Die Festigkeitslehre mit besonderer Rücksicht auf die Bedürfnisse des Maschinenbaues

Grashof, Franz

Berlin, 1866

Achtes Capitel Arbeit der inneren Kräfte

urn:nbn:de:bsz:31-274080

ACHTES CAPITEL.

Arbeit der inneren Kräfte.

A. Allgemeine Aufgabe.

307. — Die Aufgabe besteht im Allgemeinen darin, die *Arbeit oder Wirkungsgrösse* A zu berechnen, *welche zu einer gegebenen kleinen Deformation eines gegebenen Körpers aufgewendet werden muss* und welche also der Körper infolge der letzteren in sich aufnimmt. Gegeben sei diese Deformation des auf rechtwinkelige Coordinatenaxen bezogenen Körpers durch die Ausdehnungen und Verschiebungen:

$$\varepsilon_x \quad \varepsilon_y \quad \varepsilon_z \quad \gamma_x \quad \gamma_y \quad \gamma_z$$

nach den Richtungen dieser Axen in jedem Punkte x, y, z nebst den dadurch mitbestimmten Spannungen:

$$\sigma_x \quad \sigma_y \quad \sigma_z \quad \tau_x \quad \tau_y \quad \tau_z.$$

Ist V das Volumen, $dV = dxdydz$ ein parallelepipedisches Volumenelement des Körpers, so ist A = der Summe der Deformationsarbeiten dA für alle Volumenelemente dV zusammen; dA aber besteht aus den Incrementen δdA, welche den Differentialen

$$\delta\varepsilon_x \quad \delta\varepsilon_y \quad \delta\varepsilon_z \quad \delta\gamma_x \quad \delta\gamma_y \quad \delta\gamma_z$$

d. h. allen unendlich kleinen Incrementen der stetig zunehmenden Deformation von dV entsprechen. Die auf die Zeit als Urvariable sich beziehenden Differentiale der die Deformation betreffenden Grössen sind dabei mit δ bezeichnet zum Unterschiede von den Differentialen d, welche sich auf die räumlichen Verhältnisse des ursprünglichen Körpers beziehen.

Somit ergiebt sich sofort:

$$A = \int dV \int (\sigma_x \delta\varepsilon_x + \sigma_y \delta\varepsilon_y + \sigma_z \delta\varepsilon_z + \tau_x \delta\gamma_x + \tau_y \delta\gamma_y + \tau_z \delta\gamma_z),$$

wobei das erste Integral über den ganzen Körper auszudehnen ist, während das andere aus 6 Theilen besteht, die beziehungsweise zwischen den Grenzen 0 und σ_x, ε_x, 0 und σ_y, ε_y etc. zu nehmen sind.*)

---

*) Derjenige Bestandtheil von δdA z. B., welcher der augenblicklichen Spannung σ_x, also der totalen Spannung $\sigma_x dydz$ von dV im Sinne der x-Axe entspricht, ist

$$\sigma_x dy dz\, \delta(dx . \varepsilon_x) = \sigma_x dy dz . dx\, \delta\varepsilon_x = dV . \sigma_x \delta\varepsilon_x \text{ etc.}$$

Derjenige Bestandtheil von δdA, welcher der Spannung τ_x, also der totalen Tangential-

Der zwischen den 12 Grössen ε, γ, σ, τ stattfindende Zusammenhang gestattet in jedem Falle, auch umgekehrt diese Grössen einzeln zu berechnen, wenn die Arbeit A und die Art der dadurch hervorgebrachten Deformation gegeben sind.

308. — Ist der Körper isotrop, und setzt man dann in dem allgemeinen Ausdrucke von A nach Nr 227:

$$\sigma_x = 2G\left(\varepsilon_x + \frac{\mu}{m-2}\right);\ \ \sigma_y = 2G\left(\varepsilon_y + \frac{\mu}{m-2}\right);\ \ \sigma_z = 2G\left(\varepsilon_z + \frac{\mu}{m-2}\right),$$

worin $\mu = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z$ ist, ferner

$$\tau_x = G\gamma_x;\ \ \tau_y = G\gamma_y;\ \ \tau_z = G\gamma_z,$$

so liefert die Ausführung der Integration in Beziehung auf ε und γ:

$$A = G\int\left(\varepsilon_x^2 + \varepsilon_y^2 + \varepsilon_z^2 + \frac{\mu^2}{m-2} + \frac{\gamma_x^2 + \gamma_y^2 + \gamma_z^2}{2}\right)dV$$

als Ausdruck der inneren Arbeit durch die Ausdehnungen und Verschiebungen im Zustande der grössten Deformation.

Ist nur die Art der Deformation gegeben, so lassen sich die 6 Grössen ε und γ für alle Punkte des Körpers durch eine dieser Grössen für einen Punkt des Körpers ausdrücken; sie sind also, wenn auch noch A gegeben ist, alle durch obige Gleichung bestimmt, somit auch nach Nr. 229, Gl. (III, a) die Hauptausdehnungen für alle Körperpunkte und dadurch schliesslich die grösste Ausdehnung ε, welche durch die auf den Körper einwirkende Arbeit A in irgend einem seiner Punkte nach irgend einer Richtung hervorgerufen wird.

309. — Um die innere Arbeit des isotropen Körpers durch die Spannungen im Zustande der grössten Deformation ausgedrückt zu erhalten, hat man in dem allgemeinen Ausdrucke (Nr. 307) nach Nr. 227 zu setzen:

$$\varepsilon_x = \frac{1}{E}\left(\sigma_x - \frac{\sigma_y + \sigma_z}{m}\right);\ \ \varepsilon_y = \frac{1}{E}\left(\sigma_y - \frac{\sigma_z + \sigma_x}{m}\right);\ \ \varepsilon_z = \frac{1}{E}\left(\sigma_z - \frac{\sigma_x + \sigma_y}{m}\right)$$

$$\text{und } \gamma_x = \frac{1}{G}\tau_x;\ \ \gamma_y = \frac{1}{G}\tau_y;\ \ \gamma_z = \frac{1}{G}\tau_z.$$

Die Ausführung der Integration nach σ und τ giebt dann:

$$A = \frac{1}{2E}\int\left(\sigma_x^2 + \sigma_y^2 + \sigma_z^2 - \frac{2}{m}(\sigma_y\sigma_z + \sigma_z\sigma_x + \sigma_x\sigma_y)\right)dV + \frac{1}{2G}\int(\tau_x^2 + \tau_y^2 + \tau_z^2)\,dV.$$

---

spannung $\tau_x dx dy$ in dem einen oder $\tau_x dx dz$ in dem anderen Paare der der x-Axe parallelen Seitenflächen von dV entspricht, ist:

$$\left.\begin{aligned}\tau_x dx dy\,\delta(dz.\gamma_x) &= \tau_x dx dy.dz\,\delta\gamma_x\\ \text{oder } \tau_x dx dz\,\delta(dy.\gamma_x) &= \tau_x dx dz.dy\,\delta\gamma_x\end{aligned}\right\} = dV.\tau_x\delta\gamma_x \text{ etc.}$$

Ist nur die Art der Deformation resp. die Art der Einwirkung der Arbeit A gegeben, so lassen sich die 6 Grössen σ und τ für alle Punkte des Körpers durch eine dieser Grössen für einen Punkt des Körpers ausdrücken; sie sind also, wenn auch noch A gegeben ist, wieder alle durch obige Gleichung bestimmt, somit auch nach Nr. 229, Gl. (III) und (V) die Hauptspannungen für alle Körperpunkte, und damit auch wieder die grösste Ausdehnung ε, welche in dem Körper durch die auf ihn einwirkende Arbeit A hervorgerufen wird.

310. — Die vorhergehenden Formeln finden vorzugsweise Anwendung zur Beurtheilung der sogenannten Stosselasticität und Stossfestigkeit, d. h. zur Berechnung der Anstrengung, welche ein Körper erleidet, wenn eine gewisse Wirkungsgrösse in Form von lebendiger Kraft eines bewegten anderen Körpers stossweise (plötzlich) auf ihn einwirkt. Diese Rechnung ist freilich, wie die folgenden allgemeinen Vorbemerkungen erkennen lassen, aus verschiedenen Gründen unsicher.

Wenn zwei freie Massen m und m_1, welche blosse Progressivbewegungen haben (Bewegungen mit gleichen und gleich gerichteten Geschwindigkeiten aller Punkte), so zusammentreffen, dass im Augenblicke der Berührung ihre Schwerpunkte in der Stosslinie (der gemeinschaftlichen Normalen beider Körperoberflächen an der Berührungsstelle) liegen (centraler Stoss), und wenn c und c_1 ihre anfänglichen Geschwindigkeitscomponenten nach der Stosslinie sind (die grössere c absolut genommen, die kleinere c_1 positiv oder negativ, jenachdem sie gleich oder entgegengesetzt gerichtet ist wie c), so ist bekanntlich zu Ende der ersten Periode des Stosses, d. h. in dem Augenblicke, in welchem der gegenseitige Druck beider Körper am grössten geworden ist und beide dieselbe Geschwindigkeit $v = \dfrac{mc + m_1 c_1}{m + m_1}$ nach der Richtung des Stosses (der Richtung von c) angenommen haben, die lebendige Kraft

$$L = \frac{1}{2}\,\frac{m m_1}{m + m_1}\,(c - c_1)^2$$

als solche verloren gegangen, nämlich zur Deformation der beiden Körper verwendet worden. Haben diese Körper im Augenblicke des Zusammentreffens eine andere, als die oben vorausgesetzte, den centralen Stoss charakterisirende relative Lage, haben sie ferner nicht blosse Progressivbewegungen oder sind sie gar nicht frei beweglich, so beziehen sich die Geschwindigkeiten c, c_1 und v nur auf ihre der Berührungsstelle zunächst liegenden materiellen Punkte und m, m_1 bedeuten dann nicht die wahren, sondern die auf jene Stelle reducirten Massen, welche rechnungsmässig je nach den Umständen aus den wahren Körpermassen abgeleitet werden müssen. Wäre z. B. die stossende Masse mit der anfänglichen Winkelgeschwindigkeit ω um eine feste Axe drehbar, welche mit dem kürzesten Abstande a senkrecht zur Stosslinie und in Beziehung auf welche das Trägheitsmoment dieser Masse $= J$ ist, so wäre $c = a\omega$ und $m = \dfrac{J}{a^2}$ zu setzen.

