsilon_r = \frac{p r_2^3}{r_2^3 - r_1^3} \left(\frac{m+1}{m} \frac{r_1^3}{r^3} - \frac{m-2}{m} \right)$$

$$E\varepsilon_\varphi = -\frac{p r_2^3}{r_2^3 - r_1^3} \left(\frac{m+1}{2m} \frac{r_1^3}{r^3} + \frac{m-2}{m} \right);$$

ε_r ist überall positiv, wenn $\frac{r_1}{r_2} > \sqrt[3]{\frac{m-2}{m+1}}$, z. B. mit $m=3$, wenn $\frac{r_1}{r_2} > \sqrt[3]{\frac{1}{4}} = 0,63$ ist. Dies vorausgesetzt, ist:

$$\max. (E\varepsilon_r) = p \frac{3}{m} \frac{r_2^3}{r_2^3 - r_1^3} \text{ für } r = r_1,$$

$$\text{während immer } \max. (-E\varepsilon_\varphi) = p \frac{3(m-1)}{2m} \frac{r_2^3}{r_2^3 - r_1^3} \text{ für } r = r_1$$

*) Sind x und y kleine Brüche, so ist mit Vernachlässigung kleiner Grössen von höherer, als der 2^{ten} Ordnung:

$$\sqrt[3]{\frac{1+x}{1+y}} = 1 + \frac{1}{n}(x-y) \left[1 - \frac{n-1}{2n}x - \frac{n+1}{2n}y \right];$$

daraus erhält man die obige Näherungsformel mit

$$\frac{r_2}{r_1} = 1 + \frac{\delta}{r_1}; \quad n = 3; \quad x = -\frac{m-2}{m} \frac{p}{k}; \quad y = -\frac{m+1}{m} \frac{p}{k}.$$

und folglich auch hier das Material an der Innenfläche der Kugelschale am stärksten angestrengt ist.

$$\text{max. } (E \varepsilon_r) = k' \text{ entspricht } \frac{r_1}{r_2} = \sqrt[3]{1 - \frac{3}{m} \frac{p}{k}}$$

$$\text{max. } (-E \varepsilon_\varphi) = k'' \text{ entspricht } \frac{r_1}{r_2} = \sqrt[3]{1 - \frac{3(m-1)}{2m} \frac{p}{k''}},$$

und wenn eine positive Ausdehnung höchstens $= \frac{k'}{E}$, der Absolutwerth einer negativen höchstens $= \frac{k''}{E}$ sein soll, so ist $\frac{r_1}{r_2}$ dem kleineren beider Wurzelwerthe gleich zu setzen, also = dem ersten oder zweiten, jenachdem

$$k'' \geq \frac{m-1}{2} k'.$$

Mit $k' = k'' = k$ ist die Wandstärke $\delta = r_2 - r_1$ jedenfalls vermittels der Formel:

$$\frac{r_1}{r_2} = \sqrt[3]{1 - \frac{3(m-1)}{2m} \frac{p}{k}}$$

zu berechnen, welche, wenn $\frac{p}{k}$ ein kleiner Bruch ist, näherungsweise ersetzt werden kann durch:

$$\frac{\delta}{r_1} = \frac{m-1}{2m} \frac{p}{k} \left(1 + \frac{m-1}{m} \frac{p}{k} \right).$$

II. Umdrehungskörper mit symmetrischer Belastung.

270. — Für irgend einen Punkt O des Körpers sind hier naturgemäss 3 zu einander senkrechte ausgezeichnete Richtungen zu unterscheiden:

die axiale Richtung OA ,

die radiale Richtung OR und

die tangentielle Richtung $O\Phi$, d. h. die Richtung der Tangente des durch den Punkt O gehenden Parallelkreises. Dieser Parallelkreis ist eine Linie gleicher Spannung; alle seine Punkte erfahren gleiche Verrückungen und zwar nur nach axialer und radialer Richtung, welche resp. mit a und q bezeichnet seien. Ist dann noch r der Radius des betreffenden Parallelkreises, so sind die Ausdehnungen nach den genannten 3 ausgezeichneten Richtungen:

$$\varepsilon_a = \frac{da}{a}; \quad \varepsilon_r = \frac{dq}{r}; \quad \varepsilon_\varphi = \frac{q}{r}.$$

Die Grössen a und q sind als Functionen von a (Entfernung der Ebene des Parallelkreises von einem festen Punkte der Körperaxe) und r bestimmt durch 2 Gleichgewichtsbedingungen der auf ein Körperelement wirkenden Kräfte in Verbindung mit den Oberflächenbedingungen. Ein solches Element (Fig. 36) wird aus dem Körper naturgemäss herausgeschnitten durch zwei zur Axe im Abstände $OA = da$ senkrechte Ebenen,

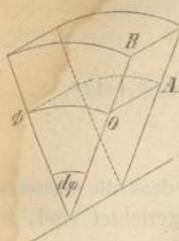


Fig. 36.

zwei unter dem Winkel $d\varphi$ gegen einander geneigte Meridianebenen und zwei concentrische Cylinderflächen mit den Radien r und $r + dr$. Von den 3 ursprünglich rechten Winkeln an den Kanten OA , OB und $O\Phi$ dieses Körperelementes kann durch die symmetrische Belastung, infolge welcher der Körper nach wie vor ein vollkommener Umdrehungskörper bleibt, offenbar nur der letzte eine Aenderung erfahren; von den drei Tangentialspannungen τ_a , τ_r und τ_φ sind also die beiden ersten $= 0$, die dritte werde einfach mit τ bezeichnet. Damit liegt der in Nr. 231 betrachtete Specialfall vor, und es ist von den 3 Normalspannungen σ_a , σ_r und σ_φ die letzte eine Hauptspannung.

Als äussere auf die Masse des Körperelementes wirkende Kraft kann hier, während die Schwere stets zu vernachlässigen ist, unter Umständen die Centrifugalkraft einen wesentlichen Einfluss haben, wenn nämlich der Körper in schneller Rotation um seine Axe begriffen ist; die äussere Kraft werde daher radial gerichtet vorausgesetzt und pro Volumeinheit mit R bezeichnet.

Von den 6 Gleichgewichtsbedingungen der auf das Körperelement wirkenden Kräfte (bezogen auf 3 Axen, die vom Schwerpunkte dieses Elements nach der Richtung a und nach den betreffenden Richtungen r und φ gezogen werden) liefern nur diejenigen nicht identische Gleichungen, welche ausdrücken, dass die Componentensummen der Kräfte nach den Richtungen a und $r = \text{Null}$ sein müssen, und zwar:

$$\frac{d\sigma_a}{da} + \frac{1}{r} \frac{d(r\tau)}{dr} = 0$$

$$\frac{1}{r} \frac{d(r\sigma_r)}{dr} - \frac{\sigma_\varphi}{r} + \frac{dr}{da} + R = 0.$$

Wenn man in diesen Gleichungen, welche an die Stelle der allgemeinen Gleichungen (I) in Nr. 229 treten, den dortigen Gleichungen (VI) gemäss die Ausdrücke

$$\sigma_a = 2G \left(\frac{da}{da} + \frac{\mu}{m-2} \right) = \frac{2G}{m-2} \left[(m-1) \frac{da}{da} + \frac{d\varphi}{dr} + \frac{\varphi}{r} \right]$$

$$\sigma_r = 2G \left(\frac{d\varphi}{dr} + \frac{\mu}{m-2} \right) = \frac{2G}{m-2} \left[\frac{da}{da} + (m-1) \frac{d\varphi}{dr} + \frac{\varphi}{r} \right]$$

$$\sigma_\varphi = 2G \left(\frac{\varphi}{r} + \frac{\mu}{m-2} \right) = \frac{2G}{m-2} \left[\frac{da}{da} + \frac{d\varphi}{dr} + (m-1) \frac{\varphi}{r} \right]$$

$$\tau = G \left(\frac{da}{dr} + \frac{d\varphi}{da} \right)$$

einführt (τ ist dabei positiv oder negativ, jenachdem der Winkel an der Kante $O\Phi$ des Körperelementes Fig. 36 kleiner oder grösser, als ein rechter wird), so sind dadurch mit Berücksichtigung der Oberflächenbedingungen bei der Integration der Gleichungen die Grössen a und φ bestimmbar, folglich auch die Spannungen σ_a , σ_r , σ_φ und τ sowie endlich nach Nr. 231 die Hauptausdehnungen:

$$E \varepsilon_1 = \sigma_\varphi - \frac{\sigma_a + \sigma_r}{m}$$

$$E \begin{pmatrix} \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \end{pmatrix} = -\frac{1}{m} \sigma_\varphi + \frac{m-1}{2m} (\sigma_a + \sigma_r) \pm \frac{m+1}{2m} \sqrt{(\sigma_a - \sigma_r)^2 + 4\tau^2},$$

von denen die erste nach der Richtung φ stattfindet.

271. — Ist überall $\sigma_a = \text{Null}$, was voraussetzt, dass die äusseren Kräfte an der Oberfläche des Körpers senkrecht zur Axe gerichtet sind, so folgt aus den Gleichungen der vorigen Nr.:

$$\frac{d\alpha}{d\alpha} = -\frac{\frac{d\rho}{dr} + \frac{\rho}{r}}{m-1}$$

$$\sigma_r = \frac{2G}{m-1} \left(m \frac{d\rho}{dr} + \frac{\rho}{r} \right)$$

$$\sigma_\varphi = \frac{2G}{m-1} \left(\frac{d\rho}{dr} + m \frac{\rho}{r} \right)$$

$$\tau = G \left(\frac{d\alpha}{dr} + \frac{d\rho}{d\alpha} \right).$$

Dabei sind α und ρ bestimmt durch die Gleichungen:

$$\frac{d(r\tau)}{dr} = 0; \quad \frac{1}{r} \frac{d(r\sigma_r)}{dr} - \frac{\sigma_\varphi}{r} + \frac{d\alpha}{d\alpha} + R = 0$$

in Verbindung mit den Oberflächenbedingungen, und schliesslich ist:

$$E \varepsilon_1 = \sigma_\varphi - \frac{1}{m} \sigma_r$$

$$E \begin{pmatrix} \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \end{pmatrix} = -\frac{1}{m} \sigma_\varphi + \frac{m-1}{2m} \sigma_r \pm \frac{m+1}{2m} \sqrt{\sigma_r^2 + 4\tau^2}.$$

a. Hohlzylinder bei gleichförmig vertheiltem Normaldrucke auf die innere und äussere Cylinderfläche.

1. Der Hohlzylinder ist an den Enden offen und frei.

272. — Indem auf den Rand des Hohlzylinders keine Kräfte wirken, auch diese Ränder ganz frei sein sollen, so dass alle Querschnitte sich in gleicher Weise erweitern oder zusammenziehen können, jenachdem der innere oder äussere Druck überwiegend ist, so ist hier nicht nur σ_a , sondern auch τ überall = Null;

$\sigma_a = 0$, σ_r , σ_φ sind also Hauptspannungen,

ε_a , ε_r , ε_φ Hauptausdehnungen

und zwar für alle Querschnitte gleich, nur abhängig von r .

Von den beiden Gleichgewichtsbedingungen (Nr. 271) wird die erste identisch, die zweite geht mit $R = 0$ über in:

$$\frac{d(r\sigma_r)}{dr} - \sigma_\varphi = 0$$

und die Einführung der Ausdrücke von σ_r und σ_φ liefert durch eine erste Integration:

$$\frac{d\varrho}{dr} + \frac{\varrho}{r} = b = \text{Const.},$$

womit auch der Volumenausdehnungskoeffizient

$$\mu = \frac{d\alpha}{d\alpha} + \frac{d\varrho}{dr} + \frac{\varrho}{r} = \frac{m-2}{m-1} b$$

constant wird. Die zweite Integration giebt, unter c eine andere Constante verstanden:

$$\frac{\varrho}{r} = \frac{b}{2} + \frac{c}{r^2}; \text{ also } \frac{d\varrho}{dr} = \frac{b}{2} - \frac{c}{r^2}$$

und durch Einführung in die Ausdrücke von σ_r und σ_φ :

$$\sigma_r = \frac{2G}{m-1} \left[(m+1) \frac{b}{2} - (m-1) \frac{c}{r^2} \right] = A - \frac{B}{r^2}$$

$$\sigma_\varphi = \frac{2G}{m-1} \left[(m+1) \frac{b}{2} + (m-1) \frac{c}{r^2} \right] = A + \frac{B}{r^2},$$

sowie nach Nr. 229, Gl. (V):

$$E\varepsilon_a = -\frac{\sigma_r + \sigma_\varphi}{m} = -\frac{2}{m} A$$

$$\left. \begin{aligned} E\varepsilon_r &= \sigma_r - \frac{1}{m} \sigma_\varphi \\ E\varepsilon_\varphi &= \sigma_\varphi - \frac{1}{m} \sigma_r \end{aligned} \right\} = \frac{m-1}{m} A \mp \frac{m+1}{m} \frac{B}{r^2}.$$

Die zur Abkürzung eingeführten neuen Constanten A und B sind, wenn r_1 den inneren, r_2 den äusseren Radius,

p_1 " " " " p_2 " " " " Druck auf die Einheit der Oberfläche bedeutet, dadurch bestimmt, dass

$$\sigma_r = -p_1 \text{ resp. } = -p_2 \text{ sein muss für } r = r_1 \text{ resp. } r_2.$$

Somit erhält man:

$$\begin{aligned} A &= \frac{p_1 r_1^2 - p_2 r_2^2}{r_2^2 - r_1^2}; \quad B = (p_1 - p_2) \frac{r_1^2 r_2^2}{r_2^2 - r_1^2} \\ \left. \begin{aligned} \sigma_r \\ \sigma_\varphi \end{aligned} \right\} &= \frac{1}{r_2^2 - r_1^2} \left[p_1 r_1^2 - p_2 r_2^2 \mp (p_1 - p_2) \frac{r_1^2 r_2^2}{r^2} \right] \\ E\varepsilon_a &= -\frac{2}{m} \frac{p_1 r_1^2 - p_2 r_2^2}{r_2^2 - r_1^2} \\ \left. \begin{aligned} E\varepsilon_r \\ E\varepsilon_\varphi \end{aligned} \right\} &= \frac{1}{r_2^2 - r_1^2} \left[\frac{m-1}{m} (p_1 r_1^2 - p_2 r_2^2) \mp \frac{m+1}{m} \frac{r_1^2 r_2^2}{r^2} \right]. \end{aligned}$$

273. — Wenn die kleinere der beiden Pressungen p_1 und p_2 nicht wesentlich grösser, als der atmosphärische Druck ist (cf. Nr. 268), so ist für inneren Ueberdruck ($p_1 > p_2$) mit $p_2 = 0$ und $p_1 = p$:

$$\begin{aligned} E\varepsilon_a &= -\frac{2}{m} \frac{p r_1^2}{r_2^2 - r_1^2} \\ E\varepsilon_r &= -\frac{p r_1^2}{r_2^2 - r_1^2} \left(\frac{m+1}{m} \frac{r_2^2}{r^2} - \frac{m-1}{m} \right) \\ E\varepsilon_\varphi &= \frac{p r_1^2}{r_2^2 - r_1^2} \left(\frac{m+1}{m} \frac{r_2^2}{r^2} + \frac{m-1}{m} \right); \end{aligned}$$

$$\text{max. } (-E\varepsilon_r) = p \frac{(m+1)r_2^2 - (m-1)r_1^2}{m(r_2^2 - r_1^2)} \text{ für } r = r_1 \text{ ist } > -E\varepsilon_a$$

$$\text{max. } (E\varepsilon_\varphi) = p \frac{(m+1)r_2^2 + (m-1)r_1^2}{m(r_2^2 - r_1^2)} \text{ für } r = r_1;$$

die grösste Anstrengung des Materials findet an der Innenfläche des Hohlzylinders statt.

$$\text{max. } (-E\varepsilon_r) = k' \text{ entspricht } \frac{r_2}{r_1} = \sqrt{\frac{mk' - (m-1)p}{mk' - (m+1)p}}$$

$$\text{max. } (E\varepsilon_\varphi) = k \text{ entspricht } \frac{r_2}{r_1} = \sqrt{\frac{mk' + (m-1)p}{mk' - (m+1)p}};$$

von diesen Werthen ist der erste oder zweite der grössere, also für die Bestimmung der Wandstärke $\delta = r_2 - r_1$ massgebend, jenachdem

$$k' \leq \frac{k}{m} + \frac{m^2 - 1}{m^2} p$$

ist. Mit $k' = k'' = k$ ist

$$\frac{r_2}{r_1} = \sqrt{\frac{mk + (m-1)p}{mk - (m+1)p}}$$

zu setzen; jedenfalls muss $p < \frac{m}{m+1} k$ sein. Ist aber $\frac{p}{k}$ ein kleiner Bruch, so kann gesetzt werden:

$$\frac{\delta}{r_1} = \frac{p}{k} \left(1 + \frac{m+2}{2m} \frac{p}{k} \right).$$

274. — Für äusseren Ueberdruck ($p_2 > p_1$) ist mit $p_1 = 0$ und $p_2 = p$:

$$E\varepsilon_a = \frac{2}{m} \frac{pr_2^2}{r_2^2 - r_1^2}$$

$$E\varepsilon_r = \frac{pr_2^2}{r_2^2 - r_1^2} \left(\frac{m+1}{m} \frac{r_1^2}{r^2} - \frac{m-1}{m} \right)$$

$$E\varepsilon_\varphi = -\frac{pr_2^2}{r_2^2 - r_1^2} \left(\frac{m+1}{m} \frac{r_1^2}{r^2} + \frac{m-1}{m} \right).$$

$$E\varepsilon_a = \text{max. } (E\varepsilon_r) = \frac{2}{m} \frac{pr_2^2}{r_2^2 - r_1^2} \text{ für } r = r_1$$

$$\text{max. } (-E\varepsilon_\varphi) = 2 \frac{pr_2^2}{r_2^2 - r_1^2} \text{ für } r = r_1,$$

also wieder die Anstrengung des Materials an der Innenfläche des Hohlzylinders am grössten.

