Wärmetheorie & Hydraulik

Pieper, Andreas

Karlruhe, 1872/73

urn:nbn:de:bsz:31-279864


EX·LIBRIS·A·PIEPER

Angewandte Hydraulik & mechanische Wärmetheorie.

nach Vorträgen von Prof. Dr. Grashof, Karlsruhe.

A. Pieper.

Da d. Hydraulik und mechanische Wärmetheorie sich eng bedingen, wie im späteren Verlaufe d. Betrachtungen zu ersehen sein wird, so seien zunächst d. Hauptsätze d. mechanischen Wärmetheorie entwickelt, indem manche Erscheinungen in d. Hydraulik von d. Wärme beeinflußt werden.

Das Wesen d. Wärmetheorie beruht nun ganz auf d. Annahme einer atomistischen Constitution d. Materie d. h. sie beruht darauf, daß angenommen wird, daß d. Materie zusammengesetzt ist aus unendlich kl. discreten materiellen Elementen, welche in kl. Entfernungen von einander getrennt sind, also sich immer Raum zwischen einander befindet.

Anfänglich soll jedoch von dieser Annahme abstrahirt werden, indem noch nicht bei dem heutigen Stand d. Wissenschaften d. Zusammenhang dieser Theilchen vollkommen genug entwickelt ist, um mathematische Betrachtungen mit Hülfe d. höheren Analysis in d. Betrachtungen hineinziehen zu können, da bekanntlich d. mathematischen Untersuchungen mit Hülfe d. höheren Analysis wesentlich darauf beruhen, daß eine Zerlegung d. Körpers in unendlich kleine, aber immer noch materielle Theile überhaupt denkbar ist. Dies letztere ist aber bei d. Annahme einer atomistischen Constitution d. Materie unmöglich, denn würde man eine Zerlegung in unendlich kl. Theile vornehmen, so würden diese Theile zum Theil Materie, theils halb Materie halb leerer Raum und theils nur leerer Raum sein. Aus diesem Grunde sei daher von d. obigen Annahme vorerst abstrahirt, zumal da ohne diese Abstraction nicht schon von vornherein eine strenge Definition d. Masse und d. Volumens d. Körpers recht schwierig würde.

Unter Berücksichtigung dieser Abstraction ist nun d. Zustand eines Körpers bestimmt durch d. augenblicklichen Zustand d. unendlich kl. Elemente, aus denen d. Körper bestehend gedacht werden kann. In Hinsicht d. Körperelemente wird man nun in d. Folge 2 verschiedene Arten Elemente anzunehmen haben:

Wird d. Körperelement betrachtet als d. Inbegriff ganz bestimmter immer dieselbe bleibender Materie, so soll d. Element ein Massenelement genannt werden.

Bei gewissen anderen Untersuchungen muß man sich aber auch d. Körper in verschiedenen Zuständen in Elemente zerlegt denken, so daß ein Element immer verschiedene Materie enthält. Solche Elemente sollen Volumenelemente heißen. Diese Volumenelemente können natürlich unter Umständen ganz dieselbe Größe und Gestalt haben, während d. Massenelemente derselben als veränderlich gedacht werden müssen sowohl in Bezug auf Größe als auch Gestalt.

Wenn nun die Ursache von Zustandsänderung eines Körpers die Kraft ist, so ist diese allerdings bestimmt durch d. Anfangs- und Endzustand d. Körpers, während d. Art und Weise d. Erzeugung d. Änderung unendlich verschiedener Art sein kann, indem diese sich unter verschiedenen Gesetzen ~~vollziehen~~ vollziehen kann. Diese Veränderungsgesetze sind aber bestimmt durch d. Zustände eines Körpers, welche in Zeitmomenten stattfinden, die um unendlich kl. Zeiträume auseinander stehen.

Zunächst kann man nur d. Zustandsänderungen betrachten als d. Wirkungen von Ursachen so vielfach verschiedener Art als man verschiedene Geschwindigkeitszustände wahrnimmt. Diese Geschwindigkeitszustände können aber auch wiederum d. Art sein, daß 2 derselben wieder in d. Beziehung von Ursachen und Wirkungen zu einander stehen, u. daß 2 solche selbst wieder als Wirkungen einer und derselben dritten Ursache erkannt werden. Auf d. Erkenntnis und Unterscheidung von Wirkungen und Ursachen ist nun besonders d. Naturwissenschaft gerichtet und es kommt im Gesamtgebiet d. Naturwissenschaften darauf an, diejenigen welche Zustandserscheinungen als d. Wirkungen möglichst weniger Ursachen zurückzuführen.

In Hinsicht d. Zustandes eines Körpers unterscheidet man nun einen äußeren und ~~einen~~ einen inneren Zustand; unter äußerem Zustand eines Körpers soll derjenige verstanden werden, welcher d. Zustand seiner Ruhe od. Bewegung angibt, und zwar derjenigen Bewegung, welche mit d. Wahrnehmung zunächst und betrachtet werden kann als eine wahrnehmbare kontinuierliche Ortsänderung d. Massenelemente. Von dieser Bewegung ist nämlich noch eine andere zu unterscheiden, welche nicht als sichtbar betrachtet werden kann, nämlich d. sogenannte innere Molekularbewegung d. Körper.

Bezüglich d. Änderung d. äußeren Zustandes eines Körpers ~~kann~~ gibt d. unmittelbare Wahrnehmung vollständigen Aufschluß, jedoch keinen für d. Grundsätze namentlich aufgestellt.

Der Bewegungszustand eines Körpers in einem Augenblick ist bestimmt durch d. Richtung und Größe d. Geschwindigkeit ~~…~~ seiner d. Massenelemente od. seiner materiellen Punkte, unter materiellem Punkt d. in ein Schwerpunkt vereinigt gedachte Masse d. Massenelements verstanden. Hiermit ist auch zugleich d. Größe d. lebendigen Kraft d. Körpers bestimmt, indem d. lebendige Kraft eines in Bewegung befindlichen Körpers = ist der halben Summe d. Produkte aus den Massen d. materiellen Punkte in den Quadraten ihrer Geschwindigkeiten (früher wurde d. lebendige Kraft allgemein als d. ganze Summe d. Produkte aus Masse und Geschwindigkeitsquadrat hingestellt; gegenwärtig kommt man jedoch immer mehr auf d. erstere zurück, indem sich dadurch manches einfacher gestaltet.) Wenn daher alle augenblicklichen Geschwindigkeiten d. Massenelemente = 0 sind, so ist auch d. lebendige Kraft d. Körpers = 0, und umgekehrt, wenn d. lebendige Kraft d. Körpers = 0, so sind auch alle Geschwindigkeiten d. Massenelemente einzeln = 0. Für den letzteren Fall, wenn d. augenblicklichen Geschwindigkeiten d. materiellen Punkte = 0 sind, so befindet sich d. Körper im Ruhezustand.

Bekanntlich kann d. Bewegung eines Körpers in mannigfach verschiedener Weise betrachtet werden, als bestehend aus d. relativen Bewegung gegen ein am Körper festes Achsensystem und aus d. Bewegung dieses Achsensystems gegen ein anderes festes Gebilde. Die letztere Bewegung, nämlich d. Bewegung d. am Körper festen Achsensystems = Bewegung eines starren Körpers, kann wiederum betrachtet werden in jedem Augenblick als eine unendlich kl. Schraubenbewegung, welche auf unendlich verschiedene Weise zerlegt werden kann in eine Rotation um eine Momentanachse und eine unendlich kl. Translation entsprechend einer Richtung. Wie man aber auch d. Zerlegung vornehmen mag, immer ist bekanntlich d. Rotation nach Achsenrichtung, Winkelgeschwindigkeit u. Sinn