311. — Was den gestossenen Körper betrifft, so ist derselbe in den hier in Betracht kommenden Fällen gewöhnlich vor dem Stosse in Ruhe ($c_1 = 0$) und ausserdem so gestützt oder befestigt, dass die getroffene Stelle seiner Oberfläche nicht ohne Deformation des Körpers ausweichen kann. Während diese Deformation sich vollzieht, haben seine verschiedenen Punkte verschiedene Geschwindigkeiten, welche von der getroffenen Stelle aus nach den Unterstützungspunkten hin abnehmen, und es bedeutet deshalb in den Formeln:

$$v = \frac{mc}{m + m_1}; \quad L = \frac{mm_1}{m + m_1} \frac{c^2}{2}$$

m_1 die auf die Stelle des Stosses reducirte Masse des gestossenen Körpers, d. h. diejenige Masse, welche, wenn sie an dieser Stelle concentrirt wäre, dieselbe lebendige Kraft hätte, welche alle Massenelemente des Körpers zusammengenommen in demselben Augenblicke thatsächlich besitzen. Hier nun tritt eine erste Schwierigkeit und Unsicherheit auf, welche darauf beruht, dass die Fortpflanzungsgeschwindigkeit des empfangenen Impulses eine gewisse endliche Grösse hat, so dass derjenige Theil des gestossenen Körpers, dessen Punkte während der kleinen Dauer der in Rede stehenden Stossperiode überhaupt eine Geschwindigkeit empfangen, bei verhältnissmässig grossen Dimensionen dieses Körpers sich vielleicht gar nicht bis zu den Unterstützungspunkten erstreckt, sowie es bei kleineren Dimensionen auch umgekehrt der Fall sein kann, dass der Impuls (die Geschwindigkeitsmittheilung) sich durch die Unterstützungs- oder Befestigungsstellen hindurch bis in die Widerlager, welche selbst elastische, mehr oder weniger nachgiebige Körper sind, hinein erstreckt. In Ermangelung von Anhaltspunkten zur rationellen Berücksichtigung dieser Verhältnisse kann man die reducirte Masse m_1 auf Grund der Annahme berechnen, dass der Geschwindigkeitsimpuls sich gerade bis zu den Stützpunkten, nicht darüber hinaus, erstreckt, und ferner die Geschwindigkeiten der einzelnen Punkte denjenigen Verrückungen proportional setzen, welche sie im Gleichgewichtszustande, d. h. bei ruhiger Belastung durch eine äussere Kraft erleiden würden, die in Beziehung auf Richtung und Angriffspunkt mit dem durch den Stoss entwickelten äusseren Drucke gleichartig ist. Immerhin aber ist diese Berechnungsweise nur als Nothbehelf zu betrachten, und kann man dabei m_1 zu gross oder zu klein finden, jenachdem die Stelle des Stosses von den Unterstützungsstellen mehr oder weniger weit entfernt ist.

Hätte das fest verbundene System der Widerlager eine unabänderliche eigene Progressivbewegung, während der von ihnen unterstützte Körper durch den anderen gestossen wird, so würde im Obigen sich nichts ändern, als dass unter den sämmtlichen Geschwindigkeiten die relativen Geschwindigkeiten gegen dieses System der Widerlager zu verstehen wären.

312. — Wenn die Dauer der in Rede stehenden ersten Periode des Stosses, in welcher die lebendige Kraft L als solche verschwindet, auch gross genug ist, um in allen Punkten beider Körper Geschwindigkeitsänderungen von endlicher Grösse hervorzubringen, indem an der Stelle des Stosses und nach der Richtung desselben die Geschwindigkeiten beider Körper einander gleich $= v$ geworden sind, während die entsprechenden Geschwindigkeiten der übrigen Punkte des gestossenen Körpers durch seine Gestalt und Unterstützungsweise, des stossenden Körpers durch seine Bewegungsart mit Rücksicht auf die wieder eingetretene relative Ruhe seiner sämmtlichen Punkte bestimmt sind, so ist diese Zeitdauer doch zu klein, als dass während derselben alle Massenelemente auch Ortsveränderungen von messbarer Grösse erfahren könnten. Die Wirkung der verlorenen lebendigen Kraft L beschränkt sich deshalb fast ausschliesslich auf eine Compression, überhaupt eine relative Verrückung der materiellen Punkte in den der Berührungsstelle zunächst liegenden Theilen beider Körper, deren Massen so klein sind, dass ihre Trägheitskräfte auch bei den sehr grossen Beschleunigungen bewältigt werden können, womit diese Verrückungen während der sehr kleinen Zeitdauer vor sich gehen müssen. Entsprechend den kleinen Räumen, über welche sie sich erstrecken, sind diese Verrückungen selbst um so bedeutender, mit mehr oder weniger beträchtlicher Ueberschreitung der Elasticitätsgrenze verbunden, so dass sie während der zweiten Periode des Stosses auch nur zum Theil, meistens zum kleineren Theil wieder rückgängig werden. Ein Theil von L bleibt deshalb als lebendige Kraft definitiv verloren; durch eine entsprechende Temperaturerhöhung giebt sich dieser Verlust zu erkennen.

Der sogenannte Elasticitätscoefficient λ, welcher angiebt, ein wie grosser Theil $= \lambda L$ der lebendigen Kraft L in der zweiten Periode des Stosses wiedergewonnen wird und welcher somit den Vollkommenheitsgrad der Elasticität des Stosses misst, lässt sich indessen für bestimmte Fälle kaum mit einiger Sicherheit angeben, um so weniger, als er nicht nur vom Material, sondern ohne Zweifel auch mehr oder weniger von der Gestalt der Körper und ihrer relativen Lage beim Stosse, sowie von der Energie des letzteren, d. h. von den Massen und von der Geschwindigkeit c abhängt. Wenn man sonach genöthigt ist, einen der beiden Grenzfälle $\lambda = 0$ oder $\lambda = 1$ vorauszusetzen, so empfiehlt sich dazu am meisten der erstere, welchem das wahre Verhalten in den meisten Fällen erfahrungsmässig viel näher kommt, als dem anderen. Mit dieser Voraussetzung eines unelastischen Stosses vermeidet man zugleich eine Schwierigkeit, welche darin besteht, dass anderenfalls im weiteren Verlaufe des Stosses die Körper sich trennen und deshalb noch nachfolgende Stösse in Betracht gezogen werden müssten, sofern nicht etwa der stossende Körper aufgefangen wird, bevor er einen neuen Stoss auszuüben im Stande ist.*)

*) Der in Rede stehende Verlust an Wirkungsgrösse beschränkt sich natürlich auf einen Stoss im gewöhnlichen Sinne des Worts, d. h. zwischen zwei ursprünglich von einander unabhängigen, getrennten Körpern; er findet nicht statt, wenn beide Körper, fest zusammenhängend, gewissermassen nur Theile eines einzigen Körpers sind, wie z. B. bei dem im weiteren Sinne auch so zu nennenden Stosse, welchen der Schwungring eines Schwungrades auf dessen Arme ausübt, wenn die Welle durch ein Hinderniss plötzlich in ihrer Bewegung gehemmt wird.

313. — Die übrig gebliebene Wirkungsgrösse:

$$W = \frac{mc^2}{2} - L = (m + m_1)\frac{v^2}{2} = \frac{m^2}{m + m_1}\frac{c^2}{2}$$

wird nun, indem beide Körper in gegenseitiger Berührung ihre Bewegung fortsetzen, bis mit dem Eintritt der momentanen Ruhe die grösste Deformation in allen Theilen erreicht ist, nicht nur vom gestossenen Körper in sich aufgenommen, sondern auch von dessen Widerlagern sowie vom stossenden Körper.

Die Deformation des stossenden Körpers entspricht dem Gleichgewichte zwischen den Trägheitskräften seiner Massenelemente und dem vom anderen Körper ausgeübten Gegendrucke; die dazu verwendete Arbeit lässt sich in der Regel leicht berechnen, kann aber als durch die vernachlässigte Wirkungsgrösse λL compensirt betrachtet werden, wenn dieser Körper im Vergleich mit dem gestossenen Körper klein ist.

Grössere Schwierigkeit verursacht die Nachgiebigkeit der Widerlager, welche ohne Zweifel einen um so grösseren Theil der ganzen disponiblen Arbeit in sich aufnehmen, je grösser die Stützflächen und je weniger sie von der unmittelbar gestossenen Körperstelle entfernt sind, je kleiner überhaupt der gestossene Körper ist. Dieser Theil kann z. B. verhältnissmässig gering sein bei einem langen Seile, welches einerseits befestigt ist und anderseits stossweise belastet wird; dagegen ist er bedeutend für ein auf einem Ambos als Widerlagskörper gehämmertes Arbeitsstück, ja vielleicht noch bedeutend für den als gestossenen Körper betrachteten Ambos in Beziehung auf sein Fundament, worauf er mit einer grossen Grundfläche ruht.

Die Schwierigkeit wächst, wenn die Widerlager, wie es streng genommen nöthig ist, im weitesten Sinne aufgefasst werden, in welchem sie mit ihren eigenen Widerlagskörpern in letzter Reihe den ganzen Erdkörper umfassen. Um in diesem Sinne ihren Einfluss zu berücksichtigen, müsste man im Stande sein, das Gesetz zu ermitteln, nach welchem sich infolge eines auf einen begrenzten Theil der Oberfläche eines unbegrenzten Körpers ausgeübten Drucks die Spannungen im Inneren desselben verbreiten. Meistens sieht man sich deshalb genöthigt, den Einfluss der Nachgiebigkeit der Widerlager unberücksichtigt zu lassen und sich mit der allgemeinen Bemerkung zu begnügen, dass dadurch die gesuchte Anstrengung des gestossenen Körpers in einem nicht näher nachweisbaren Grade zu gross gefunden wird.