$\text{Max. } (-E\varepsilon_\varphi) = k'$ ist massgebend für die erforderliche Wandstärke $\delta = r_2 - r_1$, sofern nur $k' > \frac{k}{m}$ ist; $\text{max. } (-E\varepsilon_\varphi) = k$ gesetzt giebt:

$$\frac{r_1}{r_2} = \sqrt{1 - \frac{2p}{k}}$$

und näherungsweise, wenn $\frac{p}{k}$ ein kleiner Bruch ist:

$$\frac{\delta}{r_1} = \frac{p}{k} \left(1 + \frac{3}{2} \frac{p}{k} \right).$$

275. — Die nach den Formeln der vorhergehenden Nummern berechneten Wanddicken von Röhren können bei mässigem Ueberdrucke kleiner ausfallen, als die Art des Materials mit Rücksicht auf die technische Herstellung oder die Forderung der Undurchdringlichkeit für tropfbare oder luftförmige Flüssigkeiten gestattet. Diese untere Grenze der zulässigen Wanddicke beträgt

für Röhren aus Kupfer und Messing etwa 1 Millim.

"	"	"	Blei, Zink und Stahl	"	2	"
"	"	"	Eisenblech	"	3	"
"	"	"	Gusseisen	"	5	"

unter welche deshalb im Allgemeinen nicht hinabgegangen wird, wenn auch die betreffende Formel einen kleineren Werth ergeben sollte.

Weil ferner die Röhren zumeist noch anderweitigen Einwirkungen unterworfen sind, auf welche jene Formeln keine Rücksicht nehmen, wie z. B. der Verbiegung durch ihre eigene Schwere, besonders wenn sie nicht auf ihrer ganzen Länge, sondern nur in einzelnen Punkten unterstützt sind, so werden sogar gewöhnlich jene praktischen Grenzwerte den berechneten Werthen von δ als constante Summanden zu grösserer Sicherheit beigefügt. Bei Röhren, welche einem äusseren Ueberdrucke unterworfen sind, kommt die Gefahr hinzu, dass bei zufälliger Abweichung des Querschnitts von der genauen Kreisform solche Abplattung zunimmt und schliesslich der Bruch durch Zerknickung herbeigeführt werden kann, ein Umstand, dessen rationelle Berücksichtigung auf ähnliche Schwierigkeiten führt, wie die Zerknickungsfestigkeit eines geraden Stabes.

Endlich ist noch zu bemerken, dass wesentlich andere Verhältnisse, als im Vorhergehenden vorausgesetzt wurden, dann eintreten müssen; wenn die Röhren an den Enden nicht frei sind, so dass sich nicht alle Querschnitte in gleichem Masse erweitern oder zusammenziehen können. Bis zu einem gewissen Grade ist dies z. B. schon dann der Fall, wenn die einzelnen Röhren einer Rohrleitung durch Flanschen mit einander verschraubt sind, noch mehr bei einer Röhre, die an den Enden durch Böden geschlossen ist, wie z. B. ein cylindrischer Dampfkessel; bei innerem Ueberdrucke findet dann eine Ausbauchung der Röhre, d. h. in der Mitte eine stärkere Erweiterung statt, als an den Enden. Die Längsfasern der Rohrwand werden also zugleich gebogen und es werden dadurch neue Ausdehnungen nach der Richtung der Axe bedingt, welche unter Umständen gefährlicher werden können, als die oben berechneten. Eine nähere Untersuchung dieses Falles enthalten die folgenden Nummern.

2. Der Hohleylinder ist an den Enden festgeklemmt oder durch Böden geschlossen.

276. — Die strenge Untersuchung führt hier zu sehr grossen Schwierigkeiten, welche sich indessen durch einige zwar willkürliche, aber unbedenkliche Annahmen umgehen oder vermindern lassen, wenn die Wanddicke $\delta = r_2 - r_1$ sehr klein im Vergleich mit dem Durchmesser der Röhre ist, und zwar so klein, dass schon die erste Potenz des Verhältnisses beider gegen 1 vernachlässigt werden darf; auf diesen Fall und zwar bei innerem Ueberdrucke = p pro Flächeneinheit beschränkt sich die folgende Untersuchung. Die radiale Spannung σ_r ist dann von untergeordneter Bedeutung im Vergleich mit den Spannungen σ_x und σ_φ

(ebenso wie bei einem dünnen Stabe, der durch eine stetig vertheilte Last transversal beschwert ist, die entsprechende transversale Pressung stets sehr klein ist im Vergleich mit den durch die Biegung bedingten Längenspannungen); wird deshalb

$$\sigma_r = 0$$

gesetzt, so ist analog den Ausdrücken von σ_r und σ_φ in Nr. 271, wenn hier x und ξ an die Stelle der in Nr. 270 erklärten Buchstaben a und a gesetzt werden:

$$\sigma_x = \frac{2G}{m-1} \left(m \frac{d\xi}{dx} + \frac{\rho}{r} \right); \quad \sigma_\varphi = \frac{2G}{m-1} \left(\frac{d\xi}{dx} + m \frac{\rho}{r} \right).$$

Mit r soll im Folgenden der ursprüngliche Radius der Mittelfläche des Hohlzylinders, mit ρ die Verlängerung dieses Radius bezeichnet werden; wenn dann gleichwohl obige Ausdrücke von σ_x und σ_φ unverändert gelassen werden, so wird dadurch die Ausdehnung $\varepsilon_\varphi = \frac{\rho}{r}$ als blosse Function von x , d. h. als constant für alle Punkte desselben ringförmigen Querschnitts in Rechnung gestellt. Ferner sei:

y die Entfernung eines Punktes von der mittleren Cylinderfläche, positiv nach Aussen, negativ nach Innen,

R der Krümmungsradius der Meridianlinie der verbogenen Mittelfläche,

$q = f(x)$ die Gleichung dieser Meridianlinie, bezogen auf die entsprechende Seite der ursprünglich cylindrischen Mittelfläche als x -Axe (Fig. 37), während der Anfangspunkt O vorläufig unbestimmt bleiben möge.

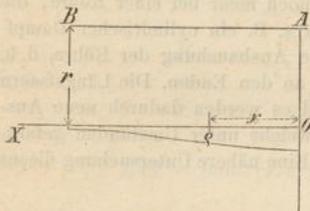


Fig. 37.

Bliebe der geometrische Ort der materiellen Punkte, welche ursprünglich in einem Radius lagen, auch bei der Deformation eine zur Mittelfläche senkrechte Gerade, so wäre, unter ε_x° die axiale Ausdehnung in der Mittelfläche verstanden,

$$\frac{d\xi}{dx} = \varepsilon_x = \varepsilon_x^\circ \pm \frac{y}{R} \quad (\text{cf. Nr. 41}),$$

und zwar \pm , jenachdem der Krümmungsmittelpunkt nach der Seite der Cylinderaxe AB hin oder auf der anderen Seite liegt, jenachdem also näherungsweise

$$\frac{1}{R} = \mp \frac{d^2 q}{dx^2}$$

ist, womit für alle Fälle

$$\frac{d\xi}{dx} = \varepsilon_x^\circ - y \frac{d^2 q}{dx^2}$$

wird; wenn auch diese Annahme wegen der Wirkung der Tangentialspannungen τ streng genommen nicht zutrifft, so lässt sich doch erwarten, dass sie ebensowenig ein wesentlich fehlerhaftes Resultat ergeben werde, als es sich bei der Biegung von stabförmigen Körpern unter **A.** dieses Capitels, verglichen mit den Untersuchungen des zweiten Capitels, gezeigt hat.

Wird dieser Werth von $\frac{d\xi}{dx}$ in die Ausdrücke von σ_x und σ_φ eingeführt, ferner $G = \frac{1}{2} \frac{m}{m+1} E$ gesetzt und ε_x^0 mit Rücksicht darauf bestimmt, dass in allen Punkten der Mittelfläche

$$\sigma_x^0 = \frac{P}{F} = \frac{P}{2\pi r \delta}$$

sein muss, wenn P die an den Enden auf den Rand des Hohlcyinders nach der Richtung der Axe im Allgemeinen wirkende Zugkraft ist, so ergibt sich:

$$\begin{aligned}\varepsilon_x^0 &= \frac{m^2 - 1}{m^2} \frac{P}{EF} - \frac{1}{m} \frac{\rho}{r} \\ \sigma_x &= \frac{P}{F} - \frac{m^2}{m^2 - 1} E y \frac{d^2 \rho}{dx^2} \\ \sigma_\varphi &= \frac{1}{m} \frac{P}{F} + E \frac{\rho}{r} - \frac{m}{m^2 - 1} E y \frac{d^2 \rho}{dx^2}.\end{aligned}$$

Ist der Hohlcyinder durch Böden geschlossen, welche auch dem inneren Ueberdrucke p ausgesetzt sind, so ist:

$$\frac{P}{F} = \frac{pr}{2\delta}.$$

277. — Zur Bestimmung der Tangentialspannung τ kann nun die erste der beiden Gleichgewichtsbedingungen sub Nr. 270 dienen, nämlich die Gleichung:

$$\frac{d\sigma_x}{dx} + \frac{1}{r} \frac{d(r\tau)}{dy} = \frac{d\sigma_x}{dx} + \frac{d\tau}{dy} = 0.$$

Ihre Integration liefert bei Einführung des zuvor gewonnenen Ausdrucks von σ_x und mit Rücksicht darauf, dass an den Oberflächen, d. h. für $y = \pm \frac{\delta}{2}$ die Spannung τ verschwinden muss:

$$\tau = -\frac{m^2}{m^2 - 1} E \frac{\delta^2 - 4y^2}{8} \frac{d^3 \rho}{dx^3}.$$

Die zweite jener Gleichgewichtsbedingungen, welche mit $\sigma_r = 0$ übergeht in:

$$\frac{\sigma_\varphi}{r} - \frac{d\tau}{dx} = R,$$

ist endlich zur Bestimmung der in den Ausdrücken von σ_x , σ_φ und τ vorkommenden Function ρ , d. h. zur Bestimmung der Gleichung $\rho = f(x)$ der Meridianlinie der verbogenen Mittelfläche disponibel geblieben. Diese Gleichung, welche dadurch entstanden ist, dass die algebraische Summe der nach radialer Richtung auf das Volumenelement $= r dx dy d\varphi$ (Fig. 36) wirkenden Kräfte = Null gesetzt und dann durch den Inhalt dieses Volumenelements dividirt wurde, hat indessen mit der Voraussetzung $\sigma_r = 0$ ihre Berechtigung verloren; um ihr dieselbe wieder zu geben, muss sie mit dem Volumenelement wieder multiplicirt, nach y von $-\frac{\delta}{2}$ bis $+\frac{\delta}{2}$ inte-

grit, d. h. auf ein aus der ganzen Dicke der cylindrischen Wand herausgeschnittenes Element ausgedehnt, und endlich statt des Gliedes mit R (da auf die Masse selbst eine bewegende Kraft nicht wirken soll) der Ueberdruck $= p r dx d\varrho$ auf die Innenfläche dieses Elements gesetzt werden. So ergibt sich mit Rücksicht auf die obigen Ausdrücke von σ_z und τ die Gleichung:

$$\frac{d^4 \varrho}{dx^4} + 12 \frac{m^2 - 1}{m^2} \frac{\varrho}{r^2 \delta^2} = 12 \frac{m^2 - 1}{m^2} \frac{1}{E \delta^3} \left(p - \frac{1}{m} \frac{P}{F} \frac{\delta}{r} \right),$$

welche durch die Substitution:

$$\varrho = \frac{r^2}{E \delta} \left(p - \frac{1}{m} \frac{P}{F} \frac{\delta}{r} \right) + z = A + z$$

auf die einfachere Form gebracht wird:

$$\frac{d^4 z}{dx^4} + 12 \frac{m^2 - 1}{m^2} \frac{z}{r^2 \delta^2} = 0$$

$$\text{oder } \frac{d^4 z}{dx^4} + 4a^4 z = 0 \text{ mit } a = \sqrt[4]{\frac{3(m^2 - 1)}{m^2 r^2 \delta^2}}.$$

Bei der geschlossenen Röhre ist mit $\frac{P}{F} = \frac{p r}{2 \delta}$ (Nr. 276) insbesondere:

$$A = \frac{2m - 1}{2m} \frac{p r^2}{E \delta}.$$

278. — Der Differentialgleichung:

$$\frac{d^4 z}{dx^4} + 4a^4 z = 0$$

entspricht das allgemeine Integral:

$$z = C_1 e^{n_1 x} + C_2 e^{n_2 x} + C_3 e^{n_3 x} + C_4 e^{n_4 x},$$

unter e die Basis der natürlichen Logarithmen,

C_1, C_2, C_3, C_4 Constante, und unter

n_1, n_2, n_3, n_4 die Wurzeln der Gleichung:

$$n^4 + 4a^4 = 0$$

verstanden, nämlich:

$$\left. \begin{matrix} n_1 \\ n_2 \end{matrix} \right\} = a(1 \pm \sqrt{-1}); \quad \left. \begin{matrix} n_3 \\ n_4 \end{matrix} \right\} = a(-1 \pm \sqrt{-1}).$$

Durch Einführung neuer Constanten f, g, f_1 und g_1 , welche mit den alten durch die Gleichungen

$$f = C_1 + C_2; \quad g = (C_1 - C_2) \sqrt{-1}$$

$$f_1 = C_3 + C_4; \quad g_1 = (C_3 - C_4) \sqrt{-1}$$

verbunden sind, lässt sich die imaginäre Form des Integrals in die reelle Form:

$$z = e^{ax} [f \cos(ax) + g \sin(ax)] + e^{-ax} [f_1 \cos(ax) + g_1 \sin(ax)]$$

verwandeln. Die Constanten sind durch die Verhältnisse bestimmt, in welchen die Enden des Hohlcylinders sich befinden. Wenn insbesondere beide Enden denselben Bedingungen unterworfen sind, so dass eine in Beziehung auf die mittlere Querschnittsebene symmetrische Verbie-

gung stattfindet, so muss, wenn noch der Anfangspunkt O der x -Axe in diesen mittleren Querschnitt gelegt wird (Fig. 37), für $x = 0$ sein:

$$\frac{dq}{dx} = \frac{dz}{dx} = 0 \text{ und } \tau = 0 \text{ für jedes } y, \text{ also } \frac{d^3q}{dx^3} = \frac{d^3z}{dx^3} = 0.$$

Diese Bedingungen ergeben:

$$f_1 = f \text{ und } g_1 = -g$$

und damit:

$$q = A + z = A + f(e^{ax} + e^{-ax}) \cos(ax) + g(e^{ax} - e^{-ax}) \sin(ax).$$

Zur vollständigen Bestimmung der Aufgabe werde endlich noch angenommen, die Röhre sei an den Enden so festgehalten, dass weder eine Erweiterung des Querschnitts, noch eine Neigung der Meridianlinie der Mittelfläche gegen die Axe daselbst möglich, dass also, unter l die halbe Länge der Röhre verstanden,

$$\text{für } x = l: q = 0 \text{ und } \frac{dq}{dx} = 0$$

ist. Die entsprechende Bestimmung der noch übrigen Constanten f und g lässt sich dann durch die Bemerkung vereinfachen, dass immer, sofern nur nicht etwa l viel kleiner als r ist, e^{-al} als sehr klein gegen e^{al} vernachlässigt werden kann*). Mit dieser Vernachlässigung erhält man:

$$f = -A \frac{\cos(al) + \sin(al)}{e^{al}}; \quad g = A \frac{\cos(al) - \sin(al)}{e^{al}}$$

$$q = A \left\{ 1 - [\cos(al) + \sin(al)] \frac{e^{ax} + e^{-ax}}{e^{al}} \cos(ax) \right. \\ \left. + [\cos(al) - \sin(al)] \frac{e^{ax} - e^{-ax}}{e^{al}} \sin(ax) \right\}.$$

279. — Mit Rücksicht auf die Art der Verbiegung der Mittelfläche des Hohlcyinders lassen die Ausdrücke von σ_x , σ_φ und τ in Nr. 276 und 277 erkennen, dass die grössten Absolutwerthe

$$\text{von } \sigma_x \text{ für } x = 0, y = \frac{\delta}{2} \text{ und } x = l, y = -\frac{\delta}{2},$$

$$\text{von } \sigma_\varphi \text{ für } x = 0, y = \frac{\delta}{2},$$

von τ für $x = l, y = 0$ stattfinden. Zur Berechnung dieser Maximalwerthe, an deren Oertern auch der grösste Absolutwerth der resultirenden

*) Mit $m = 3$ findet man z. B.

$$al = l \sqrt{\frac{3(m^2 - 1)}{m^2 r^2 \delta^2}} = 4 \frac{l}{r} \text{ für } \delta = \frac{r}{9,8},$$

somit $e^{al} = 54,6$ etwa 2981 Mal so gross, als $e^{-al} = \frac{1}{54,6}$, wenn auch nur $l = r$ gesetzt wird. Wäre $\delta < \frac{r}{10}$ oder $l > r$, so wäre die fragliche Vernachlässigung in noch höherem Grade gerechtfertigt.