die räumliche, während diejenige d. Translation mit d. parallelen festbleibenden Achsenkreuz sich nach Größe und Richtung ändert. Hinsichtlich d. Festlegung eines Achsenkreuzes an einem Körper sei noch hinzugefügt, daß es genügend ist das Achsenkreuz OX OY OZ so anzunehmen, daß d. Ursprung O beständig in demselben materiellen Punkt A liegen bleibt, daß eine d. Achsen z.B. OX durch einen 2ten, immer denselben bleibenden materiellen Punkt B geht und daß endlich eine d. Coordinatenebenen z.B. XOY durch einen dritten materiellen Punkt geht. Offenbar ist durch d. bekannte relative Bewegung d. materiellen Punkte eines Körpers gegen ein solches Achsenkreuz auch zugleich d. relative Bewegung d. Elemente gegen einander bestimmt. Aus diesem Grunde sei unter relativer Bewegung eines Körpers schlechtweg verstanden d. Bewegung d. Elemente gegen einander od. d. relative Bewegung d. Elemente gegen ein am Körper fixirtes Achsenkreuz.
(Im Allgemeinen erfordert d. Begriff einer relativen Bewegung eines Körpers auch noch einmal, an einer näheren Bezeichnung auf welches Object sich d. Bewegung bezieht, und nur bei d. relativen Bewegung eines (einzelnen) Körpers gegen sich selbst spricht man einfach von d. Bewegung d. Körpers.)
Bekanntlich nennt man d. Ursachen d. Abänderungen d. äußeren Zustandes od. Bewegung eines Körpers die mechanischen Kräfte. Die auf einen Körper wirkenden Kräfte werden unterschieden in Massenkräfte und Oberflächenkräfte, wenn d. Massenkräfte an d. Massenelemente gebunden sind und zugleich als an ihnen angreifend gedacht werden müssen, während d. Oberflächenkräfte an d. Elementen d. Oberfläche angreifend gedacht werden können.
Die Arbeit d. Massenkräfte ist bedingt durch d. Bewegung d. Massenelemente und die Arbeit d. Oberflächenkräfte ist bedingt durch d. Bewegung d. Oberflächenelemente.
Bekanntlich wird ferner jede mechanische Kraft gemessen durch d. Masse und d. Beschleunigung, welche sie dem Körper ertheilt od. ertheilen kann. Ist nämlich P eine Kraft, welche einem Körper von d. Masse m eine Beschleunigung φ ertheilen kann, so ist:

$$P = m\varphi$$

Bezüglich d. Einheit, mit welcher Kraft und Masse gemessen werden, kann man entweder zunächst d. Masseneinheit definiren od. man kann zuförderst d. Krafteinheit festsetzen als diejenige Kraft, welche einer Masse eine bestimmte Beschleunigung ertheilt. Mit Hilfe d. obigen Gleichung kann man dann im ersten Falle d. Krafteinheit und im letzteren Fall d. Masseneinheit bestimmen. Von beiden Verfahren erscheint d. erstere wohl d. natürlichere; das übliche Verfahren ist jedoch das, daß man d. Krafteinheit annimmt und zwar pflegt man als Krafteinheit d. Schwerkraft zu nehmen, welche auf eine bestimmte Masse an einem bestimmten Orte ausgeübt wird von d. Anziehungskraft d. Erde. Z.B. 1 Kgr. = Schwerkraft auf d. Masse eines Cubdcm. Wassers im Zustande d. größten Dichtigkeit an einem bestimmten Orte, wobei aber noch willkürlich ist, an welchem Orte man d. Schwerkraft auf 1 Cubdcm. Wasser als Kgr. betrachten will. Würde man an jedem Beobachtungsorte d. betreffende Kgr. als Krafteinheit annehmen, so würde man mit den erhaltenen Größen, bei verschiedenen Breiten und Längen bezw. Höhen d. Orte auch verschiedene Kgr. bekommen, indem d. Schwerkraft mit d. Änderungen auch verschieden ist. Für d. Technik ist jedoch d. Verschiedenheit d. Schwerkraft an d. verschiedenen Erdpunkten genügend klein, um vernachlässigt werden zu können. Man nimmt einfach als Mittelwerth für die durch die Schwerkraft hervorgerufene Beschleunigung $g = 9,81$ m an; demnach wäre d. Definition d. Kgr. als Krafteinheit also d. Schwerkraft eines Cubdcm. Wassers im dichtesten Zustand an einem Orte wo d. Beschleunigung d. Schwerkraft $= 9,81$ m beträgt.
Allgemeine Kräfte nennen diejenigen Kräfte im Gebrauch, welche man mit d. Namen Gravitation bezeichnet, nämlich d. Kraft, mit welcher sich 2 materielle Punkte in beliebiger Entfernung gegenseitig anziehen. Bekanntlich nimmt diese Gravitation mit d. Quadrate d. Entfernungen d. materiellen Punkte ab. Bei irdischen Körpern unter sich mit ihren kl. Dimensionen gegen d. Erde, ist diese Gravitation jedoch ganz untergeordnet so daß dieselbe vollkommen vernachlässigt werden kann.

Was d. äußeren Kräfte anbetrifft, so kommt bei d. Bewegung eines irdischen Körpers nur für allemal d. Schwerkraft in Betracht. Ferner sind jedoch auch noch die von d. Mechanik festgestellten sog. 2 Ergänzungskräfte zu berücksichtigen, wenn es sich nur um d. relative Bewegung eines Körpers gegen einen andern in Bewegung befindlichen Körper handelt, indem diese beiden Ergänzungskräfte hinzuzufügen sind, um d. absolute Bewegung in d. Rechnung hereinziehen zu können. Ist K ein Körper, welcher in relativer Bewegung gegen ein innerhalb in Bewegung begriffenes Bezugssystem S steht, so kann man bekanntlich nach d. Mechanik diese eigene Bewegung d. Systems S in jedem Zeitelement als eine unendlich kleine Schraubenbewegung betrachten. Die Bewegung d. Körpers K kann dann als absolute Bewegung angesehen werden, wenn seiner Bewegung 2 sog. Ergänzungskräfte hinzugefügt werden, die folgendermaßen bestimmt sind:

Es sei in irgend einem Augenblick A d. Momentanachse und ω d. Winkelgeschwindigkeit, mit welcher das Bezugssystem S um d. Achse A augenblicklich rotiert. Ferner sei dm irgend ein Massenelement d. Körpers K und φ d. Beschleunigung, welche im betreffenden Augenblick d. Element dm besitzen würde, wenn es sich nicht in relativer Bewegung gegen d. Bezugssystem S befände, also mit demselben verbunden od. in relativer Ruhe gegen dasselbe wäre. Ferner sei v d. augenblickliche relative Geschwindigkeit d. Massenelements dm gegen d. System S und v' d. Projektion von v auf eine Ebene, welche zur Momentanachse A normal steht. Durch vorstehendes sind nun d. Ergänzungskräfte folgendermaßen bestimmt:

Die erste Ergänzungskraft ist dadurch bestimmt, daß sie dem Massenelemente dm eine Beschleunigung erteilt, welche entgegengesetzt gerichtet ist der früheren Beschleunigung φ des augenblicklich mit d. System S fest verbundenen Punktes.

Die 2te Ergänzungskraft erteilt dem Elemente dm eine Beschleunigung $2\,\omega v'$, welche senkrecht gegen d. Momentanachse A und senkrecht gegen v und v'. Hiermit ist aber d. Richtung dieser Beschleunigung noch 2deutig bestimmt. Um sie vollkommen zu bestimmen muß noch hinzugefügt werden, daß d. 2te Kraft diejenige Richtung hat, welche man um $90°$ im Sinne d. Winkelgeschwindigkeit ω um d. Momentanachse A herumdrehen muß, damit sie in d. Richtung von v' gelangt; man erhält also diese Richtung d. 2ten Kraft, indem man d. Richtung von v' um d. Achse A ~~um~~ einen Winkel von $90°$ im entgegengesetzten Sinne von ω herumdreht. Hiermit sind d. beiden Ergänzungskräfte vollkommen bestimmt.

Im Verlauf von nachstehenden Untersuchungen wird sich zeigen, daß diese beiden Ergänzungskräfte eine wesentliche Rolle spielen.

Diese beiden Kräfte sind also immer senkrecht zu v', also senkrecht zur relativen Bahn d. Massenelements dm gerichtet, also ist in jedem Augenblick ihre relative Arbeit $= 0$, indem das Produkt aus v in d. Projektion $= 0$ ist. Diese beiden Ergänzungskräfte haben demnach auf d. Änderung d. relativen lebendigen Kraft keinen Einfluß, sie bestimmen aber nur d. absolute Bewegung mit Ausschluß d. relativen lebendigen Kraft.