314. — Besondere Erwähnung verdient eine Stosswirkung, welche darin besteht, dass ein Körper plötzlich der Einwirkung der ihn belastenden Kräfte überlassen wird, ohne dass dabei ein Stoss im gewöhnlichen Sinne stattfände, bei welchem zwei ursprünglich getrennte Körper mit einer gewissen relativen Normalgeschwindigkeit zusammentreffen; wenn vielmehr auch im vorliegenden Falle die Belastung des gegebenen Körpers durch Vermittelung eines anderen geschieht, so waren doch beide von Anfang an in gegenseitiger Berührung und relativer Ruhe und es wird nur der be-

lastende Körper plötzlich der Einwirkung der an ihm wirkenden Kräfte überlassen. Dieser Fall findet z. B. statt, wenn ein Gewicht, wodurch eine vertical stehende Säule von Oben belastet werden soll, in Berührung mit ihrer oberen Fläche plötzlich losgelassen wird, nachdem es bis dahin unabhängig von der Säule unterstützt war; oder wenn das eine Röhre oder ein sonstiges ringsum geschlossenes Gefäss ganz erfüllende Wasser, welches Anfangs nur vermöge seines eigenen Gewichts einen unwesentlichen Druck auf die Gefässwand ausübte, durch Oeffnung eines Schiebers etc. plötzlich mit einer darüber stehenden Wassersäule in Communication gesetzt wird u. s. w.

In allen diesen Fällen ist die Anstrengung des belasteten Körpers doppelt so gross, als bei ruhiger Belastung durch dieselben Kräfte. Im Zustande des Gleichgewichts oder der Ruhe ist nämlich der auf irgend einen Punkt der Körperoberfläche ausgeübte Druck der entsprechenden Durchbiegung (Verrückung des gedrückten Punktes im Sinne des Drucks) proportional, falls die Elasticitätsgrenze nicht überschritten wurde, so dass, wenn P jener Druck, p die Durchbiegung im Zustande der grössten Deformation ist, der stetig von Null an gewachsene Druck die Arbeit $\frac{Pp}{2}$ verrichtet hat, welche der inneren Arbeit A gleich ist. In der That aber wurde diese Arbeit dadurch geleistet, dass der Angriffspunkt der constanten äusseren Kraft P_1 den Weg p im Sinne von P_1 durchlief, und aus der Gleichung $\frac{Pp}{2} = P_1 p$ ergiebt sich sonach: $P = 2P_1$.

Kann der Körper, wenn die plötzlich hergestellte Belastung demnächst andauert, dem empfangenen Antriebe frei folgen, so wird er in Schwingungen versetzt, wobei seine Anstrengung in den äussersten Lagen abwechselungsweise = Null und eben doppelt so gross, als bei ruhiger Belastung (dem Gleichgewichtszustande) ist.

B. Besondere Fälle.

I. Stabförmiger Körper.

a. Arbeit der Zug- oder Druck-Elasticität.

315. — Wenn ein gerader stabförmiger Körper nach der Richtung seiner Axe, welche als x-Axe genommen werden möge, gezogen oder gedrückt wird, so sind ausser σ_x alle übrigen in Nr. 307 genannten Spannungen = Null. Mit $\sigma_x = \sigma$, $\varepsilon_x = \varepsilon$ und $\sigma = E\varepsilon$, unter E den Elasticitätsmodul nach der Axrichtung verstanden, hat man folglich:

$$A = \frac{E}{2}\int \varepsilon^2 dV = \frac{1}{2E}\int \sigma^2 dV.$$

Ist der Querschnitt constant, so sind auch σ und ε constant, folglich:

$$A = \frac{E\varepsilon^2}{2} V = \frac{\sigma^2}{2E} V.$$

Die Arbeit, welche der Körper dann insbesondere bis zur sogenannten Elasticitätsgrenze durch Zug oder Druck in sich aufzunehmen vermag, ist:

$$A' = \alpha' V \text{ resp. } A'' = \alpha'' V,$$

$$\text{wenn } \alpha' = \frac{E(\varepsilon')^2}{2}; \quad \alpha'' = \frac{E(\varepsilon'')^2}{2} \quad \text{(cf. Nr. 4)}$$

gesetzt wird. Für α' und α'' (Arbeitsgrössen pro Cubikcentimeter, ausgedrückt in Kilogramm-Centimetern) ergeben sich mit den Mittelwerthen von E, (ε') und (ε'') nach Nr. 14 beispielsweise die folgenden Werthe:

	E	(ε')	(ε'')	α'	α''
Holz (Faserrichtung)	112000	0,0018	0,0015	0,181	0,126
Gusseisen	1000000	0,00075	0,0015	0,281	1,125
Stahl	2500000	0,0017	—	3,612	—
Schmiedeeisen	2000000	0,0007	0,0007	0,490	0,490
Eisenblech	1750000	0,0008	0,0008	0,560	0,560
Eisendraht	2000000	0,0012	—	0,720	—

Wenn der gerade stabförmige Körper von constantem Querschnitte am einen Ende festgehalten ist, während er am anderen gestossen wird, so ist seine auf die Stossstelle reducirte Masse (Nr. 311): $m_1 = \frac{1}{3} M$, unter M die wahre Masse des Körpers verstanden.

Wenn ein solcher Körper nach der Richtung seiner Länge frei beweglich ist und gegen einen anderen stösst, so nehmen im Zustande grösster Deformation ε und σ proportional dem Abstande von der freien Hinterfläche bis zur stossenden Vorderfläche zu, und wenn ε und σ die Maximalwerthe sind, so ist die entsprechende Arbeit:

$$A = \frac{E\varepsilon^2}{6} V = \frac{\sigma^2}{6E} V.$$

316. — Ist der Querschnitt F nicht constant, so sind σ und ε von einem zum anderen veränderlich und zwar demselben umgekehrt proportional:

$$\frac{\sigma}{\sigma_0} = \frac{\varepsilon}{\varepsilon_0} = \frac{F_0}{F},$$

unter σ_0 und ε_0 die Werthe von σ und ε im Querschnitte F_0 verstanden. Mit $dV = Fdx$ wird dann

$$A = \frac{E\varepsilon_0^2}{2} F_0^2 \int \frac{dx}{F} = \frac{\sigma_0^2}{2E} F_0^2 \int \frac{dx}{F},$$

wobei die Integrale über die ganze Länge l des Körpers auszudehnen sind.

Ist insbesondere F eine ganze algebraische Function 2ten Grades des Abstandes x von einem in der Axe angenommenen festen Punkte:

$$F = a + bx + cx^2,$$

worunter z. B. alle Umdrehungskörper, entstanden durch Umdrehung einer Fläche 2ten Grades um eine ihrer Hauptaxen, sowie auch namentlich alle Prismoide begriffen sind, d. h. Körper, welche dadurch entstanden gedacht werden können, dass ein veränderliches ebenes n-Eck, dessen Eckpunkte in beliebigen festen Geraden bleiben, parallel einer festen Ebene sich fortbewegt, so ist, jenachdem

$$\varDelta = 4ac - b^2$$

positiv oder negativ ist,

$$\int \frac{dx}{F} = \begin{cases} \dfrac{2}{\sqrt{\varDelta}}\left(arc.tg\,\dfrac{b+2cl}{\sqrt{\varDelta}} - arc.tg\,\dfrac{b}{\sqrt{\varDelta}}\right) \\ \dfrac{2}{\sqrt{-\varDelta}}\left(arc.\,cotg\,\dfrac{b}{\sqrt{-\varDelta}} - arc.\,cotg\,\dfrac{b+2cl}{\sqrt{-\varDelta}}\right). \end{cases}$$

Sind F_0 und F_1 die Endflächen oder Querschnitte an den Enden des Körpers, F der Querschnitt in der Mitte, und ist x der Abstand eines beliebigen Querschnitts von F_0, so ist:

$$a = F_0;\ b = \frac{-3F_0 + 4F - F_1}{l};\ c = 2\,\frac{F_0 - 2F + F_1}{l^2}$$

$$\varDelta = \frac{1}{l^2}\,[4F_0F_1 - (4F - F_0 - F_1)^2].$$

Zur Gruppe der Prismoide gehören als besonderer Fall die pyramidalen Körper; für solche ist:

$$\sqrt{F} = \frac{\sqrt{F_0} + \sqrt{F_1}}{2};\ \varDelta = 0$$

und das zunächst in der unbestimmten Form $\frac{0}{0}$ erscheinende Integral findet man einfach:

$$\int \frac{dx}{F} = \frac{l}{\sqrt{F_0F_1}},$$

womit $A = \dfrac{E\varepsilon_0^2}{2}\,lF_0\sqrt{\dfrac{F_0}{F_1}} = \dfrac{\sigma_0^2}{2E}\,lF_0\sqrt{\dfrac{F_0}{F_1}}$ wird.