Ausdehnung ε nach irgend einer Richtung zu suchen ist, bedarf es nur der Kenntniss von q , $\frac{d^2 q}{dx^2}$ und $\frac{d^3 q}{dx^3}$ für $x = 0$ und $x = l$. Werden diese Specialwerthe entsprechend $x = 0$ und $x = l$ durch die Zeiger 0 und 1 angedeutet, so hat man, wenn zur Abkürzung

$$2 \frac{\cos(al) + \sin(al)}{e^{al}} = \alpha; \quad 2 \frac{\cos(al) - \sin(al)}{e^{al}} = \beta$$

$$\sqrt[3]{\frac{3(m^2-1)}{m^2}} = n, \quad \text{also } a = \frac{n}{\sqrt{r\delta}}$$

gesetzt wird:

$$q_0 = A(1-\alpha); \quad q_1 = 0$$

$$\left(\frac{d^2 q}{dx^2}\right)_0 = \frac{2n^2}{r\delta} A\beta; \quad \left(\frac{d^2 q}{dx^2}\right)_1 = \frac{2n^2}{r\delta} A$$

$$\left(\frac{d^3 q}{dx^3}\right)_0 = 0; \quad \left(\frac{d^3 q}{dx^3}\right)_1 = \frac{4n^3}{r\delta \sqrt{r\delta}} A.$$

Die Verbiegung der Röhre findet nothwendig in solcher Weise statt, dass sich in der Mitte ein Bauch bildet, dass also $\left(\frac{d^2 q}{dx^2}\right)_0$ positiv ist; weil aber β je nach der zufälligen Grösse von al positiv oder negativ sein könnte, so muss man schliessen, dass obige Werthe nur für solche Fälle näherungsweise gelten können, in welchen

$$al = \frac{nl}{\sqrt{r\delta}}$$

gross genug ist, um e^{-al} nicht nur gegen e^{al} , sondern selbst gegen 1 vernachlässigen, mithin auch α und $\beta = 0$ setzen zu dürfen. Bei einem cylindrischen Dampfkessel z. B. liegen solche Verhältnisse jedenfalls vor.

280. — Es werde jetzt insbesondere ein an den Enden geschlossener Hohlcyliner vorausgesetzt, in welchem sich, wie bei einem Dampfkessel, eine Flüssigkeit befindet, die auf die Flächeneinheit der ganzen Innenfläche den Ueberdruck p ausübt. Dann ist nach Nr. 276, 277 und 279 mit $\alpha = \beta = 0$:

$$E\varepsilon_x = \frac{m^2-1}{m^2} \frac{pr}{2\delta} - \frac{Eq}{mr} - y E \frac{d^2 q}{dx^2}; \quad E\varepsilon_\varphi = \frac{Eq}{r}$$

$$\sigma_x = \frac{pr}{2\delta} - \frac{m^2}{m^2-1} y E \frac{d^2 q}{dx^2}$$

$$\sigma_\varphi = \frac{pr}{2m\delta} + \frac{Eq}{r} - \frac{m}{m^2-1} y E \frac{d^2 q}{dx^2}$$

$$\tau = -\frac{m^2}{m^2-1} \frac{\delta^2 - 4y^2}{8} E \frac{d^3 q}{dx^3}$$

$$Eq_0 = \frac{2m-1}{2m} \frac{pr^2}{\delta}; \quad Eq_1 = 0$$

$$\left. \begin{aligned} E \left(\frac{d^2 q}{dx^2}\right)_0 &= 0; \quad E \left(\frac{d^2 q}{dx^2}\right)_1 = 2n^2 \frac{2m-1}{2m} \frac{pr}{\delta^2} \\ E \left(\frac{d^3 q}{dx^3}\right)_0 &= 0; \quad E \left(\frac{d^3 q}{dx^3}\right)_1 = 4n^3 \frac{2m-1}{2m} \frac{pr}{\delta^2 \sqrt{r\delta}} \end{aligned} \right\} n = \sqrt[3]{\frac{3(m^2-1)}{m^2}}.$$

Der $= k$ zu setzende grösste Absolutwerth von $E\varepsilon$ ist nur im mittleren und im Endquerschnitte, d. h. für $x = 0$ und $x = l$, zu suchen. Im ersteren ist $\tau = 0$, und sind deshalb ε_x und ε_φ Hauptausdehnungen:

$$\max. (E\varepsilon_x)_0 = \frac{m-2}{2m} \frac{pr}{\delta} \text{ für } y = \frac{\delta}{2}$$

$$(E\varepsilon_\varphi)_0 = \frac{2m-1}{2m} \frac{pr}{\delta}$$

Im Endquerschnitte sind für $y = \pm \frac{\delta}{2}$ wegen $\tau = 0$ auch ε_x und ε_φ Hauptausdehnungen, und zwar $\varepsilon_\varphi = 0$, dagegen:

$$\max. (E\varepsilon_x)_1 = \frac{m^2-1 + (2m-1)\sqrt{3(m^2-1)}}{2m^2} \frac{pr}{\delta} \text{ für } y = -\frac{\delta}{2}$$

Endlich sind noch die Punkte der Mittellinie ($y = 0$) des Endquerschnitts als relativ gefährliche Punkte in Betracht zu ziehen, indem daselbst τ am grössten ist; die Einführung der entsprechenden Werthe von σ_x , σ_φ und τ (nebst $\sigma_r = 0$) in die allgemeinen Formeln für die Hauptausdehnungen sub Nr. 270 ergibt den absolut grössten Werth von $E\varepsilon$ an dieser Stelle:

$$\max. (E\varepsilon^0)_1 = \frac{1}{4m^2} \left[m^2 - m - 2 + m(m+1) \sqrt{1 + \frac{3(2m-1)^2 \sqrt{3(m^2-1)}}{m(m^2-1)}} \right] \frac{pr}{\delta}$$

Die Vergleichung dieser 4 relativ grössten Werthe von $E\varepsilon$ lässt erkennen, dass sie in folgender Grössenbeziehung stehen:

$$\max. (E\varepsilon_x)_0 < (E\varepsilon_\varphi)_0 < \max. (E\varepsilon_x)_1 > \max. (E\varepsilon^0)_1$$

Die gefährlichste Wirkung, d. h. die grösste Ausdehnung oder Zusammenziehung, findet sonach an der Innenfläche der cylindrischen Wand unmittelbar am Ende der Röhre statt, und wenn dies absolute Maximum von $E\varepsilon = k$ gesetzt wird, ergibt sich für die erforderliche Wandstärke δ die Formel:

$$\frac{\delta}{r} = \frac{m^2-1 + (2m-1)\sqrt{3(m^2-1)}}{2m^2} \frac{p}{k}$$

Mit $m = 3$ findet man z. B.:

$$\max. (E\varepsilon_x)_0 = \frac{1}{6} \frac{pr}{\delta}; \quad (E\varepsilon_\varphi)_0 = \frac{5}{6} \frac{pr}{\delta}$$

$$\max. (E\varepsilon_x)_1 = 1,805 \frac{pr}{\delta}; \quad \max. (E\varepsilon^0)_1 = \left(\frac{1}{9} + \frac{1}{3} \sqrt{1 + 15,3 \frac{\delta}{r}} \right) \frac{pr}{\delta}$$

Mit $m = 4$ ist übrigens das absolute Maximum noch grösser, nämlich:

$$\max. (E\varepsilon_x)_1 = 1,936 \frac{pr}{\delta},$$

mithin fast doppelt so gross, als für die offene Röhre unter sonst gleichen Umständen (Nr. 273), und mehr wie doppelt so gross, als sich für die geschlossene Röhre ohne Rücksicht auf die Verbiegung ergeben würde, in

welchem Falle nämlich der Maximalwerth von $E\epsilon =$ dem obigen $(E\epsilon)_0$ gefunden wird.*)

281. — Blechstärke cylindrischer Dampfkessel.

Ist d der Durchmesser des Kessels in Centimetern, n der innere Ueberdruck in Atmosphären, so folgt aus der Gleichung:

$$1,936 \frac{pr}{\delta} = k \quad (\text{Nr. 280})$$

mit $r = \frac{d}{2}$ und $p = \frac{31}{30} n$ (eine Atmosphäre = 1,0333 = $\frac{31}{30}$ Kilogr. pro Quadratcentimeter):

$$\frac{\delta}{d} = \frac{n}{k}$$

Mit einem constanten Werthe von k würde diese Formel indessen für kleine Werthe von n unausführbar kleine und ausserdem schon wegen des Eigengewichts und des Gewichts der Wasserfüllung jedenfalls zu kleine Werthe von δ ergeben, weshalb besser

$$\frac{\delta}{d} = an + b$$

gesetzt wird, unter Vorbehalt erfahrungsmässig angemessener Bestimmung der Constanten a und b .

*) Die diesen Rechnungsergebnissen zu Grunde liegende Voraussetzung, dass für $x = l$, d. h. am Ende der Röhre

$$q = 0 \quad \text{und} \quad \frac{dq}{dx} = 0$$

ist, welcher Voraussetzung entsprechend in Nr. 278 die Constanten f und g in der Gleichung der Meridianlinie der verbogenen Mittelfläche bestimmt wurden, trifft bei der durch Böden geschlossenen Röhre nur näherungsweise zu und zwar um so mehr, je grösser die Dicke und je kleiner mithin die eigene Verbiegung und Ausdehnung dieser Böden ist. Streng genommen bedingen die Deformationen der cylindrischen Rohrwand und der abschliessenden Böden sich gegenseitig; wenn angenommen wird, dass die gegenseitige Verbindung beider Theile eine der Art feste ist, um den Neigungswinkel der mittleren Bodenfläche an ihrem Rande gegen die Mittelfläche der ursprünglich cylindrischen Wand als unveränderlich betrachten zu dürfen, so müsste die Vergrösserung des Umfangsradius der ersteren

$$= q = \frac{2m-1}{2m} \frac{pr^2}{E\delta} + f(e^{ax} + e^{-ax}) \cos(ax) + g(e^{ax} - e^{-ax}) \sin(ax)$$

(Nr. 278) für $x = l$, sowie die Neigung der Bodenfläche gegen ihre ursprüngliche Richtung am Rande $= \frac{dq}{dx}$ für $x = l$ gesetzt werden, um die erforderlichen Bestimmungsgleichungen der Constanten f und g zu erhalten. Um aber die radiale Ausdehnung und die Neigung am Umfange der Bodenplatte ausdrücken zu können, müsste die vollständige Untersuchung der Deformation dieser Platte vorausgeschickt werden, welche nicht nur von ihrer Dicke, ihrer ursprünglichen Gestalt und von dem Ueberdrucke p auf die Einheit ihrer inneren Fläche, sondern ausserdem von dem Moment und der radialen Kraft abhängt, womit die Röhre auf jedes Bogenelement des Umfangs des Plattenrandes einwirkt; dieses Moment und diese Kraft liessen sich ausdrücken durch die Spannungen σ_x und τ im Endquerschnitte der Röhre, welche selbst zugleich mit q noch Functionen der zu bestimmenden Constanten f und g wären. Die Umständlichkeit eines solchen Rechnungsganges stände indessen mit dem dadurch zu erzielenden zweifelhaften praktischen Gewinne kaum in Verhältniss, und ausserdem stellen sich seiner Durchführung, wenn, wie bei Dampfkesseln gerade vorwiegend der Fall ist, die Böden schon ursprünglich gewölbt sind, kaum überwindliche Schwierigkeiten entgegen.

Wird zu dem Ende mit Redtenbacher:

$$\delta = 0,5 \text{ für } n = 0 \text{ und } d = 100$$

gesetzt, d. h. eine Blechstärke von 5 Millim. als eine solche erachtet, welche einem Kessel von 1 Meter Durchmesser schon mit Rücksicht auf die praktische Herstellung sowie auf die anstrengende Wirkung des Eigengewichts und des Gewichts der Wasserfüllung zu geben wäre, und wird ferner die Thatsache zu Grunde gelegt, dass bei Locomotivkesseln

$$\delta = 1,2 \text{ bei durchschnittlich } n = 5 \text{ und } d = 100$$

ein erfahrungsmässig angemessener Werth ist, so sind durch diese zwei Werthsysteme von δ , n und d die Constanten a und b bestimmt, und ergibt sich für alle Fälle (Eisenblech als Material vorausgesetzt):

$$\frac{\delta}{d} = 0,0014n + 0,005.$$

Hiernach wäre, abgesehen von der Schwächung des Blechs durch die Niete, sowie abgesehen von dem besonders bei kleineren Werthen von n verhältnissmässig grösseren Einflusse des Eigengewichts und des Gewichts der Wasserfüllung:

$$\text{für } n = 1 \quad 2 \quad 3 \quad 4 \quad 5 \quad 6$$

$$k = n \frac{d}{\delta} = 156 \quad 256 \quad 326 \quad 377 \quad 417 \quad 448.$$

In Preussen war vorgeschrieben:

$$\delta = 0,0015nd + 0,26 \text{ Centim.},$$

in Frankreich gilt die Regel:

$$\delta = 0,0018nd + 0,3 \text{ Centim.}$$

Diese Formeln unterscheiden sich von der obigen hauptsächlich dadurch, dass dem Ausdrucke von δ statt eines mit d wachsenden Summanden ein constanter Summand beigefügt ist, was indessen weniger rationell erscheint; denn auch ohne inneren Ueberdruck, blos wegen der Belastung durch das eigene und das Gewicht der Wasserfüllung, muss das Blech um so stärker genommen werden, je grösser der Durchmesser des Kessels ist.

282. — Wenn eine geschlossene oder durch Befestigung an den Enden in ihrer Deformation beschränkte Röhre einem äusseren Ueberdrucke ausgesetzt ist, wie z. B. die innere Heizröhre eines Dampfkessels, so tritt an die Stelle der Ausbauchung in der Mitte eine Einschnürung; ausserdem findet aber der wesentliche Unterschied statt, dass, während zufällige Abweichungen von der genauen Kreisform des Querschnitts durch inneren Druck vermindert werden, ein äusserer Druck sie umgekehrt vergrössert. Solche Abweichungen von der genauen Kreisform sind besonders bei Röhren, welche, wie die Heizröhren von Dampfkesseln, aus Blechtafeln zusammengenietet werden, kaum vermeidlich, und es sind daher solche Röhren der Gefahr ausgesetzt, durch den äusseren Ueberdruck platt gedrückt, resp. in Folge solcher Verbiegung zerknickt zu werden. Es lässt sich erwarten und wird durch die Erfahrung bestätigt, dass diese Gefahr unter übrigens gleichen Umständen mit der Länge der Röhre wächst; eine rationelle Formel für die nöthige Wandstärke müsste also ausser dem Ueberdrucke und dem Durchmesser auch diese Länge enthalten. Die theoretische Ableitung einer solchen Formel würde jedoch auf sehr grosse Schwierigkeiten führen, und es sind deshalb Versuche, welche die Bildung einer empirischen Formel gestatten, hier von besonderem Werthe.

Dergleichen Versuche sind von W. Fairbairn mit Röhren von 10 bis 48 Centim. Durchmesser und 48 bis 155 Centim. Länge angestellt worden, welche auf gewöhnliche Art aus Eisenblech zusammengenietet waren. Leider hatte das Blech in den meisten Fällen die geringe Dicke von 1,1 Millimeter, während nur 4 Versuche mit Blechstärken von 3,2 bis 6,4 Millim. vorliegen; der Einfluss der Blechstärke konnte deshalb nicht so zuverlässig hervortreten, als wünschenswerth gewesen wäre. Die Röhren waren an den Enden durch starke gusseiserne Scheiben geschlossen, welche (entsprechend dem Zustande, in dem sich die Heizröhren von Dampfkesseln befinden) an ihrer gegenseitigen Annäherung infolge der Zusammendrückung der Röhre gehindert waren; durch ein engeres Rohr, welches in eine der Endscheiben eingefügt war, communicirte der innere Raum der Versuchsröhre mit der Atmosphäre, während der durch Wasser vermittelte einer Druckpumpe hervorgebrachte äussere Druck bis zur Zerstörung der Versuchsröhre allmählig gesteigert wurde.

Aus den Resultaten von im Ganzen 21 Versuchen wurde mittels der Methode der kleinsten Quadrate vom Verfasser die folgende empirische Formel abgeleitet:*)

$$n = 7790 \frac{\delta^{2,315}}{l d^{1,278}}.$$

Darin bedeutet:

l die Länge in Centimetern,

d den Durchmesser in Centimetern,

δ die Blechstärke in Millimetern,

n den Ueberdruck in Atmosphären, durch welchen die Röhre zerdrückt wird.

Weil indessen diese Formel die mit der kleinen Blechdicke von 1,1 Millim. angestellten Versuche zwar gut, die für die praktische Anwendung wichtigeren Versuche mit dickerem Blech indessen nicht genügend wiedergibt, so wurde noch eine zweite Formel hergestellt, welche den letzteren Versuchen genau entspricht; sie ist bei derselben Bedeutung der Buchstaben wie oben:

$$n = 325 \frac{\delta^{2,951}}{l^{0,554} d^{0,859}}.$$

Diese Formeln sind vorläufig nur als Nothbehelf zu betrachten; je schwieriger dergleichen Versuche anzustellen sind und je mehr dabei zufällige Umstände einwirken können, desto mehr ist ihre Vervielfältigung nöthig, um das Gesetz des Widerstandes äusserlich gedrückter Röhren mit Zuverlässigkeit erkennbar zu machen. Unzweifelhaft ergibt sich aber die Thatsache, dass mit zunehmender Länge die Widerstandsfähigkeit solcher Röhren wesentlich abnimmt, und es wurde deshalb von Fairbairn empfohlen, die Heizröhren der Dampfkessel mit einigen starken Ringen aus Winkelisen zu umgeben, um sie so gewissermassen in mehrere Röhren von geringerer Länge abzutheilen.**)

*) Zeitschrift des Vereins deutscher Ingenieure, Bd. III, p. 234, woselbst die Formeln in englischem Mass und Gewicht entwickelt sind.

**) Fairbairn hat auch einige Zerreißungsversuche mit cylindrischen Röhren ausgeführt, welche einem inneren Ueberdrucke ausgesetzt waren; dass sich dabei kein wesentlicher Einfluss der Länge herausgestellt hat, kann bei den gänzlich verschiedenen Umständen nicht befremden.

b. Kreisförmige ebene Platte.

283. — Der äussere Radius der Platte sei $= r$, die gleichförmige und im Vergleich mit r sehr kleine Dicke $= h$. Am Rande liege die Platte entweder ringsum lose auf, oder sie sei daselbst eingeklemmt. Die symmetrische Belastung bestehe im Allgemeinen aus

- 1) einer im Mittelpunkte concentrirten und senkrecht zur Oberfläche gerichteten Kraft P ,
- 2) einem gleichförmig auf dieser Oberfläche vertheilten Normaldrucke $= p$ pro Flächeneinheit,
- 3) einer auf den Rand (die cylindrische Umfläche) gleichförmig vertheilten, radial wirkenden äusseren Kraft $= p_1$ pro Flächeneinheit, also $= p_1 h$ pro Längeneinheit des Umfangs.