Wenn es sich um d. ~~Bewegung~~ Untersuchung d. (fälschlich genannten) Bewegung eines irdischen Körpers gegen d. Erde, also um d. relative Bewegung d. Körpers gegen d. Erde handelt, so ~~verschaffen~~ entsprechen d. beiden Ergänzungskräfte d. relativen Bewegung zur absoluten erstens d. eigenen Schwere od. Anziehungskraft d. Erde und zweitens d. Centrifugalkraft [illegible]. Außerdem ist in d. Beschleunigung d. Schwerkraft immer d. 2te Ergänzungskraft, nämlich d. Centrifugalkraft mit eingerechnet, indem es unmöglich ist, d. Schwerkraft ohne Centrifugalkraft zu beobachten. In dieser Weise $g = 9{,}81$ m $=$ Beschleunigung d. Schwerkraft also schon beide Ergänzungskräfte mit einbegriffen. Man hat also bei d. relativen Bewegung eines irdischen Körpers auch nur d. 1te Ergänzungskraft, nämlich d.

Schwerkraft zu berücksichtigen.

Was andererseits d. Oberflächenkräfte betrifft, welche von irgend einem andern angrenzenden Körper herrühren und in d. Oberfläche angreifen, so können diese unterschieden werden in normale und tangentiale Oberflächenkräfte. Die normalen Oberflächenkräfte kommen in d. Regel immer nur als normale Druckkräfte in Betracht, so daß etwa vorkommende normale Zugkräfte als negative normale Oberflächenkräfte zu bezeichnen sind.
Die tangentialen Oberflächenkräfte kommen für uns als Reibungen in Betracht, d.h. als Widerstandskräfte gegen d. relativ gleitende Bewegung gegen einen andern berührenden Körper.
Wenn in d. Folge d. Rede sein wird von dem äußeren Druck in einem gewissen Punkt d. Oberfläche, so soll darunter verstanden werden d. Quotient, welchen man erhält, wenn man den auf ein unendlich kl. Flächenelement wirkenden äußeren Druck durch d. Flächeninhalt dieses Flächenelements d. Oberfläche dividirt. Ist dieser Druck in allen Elementen gleich, so soll er d. spez. äußere Druck d. Körpers genannt werden. Wenn ferner in Folge von d. äußeren auf einen Körper wirkenden Kräften d. Rede sein wird, dann sollen darunter im Allgemeinen alle diejenigen Kräfte verstanden werden, welche als Ursachen d. äußeren Zustandes und dessen Änderungen zu betrachten sind. Es gehören also zu den äußeren Kräften nicht nur Oberflächenkräfte d. äußeren Massenelemente im engeren Sinne, sondern auch d. inneren Massenkräfte, also im Allgemeinen d. Gravitation, denn auch diese betheiligt sich ja an den Ursachen d. Änderungen d. äußeren Zustandes.

Nachdem diese, meistens aus d. Mechanik zu entnehmenden Sätze über d. äußeren Zustand eines Körpers definirt sind, kann übergegangen werden zu speziellen Definition d. Begriffs d. inneren Zustandes eines Körpers.

Wenn in d. Folge von inneren Zustande eines Körpers im Gegensatz zu äußeren od. Bewegungszustand die Rede sein wird, so soll dieser nicht im weitesten Sinne d. Wortes verstanden werden, indem man ausgenommen (?) von d. Erscheinungen absehen soll, welche ihre Ursachen in Licht, Elektricität, Magnetismus haben. Der innere Zustand eines Körpers, wie er im Folgenden immer verstanden werden soll, ist dann vollkommen bestimmt durch d. chemische Beschaffenheit, den Aggregatzustand, das spez. Volumen und durch d. Temperaturzustand (?) d. verschiedenen Elemente d. Körpers.
Diese verschiedenen 4 Argumente, welche den inneren Zustand eines Körpers feststellen, sollen nun näher angesehen werden:

Die chemische Beschaffenheit soll im Folgenden als d. Art d. Körpers bezeichnet werden. 2 Körper heißen also gleich- od. ungleichartig, wenn sie von gleicher od. ungleicher Beschaffenheit sind. Ein Körper ist von gleichartiger Form (?), wenn alle seine Elemente von gleicher chemischer Beschaffenheit sind. Wenn nicht besonders d. Gegentheil besonders hervorgehoben wird, so soll stillschweigend immer ein Körper als gleichartig angesehen werden.

Was d. Aggregatzustände betrifft, welche gleichfalls den Körper charakterisiren, so kann d. Körper entweder fest, flüssig od. luftförmig sein.
Ein fester Körper ist charakterisirt durch d. beschränkte Veränderlichkeit seines Volumens und seiner Gestalt sowie d. Unmöglichkeit einer Mischung seiner Elemente unter einander, wobei unter Mischung verstanden ist, daß d. relativen Gruppirungen d. Elemente so verändert werden, daß d. einzelnen Elemente ganz neue Nachbarelemente erhalten. Offenbar ist dies bei einem festen Körper schlechterdings unmöglich. Man kann also auch einen festen Körper dadurch charakterisiren, indem man sagt, daß d. Massenelemente an und für sich einer Veränderung fähig sind, einmal benachbarte Elemente immer Nachbarelemente bleiben müssen, da benachbarte Massenelemente eines festen Körpers keiner relativ gleitenden Bewegung gegen einander fähig sind.

Was im Gegensatze zu den festen Körpern, die flüssigen und luftförmigen betrifft, so haben diese eine unbeschränkte Veränderlichkeit ihrer Gestalt und eine unbeschränkte Verschiebbarkeit gemein, indem d. kleinsten Elemente derselben einer unbeschränkt gleitenden relativen Beweglichkeit gegen einander fähig sind.

Die flüssigen und luftförmigen Körper sind dadurch von einander verschieden, daß d. flüssigen das mit d. festen Körpern gemein haben, daß ihr Volumen nur in einem sehr beschränkten Grade veränderlich ist, während d. luftförmigen Körper auch einer unbeschränkten Volumenänderung (wenigstens Volumenvergrößerung) fähig sind.

In dieser letzten Hinsicht ist jedoch bei den luftförmigen Körpern eine Theilung in 2 Klassen vorzunehmen, indem d. Gase einer unbeschränkten Volumenvergrößerung und Verkleinerung, während Dämpfe erst einer unbeschränkten Volumenvergrößerung nicht aber einer unbeschränkten Volumenverkleinerung (sofern dieselben überhaupt noch luftförmig bleiben also ihren Aggregatzustand nicht ändern) fähig sind.

In d. Regel sind d. verschiedenen Aggregatformen eines Körpers ziemlich scharf von einander verschieden. Jedoch gibt es auch einige Körper, bei welchen vom festen zum flüssigen Zustand ein allmähliger Uebergangsprozess stattfindet, welche man bekanntlich mit d. Namen zähflüssig, plastisch etc. bezeichnet. Am häufigsten treten solche Uebergangsformen bei zusammengesetzten organischen Stoffen auf, insbesondere bei allen Fetten, ferner auch bei solchen Mischungen, welche man als sehr innige Mischungen von festen und flüssigen Theilchen betrachten muß.

In d. Folge wird ein Körper mit homogen bezeichnet, wenn er gleichförmiger Art ist und alle seine Elemente gleiche Aggregatzustände haben, also wenn dessen Elemente alle chemisch gleich beschaffen sind und gleiche Aggregatformen haben. Für einen streng genommen allerdings eine besondere Definition erforderlich hinsichtlich d. nicht streng geschiedenen Aggregatzustände. Es sei hievon jedoch abgesehen. Im Folgenden kann man jedoch nicht alle Körper als homogen voraussetzen, indem man bei technischen Aufgaben oft Veranlassung hat, solche Körper zu betrachten, welche eine Mischung von Elementen gleicher Art in verschiedenen Aggregatzuständen sind. z.B. eine Mischung von Wasser und Eis, Mischung von Wasser und Dampf.

In dieser Hinsicht sind jedoch 2 Unterschiede zu machen, indem man in continuirliche und discontinuirliche Gemenge zu theilen hat. Ein solches Gemenge wird continuirlich genannt, wenn, wie beim feuchten Wasserdampf, wenn es in unzählig kl. Bestandtheile zerlegt werden kann, so zwar, daß von einem Bestandtheil zum andern d. Aggregatzustand sich nur allmählig ändert.