Ist F_0 die kleinere Endfläche, so sind σ_0 und ε_0 die grössten Werthe von σ und ε, also massgebend für die Wirkungsgrösse, welche der Körper durch seine Ausdehnung oder Zusammendrückung ohne Gefahr einer übermässigen Anstrengung in sich aufnehmen kann, und man erkennt, dass mit Rücksicht hierauf die Zugabe an Masse, d. h. die Vergrösserung des Querschnitts, nach dem anderen Ende hin nicht nur unnütz, sondern sogar schädlich sein würde, indem A bei gleichen Werthen von l und ε_0 im Verhältnisse $\sqrt{F_0} : \sqrt{F_1}$ kleiner wäre, als bei constantem Querschnitte F_0.*) —

Ist μ die specifische Masse des Körpers, und ist derselbe mit der Endfläche F_1 festgehalten, während er an der anderen F_0 gestossen wird, so ist seine auf letztere Endfläche reducirte Masse (Nr. 311):

$$m_1 = \mu\int_0^l F\left(\frac{X}{L}\right)^2 dx;\ \text{wo } X = \int_0^x \frac{dx}{F} \text{ und } L = \int_0^l \frac{dx}{F}$$

*) Wenn ein gestossener Körper sich gegen einen Widerlagskörper von unbegrenzter Ausdehnung stützt (z. B. die Holzunterlage des Ambosses eines Dampfhammers gegen den

gesetzt und unter x der Abstand des beliebigen Querschnitts F von F_1 verstanden ist. Für den **pyramidalen Körper** insbesondere (ganze Masse $= M$) ist:

$$m_1 = \frac{\mu F_0 l}{3} = \frac{F_0}{F_0 + \sqrt{F_0 F_1} + F_1} M,$$

d. h. eben so gross wie für einen prismatischen Körper von gleicher Länge und vom Querschnitte F_0 (cf. Nr. 315).

317. — Spannung eines Förderseils beim Anlassen der Maschine.

Wenn, nachdem das Förderseil eines Schachtes oder einer Strecke an das ruhende Fördergefäss angeschlagen resp. der beladene Wagen auf die am Seile beständig befestigte Förderschale aufgefahren ist, die Maschine angelassen wird, so stellt sich in dem Anfangs schlaffen Seile eine schnell, aber stetig wachsende Spannung her, welche demnächst wieder abnimmt und infolge von Oscillationen mehr und mehr die dem Zustande ruhiger Belastung entsprechende Grösse annimmt. Der Vorgang ist nicht einem Stosse im gewöhnlichen Sinne zu vergleichen, und es ergiebt sich vielmehr die Maximalspannung am deutlichsten durch die folgende Ueberlegung. Es sei:

$\frac{P}{g}$ die in Bewegung zu setzende träge Masse,

P_1 der Widerstand im Beharrungszustande (bei einem seigeren Schachte $=$ dem Gewichte P der belasteten Förderschale, sonst aber $< P$),

c die Geschwindigkeit, l die Länge, F der Querschnitt,

E der Elasticitätsmodul des Seils.

Nach der Zeit t, von dem Augenblicke an gerechnet, in welchem das Seil gerade gestreckt, aber noch nicht gespannt ist (abgesehen von seinem eigenen Gewichte, welches überhaupt hierbei ausser Betracht bleiben soll), habe das Fördergefäss den Weg s zurückgelegt und sei die totale Spannung des Seils $= S$ geworden; dann ist:

$$\frac{P}{g}\frac{d^2 s}{dt^2} = S - P_1.$$

In demselben Augenblicke hat sich das Seil um $ct - s$ verlängert, und es ist deshalb:

$$S = \frac{ct - s}{l} EF = \frac{ct - s}{\lambda} P, \text{ wenn } \lambda = \frac{Pl}{EF}$$

Erdboden), so erstreckt sich die Stosswirkung auf einen Theil des Widerlagskörpers von unbestimmter Länge (Höhe) l, dessen Querschnitt von der Stützfläche F_0 aus nach irgend einem Gesetze bis F_1 zunimmt. Nimmt man an, dieser Körpertheil habe eine pyramidale Form, und bezeichnet mit h die Höhe der Ergänzungspyramide, so ist

$$\sqrt{\frac{F_0}{F_1}} = \frac{h}{l+h} = \frac{h}{l}, \text{ wenn } l \text{ viel} > h.$$

Würde also dieser Körpertheil nur comprimirt, so wäre

$$A = \frac{\sigma_0^2}{2E} F_0 h$$

die von ihm aufgenommene Arbeit, und wenn auch thatsächlich diese Deformation nicht ohne Verschiebungen vor sich gehen kann, so erkennt man doch wenigstens die Möglichkeit, dass eine unendlich grosse Widerlagsmasse nur eine endliche Arbeit in sich aufnimmt, obschon die Stützfläche eine endliche Verrückung erleidet.

gesetzt wird; dieses λ ist die der Spannung P entsprechende Verlängerung des Seils. Hiernach ist auch:

$$\frac{1}{g}\frac{d^2 s}{dt^2} = \frac{ct-s}{\lambda} - \frac{P_1}{P}$$

$$\text{oder } \frac{d^2 s}{dt^2} = \frac{g}{\lambda}(ct - s - \lambda_1), \text{ wenn } \lambda_1 = \frac{P_1}{P}\lambda = \frac{P_1 l}{EF}$$

= der der Spannung P_1 entsprechenden Verlängerung des Seils gesetzt wird. Die Integration dieser Differentialgleichung giebt, nachdem die beiden Constanten mit Rücksicht darauf bestimmt worden sind, dass

$$t = \frac{\lambda_1}{c};\ s = 0;\ \frac{ds}{dt} = 0$$

zusammengehörige Werthe sein müssen:

$$s = c\left\{t - \frac{\lambda_1}{c} - \sqrt{\frac{\lambda}{g}}\,.\,sin\left[\left(t - \frac{\lambda_1}{c}\right)\sqrt{\frac{g}{\lambda}}\right]\right\},$$

folglich

$$\frac{S}{P} = \frac{ct-s}{\lambda} = \frac{\lambda_1}{\lambda} + \frac{c}{\sqrt{g\lambda}}\,sin\left[\left(t - \frac{\lambda_1}{c}\right)\sqrt{\frac{g}{\lambda}}\right].$$

Der Maximalwerth von S tritt periodisch ein nach den Zeiten:

$$t = \frac{\lambda_1}{c} + (4n+1)\frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{\lambda}{g}};\ n = 0,\ 1,\ 2,\ 3\ldots.$$

Die dabei ausser Acht gebliebenen Nebenwiderstände sind für das erste Maximum noch unerheblich und es ergiebt sich dasselbe im Verhältnisse zu P:

$$\frac{S}{P} = \frac{\lambda_1}{\lambda} + \frac{c}{\sqrt{g\lambda}}.$$

Bis zum Eintritte dieses Maximums hat (cf. Nr. 315) das Seil die Arbeit:

$$A = \frac{(S:F)^2}{2E}Fl = \frac{S^2 l}{2EF} = \frac{S^2\lambda}{2P} = \frac{P\lambda}{2}\left(\frac{\lambda_1}{\lambda} + \frac{c}{\sqrt{g\lambda}}\right)^2$$

in sich aufgenommen, wie sich durch eine directe Vergleichung der hierbei in Betracht kommenden Arbeiten und lebendigen Kräfte nicht ohne Schwierigkeit ergeben hätte.

Bei horizontaler Streckenförderung sind P_1 und λ_1 verhältnissmässig klein, und ist also

$$A \text{ nur wenig} > P\frac{c^2}{2g}.$$

Für einen seigeren Schacht als den ungünstigsten Fall ist $P_1 = P$, $\lambda_1 = \lambda$, also:

$$A = \frac{P\lambda}{2}\left(1 + \frac{c}{\sqrt{g\lambda}}\right)^2 = P\left(\frac{\lambda}{2} + c\sqrt{\frac{\lambda}{g}} + \frac{c^2}{2g}\right)$$

$$\text{und } \frac{S}{P} = 1 + \frac{c}{\sqrt{g\lambda}} = 1 + c\sqrt{\frac{1}{g}\frac{EF}{Pl}}.$$

Ist der Durchmesser des Drahtseils der Formel $d = \frac{1}{20}\sqrt{P}$ entsprechend genommen, so ist bei der Belastung P die specifische Spannung des Eisendrahts:

$$\frac{S}{P} = 859 \text{ Kilogr. (cf Nr. 29)},$$

wobei unter F die Summe der Querschnitte aller Drähte verstanden ist, wie es geschehen muss, wenn $E = 2000000$ (als Mittelwerth für Eisendraht nach Nr. 14) gesetzt wird. Damit wird:

$$\frac{S}{P} = 1 + 48{,}25\frac{c}{\sqrt{gl}},$$

und wenn der Draht nicht bis zur Elasticitätsgrenze angestrengt werden soll, so muss (cf. Nr. 14):

$$\frac{S}{P} < \frac{2400}{859}, \text{ also mit } g = 9{,}81: \ l > 73{,}7 c^2$$

Meter sein, unter c die Seilgeschwindigkeit in Metern pro Secunde verstanden. Bei kleineren Seillängen und grösseren Geschwindigkeiten ist eine elastische Verbindung (Stahlfeder oder Kautschukpuffer) zwischen Fördergefäss und Seil zum Schutze des letzteren nöthig; hat dieses elastische Zwischenglied solche Verhältnisse, dass es um eben so viel durchgebogen, resp. zusammengedrückt, wie eine Seillänge l_1 bei gleicher Belastung ausgedehnt wird, so hat es dieselbe Wirkung, als ob das Seil um l_1 länger wäre, als es wirklich ist.

318. — Der Fallbär eines Dampfhammers habe das Gewicht Q; er werde als ein prismatischer Körper vorausgesetzt mit dem Querschnitte F und der Länge l. Der Elasticitätsmodul sei $= E$.

Der Ambos sei von pyramidaler Form; obere (kleinere) Endfläche $= F_0$, untere $= F_1$, Höhe $= l_1$, Gewicht $= Q_1$, Elasticitätsmodul $= E_1$. Er ruhe auf einer Holzunterlage, welche auf der Basis F_2 mit der Höhe l_2 prismatisch aufgebaut ist; das Gewicht dieses Holzkörpers sei $= Q_2$, der Elasticitätsmodul $= E_2$ nach der Richtung l_2, d. h. normal gegen die Faserrichtung der horizontal liegenden Balken.

Wie gross ist der Druck des Holzkörpers auf den Erdboden, wenn der Hammer aus der Höhe h auf die Bahn des Ambosses niederfällt resp. auf ein darauf liegendes Arbeitsstück (in welchem Falle h die Fallhöhe bis zur oberen Fläche des durch den Schlag zusammengedrückten Arbeitsstücks bedeutet)?