Ein positiver Werth von P entspreche der gleichen Richtung mit p , ein positiver Werth von p_1 entspreche einem radial auswärts gerichteten Zuge.

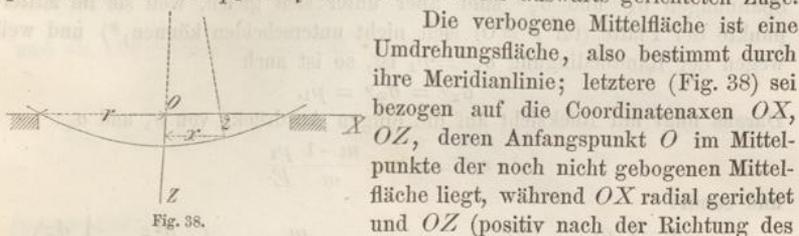


Fig. 38.

Die verbogene Mittelfläche ist eine Umdrehungsfläche, also bestimmt durch ihre Meridianlinie; letztere (Fig. 38) sei bezogen auf die Coordinatenachsen OX , OZ , deren Anfangspunkt O im Mittelpunkte der noch nicht gebogenen Mittelfläche liegt, während OX radial gerichtet und OZ (positiv nach der Richtung des

Ueberdruckes p) die geometrische Axe der Platte ist.

Wenn die Spannung σ_z als sehr klein gegen σ_x und σ_φ vernachlässigt wird (ebenso wie σ_r in Nr. 276), so ist nach Nr. 271 (mit x statt r):

$$\sigma_x = \frac{2G}{m-1} (m \varepsilon_x + \varepsilon_\varphi); \quad \sigma_\varphi = \frac{2G}{m-1} (\varepsilon_x + m \varepsilon_\varphi).$$

Wird ferner wieder mit y (positiv nach der Richtung der positiven z -Axe) die Entfernung eines beliebigen Punktes der Platte von ihrer Mittelfläche bezeichnet und angenommen, dass eine ursprünglich zur Mittelfläche senkrechte materielle Gerade auch bei der Biegung diese Eigenschaft behalte (cf. Nr. 276), so ist, unter

R den Krümmungsradius der Meridianlinie und unter

R_1 den Krümmungsradius des dazu senkrechten Normalschnitts der Mittelfläche (= der Normale der Meridianlinie, bis zum Schnittpunkte mit der z -Axe gerechnet) verstanden:

$$\varepsilon_x = \varepsilon_x^0 \pm \frac{y}{R} = \varepsilon_x^0 - y \frac{d^2 z}{dx^2}$$

$$\varepsilon_\varphi = \varepsilon_\varphi^0 \pm \frac{y}{R_1} = \varepsilon_\varphi^0 - \frac{y}{x} \frac{dz}{dx},$$

vorausgesetzt, dass die Biegung sehr gering ist, so dass R und R_1 im Vergleich mit den Dimensionen der Platte sehr gross sind; ε_x^0 und ε_φ^0 sind

dabei die Ausdehnungen der Mittelfläche nach den Richtungen x und g .

Die Einführung dieser Werthe giebt mit $G = \frac{1}{2} \frac{m}{m+1} E$:

$$\sigma_x = \frac{mE}{m^2-1} \left[m\varepsilon_x^0 + \varepsilon_\varphi^0 - y \left(m \frac{d^2z}{dx^2} + \frac{1}{x} \frac{dz}{dx} \right) \right]$$

$$\sigma_\varphi = \frac{mE}{m^2-1} \left[\varepsilon_x^0 + m\varepsilon_\varphi^0 - y \left(\frac{d^2z}{dx^2} + \frac{m}{x} \frac{dz}{dx} \right) \right].$$

Für $y=0$, d. h. in der Mittelfläche, sind diese hier mit σ_x^0 und σ_φ^0 zu bezeichnenden Spannungen eben so gross, wie sie für jeden Werth von y sein würden, wenn die biegenden Kräfte P und $p = \text{Null}$ wären und nur die radiale Kraft p_1 auf den Rand der Platte wirkte; dann wäre aber offenbar keine Tangentialspannung vorhanden und deshalb den allgemeinen Gleichungen (I) in Nr. 229 zufolge (bei dem Fehlen äusserer Kräfte, die auf die Masse selbst wirken) die Normalspannung σ von irgend einem Punkte aus nach irgend einer Richtung hin constant. Die somit einzeln constanten Spannungen σ_x^0 und σ_φ^0 sind aber unter sich gleich, weil sie im Mittelpunkte der Platte (für $x=0$) sich nicht unterscheiden können,*) und weil wegen der Randbedingung $\sigma_x^0 = p_1$ ist, so ist auch

$$\sigma_x^0 = \sigma_\varphi^0 = p_1.$$

Daraus folgt mit Rücksicht auf die obigen Ausdrücke von σ_x und σ_φ :

$$\varepsilon_x^0 = \varepsilon_\varphi^0 = \frac{m-1}{m} \frac{p_1}{E}$$

und somit:

$$\varepsilon_x = \frac{m-1}{m} \frac{p_1}{E} - y \frac{d^2z}{dx^2} \quad \left| \quad \sigma_x = p_1 - \frac{m}{m^2-1} E y \left(m \frac{d^2z}{dx^2} + \frac{1}{x} \frac{dz}{dx} \right) \right.$$

$$\varepsilon_\varphi = \frac{m-1}{m} \frac{p_1}{E} - \frac{y}{x} \frac{dz}{dx} \quad \left| \quad \sigma_\varphi = p_1 - \frac{m}{m^2-1} E y \left(\frac{d^2z}{dx^2} + \frac{m}{x} \frac{dz}{dx} \right) \right.$$

284. — Zur Bestimmung der Tangentialspannung τ dient die zweite der beiden Gleichgewichtsbedingungen in Nr. 270:

$$\frac{dx}{dz} = \frac{dr}{dy} = \frac{\sigma_\varphi}{x} - \frac{1}{x} \frac{d(x\sigma_x)}{dx}.$$

Ihre Integration liefert mit Hülfe der obigen Ausdrücke von σ_x und σ_φ , sowie mit Rücksicht darauf, dass $\tau=0$ ist für $y = \pm \frac{h}{2}$:

$$\tau = - \frac{m^2}{m^2-1} E \frac{h^2 - 4y^2}{8} \left(\frac{d^3z}{dx^3} + \frac{1}{x} \frac{d^2z}{dx^2} - \frac{1}{x^2} \frac{dz}{dx} \right).$$

Einer Bemerkung in Nr. 270 zufolge wird τ hier negativ gefunden, weil der rechte Winkel, den zwei von irgend einem Punkte aus nach den Richtungen x und z gezogene materielle Gerade bildeten, durch die Deformation der Platte in einen stumpfen Winkel übergeht.

*) Nach der zweiten der beiden Gleichgewichtsbedingungen in Nr. 270 ergibt sich auch sofort mit $R=0$ und $r=0$ für jeden Punkt:

$$\sigma_\varphi^0 = \frac{d(x\sigma_x^0)}{dx} = \sigma_x^0.$$

In den Ausdrücken von σ_x , σ_φ und τ bleibt noch die Function z , d. h. die Gleichung der Meridianlinie der gebogenen Mittelfläche zu bestimmen. Die erste der beiden Gleichgewichtsbedingungen in Nr. 270 kann dazu nicht dienen, weil sie mit der Vernachlässigung von σ_z ihre Bedeutung verloren hat; dagegen lässt sie sich ersetzen durch die Bedingung des Gleichgewichts zwischen der äusseren Belastung und den Tangentialspannungen am Rande eines Plattenelements von endlicher Grösse, welches nämlich aus der Platte herausgeschnitten wird durch eine um die z -Axe mit dem Radius x beschriebene Cylinderfläche. So erhält man, unter τ hinfort den Absolutwerth der Tangentialspannung verstanden, die Bestimmungsgleichung:

$$2\pi x \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \tau dy = \pi x^2 p + P;$$

ihre Combination mit obigem Ausdrucke von τ liefert:

$$\tau = \frac{3}{4} \frac{h^2 - 4y^2}{h^3} \left(px + \frac{P}{\pi x} \right)$$

und als Differentialgleichung der Meridianlinie:

$$\frac{d^3 z}{dx^3} + \frac{1}{x} \frac{d^2 z}{dx^2} - \frac{1}{x^2} \frac{dz}{dx} = \frac{m^2 - 1}{m^2} \frac{6}{Eh^3} \left(px + \frac{P}{\pi x} \right).$$

Ihre Integration*) giebt, wenn zur Abkürzung

$$a = \frac{m^2 - 1}{m^2} \frac{6}{Eh^3} p; \quad b = \frac{m^2 - 1}{m^2} \frac{6}{Eh^3} \frac{P}{\pi}$$

gesetzt wird:

$$z = \frac{ax^4}{32} + \frac{bx^2}{4} (\ln x - 1) + \frac{cx^2}{4} + d \ln x + e$$

$$\frac{1}{x} \frac{dz}{dx} = \frac{ax^2}{8} + \frac{b}{2} \left(\ln x - \frac{1}{2} \right) + \frac{c}{2} + \frac{d}{x^2}$$

$$\frac{d^2 z}{dx^2} = \frac{3}{8} ax^2 + \frac{b}{2} \left(\ln x + \frac{1}{2} \right) + \frac{c}{2} - \frac{d}{x^2};$$

von den Integrations-Constanten c , d und e ist die letzte durch die Lage des Anfangspunktes, der die zusammengehörigen Werthe $x = r$, $z = 0$ entsprechen, bestimmt; die Constante d ist verschieden, je nachdem die Platte voll oder in der Mitte durch eine kreisförmige Oeffnung unterbrochen ist; die Constante c endlich ist von der Art der Unterstützung oder Befestigung der Platte am äusseren Rande abhängig.

*) Wobei zu beachten, dass

$$\frac{d^3 z}{dx^3} + \frac{1}{x} \frac{d^2 z}{dx^2} - \frac{1}{x^2} \frac{dz}{dx} = \frac{d}{dx} \left(\frac{d^2 z}{dx^2} + \frac{1}{x} \frac{dz}{dx} \right)$$

und $\frac{d^2 z}{dx^2} + \frac{1}{x} \frac{dz}{dx} = \frac{1}{x} \frac{d}{dx} \left(x \frac{dz}{dx} \right)$ ist.

1. Volle Platte.

285. — Die volle Platte kann nur so gebogen sein, dass die Meridianlinie der Mittelfläche für $x=0$ eine der x -Axe parallele Tangente hat, dass also

$$\text{für } x=0: \frac{dz}{dx} = 0 \cdot \ln 0 + \frac{d}{0} = 0$$

ist, was nur dadurch möglich ist, dass $d=0$ gesetzt wird.*)

Wenn ferner die Platte am Rande lose aufliegt, so muss für $x=r$ und jedes y : $\sigma_x = \sigma_x^0 = p_1$ sein. Diese Bedingung liefert:

$$c = -\frac{1}{4} \frac{3m+1}{m+1} ar^2 - b \left(\ln r + \frac{1}{2} \frac{m-1}{m+1} \right).$$

Ist aber die Platte am Rande eingeklemmt, und zwar so, dass die Meridianlinie der Mittelfläche daselbst die x -Axe berührt (Fig. 39), so erhält man aus der diesem Umstande

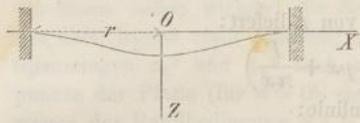


Fig. 39.

entsprechenden Bedingung, dass $\frac{dz}{dx} = 0$ sein muss für $x=r$:

$$c = -\frac{1}{4} ar^2 - b \left(\ln r - \frac{1}{2} \right).$$

a. Auf die Oberfläche der Platte wirkt nur der gleichförmig vertheilte spezifische Druck p .

286. — Wenn die Constante e der Bedingung gemäss bestimmt wird, dass $x=r$, $z=0$ zusammengehörige Werthe sind, erhält man mit $b=0$ (entsprechend $P=0$) und $d=0$ als Gleichung der Meridianlinie nach Nr. 284:

$$z = \left(-a \frac{r^2 + x^2}{8} - c \right) \frac{r^2 - x^2}{4}.$$

Nach Nr. 283 ist ferner:

$$\varepsilon_x = \frac{m-1}{m} \frac{p_1}{E} - \left(\frac{3}{8} ax^2 + \frac{c}{2} \right) y$$

$$\varepsilon_y = \frac{m-1}{m} \frac{p_1}{E} - \left(\frac{1}{8} ax^2 + \frac{c}{2} \right) y.$$

Diese Ausdehnungen sind am grössten für $x=0$ oder $x=r$ und $y = \pm \frac{h}{2}$, und weil ebendasselbst $\tau=0$ ist, so sind sie Hauptausdehnungen. Ein noch grösserer Absolutwerth von ε könnte nur dort vielleicht stattfinden, wo

$$\tau = \frac{3}{4} \frac{h^2 - 4y^2}{h^3} px$$

am grössten ist, nämlich:

$$\tau_1^0 = \frac{3}{4} \frac{r}{h} p \text{ für } x=r, y=0,$$

*) Den für $x=0$ in unbestimmter Form erscheinenden Werth $x \ln x = 0 \cdot \ln 0 = 0(-\infty)$ findet man nach bekannter Methode = 0.

obgleich sich analog dem Verhalten dünner Stäbe erwarten lässt, dass auch hier bei der dünnen Platte die durch die Tangentialspannungen bedingten Ausdehnungen von untergeordneter Grössenordnung sind im Vergleich mit denjenigen, welche von der Biegung abhängen.

287. — Wenn insbesondere die Platte am Rande lose aufliegt und die radiale äussere Kraft am Rande fehlt, also $p_1 = 0$ ist, so wird mit

$$a = \frac{m^2 - 1}{m^2} \frac{6}{Eh^3} p \text{ und } c = -\frac{1}{4} \frac{3m + 1}{m + 1} ar^2$$

(cf. Nr. 284 und 285) die Gleichung der Meridianlinie:

$$z = \frac{3}{16} \frac{m^2 - 1}{m^2} \frac{p}{Eh^3} \left(\frac{5m + 1}{m + 1} r^2 - x^2 \right) (r^2 - x^2);$$

mit $x = 0$ ergibt sich daraus die Durchbiegung der Platte in der Mitte:

$$z_0 = \frac{3}{16} \frac{(m - 1)(5m + 1)}{m^2} \frac{pr^4}{Eh^3}.$$

Ferner ist:

$$E\varepsilon_x = \frac{3}{4} \frac{m^2 - 1}{m^2} \frac{p}{h^3} \left(\frac{3m + 1}{m + 1} r^2 - 3x^2 \right) y$$

$$E\varepsilon_y = \frac{3}{4} \frac{m^2 - 1}{m^2} \frac{p}{h^3} \left(\frac{3m + 1}{m + 1} r^2 - x^2 \right) y.$$

Für $x = 0$ und $y = \pm \frac{h}{2}$ sind beide Werthe absolut genommen am grössten, und zwar gleich gross, nämlich:

$$\max. (E\varepsilon)_0 = \frac{3}{8} \frac{(m - 1)(3m + 1)}{m^2} \frac{r^2}{h^2} p.$$

An den Stellen ($x = r, y = 0$), wo τ am grössten $= \tau_1^0$ ist, sind σ_x und $\sigma_y = 0$, und es ist deshalb ebendasselbst nach Nr. 169:

$$\max. (E\varepsilon)_1 = \frac{m + 1}{m} \tau_1^0 = \frac{3}{4} \frac{m + 1}{m} \frac{r}{h} p.$$

Sofern $\frac{r}{h}$ nach der Voraussetzung eine grosse Zahl ist, hat jedoch dieses Maximum am Rande der Platte eine untergeordnete Grösse im Vergleich mit $\max. (E\varepsilon)_0$ in den Mittelpunkten der beiden Plattenoberflächen, welches letztere sonach das $= k$ zu setzende Maximum des Absolutwerthes von $E\varepsilon$ überhaupt ist.

Insbesondere mit $m = 3$ ist:

$$z_0 = \frac{2}{3} \frac{pr^4}{Eh^3}; \quad \max. (E\varepsilon) = \frac{5}{6} \frac{r^2}{h^2} p$$

und mit $\max. (E\varepsilon) = k$ die nöthige Dicke der Platte:

$$h = r \sqrt{\frac{5}{6} \frac{p}{k}}.$$

288. — Für die am Rande eingeklemmte Platte ist mit

$$a = \frac{m^2 - 1}{m^2} \frac{6}{Eh^3} p \text{ und } c = -\frac{1}{4} ar^2$$

(cf. Nr. 284 und 285) die Gleichung der Meridianlinie der gebogenen Mittel-
fläche:

$$z = \frac{3}{16} \frac{m^2 - 1}{m^2} \frac{p}{Eh^3} (r^2 - x^2)^2$$

und mit $x = 0$ die Durchbiegung in der Mitte:

$$z_0 = \frac{3}{16} \frac{m^2 - 1}{m^2} \frac{p r^4}{Eh^3}.$$

Ferner ist:

$$E\varepsilon_x = \frac{m-1}{m} p_1 + \frac{3}{4} \frac{m^2-1}{m^2} \frac{p}{h^3} (r^2 - 3x^2) y$$

$$E\varepsilon_\varphi = \frac{m-1}{m} p_1 + \frac{3}{4} \frac{m^2-1}{m^2} \frac{p}{h^3} (r^2 - x^2) y.$$

Ist p_1 positiv (oder Null), so ist $E\varepsilon_x$ absolut genommen am grössten für
 $x = 0$, $y = \frac{h}{2}$ und für $x = r$, $y = -\frac{h}{2}$, $E\varepsilon_\varphi$ für $x = 0$, $y = \frac{h}{2}$, und zwar
ist dieses Maximum von $E\varepsilon_\varphi$ dem ersteren Maximum von $E\varepsilon_x$ gleich, nämlich:

$$\max.(E\varepsilon)_0 = \frac{m-1}{m} p_1 + \frac{3}{8} \frac{m^2-1}{m^2} \frac{r^2}{h^2} p,$$

während das zweite Maximum von $E\varepsilon_x$:

$$\max.(E\varepsilon)_1 = \frac{m-1}{m} p_1 + \frac{3}{4} \frac{m^2-1}{m^2} \frac{r^2}{h^2} p$$

noch grösser, mithin der untergeordneten Grösse von r wegen das $= k$ zu
setzende Maximum des Absolutwerthes von $E\varepsilon$ überhaupt ist.