Anders ist es aber bei discontinuirlichen Gemengen, indem hier d. Bestandtheile von verschiedenen Aggregatformen größere zusammenhängende Gruppen bilden (Wasser und Dampf in einem Dampfkessel) und also d. Aggregatzustand sich unstetig, plötzlich ändert.

Unter dem spec. Volumen in einem gewissen Punkte eines homogenen Körpers od. einer continuirlichen Mischung soll d. Quotient verstanden, welchen man erhält, wenn d. Volumen eines A einschließenden unendlich kl. Körperelements durch dessen Gewicht dividirt wird; es stellt d. spec. Volumen im Punkte A = dem Volumen pro Gewichtseinheit dar, des den Punkt A einschließenden Körperelements. Dieses spec. Volumen soll mit v bezeichnet werden. D. reziproke Werth $= \frac{1}{v}$ ist dann d. spec. Gewicht im Punkte A und sei bezeichnet mit γ. Man kann also d. spec. Gewicht im Punkte A auch definiren als d. Gewicht pro Volumeneinheit eines den Punkt A enthaltenden Körperelements.

Endlich wird in d. Folge noch von spec. Masse d. Rede sein, worunter d. Quotient verstanden werden soll, welchen man durch Division d. spec. Gewichts γ in dem betreffenden Punkte durch d. Beschleunigung g d. Schwerkraft erhält, also

$$\text{spec. Masse} = \mu = \frac{\gamma}{g} \quad \text{und spec. Gewicht } \gamma = \frac{1}{v}$$

der einen spez. Volumen kann in einem bestimmten Punkte dann natürlich nur bei homogenen Körpern od. continuirlichen Mischungen d. Fall sein, während man bei discontinuirlichen Mischungen nur von einem mittleren spez. Volumen sprechen kann, worunter d. Quotient aus dem ganzen Volumen durch d. ganze Gewicht d. Gemisches verstanden wird. d. mittlere spez. Gewicht und d. mittlere spez. Masse sind dann nach den vorigen Beziehungen auch bestimmt.

Eine besonders eingehende Besprechung erfordert d. letzte Kriterium d. Zustandes eines Körpers, nämlich d. Spannungszustand.

Bei d. zunächst vorliegenden Voraussetzung einer continuirlichen Raumerfüllung d. Materie (bei Abstraction einer molekularen Constitution) wird d. Wirkung d. äußeren Kräfte dadurch von Körperelement zu Körperelement übertragen, indem diese unendlich kl. Elemente, in die man sich den Körper auf beliebige Weise zerlegt denken kann, an ihren Berührungsflächen mit gewissen Kräften gegenseitig aufeinander wirken. Diese Kräfte nennt man d. inneren Flächenkräfte. Dieselben sind natürlich nur als secundäre Kräfte zu betrachten, denn mit jenen primären (äußeren) Kräften d. Körpers und mit d. relativen Bewegung d. Körpers auftreten und verschwinden, außerdem aber von d. Art und Gruppierung derselben abhängen, indem sie gewissermaßen als d. mechanische Ausdruck des durch diese materielle Beschaffenheit bedingten Widerstandes zu betrachten sind, dessen Überwindung d. Änderung d. Volumens und d. Gestalt d. Massenelemente, sowie d. relativ gleitende Bewegung benachbarter Elemente gegeneinander im Allgemeinen erfordert. Durch d. bei verschiedenen Körpern verschiedenen Beziehungen, welche zwischen den inneren Flächenkräften und denjenigen Größen stattfinden, wodurch d. Änderungen d. Volumens und d. Gestalt d. Massenelemente sowie d. relativ gleitenden Bewegungen benachbarter Elemente bestimmt sind, wird d. Körperbeschaffenheit, soweit sie hierbei in Betracht kommt, gewissermaßen erst definiert, da sie übrigens bei d. natürlichen Abstraction von irgendeiner bestimmten Voraussetzung in Betreff d. Wesens und d. Constitution d. Materie an und für sich undefinierbar wäre.

Hinsichtlich dieser inneren Flächenkräfte sind 2 Arten zu unterscheiden: Es sind nämlich diejenigen, welche d. Widerstand gegen eine Volumen und Gestaltänderung entsprechen, verschieden von denen, welche d. Widerstande gegen eine relativ gleitende Bewegung benachbarter Elemente entsprechen. Nur die ersteren, d. sog. Spannungen, charakterisieren d. inneren Zustand eines Körpers direct, während die letzteren, welche in d. Folge mit inneren Reibungen bezeichnet werden sollen, den inneren Zustand nur mittelbar bedingen, indem d. Spannungen von den inneren Reibungen abhängig sind.

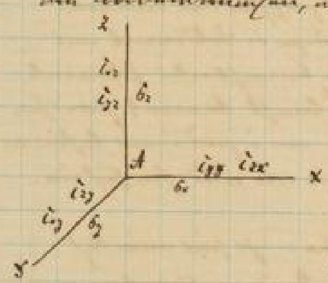
Was d. Spannungen betrifft, so sind diese bereits Gegenstand d. wesentlichsten Untersuchungen d. Elastizitätslehre gewesen, wo gefunden wurde, daß zwischen d. Spannungen in irgend einem Punkte d. Körpers für verschiedene durch diesen Punkt gehende Ebenen gewisse Beziehungen stattfinden. Gleichartige Beziehungen finden nun auch zwischen d. inneren Reibungen in irgend einem Körperpunkte für verschiedene d. diesen Punkt gehende Ebenen statt, indem die zwischen d. betreffenden Spannungen stattfindenden Beziehungen sich ganz allgemein auf innere Flächenkräfte überhaupt ausdehnen lassen. Diese Verallgemeinerungen d. betreffenden Beziehungen sind im Wesentlichen folgende:

In d. Folge sei ein beliebiger Körper vorausgesetzt und nicht wie bei d. Elastizitätslehre speciell ein fester Körper.

Es sei A ein Punkt in einer beliebigen Körperfläche F, dF sei ein unendlich kl. Flächenelement dieser Fläche F, welches d. Punkt A umschließt. AN sei eine in bestimmtem Sinne genommene Normale d. Ebene F. Unter der inneren, mit p_N zu bezeichnenden

Welche Spannungskraft im Punkte A d. Ebene J, soll nun d. Quotient verstanden werden, welcher erhalten wird durch Teilen mit dJ in diejenige innere Kraft, mit welcher die im Sinne AB an J angrenzenden Körperelemente auf d. Flächenelement dJ wirken. (Damit in dieser Beziehung keine Verwechslung geschehen kann, wird stets von vornherein gesetzt, daß d. Normale AB eine bestimmte Richtung habe)
Offenbar stimmt diese Bezeichnung ganz mit derjenigen für d. Spannung in einem Punkte einer Ebene d. Elastizitätstheorie überein). Diese spezifische d. h. auf d. Flächeneinheit bezogene Spannungskraft ϱ, welche mit d. Richtung AB im Allgemeinen einen Winkel ω zwischen 0 und 180° od. zwischen 0 und π bilden kann, kann in 2 Komponenten zerlegt werden, eine nach d. Normalen und d. andere nach d. Tangentialebene an J gerichtet. Die Normalkomponente ist dann $= \varrho \cos\omega$ und sei bezeichnet mit σ und d. Tangentialkomponente $= \varrho \sin\omega = \tau$. (entsprechend d. Normal- und Tangentialspannung in d. Elastizitätslehre) Die Normalkomponente σ ist positiv od. negativ, je nachdem d. Winkel ω zwischen 0 u. 90° od. 90 – 180° liegt, je nachdem sie also nach AB od. nach BA gerichtet ist, entsprechend einem Zug od. Druck auf dJ.
Die Tangentialkomponente τ ist jedoch eine absolute Größe, da $\sin\omega$ immer positiv ist, weil ω zwischen 0 – 180° liegt. Dieselbe kann aber in d. Tangentialebene wieder in Komponenten nach zwei gegebenen Richtungen zerlegt werden, die dann + od. ÷ sind, je nachdem diese Richtungen mit d. Richtung von τ spitze od. stumpfe Winkel bilden.