Nimmt man an, dass der Stoss im engeren Sinne nur zwischen Fallbär und Ambos stattfindet (d. h. dass in dem Augenblicke, in welchem alle horizontalen Schichten des Fallbärs dieselbe Geschwindigkeit = derjenigen der Bahn des Ambosses angenommen haben, der Geschwindigkeitsimpuls sich nur gerade bis zur Basis F_1 des Ambosses erstreckt), so ist (cf. Nr. 313 und 316) nach Abzug des Verlustes:

$$\lambda L = \frac{Q \cdot \varrho Q_1}{Q + \varrho Q_1} h; \quad \varrho = \frac{F_0}{F_0 + \sqrt{F_0 F_1} + F_1},$$

der bei Vorhandensein eines den Schlag unmittelbar empfangenden Arbeitsstücks fast ausschliesslich zu dessen bleibender Deformation verwendet wird, die übrig bleibende Wirkungsgrösse:

$$W = \frac{Q^2}{Q + \varrho Q_1} h.$$

Dieselbe comprimirt den Fallbär, den Ambos, den Holzkörper und bis zu gewisser Tiefe auch den Erdkörper, von welcher letzteren Wirkung in Ermangelung der nöthigen Anhaltspunkte abstrahirt wird. Sind dann A, A_1 und A_2 die von den drei ersteren Körpern im Augenblicke der grössten Compression aufgenommenen Arbeiten und ist dabei P der Druck in allen Horizontalschnitten von der Basis des Holzkörpers bis zur oberen Fläche des Ambosses (von hier bis zum oberen Ende des Fallbärs nimmt der Druck stetig bis Null ab), so ergiebt sich nach Nr. 315 und 316:

$$A = \frac{P^2 l}{6EF}; \quad A_1 = \frac{P^2 l_1}{2E_1\sqrt{F_0 F_1}}; \quad A_2 = \frac{P^2 l_2}{2E_2 F_2}$$

und hat man also für P die Gleichung:

$$\frac{P^2}{2}\left(\frac{l}{6EF}+\frac{l_1}{E_1\sqrt{F_0F_1}}+\frac{l_2}{E_2F_2}\right)=\frac{Q^2}{Q+\varrho Q_1}h.$$

Die Arbeit der Schwerkraft $Q+Q_1+Q_2$, welche der mit der Compression verbundenen Senkung des gemeinsamen Schwerpunktes aller drei Körper entspricht, kann ohne Zweifel als reichlich aufgewogen betrachtet werden durch die vernachlässigte Arbeit, welche zur Compression des Erdbodens verwendet wird, und welche trotzdem vielleicht verursacht, dass P durch obige Gleichung noch wesentlich zu gross gefunden wird. Der gesuchte Maximaldruck auf den Erdboden ist indessen um Q_1+Q_2 als denjenigen Druck, welcher schon vor dem Stosse vorhanden war, grösser als P.

b. Arbeit der Biegungs-Elasticität.

319. — Ein gerader stabförmiger Körper sei auf irgend eine Weise unterstützt oder befestigt und durch gegebene äussere Kräfte belastet, deren Richtungslinien die als x-Axe angenommene Stabaxe schneiden. Bei Vernachlässigung der Schubkräfte und der durch die unmittelbare Wirkung des Drucks auf die Oberfläche bedingten Pressung sind dann wieder ausser σ_x alle übrigen in Nr. 307 genannten Spannungen = Null, und erhält man wie in Nr. 315 mit $\sigma_x=\sigma$, $\varepsilon_x=\varepsilon$ und $\sigma=E\varepsilon$ die der Biegung entsprechende Arbeit der inneren Kräfte:

$$A=\frac{1}{2E}\int\sigma^2dV.$$

Wenn die Richtungslinien der äusseren Kräfte in einer Symmetrieebene des Körpers liegen und die Stabaxe rechtwinkelig schneiden, so ist, wenn

M das Spannungsmoment, J das Trägheitsmoment eines Querschnitts in Beziehung auf die Biegungsaxe,

dF einen im Abstande η der letzteren parallelen Flächenstreifen des Querschnitts bedeutet,

mit $dV=dF\,dx$, $\sigma=\frac{M\eta}{J}$ (cf. Nr. 43):

$$A=\frac{1}{2E}\int\frac{M^2}{J^2}dx\int\eta^2dF=\frac{1}{2E}\int\frac{M^2}{J}dx,$$

das Integral auf die ganze Länge des Stabes bezogen.

In der Regel handelt es sich darum, diejenige innere Arbeit zu kennen, welche einer gegebenen Maximalspannung oder Pressung $=k$ entspricht, während nur die Art der Belastung (die Angriffsweise und das Grössenverhältniss der äusseren Kräfte) gegeben ist. Durch eine der äusseren Kräfte $=P$ lassen sich dann alle übrigen, sowie auch $k=max.\left(\frac{Me}{J}\right)$, unter e den grössten Absolutwerth von η für den betreffenden Querschnitt verstanden, ausdrücken, und die Elimination von P liefert A ausgedrückt durch k und durch die gegebenen Elemente, durch welche das Material und die Dimensionen, sowie die Art der Unterstützung resp. Befestigung und der Belastung des Stabes charakterisirt sind.

320. — Erfährt der Stab nur an einer Stelle C einen äusseren Druck, z. B. infolge eines transversalen Stosses, so kann man bemerken, dass die innere Arbeit δA, welche dem unendlich kleinen Zuwachs δp der Durchbiegung p bei C entspricht, natürlich der Arbeit $P\delta p$ des der augenblicklichen Durchbiegung p im Gleichgewichtszustande entsprechenden äusseren Drucks P gleich sein muss, und indem nach den betreffenden Resultaten des zweiten Capitels p und P, P und k nach bekannten Verhältnissen einander proportional sind, erhält man sofort auch

$$A = \int_0^p P\delta p \text{ nach bekanntem Verhältnisse proportional } k^2.$$

Ist insbesondere der Querschnitt constant $= F$ und l die Länge des Stabes, so wird

$$\text{mit } p = \alpha\frac{P}{EJ}l^3: \; A = \alpha\frac{P^2 l^3}{2EJ}$$

oder mit $max.M = \beta Pl$, also $k = \frac{e}{J}\, max.M = \beta Pl\frac{e}{J}$:

$$A = \frac{k^2}{2E}\frac{\alpha}{\beta^2}\frac{Jl}{e^2}$$

oder endlich mit $J = \gamma Fe^2$ und $Fl = V$:

$$A = \frac{k^2}{2E}\frac{\alpha\gamma}{\beta^2}V.$$

Dabei sind die Zahlencoefficienten α und β von der Art der Unterstützung des Stabes und von der Lage des Angriffspunktes des äusseren Drucks abhängig, während γ durch die Querschnittsform bestimmt ist.

Ist z. B. der Stab am einen Ende befestigt, am anderen, freien Ende angegriffen, so ist (cf. Nr. 54):

$$\alpha = \frac{1}{3},\ \beta = 1;\ \frac{\alpha}{\beta^2} = \frac{1}{3};$$

ist er beiderseits unterstützt und in den Abständen a und b von den Enden angegriffen, so ist (cf. Nr. 80):

$$\alpha = \frac{a^2b^2}{3l^4},\ \beta = \frac{ab}{l^2};\ \frac{\alpha}{\beta^2} = \frac{1}{3}$$

für jedes Verhältniss $\frac{a}{b}$; ist er beiderseits unter den Richtungswinkeln = Null eingeklemmt und in den Abständen a, b von den Enden angegriffen, so ist, wenn $a \gtreqless b$ (cf. Nr. 63):

$$\alpha = \frac{a^3b^3}{3l^6},\ \beta = \frac{ab^2}{l^3};\ \frac{\alpha}{\beta^2} = \frac{1}{3}\frac{a}{b}.$$

Was γ betrifft, so ist z. B.

für den rechteckigen Querschnitt: $\gamma = \frac{1}{3}$;

„ „ kreisförmigen oder elliptischen Querschnitt: $\gamma = \frac{1}{4}$;

„ „ ringförmigen Querschnitt: $\gamma = \frac{1}{4}\left(1 + \frac{r_1^2}{r^2}\right)$,

wenn r_1 der innere, r der äussere Radius ist.

321. — Wenn durch ein Hinderniss die Winkelgeschwindigkeit w einer Schwungradwelle plötzlich um $\frac{w}{n}$ verkleinert wird, so wird die überschüssige lebendige Kraft des Schwungrades, nämlich:

$$L = \frac{1}{2} Mv^2 \left[1 - \left(\frac{n-1}{n}\right)^2\right] = \frac{1}{2} M \left(\frac{2n-1}{n^2} v^2\right) = \frac{1}{2} M . \Delta(v^2),$$

unter $v = rw$ die anfängliche Geschwindigkeit der Mittellinie des Schwungringes und unter M die auf letztere reducirte Masse des ganzen Schwungrades verstanden, vorzugsweise auf die Biegung der Arme verwendet, und es fragt sich, einer wie grossen plötzlichen Aenderung von w dieselben ohne Gefahr widerstehen können?