Insbesondere mit $m = 3$ ist:

$$z_0 = \frac{1}{6} \frac{p r^4}{Eh^3}; \quad \max.(E\varepsilon) = \frac{2}{3} \left(p_1 + \frac{r^2}{h^2} p \right).$$

Ist noch $p_1 = 0$, so ist für $\max.(E\varepsilon) = k$ die nöthige Dicke der Platte:

$$h = r \sqrt{\frac{2}{3} \frac{p}{k}}.$$

289. — Im Falle der vorigen Nummer befinden sich u. A. die ebenen
Platten, durch welche ein dem inneren Ueberdrucke p pro
Flächeneinheit ausgesetzter Hohlcyliner an den Enden ge-
schlossen ist, falls in Betreff der cylindrischen Rohrwand die Voraus-
setzung der Nr. 278 sich erfüllt findet, dass die Meridianlinie ihrer Mittel-
fläche an den Enden keine Neigung gegen die Axe erleidet. Ist die Länge
des Hohlcyliners $= 2l$, so ist in diesem Falle:

$$p_1 = \frac{l p}{h},$$

folglich nach Nr. 288:

$$\max.(E\varepsilon) = \frac{m-1}{m} \frac{r}{h} \left(\frac{l}{r} + \frac{3}{4} \frac{m+1}{m} \frac{r}{h} \right) p,$$

insbesondere mit $m = 3$:

$$\max.(E\varepsilon) = \frac{2}{3} \frac{r}{h} \left(\frac{l}{r} + \frac{r}{h} \right) p.$$

Mit $m = 3$ ist aber für die cylindrische Wand nach Nr. 280:

$$\max. (E\varepsilon) = 1,8 \frac{Pr}{\delta},$$

und es müsste sonach, wenn beide Theile (die Bodenplatten und die cylindrische Wand) gleich stark in Anspruch genommen werden sollen,

$$\frac{r}{h} \left(\frac{l}{r} + \frac{r}{h} \right) = 2,7 \frac{r}{\delta}$$

und, wenn auch $\frac{l}{r}$ nur klein gegen $\frac{r}{h}$ ist (wie bei einem cylindrischen Dampfkessel), doch

$$\frac{\delta^2}{h^2} < 2,7 \frac{\delta}{r}$$

sein. Für einen Dampfkessel insbesondere würde mit

$$\frac{\delta}{2r} = 0,0014n + 0,005 \quad (\text{Nr. 281})$$

daraus folgen:

$$\frac{h}{\delta} > \frac{1}{\sqrt{5,4(0,0014n + 0,005)}};$$

z. B. für $n = 1 \quad 2 \quad 3 \quad 4 \quad 5 \quad 6$

$$\frac{h}{\delta} > 5,34 \quad 4,86 \quad 4,45 \quad 4,17 \quad 3,93 \quad 3,70.$$

Wegen dieser verhältnissmässig grossen Dicke, welche sie erhalten müssten, sind ebene Böden bei Dampfkesseln möglichst zu vermeiden, sofern sie nicht durch Feuerröhren unterbrochen und gestützt werden.*)

β. Die Platte ist nur durch die in der Mitte angreifende Einzelkraft P belastet.

290. — Die Gleichung der Meridianlinie der gebogenen Mittelfläche er giebt sich nach Nr. 284 mit $a = 0$ (entsprechend $p = 0$), $d = 0$ nach Nr. 285 und wenn die Constante e der Bedingung gemäss bestimmt wird, dass $x = r$, $z = 0$ zusammengehörige Werthe sind:

$$z = -\frac{b}{4} [r^2 (\ln r - 1) - x^2 (\ln x - 1)] - \frac{c}{4} (r^2 - x^2).$$

Nach Nr. 283 ist ferner, wenn keine radiale Kraft auf den Rand der Platte wirkt, also $p_1 = 0$ ist:

$$\varepsilon_x = -\left[\frac{b}{2} \left(\ln x + \frac{1}{2} \right) + \frac{c}{2} \right] y$$

$$\varepsilon_\varphi = -\left[\frac{b}{2} \left(\ln x - \frac{1}{2} \right) + \frac{c}{2} \right] y.$$

Die Tangentialspannung τ ist in der Mittelfläche ($y = 0$), woselbst sie am grössten ist:

$$\tau^0 = \frac{3}{4\pi} \frac{P}{hx} \quad (\text{Nr. 284}).$$

*) Eine rationelle Untersuchung der Anstrengung, welche die gewöhnlich ausgeführten gewölbten Böden auszuhalten haben, ist, soviel bekannt, zur Zeit noch nicht geliefert; dass dieselben, wenn sie auch nach Kugelcalotten gekrümmt werden, doch wesentlich anders wie Theile voller Kugelschalen sich verhalten, ist selbstverständlich.

Im Mittelpunkte der Platte ($x = 0$) werden ε_x , ε_φ und r^0 unendlich gross, und es ist also nöthig, dass die belastende Kraft P auf eine, wenn schon kleine, so doch endliche Fläche oder Linie vertheilt sei, z. B. auf eine zur Plattenoberfläche concentrische Kreisfläche oder Kreislinie mit dem Radius r_0 . Ist in diesem Falle r_0 nur hinlänglich klein, etwa $< \frac{1}{10}r$, so kann die obige Gleichung für z noch mit genügender Annäherung als Gleichung der ganzen gebogenen Mittelfläche gelten, während die Ausdrücke von ε_x , ε_φ und r^0 wenigstens für $x > r_0$ nicht wesentlich fehlerhaft sein können und dann auch die gefährlichste Wirkung der Belastung nur für $x \cong r_0$ gesucht zu werden braucht.

291. — Wenn insbesondere die Platte am Rande lose aufliegt, so wird mit

$$b = \frac{m^2 - 1}{m^2} \frac{6}{Eh^3} \frac{P}{\pi} \quad \text{und} \quad c = -b \left(\ln r + \frac{1}{2} \frac{m-1}{m+1} \right)$$

(cf. Nr. 284 und 285) die Gleichung der Meridianlinie:

$$z = \frac{3}{4\pi} \frac{m^2 - 1}{m^2} \frac{P}{Eh^3} \left(2x^2 \ln \frac{x}{r} + \frac{3m+1}{m+1} (r^2 - x^2) \right);$$

daraus mit $x = 0$ die Durchbiegung der Platte in der Mitte:

$$z_0 = \frac{3}{4\pi} \frac{(m-1)(3m+1)}{m^2} \frac{Pr^2}{Eh^3}.$$

Ferner ist:

$$E\varepsilon_x = \frac{3}{\pi} \frac{m^2 - 1}{m^2} \frac{P}{h^3} \left(\ln \frac{r}{x} - \frac{1}{m+1} \right) y$$

$$E\varepsilon_\varphi = \frac{3}{\pi} \frac{m^2 - 1}{m^2} \frac{P}{h^3} \left(\ln \frac{r}{x} + \frac{m}{m+1} \right) y.$$

Beide Werthe sind am grössten für $y = \frac{h}{2}$ und $x = r_0$ (cf. Nr. 290), und zwar ist das Maximum von $E\varepsilon_\varphi$ der grösste Werth von $E\varepsilon$ überhaupt:

$$\max. (E\varepsilon) = \frac{3}{2\pi} \frac{m^2 - 1}{m^2} \left(\ln \frac{r}{r_0} + \frac{m}{m+1} \right) \frac{P}{h^2},$$

indem auch der dem Maximum von r^0 entsprechende relativ grösste Werth von $E\varepsilon$, nämlich (cf. Nr. 169):

$$\max. \left(\frac{m+1}{m} r^0 \right) = \frac{3}{4\pi} \frac{m+1}{m} \frac{P}{hr_0}$$

bei verhältnissmässig kleiner Plattendicke stets wesentlich kleiner ist.

Insbesondere mit $m = 3$ ist:

$$z_0 = \frac{5}{3\pi} \frac{Pr^2}{Eh^3}$$

$$\max. (E\varepsilon) = \left(\frac{4}{3} \ln \frac{r}{r_0} + 1 \right) \frac{P}{\pi h^2}$$

$$\max. \left(\frac{m+1}{m} r^0 \right) = \frac{P}{\pi hr_0} = \frac{r}{r_0} \frac{h}{r} \frac{P}{\pi h^2}.$$

Z. B. für $\frac{r}{r_0} = 10 \quad 20 \quad 30 \quad 40 \quad 50$

ist $\max. (E\varepsilon) = 4,07 \quad 4,99 \quad 5,53 \quad 5,92 \quad 6,22 \cdot \frac{P}{\pi h^2}$

$= 0,407 \quad 0,250 \quad 0,184 \quad 0,148 \quad 0,124 \cdot \frac{r}{h} \max. \left(\frac{m+1}{m} r^0 \right)$

d. i. resp. 4,88 5,99 6,64 7,10 7,46

mal so gross, als der Maximalwerth von $E\varepsilon$ bei gleichförmiger Vertheilung der Belastung $P = \pi r^2 p$ auf der Platte (cf. No. 287), während die Durchbiegung z_0 hier 2,5 mal so gross ist, als in jenem Falle.

292. — Für die am Rande eingeklemmte Platte ist mit

$$b = \frac{m^2 - 1}{m^2} \frac{6}{Eh^3} \frac{P}{\pi} \quad \text{und} \quad c = -b \left(\ln r - \frac{1}{2} \right)$$

die Gleichung der Meridianlinie:

$$z = \frac{3}{4\pi} \frac{m^2 - 1}{m^2} \frac{P}{Eh^3} \left(2x^2 \ln \frac{x}{r} + r^2 - x^2 \right);$$

daraus mit $x = 0$ die Durchbiegung in der Mitte:

$$z_0 = \frac{3}{4\pi} \frac{m^2 - 1}{m^2} \frac{Pr^2}{Eh^3}.$$

Ferner ist:

$$E\varepsilon_x = \frac{3}{\pi} \frac{m^2 - 1}{m^2} \frac{P}{h^3} \left(\ln \frac{r}{x} - 1 \right) y$$

$$E\varepsilon_\varphi = \frac{3}{\pi} \frac{m^2 - 1}{m^2} \frac{P}{h^3} \ln \frac{r}{x} \cdot y.$$

Beide Werthe sind am grössten für $y = \frac{h}{2}$ und $x = r_0$ ($E\varepsilon_x$ wenigstens dann, wenn $\frac{r}{r_0} e^2 = 7,39$ ist, widrigenfalls der Maximalwerth von ε_x am Rande für $x = r$ stattfinden würde), und zwar ist das Maximum von $E\varepsilon_\varphi$ der grösste Werth von $E\varepsilon$ überhaupt:

$$\max. (E\varepsilon) = \frac{3}{2\pi} \frac{m^2 - 1}{m^2} \ln \frac{r}{r_0} \cdot \frac{P}{h^2}.$$

Insbesondere mit $m = 3$ ist:

$$z_0 = \frac{3}{2\pi} \frac{Pr^2}{Eh^3}; \quad \max. (E\varepsilon) = \frac{4}{3} \ln \frac{r}{r_0} \cdot \frac{P}{\pi h^2};$$

z. B. für $\frac{r}{r_0} = 10 \quad 20 \quad 30 \quad 40 \quad 50$

$$\max. (E\varepsilon) = 3,07 \quad 3,99 \quad 4,53 \quad 4,92 \quad 5,22 \cdot \frac{P}{\pi h^2}$$

d. i. resp. 4,60 5,99 6,80 7,38 7,83

mal so gross, als der Maximalwerth von $E\varepsilon$ bei gleichförmiger Vertheilung der Belastung $P = \pi r^2 p$ auf der Platte (cf. Nr. 288 für $p_1 = 0$). Die Durchbiegung z_0 ist 4 mal so gross, als in jenem Falle oder ebenso gross, wie bei gleichförmiger Belastung und freier Auflage des Plattenrandes (Nr. 287).

2. Durchbrochene Platte.

293. — Damit die Symmetrie gewahrt, d. h. die Platte ein Umdrehungskörper bleibe, wird eine concentrische kreisförmige Durchbrechung vorausgesetzt, also eine ringförmige ebene Platte, deren äusserer und innerer Radius resp. = r und r_0 sein möge.

Dergleichen durchbrochene Platten kommen im Maschinenbau u. A. vor als Deckelplatten von Hohlcyllindern (Dampfmaschinen-Cylindern etc.) mit einer centralen Oeffnung für den Durchgang einer runden Stange (Kolbenstange) oder als Endplatten cylindrischer Dampfkessel, welche mit einer inneren Feuerröhre versehen sind; ist auch im letzteren Falle die Feuerröhre nicht concentrisch mit dem Kessel, sondern nach Unten hin gerückt, so wird doch immerhin die Untersuchung der ebenen Endplatte unter der Voraussetzung einer centralen Durchbrechung einen nützlichen Anhaltspunkt für die Beurtheilung ihrer nur sehr schwierig genau zu untersuchenden Anstrengung auch bei excentrischer Durchbrechung durch die Feuerröhre gewähren.

In beiden genannten Fällen ist die Platte einem gleichförmig vertheilten Normaldrucke unterworfen, welcher, wie im Vorhergehenden, mit p pro Flächeneinheit bezeichnet wird; ist auch streng genommen im einen Falle (Cylinderdeckel) der äussere, im anderen (Kesselboden) der äussere und innere Plattenrand zugleich noch einer radial gerichteten äusseren Zugkraft unterworfen, so ist diese doch immer nur von untergeordnetem Einflusse und wird deshalb hier (cf. Nr. 283) $p_1 = 0$ gesetzt. In beiden Fällen ist ferner die ringförmige Platte am äusseren Rande als fest eingeklemmt zu betrachten, während der innere Rand in einen Falle nach der Axe verschiebbar, im anderen gleichfalls fest eingeklemmt ist. Auf diese zwei Fälle beschränkt sich die folgende Untersuchung, welcher die Formeln in Nr. 283 und 284 zu Grunde gelegt werden können; in denselben ist

$$P = -\pi r_0^2 p, \text{ also } b = -a r_0^2$$

zu setzen, wenn auf den beweglichen inneren Rand der Platte keine nach der Axe gerichtete Kraft wirkt, wie zunächst in den beiden folgenden Nummern angenommen wird.

294. — Bei der ringförmigen ebenen Platte, welche am äusseren Rande fest eingeklemmt, am inneren ganz frei ist, sind die Constanten c und d (Nr. 284) dadurch bestimmt, dass

$$\frac{dz}{dx} = 0 \text{ ist für } x = r$$

und $\sigma_x = 0$ „ „ „ $x = r_0$ und jeden Werth von y .

Daraus ergibt sich mit Rücksicht auf Nr. 283 und 284 und wenn zur Abkürzung

$$n = \frac{r_0}{r}; \alpha = \frac{1 - \left(4 \ln \frac{1}{n} - \frac{m-1}{m+1}\right) n^2}{1 + \frac{m-1}{m+1} \frac{1}{n^2}}$$

gesetzt wird:

$$\frac{c}{2} = -\frac{1}{8} \left[1 - 4n^2 \left(\ln r - \frac{1}{2} \right) - \alpha \right] ar^2; \quad d = -\frac{1}{8} \alpha ar^4$$

$$E\varepsilon_x = \frac{3}{4} \frac{m^2 - 1}{m^2} \frac{pr^2}{h^3} \left[1 - 3 \frac{r^2}{r^2} - 4n^2 \left(\ln \frac{r}{x} - 1 \right) - \alpha \left(\frac{r^2}{x^2} + 1 \right) \right] y$$

$$E\varepsilon_\varphi = \frac{3}{4} \frac{m^2 - 1}{m^2} \frac{pr^2}{h^3} \left[1 - \frac{r^2}{r^2} - 4n^2 \ln \frac{r}{x} + \alpha \left(\frac{r^2}{x^2} - 1 \right) \right] y. *)$$

Die Constante e (Nr. 284) würde nur dann in Betracht kommen, wenn die Biegung der Platte, d. h. die Abweichung z eines Punktes der Mittelfläche von der ursprünglichen Mittelebene berechnet werden sollte, worauf es hier nicht ankommt.

$$\text{Mit } m = 3, \text{ also } \alpha = \frac{1 - \left(4 \ln \frac{1}{n} - \frac{1}{2} \right) n^2}{1 + \frac{1}{2n^2}}$$

findet man für $y = \frac{h}{2}$ und

$n =$	0,1	0,2	0,4				
$x = r_0:$	-	$E\varepsilon_x =$	0,890	0,686	0,294	$\cdot \frac{1}{3} \frac{r^2}{h^2} p$	
$x = r:$	-	$E\varepsilon_\varphi =$	2,670	2,058	0,882	"	$= 3 (-E\varepsilon_x)$
			1,996	1,953	1,919	"	
			$E\varepsilon_\varphi = \text{Null.}$				

Für kleinere Werthe von n ist also ε_φ am inneren Rande, für grössere Werthe von n dagegen ε_x am äusseren Rande, und zwar immer an der Oberfläche ($y = \pm \frac{h}{2}$) der Platte die grösste Ausdehnung überhaupt, oder es ist allgemein:

$$\max. (E\varepsilon) = \begin{cases} \frac{3}{8} \frac{m^2 - 1}{m^2} \frac{r^2}{h^2} \left[1 - n^2 - 4n^2 \ln \frac{1}{n} + \alpha \left(\frac{1}{n^2} - 1 \right) \right] p \\ \frac{3}{4} \frac{m^2 - 1}{m^2} \frac{r^2}{h^2} (1 - 2n^2 + \alpha) p \end{cases}$$

d. h. = dem ersten oder zweiten dieser beiden Ausdrücke, jenachdem n kleiner oder grösser und somit der erste oder zweite Ausdruck der grössere ist. —

Bei einem Cylinderdeckel wird übrigens der Rand der centralen Durchbrechung durch die sich hier anschliessende Stopfbüchse der Art abgesteift, dass die Art seiner Biegung sich derjenigen nähert, welche in der folgenden Nummer besprochen wird.