Es seien nun AX, AY und AZ drei zu einander senkrechte Richtungen parallel den Koordinatenachsen, auf welche d. ganze Körper bezogen wird; x y u. z seien d. Koordinaten d. Punktes A bezüglich d. Koordinatensystems.



Nun kann man sich einen Spannungskraft im Punkte A d. Ebene YAZ zunächst in 2 Komponenten zerlegt denken, in eine Normalkomponente σ_x nach AX und eine Tangentialkomponente nach d. Ebene YAZ, letztere kann man aber nochmals in 2 Seitenkomponenten τ_{xy} und τ_{xz} nach d. Richtungen d. Y und Z Achse zerlegt denken. Ebenso kann man die inneren Spannungskräfte im Punkte A d. Ebenen ZAX und XAY in d. entsprechenden Komponenten zerlegt denken. Es sind dann d. Komponenten d. inneren Spannungskräfte

		nach d. Richtungen AX	AY	AZ
1) für Punkte A d. Ebene YAZ	—	σ_x	τ_{xy}	τ_{xz}
2) für Punkte A d. Ebene ZAX	—	τ_{yx}	σ_y	τ_{yz}
3) für Punkte A d. Ebene XAY	—	τ_{zx}	τ_{zy}	σ_z

welche im Sinne derjenigen Kräfte verstanden werden müssen, welche d. auf den Seiten d. positiven Achsenrichtungen AX AY AZ gelegenen Körperteile auf d. genannten Ebenen pro Flächeneinheit im Punkte A ausüben.
Denkt man sich nun den Punkt A als den Eckpunkt eines unendlich kl. rechtwinkligen parallelepipedischen Körperelements, dessen von A ausgehenden Kanten mit d. 3 Achsen X Y u. Z zusammenfallen, so daß also d. Koordinaten d. gegenüberliegenden Eckpunkts A_1 d. Körperelements $= x + dx$, $y + dy$ und $z + dz$ sind, wenn dx dy und dz d. Kantenlängen d. Parallelepipeds sind, so erhält man offenbar d. Spannungskräfte, welche auf d. drei an d. Eckpunkt A zusammenliegenden Seitenebenen dieses Körperelements von d. äußeren, also im negativen Sinne d. Achsen AX AY u. AZ angrenzenden Körpermasse ausgeübt werden, indem man d. obigen 3 Gruppen von spezifischen Kräften unter 1) 2) u. 3) resp. mit $\div dy\,dz$, $\div dz\,dx$ und $\div dx\,dy$ multipliziert. Ebenso erhält man d. Spannungskräfte, welche auf d. 3 an d. Eckpunkt A_1 zusammenliegenden Seitenebenen von d. äußeren, jetzt aber im positiven Sinne d. Achsenrichtungen,

angrenzenden Körpermasse mitgeteilt werden, indem man dieselben Grössen ihre Kräfte mit $dy\,dz$, $dz\,dx$ und $dx\,dy$ multiplicirt, nachdem sie zuvor um ihre partiellen Differentiale resp. nach x, y und z genommen, vergrössert würden. In dieser Weise erhält man im Ganzen 18 Kräfte, welche auf d. Oberfläche d. Körperelements wirken, und dasselbe entweder in Bewegung od. in Ruhe halten. Soll d. Körperelement in relativer Ruhe sein, so müssen d. erhaltenen 18 Oberflächenkräfte d. Elements im Gleichgewicht sein mit den auf seine Masse wirkenden äusseren Kräften und mit d. Reactionskräften dieser Masse gegen ihre Beschleunigung.

Was diese auf d. Masse d. Körperelements wirkenden äusseren Massenkraft betrifft, so sei μ d. spec. Masse d. Körpers im Punkte A = Masse d. Volumeneinheit und $X\ Y\ Z$ d. nach d. Axen $AX\ AY - AZ$ gerichteten Componenten d. auf d. Masseneinheit bezogenen, im Punkte A wirkenden Massenkraft, so ist also:

$\mu X\,dx\,dy\,dz$, $\mu Y\,dx\,dy\,dz$ und $\mu Z\,dx\,dy\,dz$ d. 3 Componenten d. äusseren Massenkraft sind, welche auf d. Körperelement $dx\,dy\,dz$ ausgeübt wird.

Schliesslich d. Reactionskräfte d. Masse gegen d. Beschleunigung d. Körperelements seien φ_x φ_y und φ_z d. Componenten d. Translationsbeschleunigung d. Körperelements im Sinne d. 3 Axen; dann sind offenbar d. Componenten d. ~~[illegible]~~ Reactionskraft gegen diese Translationsbeschleunigungen:

$-\mu\varphi_x\,dx\,dy\,dz$, $-\mu\varphi_y\,dx\,dy\,dz$ und $-\mu\varphi_z\,dx\,dy\,dz$.

Im Allgemeinen besteht d. Bewegung d. unendlich kl. Körperelements ausser in einer Translationsbeschleunigung auch in einer Rotationsbewegung. Diese kommt aber als eine unendlich kl. Grösse höherer Ordnung nicht in Betracht; denn, da d. Trägheitswiderstand gegen d. Rotation um eine durch A gehende Momentenaxe = dem Product aus Winkelbeschleunigung und Trägheitsmoment d. Elements bezüglich d. Momentenaxe ist, so ist diese unendlich kl. von d. 5ten Ordnung, woraus hervorgeht, dass man d. Rotationsbeschleunigungswiderstände gar nicht zu berücksichtigen braucht.

Wenn nun alle diese auf d. Körperelement wirkenden Kräfte im Gleichgewicht sein sollen, so müssen bekanntlich 6 Bedingungsgleichungen erfüllt werden.

Drückt man zunächst aus, dass d. algebraischen Summen aller Kraftcomponenten im Sinne d. 3 Axen einzeln = 0 sein müssen, so bekommt man analog d. bekannten Gleichungen in d. Elasticitätslehre, folgende Gleichungen:

$$\left.\begin{aligned}
\frac{\partial\sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial\tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial\tau_{zx}}{\partial z} + \mu(X - \varphi_x) &= 0\\
\frac{\partial\tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial\sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial\tau_{zy}}{\partial z} + \mu(Y - \varphi_y) &= 0\\
\frac{\partial\tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial\tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial\sigma_z}{\partial z} + \mu(Z - \varphi_z) &= 0
\end{aligned}\right\} \quad \text{- - - - - - -} \quad 1.$$

und aus d. ~~[illegible]~~ Aufstellung d. Momentengleichungen für d. 3 Axen d. Gleichungen:

$\tau_{yz} = \tau_{zy}$, $\tau_{zx} = \tau_{xz}$, $\tau_{xy} = \tau_{yx}$.

Diese Gleichungen unterscheiden sich von den bekannten d. Elasticitätslehre nur dadurch, dass d. Reactionen d. Beschleunigungen noch hinzugekommen sind zu den Kräften, und dass demnach unter $X\ Y$ u. Z d. Componenten d. äusseren Massenkräften pr. Volumeneinheit verstanden werden, während sie hier d. Componenten derselben pr. Masseneinheit bedeuten.