Die Biegung der Arme geschieht auf die in Nr. 69 erörterte und durch Fig. 10 versinnlichte Weise, und es findet bei Voraussetzung eines constanten Querschnitts F der Arme das grösste Spannungsmoment sowie die grösste specifische Spannung oder Pressung k im Querschnitte bei A zunächst der Nabe statt. Mit Beibehaltung der in Nr. 69 erklärten Bezeichnungen, nur mit dem Unterschiede, dass nicht $\frac{P}{z}$, sondern P den auf die Mittellinie des Ringes reducirten Druck für einen einzelnen Arm bedeuten möge, ist jener Nummer zufolge:

$$-[A] = P(r-a)\frac{2l+3a}{3l+6a},$$

während aus dem allgemeinen Ausdrucke von $[A]$ in Nr. 61 mit

$$P = 0;\ Q = 0;\ \alpha = -\frac{l+a}{a}\beta$$

sich ergiebt:

$$-[A] = \frac{2EJ}{l}\frac{2l+3a}{a}\beta.$$

Die Gleichsetzung beider Ausdrücke liefert:

$$\beta = \frac{P}{6EJ}\frac{al(r-a)}{l+2a},$$

und es ist folglich der Weg des Drucks P:

$$p = r\gamma = r\frac{l}{a}\beta = \frac{P}{6EJ}\frac{l^2 r(r-a)}{l+2a}$$

und somit die bis zum Eintritte dieses Drucks P von dem betreffenden Arme aufgenommene Arbeit:

$$A = \int P\delta p = \frac{P^2}{12EJ}\frac{l^2 r(r-a)}{l+2a}.$$

Die Elimination von P zwischen dieser Gleichung und

$$k = -[A]\frac{e}{J} = P(r-a)\frac{2l+3a}{3(l+2a)}\frac{e}{J}$$

liefert, wenn $J = \varphi Fe^2$ gesetzt wird:

$$A = \frac{k^2}{2E}\varphi F\frac{3l^2 r(l+2a)}{2(r-a)(2l+3a)^2},$$

und es ist dies die vom ganzen Armsysteme bis zum Eintritt der Maximalspannung k aufgenommene Arbeit, wenn jetzt unter F die Summe der Querschnitte aller Arme verstanden wird.

Mit durchschnittlich $a = \frac{1}{5}r$, $l = \frac{11}{15}r$ wird:

$$A = 0{,}2676\frac{k^2}{2E}\varphi Fr$$

und mit $\varphi = \frac{1}{3}$ für Arme von **rechteckigem Querschnitte:**

$$A = 0{,}0892 \frac{k^2}{2E} Fr \text{ Kilogramm-Centimeter},$$

falls Fr in Cubikcentimetern, oder

$$A = 892 \frac{k^2}{2E} Fr \text{ Kilogramm-Meter},$$

wenn Fr in Cubikmetern ausgedrückt wird, oder endlich:

$$A = \frac{892}{q} \frac{k^2}{2E} Q \text{ Kil.-Mtr.},$$

wenn q das Gewicht von einem Cubikmeter des Materials und $Q = Frq$ Kil. das Gewicht des ganzen Armsystems, mit dem Querschnitte F von der Axe bis zur Mittellinie des Ringes gerechnet, bedeutet.

Ist nun R das Gewicht des Schwungringes und g die Beschleunigung der Schwere (ebenso wie v auf das Meter und die Secunde als Einheiten bezogen), so ist auch:

$$L = \frac{R + \frac{1}{3} Q}{2g} \Delta(v^2)$$

und aus $A = L$ folgt mit $g = 9{,}81$:

$$\Delta(v^2) = \frac{17500}{q} \frac{k^2}{2E} \frac{Q}{R + \frac{1}{3} Q}.$$

Sollen die Arme nur bis zur **Elasticitätsgrenze** angestrengt werden, so ergiebt sich, wenn $\frac{k^2}{2E}$ dem kleineren der beiden Werthe α' und α'' in Nr. 315 gleich gesetzt wird,

für **gusseiserne** Arme mit $q = 7200$, $\frac{k^2}{2E} = 0{,}281$:

$$\Delta(v^2) = \frac{2n-1}{n^2} v^2 = 0{,}683 \frac{Q}{R + \frac{1}{3} Q}$$

und für **schmiedeeiserne** Arme mit $q = 7800$, $\frac{k^2}{2E} = 0{,}49$:

$$\Delta(v^2) = \frac{2n-1}{n^2} v^2 = 1{,}10 \frac{Q}{R + \frac{1}{3} Q}.$$

Man erkennt hieraus, dass es nur ein sehr kleiner Theil der im Schwungrade gewöhnlich angesammelten lebendigen Kraft ist, welcher ohne Gefahr zur Biegung der Arme verwendet werden kann.*)

---

*) Es sind bei dieser Rechnung nicht nur die in der That hier unwesentlichen Tangentialspannungen vernachlässigt, sondern auch diejenigen Normalspannungen, welche als Folge der Centrifugalkraft schon vor dem Eintritte der Biegung vorhanden waren. Diese Spannungen lassen sich nach Nr. 164 berechnen, und wäre dann k um den entsprechenden Betrag noch kleiner zu setzen. Indessen lässt sich dieser Einfluss im Allgemeinen wohl dadurch als aufgewogen betrachten, dass ein Theil der lebendigen Kraft L zur Verdrehung der Schwungradwelle verbraucht wird.

322. — Ist der Stab als Körper von gleichem Widertande gestaltet, d. h. ist

$$\frac{Me}{J} = k \text{ für alle Querschnitte (cf. Nr. 110),}$$

so ist nach Nr. 319 mit $J = \gamma F e^2$:

$$A = \frac{1}{2E}\int \frac{M^2}{J} dx = \frac{k^2}{2E}\int \frac{J}{e^2} dx = \frac{k^2}{2E}\gamma V,$$

also unabhängig von der Art der Unterstützung und Belastung und bei gegebener Querschnittsform proportional dem Volumen. So können z. B. zwei Stahlfedern, von denen die eine wie der in Nr. 111 (parabolische Feder), die andere wie der in Nr. 312 bestimmte Körper (Dreiecksfeder) gestaltet ist, bei gleichem Volumen V und gegebener Maximalspannung k dieselbe Arbeit A in sich aufnehmen, und zwar bis zur Elasticitätsgrenze mit

$$\gamma = \frac{1}{3} \text{ und } \frac{k^2}{2E} = 3{,}6 \text{ (Nr. 315): } A = 0{,}012\, V$$

Kilogr.-Mtr., wenn V das Volumen in Cubikcentimetern ist.

Ebenso wie die Dreiecksfeder verhält sich auch eine aus mehreren aufeinander gelegten und in der Mitte durch eine Fassung zusammengehaltenen Stahlschienen gebildete sogen. Schichtfeder, wie solche bei Eisenbahnfahrzeugen gebräuchlich sind, eine solche Gestaltung der einzelnen Schienen vorausgesetzt, dass sie, längs der Mittelebene zerschnitten und in ihren Hälften symmetrisch neben einander gelegt, die Körperform Nr. 312 bilden. In Beziehung auf die aufzunehmende Wirkungsgrösse ist es gleichgültig, ob bei gegebenem Volumen eine solche Feder aus vielen dünneren oder aus wenigen dickeren Schienen zusammengesetzt, ob sie ferner länger oder kürzer gemacht wird; von wesentlichem Einflusse sind dagegen diese Umstände auf die Grösse des Drucks P und der Durchbiegung δ, welche der Maximalspannung k entsprechen und welche wegen $A = \frac{P\delta}{2}$ einander selbst bei gegebenem A umgekehrt proportional sind. Wegen

$$P = k\frac{bh^2}{6l} \text{ und } \delta = \frac{6Pl^3}{Ebh^3} \text{ (Nr. 112) ist nämlich auch: } \delta = \frac{kl^2}{Eh},$$

d. h. die Durchbiegung der Schichtfeder proportional dem Quadrate der von der Fassung ab gerechneten Länge l der halben Feder und umgekehrt proportional der Dicke h jeder einzelnen Schiene. Die schwache Krümmung, welche die Schienen im Zustande der Nichtbelastung zu haben pflegen, ändert diese Resultate nicht wesentlich ab.

323. — Wenn auf den geraden stabförmigen Körper ein Stoss im engeren Sinne ausgeübt wird durch eine fremde Masse m, welche ihn senkrecht zur Axe mit der Geschwindigkeit c trifft, so ist zur Berechnung der Wirkungsgrösse, welche bei Voraussetzung eines unelastischen Stosses

übrig bleibt und vorzugsweise zur Biegung des getroffenen Stabes verwendet wird, nämlich:

$$W = \frac{m^2}{m + m_1} \frac{c^2}{2} \text{ (Nr. 313)},$$

die Kenntniss der auf den Stosspunkt reducirten Masse m_1 des getroffenen Stabes erforderlich. Dieselbe ist nach der Annahme in Nr. 311:

$$m_1 = \mu \int \frac{z^2}{\delta^2} F dx,$$

wenn μ die specifische Masse des Stabes und z diejenige Durchbiegung eines beliebigen Punktes der elastischen Linie bedeutet, welche im Gleichgewichtszustande der Durchbiegung δ ihres in der Stosslinie liegenden Punktes entspricht.