*) Diese Ausdrücke von $E\varepsilon_x$ und $E\varepsilon_\varphi$ stimmen, wie es sein muss, mit denen überein, welche in Nr. 288 für die volle kreisförmige Platte erhalten wurden, wenn $n = 0$ gesetzt wird, wodurch auch $\alpha = 0$ wird.

295. — Bei der am äusseren Rande fest und am inneren in einer beweglichen Hülse eingeklemmten ringförmigen ebenen Platte sind die Constanten c und d (Nr. 284) bestimmt durch:

$$\frac{dz}{dx} = 0 \text{ für } x = r \text{ und } x = r_0.$$

Daraus ergibt sich mit Rücksicht auf Nr. 283 und 284 und wenn zur Abkürzung

$$n = \frac{r_0}{r}; \quad a = \frac{1 - \left(4 \ln \frac{1}{n} + 1\right) n^2}{\frac{1}{n^2} - 1}$$

gesetzt wird:

$$\frac{c}{2} = -\frac{1}{8} \left[1 - 4n^2 \left(\ln r - \frac{1}{2} \right) + a \right] a r^2; \quad d = \frac{1}{8} a a r^4$$

$$E \varepsilon_x = \frac{3}{4} \frac{m^2 - 1}{m^2} \frac{p r^2}{h^3} \left[1 - 3 \frac{x^2}{r^2} - 4n^2 \left(\ln \frac{r}{x} - 1 \right) + a \left(\frac{r^2}{x^2} + 1 \right) \right] y$$

$$E \varepsilon_\varphi = \frac{3}{4} \frac{m^2 - 1}{m^2} \frac{p r^2}{h^3} \left[1 - \frac{x^2}{r^2} - 4n^2 \ln \frac{r}{x} - a \left(\frac{r^2}{x^2} - 1 \right) \right] y. \quad *)$$

Mit $m = 3$ findet man für $y = \frac{h}{2}$ und

$$n = 0,1 \quad 0,2 \quad 0,4$$

$$x = r_0: E \varepsilon_x = 1,834 \quad 1,544 \quad 0,924 \cdot \frac{1}{3} \frac{r^2}{h^2} p$$

$$x = r: -E \varepsilon_x = 1,942 \quad 1,781 \quad 1,263 \cdot n$$

$E \varepsilon_\varphi$ ist an beiden Rändern = 0, und es ist sonach $\mp \varepsilon_x$ für $x = r$ und $y = \pm \frac{h}{2}$ der grösste Absolutwerth von ε überhaupt:

$$\max. (E \varepsilon) = \frac{3}{4} \frac{m^2 - 1}{m^2} \frac{r^2}{h^2} (1 - 2n^2 - a) p.$$

Damit, wie diese Rechnung voraussetzt, auf den inneren Rand der Platte keine nach der Axe gerichtete Kraft wirke, müssen beide Ränder nach der Richtung der Axe gegenseitig verschiebbar sein; bei dem Cylinderdeckel ist dies der Fall, indem die Stopfbüchse, mit welcher der innere Deckelrand fest verbunden ist, längs der Kolbenstange gleiten kann.

296. — Wenn aber die durchbrochene Platte an beiden Rändern fest eingeklemmt ist, so dass diese Ränder sich nicht nach der Richtung der Axe gegeneinander verschieben können, so ist P , also auch b eine vorläufig unbekannt Constante; die im Ausdrücke von z (Nr. 284) vorkommenden 4 Constanten b, c, d, e sind aber dadurch bestimmt, dass

$$z = 0 \text{ und } \frac{dz}{dx} = 0 \text{ ist für } x = r \text{ und } x = r_0.$$

*) Mit $n = 0$, also $a = 0$, stimmen auch diese Ausdrücke, wie es sein muss, mit denen überein, welche in Nr. 288 für die volle kreisförmige Platte erhalten wurden.

Demgemäss ergibt sich mit Rücksicht auf Nr. 283 und 284 und wenn

$$n = \frac{r_0}{r}; \quad \beta = \frac{1 + n^2 - 4n^2 \frac{\ln \frac{1}{n}}{1-n^2}}{1 - 4n^2 \left(\frac{\ln \frac{1}{n}}{1-n^2} \right)^2}$$

gesetzt wird:

$$\frac{b}{2} = -\frac{1}{8} \beta a r^2; \quad \frac{c}{2} = -\frac{1}{8} \left[1 + n^2 - \beta \left(\ln r - \frac{1}{2} + n^2 \frac{\ln \frac{1}{n}}{1-n^2} \right) \right] a r^2$$

$$d = \frac{n^2}{8} \left(1 - \beta \frac{\ln \frac{1}{n}}{1-n^2} \right) a r^4$$

$$E \varepsilon_x = \frac{3}{4} \frac{m^2 - 1}{m^2} \frac{p r^2}{h^3} \left[1 - 3 \frac{x^2}{r^2} + n^2 + \beta \left(1 - \ln \frac{r}{x} - n^2 \frac{\ln \frac{1}{n}}{1-n^2} \right) - \right. \\ \left. - n^2 \left(\beta \frac{\ln \frac{1}{n}}{1-n^2} - 1 \right) \right] \frac{r^2}{x^2} y.$$

Der grösste Absolutwerth von ε ist unter den Werthen von ε_x an den Rändern der Platte für $y = \pm \frac{h}{2}$ zu suchen (ε_φ ist hier natürlich wieder = 0); für $x = r_0$, $y = -\frac{h}{2}$ ist:

$$E \varepsilon_x = \frac{3}{4} \frac{m^2 - 1}{m^2} \frac{r^2}{h^2} \left[-1 + n^2 + \beta \left(\frac{\ln \frac{1}{n}}{1-n^2} - \frac{1}{2} \right) \right] p$$

und für $x = r$, $y = -\frac{h}{2}$:

$$E \varepsilon_x = \frac{3}{4} \frac{m^2 - 1}{m^2} \frac{r^2}{h^2} \left[1 - n^2 - \beta \left(\frac{1}{2} - n^2 \frac{\ln \frac{1}{n}}{1-n^2} \right) \right] p.$$

Hiernach findet man für $y = -\frac{h}{2}$ z. B. mit

$$n = 0,3 \quad 0,4 \quad 0,5$$

$$x = r_0: E \varepsilon_x = 0,4557 \quad 0,3043 \quad 0,1976 \cdot \frac{3}{4} \frac{m^2 - 1}{m^2} \frac{r^2}{h^2} p$$

$$x = r: E \varepsilon_x = 0,2779 \quad 0,2096 \quad 0,1492 \quad n$$

woraus zu schliessen, dass ε_x für $y = \pm \frac{h}{2}$ am inneren Rande der Platte der grösste Absolutwerth von ε überhaupt ist. Das relative Maximum von ε an einer gewissen mittleren Stelle, woselbst die Platte entgegengesetzt ge-

bogen ist, wie an den Rändern, ist nämlich immer wesentlich kleiner; dieses Maximum findet statt für

$$x = r \sqrt{\frac{\beta}{12} + \sqrt{\left(\frac{\beta}{12}\right)^2 + \frac{\alpha}{3}}},$$

worin

$$\alpha = n^2 \left(\beta \frac{1}{1-n^2} - 1 \right)$$

gesetzt ist. Man findet hiernach z. B.

$$\begin{array}{ccc} \text{für } n = 0,3 & 0,4 & 0,5 \\ x = 0,6106 & 0,6710 & 0,7331 \cdot r \end{array}$$

$$\text{und für } y = \frac{h}{2}: E\epsilon_x = 0,1630 \quad 0,1202 \quad 0,0834 \cdot \frac{3}{4} \frac{m^2-1}{m^2} \frac{r^2}{h^2} p.$$

297. — In dem Falle der vorigen Nummer würden sich die ebenen Endplatten eines mit einer inneren Feuerröhre versehenen Dampfkessels befinden, wenn diese Röhre, welche etwa halb so weit wie der Kessel zu sein pflegt, gerade in der Mitte des letzteren läge. Wird aber mit Rücksicht auf die excentrische Lage des Feuerrohrs sein Durchmesser nur = 0,4 des Kesseldurchmessers gesetzt, so lässt sich mit $n = 0,4$ die grösste Anstrengung der Endplatte, welche jedenfalls an ihrem mit dem Feuerrohre vernieteten inneren Rande stattfindet, mit $m = 3$ zu

$$\max. (E\epsilon) = 0,3043 \cdot \frac{3}{4} \frac{m^2-1}{m^2} \frac{r^2}{h^2} p = 0,2029 \frac{r^2}{h^2} p$$

schätzen. Gleichfalls mit $m = 3$ ist dagegen die grösste Anstrengung des cylindrischen Blechmantels nach Nr. 280:

$$\max. (E\epsilon) = 1,805 \frac{pr}{\delta},$$

unter δ die Dicke des hierzu verwendeten Blechs verstanden. Die Nietlöcher schwächen beide Theile, resp. erhöhen ihre Anstrengungen nahezu in gleichem Grade, und die Gleichsetzung beider Werthe von $\max. (E\epsilon)$ liefert:

$$\frac{h^2}{\delta^2} = 0,0562 \frac{2r}{\delta}$$

oder mit $\frac{\delta}{2r} = 0,0014n + 0,005$ (cf. Nr. 281):

$$\frac{h}{\delta} = \sqrt{\frac{562}{14n + 50}}.$$

Dabei ist n der innere Ueberdruck in Atmosphären, und man findet z. B.

$$\begin{array}{cccccc} \text{mit } n = 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ \frac{h}{\delta} = 2,96 & 2,68 & 2,47 & 2,30 & 2,16 & 2,05. \end{array}$$

Freilich verursachen die Winkelleisen, welche die Verbindung der Endplatte mit dem äusseren Blechmantel und dem inneren Feuerröhre vermitteln, eine wesentliche Absteifung der ersteren, und wenn mit Rücksicht darauf ihre grösste Anstrengung entsprechend $n = 0,5$ und $m = 3$ nur mit

$$\max. (E\epsilon) = 0,1976 \cdot \frac{3}{4} \frac{m^2-1}{m^2} \frac{r^2}{h^2} p = 0,1317 \frac{r^2}{h^2} p \quad (\text{Nr. 296})$$

in Rechnung gebracht wird, ergibt die der obigen analoge Vergleichung:

$$\frac{h}{\delta} = \sqrt{\frac{365}{14n + 50}},$$

z. B. mit $n = 1 \quad 2 \quad 3 \quad 4 \quad 5 \quad 6$

$$\frac{h}{\delta} = 2,39 \quad 2,16 \quad 1,99 \quad 1,85 \quad 1,74 \quad 1,65.$$

Immerhin würde es also nöthig sein, zu den ebenen Endplatten, wenn sie nicht stärker angestrengt werden sollen, als die cylindrische äussere Kesselwand, etwa doppelt so dickes Blech zu verwenden, wie zu dieser.

III. Beliebige ebene Platte bei gleichförmig vertheilter Belastung.

a. Allgemeine Formeln.

298. — Die verhältnissmässig sehr kleine Dicke der Platte sei, wie in Nr. 283, mit h , der auf der Oberfläche gleichförmig vertheilte äussere Normaldruck mit p pro Flächeneinheit bezeichnet. Ausser ihm mögen im Allgemeinen auch auf den Rand der Platte äussere Kräfte nach der Richtung der Mittelfläche wirken, jedoch so, dass die Ausdehnung, welche dadurch nach einer gewissen Richtung in der Mittelfläche hervorgerufen wird, für alle Punkte derselben gleich gross ist.

Die verbogene Mittelfläche werde auf ein rechtwinkeliges Axensystem OX, OY, OZ bezogen, so dass die xy -Ebene mit der ursprünglich ebenen Mittelfläche zusammenfällt und die positive z -Axe die Richtung des äusseren Normaldrucks p hat. Wenn nun wieder, wie in Nr. 283, die Spannung σ_z als sehr klein gegen σ_x und σ_y vernachlässigt wird, so folgt aus den Gleichungen:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x &= 2G \left(\varepsilon_x + \frac{\mu}{m-2} \right) \\ \sigma_y &= 2G \left(\varepsilon_y + \frac{\mu}{m-2} \right) \\ \sigma_z &= 2G \left(\varepsilon_z + \frac{\mu}{m-2} \right) \end{aligned} \right\} \mu = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z \quad (\text{Nr. 227})$$

$$\text{mit } \sigma_z = 0 \text{ und } A = \frac{m}{m-1} \cdot 2G = \frac{m^2}{m^2-1} E:$$

$$\sigma_x = A \left(\varepsilon_x + \frac{1}{m} \varepsilon_y \right); \quad \sigma_y = A \left(\frac{1}{m} \varepsilon_x + \varepsilon_y \right).$$

Wenn ferner hier mit v (positiv nach der Richtung der positiven z -Axe) die Entfernung eines beliebigen Punktes der Platte von ihrer Mittelfläche bezeichnet und wie in Nr. 283 angenommen wird, dass eine ursprünglich zur Mittelfläche senkrechte materielle Gerade auch bei der Biegung diese Eigenschaft behalte, so ist, unter

$$\begin{array}{llll} \rho_x & \text{den Krümmungsradius des der } x\text{-Axe parallelen und unter} \\ \rho_y & \text{„} & \text{„} & \text{„ } y\text{-Axe} & \text{„} \end{array}$$

Normalschnitts der Mittelfläche im Punkte x, y verstanden, beide absolut genommen:

$$\varepsilon_x = \varepsilon_x^0 \pm \frac{v}{\varrho_x}; \quad \varepsilon_y = \varepsilon_y^0 \pm \frac{v}{\varrho_y}.$$

Dabei gelten die oberen oder unteren Zeichen, jenachdem die betreffenden Normalschnitte nach der Seite der positiven z -Axe convex oder concav sind; ε_x^0 und ε_y^0 sind die als constant vorausgesetzten Ausdehnungen der Mittelfläche selbst nach den Richtungen x und y . Der analytische Ausdruck von ϱ_x ist vollständig:

$$\varrho_x = \mp \frac{\sqrt{1 + \left(\frac{dz}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dy}\right)^2}}{\frac{d^2z}{dx^2} \cos^2 \lambda + 2 \frac{d^2z}{dx dy} \cos \lambda \cos \mu + \frac{d^2z}{dy^2} \cos^2 \mu},$$

unter λ und μ die Winkel verstanden, welche die Tangente des der x -Axe parallelen Normalschnitts beziehungsweise mit der x -Axe und der y -Axe bildet, und wo das obere oder untere Zeichen unter denselben Umständen gilt, wie im obigen Ausdrucke von ε_x . Wenn aber, wie hier vorausgesetzt wird, die Krümmung der Mittelfläche sehr gering ist, so sind $\frac{dz}{dx}$, $\frac{dz}{dy}$ und $\cos \mu$ sehr klein, $\cos \lambda$ ist sehr wenig von der Einheit verschieden, also näherungsweise:

$$\frac{1}{\varrho_x} = \mp \frac{d^2z}{dx^2}; \quad \text{desgl. } \frac{1}{\varrho_y} = \mp \frac{d^2z}{dy^2}; \quad \text{mithin:}$$

$$\varepsilon_x = \varepsilon_x^0 - v \frac{d^2z}{dx^2} \quad \left| \quad \sigma_x = \sigma_x^0 - Av \left(\frac{d^2z}{dx^2} + \frac{1}{m} \frac{d^2z}{dy^2} \right)$$

$$\varepsilon_y = \varepsilon_y^0 - v \frac{d^2z}{dy^2} \quad \left| \quad \sigma_y = \sigma_y^0 - Av \left(\frac{1}{m} \frac{d^2z}{dx^2} + \frac{d^2z}{dy^2} \right).$$

Dabei sind

$$\sigma_x^0 = A \left(\varepsilon_x^0 + \frac{1}{m} \varepsilon_y^0 \right) \quad \text{und} \quad \sigma_y^0 = A \left(\frac{1}{m} \varepsilon_x^0 + \varepsilon_y^0 \right)$$

die Normalspannungen in der Mittelfläche nach den Richtungen der x -Axe und der y -Axe.

Da ε_x^0 und ε_y^0 constant sind, so folgt aus den obigen Ausdrücken von

$$\varepsilon_x = \frac{d\xi}{dx} \quad \text{und} \quad \varepsilon_y = \frac{d\eta}{dy}$$

mit Rücksicht auf die Geringfügigkeit der Biegung und wenn die z -Axe an den ursprünglich in ihr gelegenen materiellen Punkt der Mittelfläche fixirt gedacht wird:

$$\xi = x \varepsilon_x^0 - v \frac{dz}{dx}; \quad \eta = y \varepsilon_y^0 - v \frac{dz}{dy}$$

und damit (cf. Nr. 229, Gl. VI):

$$\tau_z = G \left(\frac{d\xi}{dy} + \frac{d\eta}{dx} \right) = -2Gv \frac{d^2z}{dx dy}.$$

Aus den früheren Untersuchungen dünner Platten wie dünner Stäbe ist zu schliessen, dass auch hier τ_x und τ_y nicht minder wie σ_z von untergeordneter Grösse sind; wenn somit nur die im Obigen ausgedrückten Spannungen

$$\sigma_x, \sigma_y \text{ und } \tau_z$$

berücksichtigt werden, so liegt damit der in Nr. 231 betrachtete Specialfall vor, demzufolge die Hauptausdehnungen ε_1 , ε_2 und ε_3 bestimmt sind durch:

$$E\varepsilon_1 = -\frac{\sigma_x + \sigma_y}{m}$$

$$E \begin{pmatrix} \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \end{pmatrix} = \frac{m-1}{2m} (\sigma_x + \sigma_y) \pm \frac{m+1}{2m} \sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau_z^2}.$$

Die absolut genommen grösste von ihnen ist ε_2 oder ε_3 , jenachdem $\sigma_x + \sigma_y$ positiv oder negativ ist; beide finden parallel der Mittelfläche statt, da ε_1 die Ausdehnung senkrecht zur Mittelfläche = ε_z ist.