In Folge d. letzten Gleichungen, nach welchen d. Tangentialcomponenten τ einander paarweise entsprechen und einander entsprechend gleich sind, kann man auch eine kürzere Bezeichnung einführen, indem man setzt: $\tau_{xy} = \tau_{yx} = \tau_z$; $\tau_{xz} = \tau_{zx} = \tau_y$ und $\tau_{yz} = \tau_{zy} = \tau_x$. So lassen sich dann die ersten 3 Bedingungsgleichungen auch folgendermassen schreiben:

$$2. \ldots \left\{ \begin{aligned} &\frac{d\sigma_x}{dx} + \frac{d\tau_y}{dz} + \frac{d\tau_z}{dy} + \mu(X - \varphi_x) = 0 \\ &\frac{d\sigma_y}{dy} + \frac{d\tau_z}{dx} + \frac{d\tau_x}{dz} + \mu(Y - \varphi_y) = 0 \\ &\frac{d\sigma_z}{dz} + \frac{d\tau_x}{dy} + \frac{d\tau_y}{dx} + \mu(Z - \varphi_z) = 0 \end{aligned} \right.$$

Ebenso wie in der Elastizitätslehre durch die betreffenden 6 Spannungscomponenten der Spannungszustand in einem Punkte vollkommen bestimmt wird, indem diese Componenten die Spannung in dem betreffenden Punkte nach einer beliebigen Richtung bestimmen, ebenso bestimmen auch die vorliegenden 6 Componenten $\sigma - \tau$ der inneren Reibungskräfte in einem Punkte vollkommen die innere Reibungswirkung, indem sie auch Größe und Richtung der inneren Reibungskraft in dem nämlichen Punkte einer beliebig durchgelegten Ebene bestimmen. Denkt man sich nämlich durch den Punkt A eine Richtung AB gezogen, welche mit den Coordinatenaxen die Winkel $\alpha\ \beta\ \gamma$ bildet, und in A eine Normalebene zu dieser Richtung AB, so ist die innere Reibungskraft ϱ im Punkte A dieser Ebene, wenn a, b, c die Winkel sind, welche die im Allgemeinen nicht normal zur Ebene stehende Richtung von ϱ mit den Axen bildet, genau nach den bekannten Formeln der Elastizitätslehre:

$$3 \ldots \left\{ \begin{aligned} \varrho \cos a &= \sigma_x \cos\alpha + \tau_y \cos\gamma + \tau_z \cos\beta \\ \varrho \cos b &= \sigma_y \cos\beta + \tau_z \cos\alpha + \tau_x \cos\gamma \\ \varrho \cos c &= \sigma_z \cos\gamma + \tau_x \cos\beta + \tau_y \cos\alpha \end{aligned} \right.$$

welche Formeln erhalten werden, wenn man die Gleichgewichtsbedingungen der Kräfte an einem unendlich kl. tetraedrischen Körperelement aufstellt, welches von den körperlichen Axen, deren Kanten Ax, Ay und Az sind, von einer zu AB senkrechten unendlich wenig von A entfernten Ebene abgeschnitten wird. Mit Rücksicht auf die eben gefundenen Gleichungen und die bekannten Relation: $\cos^2 a + \cos^2 b + \cos^2 c = 1$

ist dann ϱ sowohl der Größe und Richtung nach bestimmt.

Da diese innere Reibungskraft, wie schon erwähnt, im Allgemeinen nicht normal zur Ebene gerichtet ist, so kann man sie in 2 Componenten zerlegen, eine normal zur Ebene in der Richtung von AB und eine in die Ebene selbst fallend. Die Normalcomponente, bezeichnet mit σ, ist dann $= \varrho$ mal cos des Winkels, welchen die Richtung von AB $(\alpha\ \beta\ \gamma)$ mit der Richtung von ϱ $(a\ b\ c)$ bildet, welcher nach einem bekannten Satze der analytischen Geometrie ist dieser cos als bestimmt durch:

$$\sigma = \varrho(\cos a \cos\alpha + \cos b \cos\beta + \cos c \cos\gamma)$$

Setzt man hierin für $\varrho \cos a$, $\varrho \cos b$ und $\varrho \cos c$ die sub. 3 gefundenen Werthe ein, so bekommt man:

$$4 \ldots \quad \sigma = \sigma_x \cos^2\alpha + \sigma_y \cos^2\beta + \sigma_z \cos^2\gamma + 2\tau_x \cos\beta\cos\gamma + 2\tau_y \cos\gamma\cos\alpha + 2\tau_z \cos\alpha\cos\beta$$

(eine genau analoge Beziehung, welche zwischen der Normalspannung und den Spannungscomponenten nach 3 zu einander beliebig senkrechten Richtungen in der Elastizitätslehre stattfindet).

In derselben Weise wie in der Elastizitätslehre lassen sich hieraus 2 wichtige Folgerungen ziehen:

1) Die Summe dieser Normalkräfte σ für je drei in einem Punkte A sich rechtwinklig schneidenden Ebenen ist gleich groß.

2) Durch jeden Punkt eines Körpers lassen sich immer 3 zu einander senkrechte Ebenen legen, für welche die Tangentialcomponenten der inneren Reibungskräfte $= 0$ sind, d. h. [illegible] die inneren Reibungskräfte selbst also normal sind.

Am wichtigsten für die späteren Anwendungen sind jedoch immer die sub. 2 genannten 3 Beziehungen zwischen den 6 Componenten $\sigma - \tau$. Diese 3 Gleichungen zwischen bedingen sich die äußeren Zustand und inneren Zustand gegenseitig, indem in der Formeln sowohl Werthe mit den äußeren als auch inneren Kräften vorkommen. Im Allgemeinen müssen diese beide in Untersuchung gezogen werden.

Statt sind jedoch die beiden Fälle eines festen und flüssigen Körpers (letztere im weiteren Sinne also flüssig und luftförmig) zweckmäßig zu unterscheiden, nicht nur weil im letzteren Falle d. Größen σ u. τ außer den Spannungen im engeren Sinne zugleich d. Componenten d. inneren Reibungen in sich schließen, sondern auch weil den Differentialgleichungen d. Bewegung bei einer Flüssigkeit überhaupt eine andere Auffassung zu Grunde liegt als bei einem festen Körper. Während nämlich d. Massenelemente einer Flüssigkeit einer ganz beliebigen relativen Bewegung fähig sind, wobei sie zugleich eine und eine unbeschränkte Größenänderung und Gestaltänderung erfahren können, kann man die Änderungen ihres äußeren und inneren Zustandes nur mittelbar dadurch verfolgen, daß dieser Zustand für dasselbe Volumenelement zu verschiedenen Zeiten und für verschiedene Volumenelemente zu derselben Zeit bestimmt werden. Während also d. Körperelement, welches d. obigen Betrachtungen zu Grunde liegt, bei d. Anwendung auf einen festen Körper als ein ~~Massen~~element im strengen Sinne d. Wortes zu betrachten ist, können es bei d. Anwendung auf einen flüssigen Körper nur während eines unendlich kl. Zeitelements als der Körper einer und derselben Masse zu betrachten ist und sich diese Betrachtung verständlicher herausstellen, wenn sie auf d. Untersuchungen bei Flüssigkeiten besonders angewendet werden.

Die erhaltenen Differentialgleichungen enthalten nun 10 unbekannte Functionen,
$\sigma_x\ \sigma_y\ \sigma_z\ \tau_x\ \tau_y\ \tau_z\ \varphi_x\ \varphi_y\ \varphi_z\ \rho$ der unabhängigen Veränderlichen $x\ y\ z$
d.h. d. Coordinaten d. betreffenden Punktes. Um diese zur Bestimmung d. Zustandsänderungen (äußeren und inneren) eines Körpers unter gegebenen Umständen geeignet zu machen, müssen dieselben noch derartig ergänzt und erweitert werden, daß man ebenso viele Bestimmungsgleichungen zur Verfügung hat, als dann unbekannte Größen vorkommen, welche als Functionen von $x\ y\ z$ und d. Zeit t zu bestimmen sind. Diese können nur aus d. allgemeinen Beziehungen, welche zwischen d. Spannungen und d. Deformationen d. Massenelemente bei festen Körpern stattfinden, sowie bei flüssigen Körpern aus d. Beziehungen zwischen d. inneren Reibungen und d. relativen Bewegungen benachbarter Elemente d. Körpers stattfinden.

Zunächst sollen nur feste Körper vorausgesetzt werden.