Insbesondere bei constantem Querschnitte findet man, unter $M = \mu F l$ die wahre Masse des Stabes für seine wirksame Länge l verstanden,

wenn der Stab am einen Ende befestigt ist und am anderen, freien Ende gestossen wird (cf. Nr. 54):

$$m_1 = \frac{33}{4 \,.\, 35} M = 0{,}236\, M;$$

wenn er beiderseits lose gestützt ist und in den Abständen a, b von den Enden gestossen wird (cf. Nr. 78):

$$m_1 = \frac{M}{3 \,.\, 35}\left(35 + 14 \frac{a^3 + b^3}{abl} + 2 \frac{a^5 + b^5}{a^2 b^2 l}\right),$$

$$\text{insbesondere für } a = b = \frac{l}{2}: \; m_1 = \frac{17}{35} M = 0{,}486\, M;$$

wenn er beiderseits unter den Richtungswinkeln = Null eingeklemmt ist und in den Abständen a, b von den Enden gestossen wird (cf. Nr. 61):

$$m_1 = \frac{M}{4 \,.\, 35}\left(33 + 16 \frac{a^3 + b^3}{abl} + 3 \frac{a^5 + b^5}{a^2 b^2 l}\right),$$

$$\text{insbesondere für } a = b = \frac{l}{2}: \; m_1 = \frac{13}{35} M = 0{,}371\, M.$$

324. — Eine Biegungsarbeit ist u. A. auch dann zu verrichten, wenn es sich darum handelt, einen stab- oder bandförmigen elastischen Körper auf einen Cylinder aufzuwickeln. Diese Arbeit A kann nach Nr. 319:

$$= \frac{1}{2E} \int \sigma^2 dV = \frac{E}{2} \int \varepsilon^2 dV$$

und dabei, wenn r der Radius des Cylinders, bis zur Mittellinie des aufgewickelten Körpers gerechnet, und l die Länge des letzteren ist,

$$\varepsilon = \frac{\eta}{r};\; dV = l dF$$

gesetzt werden, indem in allen Punkten eines bandförmigen Elementes, dessen Querschnitt ein der Biegungsaxe im Abstande η paralleler Flächenstreifen dF des constanten Querschnitts F ist, dieselbe Ausdehnung ε hervorgerufen wird. Damit wird:

$$A = \frac{El}{2r^2} \int \eta^2 dF = \frac{EJl}{2r^2}.$$

Wenn z. B. ein unter der Spannung P stehendes Seil auf eine Trommel gewunden wird, so ist die der aufgewundenen Seillänge l entsprechende Nutzarbeit $= Pl$, also der verhältnissmässige Arbeitsverlust durch den Biegungswiderstand (die sogenannte Steifigkeit des Seils):

$$\frac{A}{Pl} = \frac{EJ}{2Pr}.$$

Derselbe giebt sich durch eine gewisse Absperrung $= a$ des Seils an der Aufwickelungsstelle zu erkennen, wofür man hat:

$$\frac{Pl+A}{Pl} = \frac{r+a}{r}; \quad a = \frac{EJ}{2Pr}.$$

Wird das Seil über eine Leitrolle hinübergebogen, so wird (vollkommene Elasticität vorausgesetzt) die vorher aufgewendete Biegungsarbeit bei der Abwickelung wieder ausgegeben, indem auch hier die Absperrung a eintritt. —

Wenn die Versuche lehren, dass die Steifigkeit der Seile anderen Gesetzen folgt, die nur eine empirische Bestimmung zulassen, so liegt der Grund hauptsächlich in ihrer discontinuirlichen Beschaffenheit, welche eine gegenseitige Verschiebung der einzelnen Fäden oder Drähte und infolge dessen einen Reibungswiderstand bedingt, der anderen Gesetzen folgt, wie der Biegungswiderstand eines stetigen Stabes, und welcher namentlich auch nicht nur bei der Biegung des geraden, sondern nicht minder bei der Geradestreckung des gebogenen Seils überwunden werden muss.

c. Arbeit der Drehungs-Elasticität.

325. — Wenn ein gerader stabförmiger Körper, dessen Länge $= l$ und dessen constanter Querschnitt $= F$ sei, um seine als x-Axe angenommene Axe verdreht wird, so sind alle in Nr. 307 genannten Spannungen ausser τ_y und $\tau_z =$ Null, die letzteren aber gleich für gleich gelegene Punkte aller Querschnitte. Ist also das Material des Stabes isotrop oder wenigstens der Art homogen, dass es gleich beschaffen ist nach allen Richtungen, welche mit der Stabaxe gleiche Winkel bilden, so liefert die allgemeine Formel in Nr. 307 mit

$$\tau_y = G\gamma_y; \ \tau_z = G\gamma_z; \ \tau_y^2 + \tau_z^2 = \tau^2; \ dV = l\,dF:$$

$$A = \frac{l}{2G}\int \tau^2 dF.$$

Dabei ist $dF = dy\,dz$, während für bestimmte Fälle τ^2 als Function von y und z nach früher entwickelten Formeln bestimmt werden kann.

Auch kann man die Resultate des fünften Capitels noch unmittelbarer verwerthen, indem man, unter M das die Drehung bewirkende Kraftmoment und unter ϑ den specifischen Drehungswinkel (Nr. 186) verstanden, analog dem in Nr. 320 zur Ermittelung der Biegungsarbeit eingeschlagenen Verfahren setzt:

$$A = \int_0^{\omega} M\delta(l\vartheta)$$

$$\text{oder mit } \vartheta = \omega\frac{M}{G}: \ A = \frac{M^2}{2G}l\omega.$$

Mit Rücksicht auf die bekannte Beziehung zwischen M und der grössten Tangentialspannung t erhält man daraus diejenige Arbeit, welche bei gegebener grösster Anstrengung ein prismatischer Stab durch seine Verdrehung in sich aufzunehmen vermag.

Ist der Querschnitt eine Ellipse mit den Halbaxen b und c ($b \gtreqless c$), so ergiebt sich mit

$$t = \frac{2}{\pi}\frac{M}{b^2 c};\ \omega = \frac{1}{\pi}\frac{b^2+c^2}{b^3 c^3}\ \text{(cf. Nr. 200 u. 204):}$$

$$A = \frac{t^2}{2G}\frac{\pi}{4}\frac{b}{c}(b^2+c^2)l = \frac{t^2}{2G}\frac{b^2+c^2}{4c^2}V;$$

insbesondere mit $b = c$ für eine cylindrische Welle:

$$A = \frac{1}{2}\frac{t^2}{2G}V$$

und für eine hohle cylindrische Welle mit den Radien r und r_1 ($r > r_1$):

$$A = \frac{1}{2}\frac{t^2}{2G}\pi r^2 l - \frac{1}{2}\frac{\left(\frac{r_1}{r}t\right)^2}{2G}\pi r_1^2 l = \frac{t^2}{2G}\frac{r^2+r_1^2}{2r^2}V.$$

Ist der Querschnitt ein Rechteck mit den Seiten $2b$ und $2c$ ($b \leqq c$), so ergiebt sich mit

$$t = \frac{9}{16}\frac{M}{b^2 c};\ \omega = \frac{3\alpha}{16}\frac{b^2+c^2}{b^3 c^3}\ \text{(cf. Nr. 199, 204 u. 206):}$$

$$A = \frac{t^2}{2G}\frac{16\alpha}{27}\frac{b}{c}(b^2+c^2)l = \frac{t^2}{2G}\frac{4\alpha}{27}\frac{b^2+c^2}{c^2}V.$$

Dabei ist $\alpha = 1{,}2$ bis $1{,}5$ zu setzen; mit dem Mittelwerthe $\alpha = 1{,}35$ ist:

$$A = \frac{t^2}{2G}\frac{b^2+c^2}{5c^2}V. —$$

Für ein isotropes Material ist mit

$$t = \frac{m}{m+1}k;\ G = \frac{1}{2}\frac{m}{m+1}E\ \text{(cf. Nr. 169):}$$

$$\frac{t^2}{2G} = \frac{2m}{m+1}\frac{k^2}{2E} = \left(\frac{3}{2}\ \text{bis}\ \frac{8}{5}\right)\frac{k^2}{2E}$$

und es würde also z. B. für die cylindrische Röhre $A = \frac{k^2}{2E}V$ sein, d. h. dieselbe bei gleicher Anstrengung eine eben so grosse Arbeit durch Verdrehung um ihre Axe wie durch Ausdehnung nach deren Richtung in sich aufnehmen können, wenn $\frac{r}{r_1} = \sqrt{m}$ wäre.

II. Plattenförmiger Körper.

326. — Als Beispiel werde eine unter innerem Ueberdrucke $= p$ pro Flächeneinheit stehende Röhre betrachtet; r_1 sei der innere, r_2 der äussere Radius, l die Länge. Die Röhre sei an den Enden offen und frei (Nr. 272 u. ff.); dann sind mit Benutzung der in Nr. 270 erklärten Bezeichnungen die Tangentialspannungen und die Normalspannung $\sigma_a =$ Null,

und es ist die Arbeit der inneren Kräfte nach Nr. 309, ein isotropes Material vorausgesetzt:

$$A = \frac{1}{2E}\int_{r_1}^{r_2}\left(\sigma_r^2 + \sigma_\varphi^2 - \frac{2}{m}\sigma_r\sigma_\varphi\right)dV.$$

Darin ist nach Nr. 272 mit $p_1 = p$, $p_2 = 0$:

$$\sigma_r = \frac{pr_1^2}{r_2^2 - r_1^2}\left(1 - \frac{r_2^2}{r^2}\right);\ \sigma_\varphi = \frac{pr_1^2}{r_2^2 - r_1^2}\left(1 + \frac{r_2^2}{r^2}\right)$$

und die Ausführung der Integration nach Substitution dieser Ausdrücke nebst $dV = 2\pi r l . dr$ liefert:

$$A = \frac{p^2}{E}\frac{r_1^2}{r_2^2 - r_1^2}\frac{(m-1)r_1^2 + (m+1)r_2^2}{m(r_2^2 - r_1^2)}V;\ V = \pi(r_2^2 - r_1^2)l.$$