299. — Damit die Spannungen σ_x , σ_y und τ_z für einen gegebenen Punkt (x, y) der Platte durch die Formeln der vorigen Nummer bestimmt seien, muss man z als Function von x und y , d. h. die Gleichung der gebogenen Mittelfläche kennen. Ihre Differentialgleichung wird gefunden mit Hilfe der allgemeinen Gleichungen (I) in Nr. 229, worin

$$X = Y = Z = 0 \text{ und } dz = dv$$

zu setzen ist:

$$\left. \begin{aligned} \frac{d\sigma_x}{dx} + \frac{d\tau_y}{dv} + \frac{d\tau_z}{dy} &= 0 \\ \frac{d\sigma_y}{dy} + \frac{d\tau_z}{dx} + \frac{d\tau_x}{dv} &= 0 \\ \frac{d\sigma_z}{dv} + \frac{d\tau_x}{dy} + \frac{d\tau_y}{dx} &= 0 \end{aligned} \right\} \dots (I).$$

Wenn man in den beiden ersten dieser Gleichungen für σ_x , σ_y und τ_z die Werthe aus Nr. 298 substituirt, dann in Beziehung auf v integrirt und berücksichtigt, dass τ_x und τ_y an der Oberfläche der Platte (für $v = \mp \frac{h}{2}$) = Null sein müssen, so ergibt sich:

$$\tau_x = A \left(\frac{d^3 z}{dx^2 dy} + \frac{d^3 z}{dy^3} \right) \cdot \left(\frac{v^2}{2} - \frac{h^2}{8} \right)$$

$$\tau_y = A \left(\frac{d^3 z}{dx^3} + \frac{d^3 z}{dx dy^2} \right) \cdot \left(\frac{v^2}{2} - \frac{h^2}{8} \right)$$

und die Einführung dieser Ausdrücke in die Gleichung:

$$p + \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \frac{d\tau_x}{dy} dv + \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \frac{d\tau_y}{dx} dv = 0,$$

welche wegen

$$\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \frac{d\sigma_z}{dv} dv = 0 - (-p) = p$$

durch Integration der dritten der Gleichungen (I) nach v erhalten wird, liefert endlich:

$$\frac{d^4 z}{dx^4} + 2 \frac{d^4 z}{dx^2 dy^2} + \frac{d^4 z}{dy^4} = \frac{12p}{Ah^3}.$$

Das Integral dieser partiellen Differentialgleichung lässt sich darstellen unter der Form:

$$z = \frac{3p}{16Ah^3} (a^2 - x^2 - y^2)(b^2 - x^2 - y^2) + (x^2 + y^2) [\varphi(x + yi) + \psi(x - yi)] + \Phi(x + yi) + \Psi(x - yi)$$

($i = \sqrt{-1}$), worin unmittelbar die in Nr. 287 und 288 gefundenen Gleichungen der gebogenen Mittelfläche einer kreisförmigen Platte enthalten sind, wenn $y = 0$ und die willkürlichen Functionen φ , ψ , Φ , Ψ sämtlich = 0 gesetzt werden.*)

Ein particuläres Integral von algebraischer Form wird erhalten, wenn (cf Nr. 244) gesetzt wird:

$$\left. \begin{aligned} \varphi(x + yi) + \psi(x - yi) \\ \Phi(x + yi) + \Psi(x - yi) \end{aligned} \right\} = \alpha + \alpha_1 x + \beta_1 y + \alpha_2 (x^2 - y^2) + \beta_2 \cdot 2xy + \alpha_3 (x^3 - 3xy^2) + \beta_3 (3x^2y - y^3) + \alpha_4 (x^4 - 6x^2y^2 + y^4) + \beta_4 (4x^3y - 4xy^3) + \dots$$

Die Constanten sind durch die Umfangsbedingungen bestimmt, d. h. durch die Form der Platte und durch die Art ihrer Unterstützung oder Befestigung am Rande, event. auch an gewissen mittleren Stellen.

b. Die Platte ist in Beziehung auf zwei sich rechtwinklig schneidende Normalebenen symmetrisch geformt und unterstützt oder befestigt.

300. — In Beziehung auf diese beiden Ebenen, welche als xz -Ebene und yz -Ebene angenommen werden, ist dann auch die gebogene Mittelfläche symmetrisch, weshalb in dem algebraischen Ausdrucke von z nur Glieder mit geraden Potenzen von x und y vorkommen können, mithin zu setzen ist:

$$z = \frac{3p}{16Ah^3} (a^2 - x^2 - y^2)(b^2 - x^2 - y^2) + (x^2 + y^2)[c + c_1(x^2 - y^2) + c_2(x^4 - 6x^2y^2 + y^4) + \dots] + d + d_1(x^2 - y^2) + d_2(x^4 - 6x^2y^2 + y^4) + d_3(x^6 - 15x^4y^2 + 15x^2y^4 - y^6) + \dots$$

*) Um diese Gleichung für z als der obigen Differentialgleichung entsprechend zu verificiren, kann man bemerken, dass letztere zu zerlegen ist in die beiden Gleichungen:

$$\frac{d^2 F}{dx^2} + \frac{d^2 F}{dy^2} = \frac{12p}{Ah^3}; \quad F = \frac{d^2 z}{dx^2} + \frac{d^2 z}{dy^2}.$$

$$\text{Wegen } \frac{d^2 f}{dx^2} + \frac{d^2 f}{dy^2} = 16 \left(x^2 + y^2 - \frac{a^2 + b^2}{4} \right) \text{ für } f = (a^2 - x^2 - y^2)(b^2 - x^2 - y^2)$$

$$\text{und } \frac{d^2 q}{dx^2} + \frac{d^2 q}{dy^2} = 0 \text{ für } q = \varphi(x + yi) + \psi(x - yi) \text{ (cf. Nr. 244)}$$

folgt aber aus dem angeführten Ausdrucke von z :

$$F = \frac{3p}{Ah^3} \left(x^2 + y^2 - \frac{a^2 + b^2}{4} \right) + 4[\varphi(x + yi) + \psi(x - yi)]$$

und daraus sofort:

$$\frac{d^2 F}{dx^2} + \frac{d^2 F}{dy^2} = \frac{12p}{Ah^3}.$$

oder auch mit Zus
 $z = \frac{3p}{16Ah^3} + \dots$
 Jede Gruppe v
 2 neue Const
 1. Unendlich
 301. —
 Systeme sich
 so dass je
 gleichen Abs
 B
 C
 Zu F
 (Nr. 300)
 $\frac{dz}{dx}$
 $\frac{dz}{dy}$
 ihnen wird
 gesetzt wer
 gesetzt wir
 liefert:
 und somit v
 Die Coefficie
 sind durch d

oder auch mit Zusammenfassung gleichartiger Glieder:

$$z = \frac{3p}{16 Ah^3} \left\{ e + f x^2 + g y^2 + f_1 x^4 + [8 - 3(f_1 + g_1)] x^2 y^2 + g_1 y^4 + f_2 x^6 + 5(g_2 - 2f_2) x^4 y^2 + 5(f_2 - 2g_2) x^2 y^4 + g_2 y^6 + \dots \right\}.$$

Jede Gruppe von Gliedern von einer höheren Ordnung bringt dabei nur je 2 neue Constante mit sich.

1. Unendliche Platte, welche in den Knotenpunkten eines Systems von rechteckigen Feldern festgehalten wird.

301. — Wenn man in der Mittelebene einer unendlichen Platte zwei Systeme sich rechtwinkelig schneidender gerader Parallellinien gezogen denkt so dass je zwei auf einander folgende Gerade des einen Systems den gleichen Abstand $2a$, des anderen Systems den gleichen Abstand $2b$ haben,

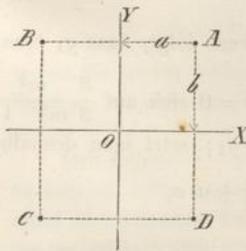


Fig. 40.

so seien die Durchschnittspunkte dieser Geraden in ihrer gemeinschaftlichen Ebene festgehalten, während übrigens eine beliebige Verbiegung aus dieser Ebene heraus stattfinden kann. Alle so gebildete rechteckige Felder wie $ABCD$, Fig. 40, verhalten sich gleich, und es bezieht sich die Untersuchung nur auf ein solches Feld; die xy -Ebene wird in der festen Ebene angenommen, der Anfangspunkt O im Mittelpunkte des betrachteten Feldes, die x -Axe parallel den Seiten $2a$, die y -Axe parallel den Seiten $2b$ desselben.

Zur Bestimmung der constanten Coefficienten im Ausdrücke von z (Nr. 300) dienen zunächst die Bedingungen, dass

$$\frac{dz}{dx} = 0 \text{ sein muss für } x = \pm a \text{ und jeden Werth von } y,$$

$$\frac{dz}{dy} = 0 \text{ „ „ „ } y = \pm b \text{ „ „ „ „ } x;$$

ihnen wird entsprochen, wenn

$$f_2, g_2 \text{ und alle folgenden Coefficienten} = 0$$

gesetzt werden, wenn ferner

$$f_1 + g_1 = \frac{8}{3}; f = -2f_1 a^2; g = -2g_1 b^2$$

gesetzt wird. Die fernere Bedingung:

$$z = 0 \text{ für } x = \pm a, y = \pm b$$

liefert:

$$e = f_1 a^4 + g_1 b^4$$

und somit wird:

$$z = \frac{3p}{16 Ah^3} [f_1 (a^2 - x^2)^2 + g_1 (b^2 - y^2)^2].$$

Die Coefficienten f_1 und g_1 , welche Functionen von a und b sein können, sind durch die Relation: $f_1 + g_1 = \frac{8}{3}$ noch nicht bestimmt; diese Unbestimmt-

heit wird indessen eingeschränkt durch die Erwägung, dass, wenn man mit $b = 0$ die der y -Axe parallelen Punktreihen zu festen Geraden zusammenrücken lässt, wodurch, weil dann wegen $y^2 \equiv b^2$ auch $y = 0$ gesetzt werden muss,

$$z = \frac{3p}{16 Ah^3} f_1 (a^2 - x^2)^2 = \frac{3}{16} \frac{m^2 - 1}{m^2} \frac{p}{Eh^3} f_1 (a^2 - x^2)^2$$

wird, diese Gleichung offenbar übereinstimmen muss mit der auf die entsprechenden Axen bezogenen Gleichung der elastischen Linie eines beiderseits unter den Richtungswinkeln = Null eingeklemmten geraden Stabes von der Länge $2a$, welcher bei rechteckigem Querschnitte von beliebiger Breite und von der Höhe h durch den constanten Druck p auf die Einheit der Oberfläche belastet ist. Diese letztere Gleichung ergibt sich nach Nr. 61 und 66 wie folgt:

$$z = \frac{p}{2Eh^3} (a^2 - x^2)^2$$

und es muss also $f_1 = \frac{8}{3} \frac{m^2}{m^2 - 1}$ sein für $b = 0$. Ebenso folgt, dass g_1 eine solche Function von a und b sein muss, welche mit $a = 0$ sich auf $\frac{8}{3} \frac{m^2}{m^2 - 1}$ reducirt. Wäre $a = b$, so wäre natürlich auch $f_1 = g_1$; setzt man deshalb

$$f_1 = \frac{8}{3} \frac{m^2}{m^2 - 1} + b^n c; \quad g_1 = \frac{8}{3} \frac{m^2}{m^2 - 1} + a^n c,$$

so ergibt sich wegen $f_1 + g_1 = \frac{8}{3}$:

$$c = -\frac{8}{3} \frac{\frac{m^2}{m^2 - 1} - 1}{a^n + b^n}$$

$$f_1 = \frac{8}{3} \frac{m^2}{m^2 - 1} \frac{a^n - \frac{1}{m^2} b^n}{a^n + b^n}; \quad g_1 = \frac{8}{3} \frac{m^2}{m^2 - 1} \frac{b^n - \frac{1}{m^2} a^n}{a^n + b^n}$$

und mit $A = \frac{m^2}{m^2 - 1} E$:

$$z = \frac{p}{2Eh^3} \frac{a^n - \frac{1}{m^2} b^n}{a^n + b^n} (a^2 - x^2)^2 + \frac{b^n - \frac{1}{m^2} a^n}{a^n + b^n} (b^2 - y^2)^2$$

Daraus folgt: $\frac{d^2 z}{dx dy} = 0$, also $\tau_x = 0$; ε_x und ε_y sind also Hauptausdehnungen (mit derjenigen Annäherung, womit schon früher von τ_x und τ_y abstrahirt wurde), und wenn man in den Ausdrücken von ε_x und ε_y sub Nr. 298 die aus obiger Formel für z sich ergebenden Ausdrücke von $\frac{d^2 z}{dx^2}$ und $\frac{d^2 z}{dy^2}$, ferner nach Nr. 227:

$$E\varepsilon_x^0 = \sigma_x^0 - \frac{1}{m} \sigma_y^0; \quad E\varepsilon_y^0 = \sigma_y^0 - \frac{1}{m} \sigma_x^0$$

substituiert, ergibt sich:

$$E\varepsilon_x = \sigma_x^0 - \frac{1}{m} \sigma_y^0 + \frac{2p}{h^3} \frac{a^n - \frac{1}{m^2} b^n}{a^n + b^n} (a^2 - 3x^2) v$$

$$E\varepsilon_y = \sigma_y^0 - \frac{1}{m} \sigma_x^0 + \frac{2p}{h^3} \frac{b^n - \frac{1}{m^2} a^n}{a^n + b^n} (b^2 - 3y^2) v.$$

$$\left. \begin{array}{l} \varepsilon_x \text{ ist am grössten für } x = \pm a, v = \pm \frac{h}{2} \\ \varepsilon_y \text{ " " " " " } y = \pm b, v = \pm \frac{h}{2} \end{array} \right\} \text{ und zwar:}$$

$$\max. (E\varepsilon_x) = \sigma_x^0 - \frac{1}{m} \sigma_y^0 \pm 2 \frac{a^n - \frac{1}{m^2} b^n}{a^n + b^n} \frac{a^2}{h^2} p$$

$$\max. (E\varepsilon_y) = \sigma_y^0 - \frac{1}{m} \sigma_x^0 \pm 2 \frac{b^n - \frac{1}{m^2} a^n}{a^n + b^n} \frac{b^2}{h^2} p,$$

wobei die letzten Glieder auf den rechten Seiten mit den oberen oder unteren Zeichen zu nehmen sind, jenachdem die algebraische Summe der beiden ersten Glieder positiv oder negativ ist.

Der Exponent n ist bei dieser Entwicklung unbestimmt geblieben, und es scheint dafür nur eine Grenze angegeben werden zu können, welche er nicht überschreiten kann, damit, wie es offenbar der Fall sein muss, z stets um so grösser sich ergebe, je kleiner (absolut genommen) x und y sind;*) diese Grenze ist, wenn $a > b$, bestimmt durch:

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n < m^2; \text{ also } n < \frac{2 \lg m}{\lg \frac{a}{b}}.$$

302. — Die bei der allgemeineren Aufgabe der vorigen Nummer gebliebene Unbestimmtheit hört auf, wenn $a = b$, d. h. eine quadratische Anordnung der in der xy -Ebene festgehaltenen Punkte vorausgesetzt wird. Dann ist $f_1 = g_1 = \frac{4}{3}$;

$$z = \frac{1}{4} \frac{m^2 - 1}{m^2} \frac{p}{Eh^3} [(a^2 - x^2)^2 + (a^2 - y^2)^2]$$

$$\max. (E\varepsilon_x) = \sigma_x^0 - \frac{1}{m} \sigma_y^0 \pm \frac{m^2 - 1}{m^2} \frac{a^2}{h^2} p$$

$$\max. (E\varepsilon_y) = \sigma_y^0 - \frac{1}{m} \sigma_x^0 \pm \frac{m^2 - 1}{m^2} \frac{a^2}{h^2} p.$$

*) Hierbei muss freilich bemerkt werden, dass streng genommen in den für f_1 und g_1 oben gesetzten Ausdrücken schon eine willkürliche Specialisirung lag; vollkommen gerechtfertigt ist es nur,

$$f_1 = \frac{8}{3} \frac{m^2}{m^2 - 1} + \alpha; \quad g_1 = \frac{8}{3} \frac{m^2}{m^2 - 1} + \beta$$

zu setzen, unter α und β solche Functionen von a und b verstanden, welche durch Vertauschung von a mit b gegenseitig in einander übergehen, und von denen α mit $b = 0$, folglich β mit $a = 0$ verschwindet.

Insbesondere für $x = 0, y = 0$ ist

$$z_0 = \frac{1}{2} \frac{m^2 - 1}{m^2} \frac{p a^4}{E h^3},$$

also $\frac{2}{3}$ so gross wie unter sonst gleichen Umständen die Durchbiegung in der Mitte einer am Rande eingeklemmten kreisförmigen Platte, deren Radius $r = a\sqrt{2}$, deren Durchmesser also = der Diagonale des Quadrats $ABCD$, Fig. 40, ist: cf. Nr. 288.

Ist ferner insbesondere $\sigma_x^0 = \sigma_y^0 = \pm p_1$, so ist absolut genommen:

$$\max. (E\varepsilon) = \frac{m-1}{m} p_1 + \frac{m^2-1}{m^2} \frac{a^2}{h^2} p,$$

folglich mit $p_1 = 0$ gleichfalls $\frac{2}{3}$ so gross wie für die kreisförmige am Rande eingeklemmte Platte mit dem Radius $r = a\sqrt{2}$.