Die inneren Spannkräfte sind dann lediglich Spannungen, und enthalten keine inneren Reibungen, weil d. Elemente d. festen Körpers keiner relativ gleitenden Bewegung gegeneinander fähig sind, der Definition eines festen Körpers gemäß. Die Größen σ sind Normalspannungen und d. Größen τ Tangentialspannungen. Beziehen d. rechtwinklige Coordinatensystem in bestimmter Weise am Körper fest, seien $x\ y\ z$ d. sogenannten ursprünglichen Coordinaten eines gewissen materiellen Punktes A d. Körpers d.h. diejenigen Coordinaten von A, welche d. Fall entsprechen, daß ~~d. [illegible]~~ in Betracht gezogenen äußeren Kräfte $= 0$ sind und d. Körper sich in relativer Ruhe befindet und somit auch alle Spannungen $= 0$ sind. Ein solcher definierter Fall soll für d. Zustand eines festen Körpers für d. Beziehung ursprünglicher Zustand angenommen, und in diesem ursprünglichen Zustand seien $x\ y\ z$ d. Coordinaten d. Punktes A, welche diesen Punkt individuell bestimmt. Ebenso seien $x+dx\ \ y+dy\ \ z+dz$ d. ursprünglichen Coordinaten eines 2t. materiellen Punktes A_1, welcher unendlich nahe an A liegt. Diese beiden materiellen Punkte A und A_1 seien nun als d. gegenüberliegenden Eckpunkte eines unendlich kl. parallelepipedischen Körperelements betrachtet, dessen Kantenlängen dann im ursprünglichen Zustand $= dx\ dy$ und dz sind. $X\ Y\ Z$ sollen bei d. jetzigen Betrachtung eines festen Körpers d. durch d. Axen zerlegten Componenten d. relativen beschleunigenden Kraft für den Punkt A. Von d. eigenen Bewegung d. [illegible] Körpers soll abgesehen werden, indem d. Zustand d. Körpers nur aufgefaßt werden soll als innerer Zustand und als relativer Bewegungszustand d. Körpers in Beziehung auf d. Axensystem.

Sind nun $x+\xi\ \ y+\eta$ und $z+\zeta$ d. Coordinaten d. Punktes A bei d. Zustandsänderung, so ist dieser offenbar in jedem Augenblick bestimmt, wenn diese Coordinatenänderungen $\xi\ \eta$ und ζ als Functionen von $x\ y\ z$ und t entwickelt werden. Im Folgenden soll nun d. Weg dargestellt, wie man zu verfahren hat:

Das kl. parallelepipedische Massenelement erfährt bei d. Formänderung nur eine kl. Gestaltänderung. Bei d. vorausgesetzten kleinen Kräften ist diese Deformation aber so gering, daß man sie bei Vernachlässigung unendlich kl. Größen höherer Ordnung betrachten kann als bestehend aus einer kl. Längenänderung d. Kanten und einer Änderung d. von ihnen gebildeten ursprünglich rechten Winkel. Sind nun d. ursprünglichen Kantenlängen $= dx\ dy\ dz$ gewesen, so können d. veränderten Kantenlängen bezeichnet werden:

$$dx(1+\varepsilon_x) \qquad dy(1+\varepsilon_y) \qquad dz(1+\varepsilon_z),$$

wenn offenbar $\varepsilon_x\ \varepsilon_y$ und ε_z nichts anderes bedeuten als d. Ausdehnungen, welche im Punkte A nach d. Coordinatenrichtungen stattfinden. Ferner seien d. ursprünglich rechtwinkligen, veränderten Kantenwinkel

$$= \frac{\pi}{2} - \gamma_x, \quad \frac{\pi}{2} - \gamma_y \quad \text{und} \quad \frac{\pi}{2} - \gamma_z,$$

wenn positive Werthe von γ eine Verkleinerung d. rechten Winkels bedeuten.

Bekanntlich werden d. Größen γ auch noch anders in d. Elasticitätslehre aufgefaßt, nämlich als d. Schiebungen d. h. als diejenige Strecke, um welche 2 parallele Ebenen im Abstand 1 (= Längeneinheit) in den correspondirenden Punkten A u. A_1 gegeneinander verschoben werden.

Man kann dann γ_x als d. Verschiebung einer zur Y Axe senkrechten Ebene nach d. Richtung d. Z Axe

oder " " " " " " Z Axe " " " " " Y Axe

γ_y " " " " " " Z " " " " " X

oder " " " " " " X " " " " " Z

etc.

Diese 3 Größen γ heißen daher auch d. Verschiebungscomponenten im Punkte A nach den betreffenden Richtungen genommen.

Diese 6 Größen ε und γ sind nun durch d. schon vorhin erwähnten Coordinatenänderungen $\xi\ \eta\ \zeta$ d. materiellen Punktes A bestimmt, es ist bekanntlich aus d. Elasticitätslehre her:

$$\varepsilon_x = \frac{\partial \xi}{\partial x} \qquad \varepsilon_y = \frac{\partial \eta}{\partial y} \qquad \text{und} \qquad \varepsilon_z = \frac{\partial \zeta}{\partial z}$$

und ferner:

$$\gamma_x = \frac{\partial \eta}{\partial z} + \frac{\partial \zeta}{\partial y}$$

$$\gamma_y = \frac{\partial \zeta}{\partial x} + \frac{\partial \xi}{\partial z}$$

$$\gamma_z = \frac{\partial \xi}{\partial y} + \frac{\partial \eta}{\partial x}$$

Durch diese 6 Größen ε und γ werden die Ausdehnungen $\varepsilon_x\ \varepsilon_y\ \varepsilon_z$ im Punkte A nach den Richtungen d. Axen und den Verschiebungen $\gamma_x\ \gamma_y\ \gamma_z$ d. beziehungsweise diesen Richtungen parallelen Seitenebenen d. parallelepipedischen Elements nach den anderen Axenrichtungen

ist d. Ausdehnung ε im Punkte A nach einer beliebigen Richtung bestimmt, nämlich durch folgende Gleichung, wenn $\alpha\ \beta\ \gamma$ d. Winkel sind, welche d. beliebige Richtung mit den Axen bildet:

$$\varepsilon = \varepsilon_x \cos^2\alpha + \varepsilon_y \cos^2\beta + \varepsilon_z \cos^2\gamma + \gamma_x \cos\beta\cos\gamma + \gamma_y \cos\gamma\cos\alpha + \gamma_z \cos\alpha\cos\beta.$$

(Ein Ausdruck ganz analog gebildet demjenigen für d. Spannung σ in einem Punkte nach einer beliebigen Richtung)

Dieser Ausdruck für ε gestattet auch ganz analoge Folgerungen, ~~wegen~~ wie derjenige für σ: Es ~~[illegible]~~ lassen sich nämlich durch jeden einen Punkt eines Körpers d. elastischen Dimensionen diese Ausdehnungen ε für je 3 zu einander senkrechte Axen vereinen. Die Summe d. Ausdehnungen ε nach 3 zu einander senkrechten Richtungen bedeutet aber nichts anderes als d. sog. Volumenausdehnungscoefficienten e im betreffenden Punkte. Es ist also:

$$e = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z = \text{Vergrößerung pro Volumeneinheit eines diesen}$$

materiellen Punkt enthaltenden Massenelements beim Übergange vom ursprünglichen Zustand in d. veränderten Zustand.

~~[illegible]~~ Wie weiter hierin d. Elasticitätslehre mit dem Ausdruck für ε gefolgert werden, läßt sich durch jeden materiellen Punkt A drei zu einander senkrechte Ebenen legen, in welchen d. Verschiebungen $\gamma = 0$ sind, so daß also ein unendlich kl. parallelepipedisches Körperelement, dessen von A ausgehenden Seitenkanten im ursprünglichen Zustand in diese 3 ausgezeichneten Ebenen

[illegible]

[illegible]

$$\sigma_x = 2g\left(\varepsilon_x + \frac{e}{n-2}\right) = 2g\left(\frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{e}{n-2}\right)$$

$$\sigma_y = 2g\left(\varepsilon_y + \frac{e}{n-2}\right) = 2g\left(\frac{\partial \eta}{\partial y} + \frac{e}{n-2}\right)$$

$$\sigma_z = 2g\left(\varepsilon_z + \frac{e}{n-2}\right) = 2g\left(\frac{\partial \zeta}{\partial z} + \frac{e}{n-2}\right)$$

und ferner:

$$\tau_x = g\gamma_x = g\left(\frac{\partial \eta}{\partial z} + \frac{\partial \zeta}{\partial y}\right)$$

$$\tau_y = g\gamma_y = g\left(\frac{\partial \zeta}{\partial x} + \frac{\partial \xi}{\partial z}\right)$$

$$\tau_z = g\gamma_z = g\left(\frac{\partial \xi}{\partial y} + \frac{\partial \eta}{\partial x}\right)$$

[illegible]

[illegible]

$$E = 2\,\frac{n+1}{n}\,g\,;$$ [illegible]

$$E\varepsilon_x = \sigma_x - \frac{\sigma_y + \sigma_z}{n}$$

$$E\varepsilon_y = \sigma_y - \frac{\sigma_z + \sigma_x}{n}$$

$$E\varepsilon_z = \sigma_z - \frac{\sigma_x + \sigma_y}{n}$$

[illegible] σ_y u. $\sigma_z = 0$ [illegible]

$$E = \frac{\sigma_x}{\varepsilon_x} \quad \text{und} \quad n = -\frac{\varepsilon_x}{\varepsilon_y} = -\frac{\varepsilon_x}{\varepsilon_z}$$

[illegible]

[illegible]

d. Materie vermuthen lassen, ist es sich nun [illegible] d. Grenze [illegible], eine [illegible] diejenige Eigenschaft d. Körpers ist.