Ist das Material von solcher Art, dass nicht etwa k'' wesentlich $< k'$ ist, so findet nach Nr. 273 die gefährlichste Anstrengung (eine positive oder Ausdehnung im engeren Sinne) an der Innenfläche nach der Umfangsrichtung statt, und es ist, wenn der entsprechende Maximalwerth von $E\varepsilon_\varphi = k$ gesetzt wird:

$$p = k\frac{m(r_2^2 - r_1^2)}{(m-1)r_1^2 + (m+1)r_2^2}.$$

Durch Substitution dieses Ausdrucks für p erhält man die Arbeit, welche die Röhre bis zum Eintritt der Maximalanstrengung k in sich aufzunehmen vermag:

$$A = \frac{k^2}{E}\frac{mr_1^2}{(m-1)r_1^2 + (m+1)r_2^2}V;$$

ist die Wandstärke $\delta = r_2 - r_1$ verhältnissmässig klein, so kann dafür näherungsweise gesetzt werden:

$$A = \frac{k^2}{2E}\left(1 - \frac{m+1}{m}\frac{\delta}{r_1}\right)V.$$

327. — Wenn das in einer Röhre mit der Geschwindigkeit c fliessende Wasser plötzlich in seiner Bewegung gehemmt wird, so sucht es nach allen Seiten in radialer Richtung auszuweichen und übt auf die Röhre einen Stoss aus. Der Verlust an lebendiger Kraft in der ersten Periode des Stosses, d. h. bis zu dem Augenblicke, in welchem die radiale Geschwindigkeit der Innenfläche der Röhre der entsprechend verkleinerten Wassergeschwindigkeit gleich geworden ist, verbleibt dem Wasser als eine äquivalente Wärmemenge, und die als lebendige Kraft übrig gebliebene Wirkungsgrösse:

$$W = \frac{Q^2}{Q + \mu Q_1}\frac{c^2}{2g}\ \text{(cf. Nr. 313)},$$

unter Q das Gewicht der Wassersäule,

Q_1 „ „ „ Röhre von gleicher Länge l,

μQ_1 das auf die Innenfläche reducirte Gewicht Q

verstanden, wird wegen der geringen Zusammendrückbarkeit des Wassers fast ausschliesslich auf die Deformation der Röhre verwendet. Wenn von letzterer wie in Nr. 326 angenommen wird, dass sie sich sowohl der Länge nach frei zusammenziehen,*) als in allen Querschnitten ohne äusseres Hinderniss erweitern

*) Diese durch $\sigma_a = 0$ charakterisirte Voraussetzung ist ungünstiger, als die Annahme

könne, und wenn (cf. Nr. 270 u. ff.) ϱ und ϱ_1 die radialen Verrückungen der materiellen Punkte in den Abständen r und r_1 von der Axe sind, endlich q_1 das specifische Gewicht (Gewicht der Volumeneinheit) der Röhre ist, so ergiebt sich der Reductionscoefficient μ aus der Gleichung:

$$\mu Q_1 = \int_{r_1}^{r_2} q_1 . 2\pi r l . dr \left(\frac{\varrho}{\varrho_1}\right)^2$$

mit $Q = q_1 \pi (r_2^2 - r_1^2) l$ und mit Rücksicht darauf, dass nach Nr. 272 (mit $p_1 = p$, $p_2 = 0$):

$$\frac{\varrho}{\varrho_1} = \frac{\frac{b}{2} r + \frac{c}{r}}{\frac{b}{2} r_1 + \frac{c}{r_1}} = \frac{\frac{A}{m+1} r + \frac{B}{m-1} \frac{1}{r}}{\frac{A}{m+1} r_1 + \frac{B}{m-1} \frac{1}{r_1}} = \frac{(m-1) r + (m+1) \frac{r_2^2}{r}}{(m-1) r_1 + (m+1) \frac{r_2^2}{r_1}}$$

ist. So findet man:

$$\mu = \frac{r_1^2 \left[(m-1)^2 r_1^2 + (m-1)(5m+3) r_2^2 + 4(m+1)^2 \frac{r_2^4}{r_2^2 - r_1^2} \ln \frac{r_2}{r_1} \right]}{2 [(m-1) r_1^2 + (m+1) r_2^2]^2},$$

welcher Ausdruck sich vereinfacht zu

$$\mu = 1 - \frac{1}{m} \frac{\delta}{r_1},$$

wenn $\frac{\delta}{r_1}$ ein kleiner Bruch ist, dessen 2te Potenz gegen 1 vernachlässigt wird.

Ist nun q das specifische Gewicht des Wassers und $\frac{q_1}{q} = n$, so ist auch:

$$W = \frac{(\pi r_1^2 l)^2}{\pi r_1^2 l + n \mu \pi (r_2^2 - r_1^2) l} q \frac{c^2}{2g} = \frac{\pi r_1^4 l}{r_1^2 + n \mu (r_2^2 - r_1^2)} q \frac{c^2}{2g}$$

und die Gleichsetzung dieses Ausdrucks mit dem von A (Nr. 326) liefert:

$$\frac{k^2}{E} = \frac{1}{m} \frac{r_1^2}{r_2^2 - r_1^2} \frac{(m-1) r_1^2 + (m+1) r_2^2}{r_1^2 + n\mu (r_2^2 - r_1^2)} q \frac{c^2}{2g}.$$

Sofern den Grössen k und E das Centimeter als Längeneinheit zu Grunde liegt, bedeutet hier $q = 0{,}001$ Kil. das Gewicht von einem Cubikcentimeter Wasser und $\frac{c^2}{2g}$ die Geschwindigkeitshöhe in Centimetern. Wird aber letztere in Metern, also mit $g = 9{,}81$ auch c in Metern pro Secunde ausgedrückt, so ist zu setzen:

$$q \frac{c^2}{2g} = 0{,}1 \frac{c^2}{2 . 9{,}81} = \frac{c^2}{196{,}2}.$$

Uebrigens ist es nicht blos die Wirkungsgrösse W, wodurch die resultirende Anstrengung der Röhre verursacht wird; denn indem der hydraulische Druck bei der Hemmung der Bewegung plötzlich in den hydrostatischen Druck übergeht, wird dadurch allein schon ein Werth von k bedingt, welcher nach Nr. 314 doppelt so gross ist, als derjenige, welcher der ruhigen Belastung durch den Ueberschuss des hydrostatischen Drucks über den hydraulischen Druck entsprechen würde, und welcher sich sonach zu demjenigen summirt, der infolge des permanenten hydraulischen Drucks in der Röhre schon vorhanden war, sowie zu demjenigen, welcher ausserdem durch die Wirkungsgrösse W hervorgerufen wird. Es ist des-

---

einer unveränderlichen Rohrlänge ($\varepsilon_a = 0$), und es wird dadurch einigermassen dem Umstande Rechnung getragen, dass durch ungleiche Erweiterung verschiedener Querschnitte eine vielleicht noch grössere Ausdehnung nach der Richtung der Länge eintreten könnte.

halb angemessen, die Wandstärke einer Röhre schon von vornherein stets mit Rücksicht auf die doppelte Grösse des gegebenen hydrostatischen Drucks zu berechnen.

Wäre z. B. gegeben $r_1 = 10$ und $p = 2{,}5$ Kil. pro Quadratcentimeter (nahe 2,5 Atm.), so würde mit

$$p = 5 \text{ und } k = 250 = \frac{K'}{5} = \frac{E(\varepsilon')}{3} \text{ (cf. Nr. 14)}$$

die Wandstärke der gusseisernen Röhre nach Nr. 273 u. 275 zu nehmen sein:

$$\delta = r_1 \frac{p}{k} + 0{,}5 = 0{,}7 \text{ Centim.}$$

Nach der genauen Formel in Nr. 273 wäre dann für $p = 5$ mit $m = 3$:

$$k = 5\,\frac{2r_1^2 + 4r_2^2}{3(r_2^2 - r_1^2)} = 75{,}68,$$

und es dürfte durch die Wirkungsgrösse W nur noch die Anstrengung

$$k = 750 - 75{,}68 = 674{,}32$$

hervorgerufen werden, wenn der resultirende Werth von k bei der plötzlichen Hemmung der Bewegung nicht grösser, als 750 Kil. werden soll. Mit diesem Werthe $k = 674{,}32$, ferner mit $E = 1000000$, $m = 3$, $n = 7{,}2$ und $\mu = 1 - \frac{1}{m}\frac{\delta}{r_1}$ liefert dann die obige Gleichung für $\frac{k^2}{E}$:

$$c = 3{,}45$$

als den Grenzwerth, welcher nicht ohne Gefahr von der Geschwindigkeit des Wassers überschritten werden dürfte.*)

*) Ein wirksamer Schutz der Röhre gegen die Stosswirkung der plötzlich aufgehaltenen Wassersäule kann durch die Anbringung von Windkesseln erzielt werden, indem ein Theil der lebendigen Kraft zur Compression der darin abgesperrten Luft verwendet wird. Die quantitative Bestimmung der Wirkung dieses Hülfsmittels erfordert indessen Erwägungen, welche ausserhalb der diesem Buche gesteckten Grenzen liegen.

Berichtigungen.

Seite 52, Zeile 1 von Oben: γ statt $tg\gamma$.

„ 145, „ 6 „ Unten: $\frac{\Delta v}{v}$ statt $\frac{\Delta v}{l}$.

„ 148, „ 5 „ „ soll es heissen: $z = e - dz$.

„ 149, „ 3 „ „ : $\gtrless$ statt $>$.

„ 173, „ 4 „ Oben: $\frac{m_2}{G}$ statt $\frac{m^2}{G}$.

„ 189, „ 5 „ „ soll es heissen: „sowie den dortigen entsprechende".

„ 206, „ 6 „ „ soll es heissen: $J_2 = \int \frac{(4m+1)z^2 - (2m-1)y^2}{2m} y\,dF$.

„ 209, „ 3 „ „ fehlt das Integralzeichen vor $\left(y \frac{dQ_o}{dz} - z \frac{dQ_o}{dy}\right) dF$.

„ „ „ 6, 7 u. 8 von Oben sind die Glieder mit den Coefficienten α_1, β_1, α_3 u. β_3 in den Ausdrücken von Q_o, $\frac{dQ_o}{dy}$ und $\frac{dQ_o}{dz}$ zu streichen.

„ 210, Zeile 10 von Oben ist die Gleichung: $\alpha_1 + 3b^2\alpha_3 = 0$, Zeile 16 von Oben die Gleichung: $\beta_1 - 3c^2\beta_3 = 0$ zu streichen.

„ 210, „ 12 von Oben: 5 ten statt 4 ten.

„ „ „ 17 „ „ ist statt: „kann $\alpha_1 = \alpha_3 = \beta_1 = \beta_4 = 0$" zu setzen: „müsste $\beta_4 = 0$."

„ 212, „ 8 von Unten: $\frac{y^2}{r^2}$ statt $\frac{y_2}{r^2}$.

„ 227, „ 15 „ „ : σ_φ statt $\sigma\varphi$.

Druck von Trowitzsch & Sohn in Berlin.