303. — Nach den Formeln von Nr. 302 ist näherungsweise die Anstrengung zu beurtheilen, welche die ebenen Platten, woraus der Feuerkasten einer Locomotive gebildet ist, unter der Einwirkung des im Kessel herrschenden Dampfdrucks auszuhalten haben. Am Rande sind diese Platten (bei dem äusseren Kasten aus Eisen, bei dem der Einwirkung des Feuers unmittelbar ausgesetzten inneren Kasten gewöhnlich aus Kupfer bestehend) freilich wegen der hier nöthigen dichten Nietung als stetig eingeklemmt zu betrachten, so dass das Verhalten der durch die mittleren Unterstützungsbolzen gebildeten quadratischen Plattenfelder sich demjenigen des Feldes einer unendlichen Platte nur um so mehr nähert, je mehr das Feld vom Plattenrande entfernt liegt; zunächst dem letzteren nähert sich das Verhalten demjenigen einer ringsum eingeklemmten quadratischen Platte: cf. Nr. 305.

Für die Deckplatte des inneren Feuerkastens ist

$$\sigma_x^0 = \sigma_y^0 = 0$$

zu setzen, weil der Dampfdruck auf die verticalen Seitenwände des inneren Kastens fast gänzlich von den diese Wände mit denen des äusseren Kastens verbindenden Bolzen aufgenommen, somit vom Rande der Deckplatte des inneren Kastens abgefangen wird. Es ist also mit $m = 3$:

$$\max. (E\varepsilon) = \frac{8}{9} \frac{a^2}{h^2} p$$

oder mit $\max. (E\varepsilon) = k$ und p (Kilogr. pro Quadratcentim.) = $\frac{31}{30} n$, unter n den Dampfüberdruck in Atmosphären verstanden:

$$k = \frac{124}{135} \frac{a^2}{h^2} n.$$

Z. B. für $a = 6$ cm, $h = 1,2$ cm und $n = 5$ ist hiernach: $k = 115$ Kilogr. pro Quadratcentim. Weil aber diese Deckplatte nicht an absolut feste Punkte, sondern an schmiedeeiserne Balkenträger angebolzt ist, welche meist ohne Verstrebung mit dem äusseren Feuerkasten nur gegen die oberen Ränder der vorderen und hinteren verticalen Wand des inneren Kastens sich stützen, somit trotz ihrer hochkantigen Lage bei ca. 2,5 und 10 Centim. Seitenlänge ihres Querschnitts in nicht ganz unwesentlichem Grade der eigenen Durchbiegung unterworfen sind, so ist in der That die Anstrengung der fraglichen Deckplatte noch etwas grösser.

Bei den verticalen Kastenwänden werde die x -Axe horizontal, die y -Axe vertical angenommen; dann ist wieder $\sigma_x^0 = 0$ zu setzen, σ_y^0 dagegen ist,

äußere Deckplatte
während Kessel
Wand in inneren
Gesamtheit

Dabei ist, wenn
resp. des äusseren

also auch mit

Z. B. mit $a =$
 $b =$
 $h =$

ist im ersten
zweite
entsprechend
engeren Sinn

2. Rechte

301. —
fälle mit der
fläche zusa
die den Sa
eine solche

ist sowohl
wie auch
müssen, so
dargestellt

Factoren di

setzte, un
hängige C

*) Bei d
217 Kilogram
Dicke, welche
Die Deckplatte
eigenen Durch
sowohl einer
Kupfers aber

sofern die Deckplatte des inneren Kastens mit der den äusseren Kasten überwölbenden Kuppel nicht verbunden ist, nicht = Null, sondern negativ für die Wände des inneren, positiv für die des äusseren Kastens. Wird in beiden Fällen diese Spannung absolut genommen mit p_1 bezeichnet, so ist mit $m = 3$:

$$\max (E\epsilon) = k = p_1 + \frac{8}{9} \frac{a^2}{h^2} p.$$

Dabei ist, wenn b und l die Dimensionen des Horizontaldurchschnitts des inneren resp. des äusseren Kastens bedeuten,

$$p_1 = \frac{blp}{2(b+l)h},$$

also auch mit $p = \frac{31}{30}n$:

$$k = \frac{31}{30}n \left(\frac{bl}{2(b+l)h} + \frac{8}{9} \frac{a^2}{h^2} \right).$$

Z. B. mit $a = 6$, $h = 1,2$, $n = 5$ und

$b = 90$, $l = 100$ Centim. für den inneren,

$b = 110$, $l = 120$ " " " äusseren Kasten

ist im ersten Falle $k = 102 + 115 = 217$ Kilogr. pro Quadratcentim.

" zweiten " $k = 124 + 115 = 239$ " " "

entsprechend einer Pressung für die Wände des inneren, einer Spannung im engeren Sinne für die des äusseren Kastens.*)

2. Rechteckige Platte, welche am Rande ringsum eingeklemmt ist.

301. — Die Seitenlängen der Platte seien = $2a$ und $2b$; die xy -Ebene falle mit der unveränderlichen Ebene des rechteckigen Umfangs der Mittelfläche zusammen und zwar so, dass die x -Axe die den Seiten $2a$, die y -Axe die den Seiten $2b$ des Rechtecks parallele Symmetrieaxe ist. Indem hier z eine solche Function von x und y sein muss, dass

$$z = 0, \quad \frac{dz}{dx} = 0 \quad \text{und} \quad \frac{dz}{dy} = 0$$

ist sowohl für $x = \pm a$ und jeden Werth von y ,

wie auch " $y = \pm b$ " " " " x ,

müssen, sofern überhaupt z als ganze algebraische Function von x und y dargestellt werden kann,

$$(a^2 - x^2)^2 \quad \text{und} \quad (b^2 - y^2)^2$$

Factoren dieser Function sein. Wenn man deshalb

$$z = C(a^2 - x^2)^2 \cdot (b^2 - y^2)^2$$

setzte, unter C eine von den Dimensionen und der Belastung der Platte abhängige Constante verstanden, so würde freilich diese Gleichung nicht der

*) Bei der bedeutenden Druckfestigkeit des Kupfers ist eine spezifische Pressung von 217 Kilogramm zwar nicht bedenklich, indessen ist doch $h = 1,2$ Centim. die kleinste Dicke, welche man diesen Kupferplatten bei 12 Centim. Bolzenabstand zu geben pflegt. Die Deckplatte darf auch nicht schwächer gemacht werden, weil, selbst abgesehen von der eigenen Durchbiegung der Deckbalken, der oben gefundene Werth von $k = 115$ Kilogr. sowohl einer eigentlichen Spannung wie einer Pressung entspricht, die Zugfestigkeit des Kupfers aber bedeutend kleiner ist, als die Druckfestigkeit.

partiellen Differentialgleichung in Nr. 299 entsprechen, weil zwischen den Coefficienten der Glieder der nach Potenzen von x und y entwickelten Function nicht diejenigen Beziehungen stattfinden, welche aus der allgemeinen algebraischen Entwicklung von z in Nr. 300 sich ergeben. Auch durch Multiplication mit einer näher zu bestimmenden geraden algebraischen Function von x und y , d. h. indem man setzte:

$$z = C(a^2 - x^2)^2(b^2 - y^2)^2(1 + fx^2 + gy^2 + \dots)$$

liesse sich in dieser Hinsicht nichts verbessern, indem man immer weniger zu bestimmende Coefficienten, als zu erfüllende Relationen behielte,^{*)} und es ist daraus zu schliessen, dass hier überhaupt nicht allen Bedingungen der Aufgabe durch eine solche algebraische Form von z entsprochen werden kann.

Ein algebraischer Ausdruck von der Form:

$$z = C(a^2 - x^2)^2$$

muss indessen sich ergeben, wenn man eine der Dimensionen a und b , z. B. b in's Unendliche wachsen und damit die Platte in einen nur an zwei gegenüberliegenden Rändern eingeklemmten Plattenstreifen übergehen lässt. Wenn man unter diesen Umständen, vor Allem den Randbedingungen entsprechend und von der zu erfüllenden Differentialgleichung absehend, dennoch

$$z = C(a^2 - x^2)^2(b^2 - y^2)^2$$

setzt, so ist die Constante C an die Bedingungen gebunden, dass

$$\text{mit } b = \infty \text{ für jeden endlichen Werth von } y: z = \frac{p}{2El^3} (a^2 - x^2)^2$$

$$\text{und mit } a = \infty \text{ „ „ „ „ „ } x: z = \frac{p}{2El^3} (b^2 - y^2)^2$$

(cf. Nr. 301) sein muss; ihnen wird entsprochen durch die Gleichung:

$$z = \frac{p}{2El^3} \frac{(a^2 - x^2)^2 (b^2 - y^2)^2}{a^4 + b^4},$$

welche, wenn auch mangelhaft begründet und deshalb ohne theoretischen Werth, doch zu Folgerungen führt, die der Natur der Sache wohl angemessen zu sein scheinen. Mit $x = y = 0$ liefert sie die Durchbiegung in der Mitte:

$$z_0 = \frac{p}{2El^3} \frac{a^4 b^4}{a^4 + b^4},$$

insbesondere mit $a = b$ für eine quadratische Platte:

$$z_0 = \frac{1}{4} \frac{p a^4}{El^3}.$$

^{*)} Der entwickelte Ausdruck

$$z = C(a^2 - x^2)^2 \cdot (b^2 - y^2)^2$$

enthält Glieder bis von der 8^{ten} Dimension in Beziehung auf x und y , und es müssten also (cf. Nr. 300) $1 + 2 + 3 = 6$ Relationen zwischen ihren Coefficienten stattfinden, welche, wie man sich leicht überzeugt, in der That nicht erfüllt sind. Die Hinzufügung des Factors

$$1 + fx^2 + gy^2$$

führt bis zu Gliedern der 10^{ten} Dimension, zwischen deren Coefficienten $6 + 4 = 10$ Relationen erfüllt sein müssten, während nur 2 unbestimmte Coefficienten vorhanden sind, also 8 Relationen unerfüllt blieben u. s. f.

Die grösste Durchbiegung der letzteren wäre sonach halb so gross, als wenn nur zwei gegenüberliegende Ränder eingeklemmt, die beiden anderen aber frei wären; auch wäre sie eben so gross, wie die Durchbiegung in der Mitte bei der am Rande eingeklemmten kreisförmigen Platte (cf. Nr. 288), deren Radius

$$r = a \sqrt[4]{\frac{4}{3} \frac{m^2}{m^2 - 1}},$$

insbesondere mit $m = 3$: $r = a \sqrt[4]{1,5} = 1,107 a$ ist.*)

305. — Aus der in der vorigen Nummer für z aufgestellten Gleichung folgt:

$$\frac{d^2 z}{dx^2} = -\frac{2p}{Eh^3} \frac{(a^2 - 3x^2) \cdot (b^2 - y^2)^2}{a^4 + b^4}$$

$$\frac{d^2 z}{dy^2} = -\frac{2p}{Eh^3} \frac{(a^2 - x^2)^2 \cdot (b^2 - 3y^2)}{a^4 + b^4}$$

$$\frac{d^2 z}{dx dy} = \frac{8p}{Eh^3} \frac{(a^2 - x^2)x(b^2 - y^2)y}{a^4 + b^4};$$

$$\text{max. } \frac{d^2 z}{dx^2} = \frac{4p}{Eh^3} \frac{a^2 b^4}{a^4 + b^4} \text{ für } x = \pm a, y = 0$$

$$\text{max. } \frac{d^2 z}{dy^2} = \frac{4p}{Eh^3} \frac{a^4 b^2}{a^4 + b^4} \text{ „ } y = \pm b, x = 0$$

$$\text{max. } \frac{d^2 z}{dx dy} = \frac{32}{27} \frac{p}{Eh^3} \frac{a^3 b^3}{a^4 + b^4} \text{ für } x^2 = \frac{1}{3} a^2, y^2 = \frac{1}{3} b^2.$$

Nach Nr. 298 ist sonach mit $v = \pm \frac{h}{2}$ und wegen

$$E\varepsilon_x^0 = \sigma_x^0 - \frac{1}{m} \sigma_y^0; E\varepsilon_y^0 = \sigma_y^0 - \frac{1}{m} \sigma_x^0; 2G = \frac{m}{m+1} E;$$

$$\text{max. } (E\varepsilon_x) = \sigma_x^0 - \frac{1}{m} \sigma_y^0 \pm \frac{2b^4}{a^4 + b^4} \frac{a^2}{h^2} p$$

$$\text{max. } (E\varepsilon_y) = \sigma_y^0 - \frac{1}{m} \sigma_x^0 \pm \frac{2a^4}{a^4 + b^4} \frac{b^2}{h^2} p$$

$$\text{max. } \tau_z = \frac{8}{27} \frac{m}{m+1} \frac{2a^2 b^2}{a^4 + b^4} \frac{ab}{h^2} p.$$

An den Stellen, wo ε_x und ε_z am grössten sind, ist $\tau_z = 0$; dort dagegen, wo τ_z am grössten ist, ist $\sigma_x = \sigma_x^0$ und $\sigma_y = \sigma_y^0$, folglich der relative Maximalwerth von $E\varepsilon$:

$$= \frac{m-1}{2m} (\sigma_x^0 + \sigma_y^0) \pm \frac{m+1}{2m} \sqrt{(\sigma_x^0 - \sigma_y^0)^2 + 4(\text{max. } \tau_z)^2}.$$

*) Den obigen Bedingungen für die Constante C liesse sich allgemeiner dadurch entsprechen, dass statt $a^4 + b^4$ im Nenner des Ausdrucks von z gesetzt würde:

$$(a^m + b^m)^{\frac{4}{m}}; \text{ z. B. } (a^2 + b^2)^2 \text{ oder } (a + b)^4.$$

Allein dann ergäbe sich für die quadratische Platte z_0 nur $\frac{1}{2}$ resp. $\frac{1}{8}$ so gross, wie oben gefunden, was namentlich im Vergleich mit der kreisförmigen Platte unmöglich erscheinen würde.

Letzterer ist stets kleiner, als der grössere der beiden Maximalwerthe von $E\varepsilon_x$ und $E\varepsilon_y$, z. B. für $\sigma_x^0 = \sigma_y^0 = 0$

$$\text{nur} = \frac{m+1}{m} \cdot \text{max. } \tau_z = \frac{8}{27} \frac{2a^2 b^2}{a^4 + b^4} \frac{ab}{h^2} p$$

$$= \frac{8}{27} \frac{b}{a} \times \text{dem grösseren der beiden Werthe } \text{max.}(E\varepsilon_x) \text{ und } \text{max.}(E\varepsilon_y),$$

falls $a > b$ ist. Hiernach lässt sich auch zwischen $x^2 = \frac{1}{3} a^2$, $y^2 = \frac{1}{3} b^2$ und $x^2 = a^2$, $y^2 = b^2$ keine wesentlich grössere Anstrengung erwarten, sondern der grössere der Maximalwerthe von ε_x und ε_y als das absolute Maximum von ε betrachten. *)

306. — In einem parallelepipedischen Kasten, dessen Kantenlängen $= 2a$, $2b$ und $2c$ sind und dessen 6 Wände die gleiche, im Vergleich mit a , b und c kleine Dicke h haben, befinde sich eine Flüssigkeit, welche auf die Innenfläche des Kastens den specifischen Ueberdruck p ausübt. Dann ist für die beiden Wände mit den Dimensionen $2a$ und $2b$, wenn man annimmt, dass der Totaldruck auf jede Wand sich gleichförmig auf ihren Umfang vertheilt, indem er die angrenzenden 4 Wände als Zugkraft in Anspruch nimmt:

$$\sigma_x^0 = \frac{2b \cdot 2c}{4(b+c)h} p = \frac{bc}{(b+c)h} p; \quad \sigma_y^0 = \frac{ac}{(a+c)h} p.$$

Ist $a > b$, so ist $\sigma_y^0 > \sigma_x^0$ und somit nach Nr. 305:

$$\text{max.}(E\varepsilon) = \text{max.}(E\varepsilon_y) = \left(\frac{a}{a+c} - \frac{1}{m} \frac{b}{b+c} \right) \frac{c}{h} p + \frac{2a^4}{a^4 + b^4} \frac{b^2}{h^2} p.$$

Mit Vertauschung der Buchstaben a , b , c kann hiernach für jede Kastenwand die grösste Anstrengung berechnet werden; sie findet immer statt an der Innenfläche der Wand in der Mitte der längeren Seiten des Umfangs.

Bei einem würfelförmigen Kasten ($a = b = c$) ist insbesondere:

$$\text{max.}(E\varepsilon) = \left(\frac{m-1}{2m} + \frac{a}{h} \right) \frac{a}{h} p, \quad \text{näherungsweise} = \frac{a^2}{h^2} p;$$

würde derselbe durch ein kugelförmiges Gefäss von gleichem Inhalte und gleicher Wanddicke ersetzt, so wäre die Anstrengung seiner Wand näherungsweise (cf. Nr. 268):

$$\text{max.}(E\varepsilon) = k = \frac{1}{m} \frac{r}{h} p = \frac{1}{m} \sqrt[3]{\frac{6}{\pi}} \frac{a}{h} p,$$

also nur $\frac{1}{m} \sqrt[3]{\frac{6}{\pi}} \cdot \frac{h}{a}$, insbesondere mit $m = 3$ nur ca. $\frac{4}{11} \frac{h}{a}$ so gross wie bei dem würfelförmigen Kasten.

*) Diese Resultate, wenn sie auch nicht streng begründet sind, weichen von der Wahrheit doch ohne Zweifel nur wenig ab. Für die am Rande eingeklemmte quadratische Platte ergibt sich danach eine grösste Anstrengung, die kaum verschieden ist von derjenigen, welche in Nr. 302 für die in quadratisch angeordneten Punkten festgehaltene unendliche Platte gefunden wurde, und es ist deshalb auch die in Nr. 303 ausgeführte Berechnung der Wände des Feuerkastens einer Locomotive nicht wesentlich fehlerhaft mit Rücksicht auf den Umstand, dass diese Wände von endlicher Grösse und am Rande als eingeklemmt zu betrachten sind.

307. —
Wirkungs-
nen Defor-
mation
muss und
Gegeben sei
zogenen Kör-

nach den Kü-
durch mitbe-

Ist V das
des Körpe-
Volumenel-
welche der

d h allen
mation von
den Differen-
bezeichnet z
räumlichen
Somit

$A =$
wobei das
das andere
zen 0 und σ

*) Derjenige
also der totalen
Derjenige Besta-