Nimmt man d. Ausdrücke von σ_x σ_y σ_z τ_x τ_y τ_z in d. Gleichungen mit 2 [illegible], so erhält [illegible]: es ist:

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x}+\frac{\partial \tau_y}{\partial z}+\frac{\partial \tau_z}{\partial y} = 2g\left(\frac{\partial^2\xi}{\partial x^2}+\frac{1}{n-2}\frac{\partial e}{\partial x}\right)+g\left(\frac{\partial^2\zeta}{\partial x\,\partial z}+\frac{\partial^2\xi}{\partial z^2}\right)+g\left(\frac{\partial^2\xi}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\eta}{\partial x\,\partial y}\right)$$

$$= g\left\{\frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{\partial\xi}{\partial x}+\frac{\partial\eta}{\partial y}+\frac{\partial\zeta}{\partial z}\right]+\frac{2}{n-2}\frac{\partial e}{\partial x}+\frac{\partial^2\xi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\xi}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\xi}{\partial z^2}\right\}$$

Hierin ist nun aber offenbar: $\frac{\partial\xi}{\partial x}+\frac{\partial\eta}{\partial y}+\frac{\partial\zeta}{\partial z}=\varepsilon_x+\varepsilon_y+\varepsilon_z=e$
= Volumenausdehnungscoefficienten

Man erhält also:

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x}+\frac{\partial \tau_y}{\partial z}+\frac{\partial \tau_z}{\partial y} = g\left[\frac{n}{n-2}\frac{\partial e}{\partial x}+\frac{\partial^2\xi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\eta}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\zeta}{\partial z^2}\right]$$

Was nun ferner d. Beschleunigungscomponente φ_x betrifft, so sind, d. im Anfang angenommen wurde, daß d. Körper nur in relativer Bewegung gegen [illegible], in ihm fixirtes Axensystem sei, offenbar $\frac{\partial\xi}{\partial t}$, $\frac{\partial\eta}{\partial t}$ und $\frac{\partial\zeta}{\partial t}$ d. Componenten d. relativen Geschwindigkeit d. Punktes A in Bezug auf d. genannte Axensystem.
und also $\frac{\partial^2\xi}{\partial t^2}$ $\frac{\partial^2\eta}{\partial t^2}$ – $\frac{\partial^2\zeta}{\partial t^2}$ d. Beschleunigungscomponenten = φ_x resp. φ_y resp. φ_z

Durch d. Substitution erhält man also d. erst genannten Gleichungen in folgender Form, wobei man offenbar d. beiden letzteren durch d. entsprechenden Buchstabenvertauschungen aus d. ersten erhalten kann:

$$g\left(\frac{n}{n-2}\frac{\partial e}{\partial x}+\frac{\partial^2\xi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\xi}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\xi}{\partial z^2}\right)+\mu\left(X-\frac{\partial^2\xi}{\partial t^2}\right)=0$$

$$g\left[\frac{n}{n-2}\frac{\partial e}{\partial y}+\frac{\partial^2\eta}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\eta}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\eta}{\partial z^2}\right]+\mu\left[Y-\frac{\partial^2\eta}{\partial t^2}\right]=0$$

$$g\left[\frac{n}{n-2}\frac{\partial e}{\partial z}+\frac{\partial^2\zeta}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\zeta}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\zeta}{\partial z^2}\right]+\mu\left[Z-\frac{\partial^2\zeta}{\partial t^2}\right]=0$$

Sind nun μ = ursprüngliche spez. Masse im Punkte $A(xyz)$ sowie d. Componenten X Y Z der beschleunigenden Massenkraft als Function von x y z gegeben, wie dies zur Bestimmung d. Aufgabe vorausgesetzt werden muß, so stellen in den obigen 3 Gleichungen, 3 gleichzeitige partielle Differentialgleichungen 2ter Ordnung d. abhängig Veränderlichen ξ η ζ nach x y z den Coordinaten d. betreffenden Punktes. Aus diesen kann man nun mittelst entsprechender Integration mit Rücksicht auf d. gegebenen Oberflächenbedingungen (Oberflächenkräfte, Unterstützung od. Befestigung d. Körpers an gewissen Stellen d. Oberfläche) und den gegebenen Anfangszustand (insofern und [illegible] Zustand für $t=0$) die Größen ξ η und ζ als endliche Functionen d. Coordinaten x y z und d. Zeit t bestimmen. Sind aber diese Functionen gefunden, so kennt man auch in jedem Augenblick den Zustand d. Körpers vollständig. Zunächst kennt man den äußeren Zustand od. Bewegungszustand indem durch d. 3 Geschwindigkeitscomponenten $\frac{\partial\xi}{\partial t}$ $\frac{\partial\eta}{\partial t}$ und $\frac{\partial\zeta}{\partial t}$ d. relative Bewegungszustand gegen d. im Körper fixirte Axensystem bestimmt ist als Function d. Coordinaten x y z und d. Zeit t. Was den inneren Zustand betrifft, so ist dieser bekanntlich bestimmt durch den Spannungszustand im betreffenden Punkte und durch d. ursprüngliche spez. Masse μ. Der Spannungszustand ist aber zu vollkommen bestimmt durch d. 6 Spannungscomponenten σ – τ, indem diese aber nach den entsprechenden Formeln Functionen d. partiellen Ableitungen von ξ η ζ nach x y z sind, ist nun auch d. Spannungszustand als Function von x y z bestimmt.

Was d. spec. Masse im Punkte A (x y z) betrifft, so ändert sich diese natürlich, da $\mu = \frac{1}{v g}$, im umgekehrten Verhältnisse wie das spec. Volumen sich ändert. Da aber d. spec. Volumen sich in dem Verhältnisse $1 : 1+e$ vergrössert hat, so hat d. spec. Masse sich in dem Verhältnisse $1+e : 1$ verkleinert, so ist die spec. Masse im Punkte A bestimmt durch: $\frac{\mu}{1+e} = \mu(1-e)$ bei Vernachlässigung unendl. kl. Grössen. e = Volumenausdehnungscoefficient ist aber eine Function d. partiellen Ableitungen von $\xi\ \eta\ \zeta$ nach $x\ y\ z$ nämlich $e = \frac{\partial\xi}{\partial x} + \frac{\partial\eta}{\partial y} + \frac{\partial\zeta}{\partial z}$ und welche selbst auch eine Function von $x\ y\ z$ ist, so ist auch die veränderte spec. Masse als eine Function von $x\ y\ z$ bestimmt ist.

Es lässt sich indessen leicht übersehen, dass d. entstehenden Integrationen auf grosse Schwierigkeiten stösst, und aus diesem Grunde bei d. späteren Anwendungen meistens Vereinfachungen angenommen werden, und zwar wird in d. Regel allgemein vorausgesetzt, dass d. innere Zustand eines Körpers durch nur 2 Grössen bestimmt sei.

Bei einem festen Körper ist dies dann d. Fall, wenn derselbe derartig durch Kräfte angegriffen wird, dass gar keine Tangentialspannungen sondern nur Normalspannungen entstehen. Soll dies d. Fall sein, so ist natürlich dazu nöthig, dass d. Oberflächenkräfte nur normale Druckkräfte sind, denn wenn auch tangential an die Oberfläche d. Körpers gerichtete Kräfte vorhanden (z. B. Reibungen) so würden auch Tangentialspannungen entstehen. Dass, wenn keine derartigen Verschiebungen nur normal gegen d. Oberfläche gerichteten Druckkräfte, wirklich d. Fall ist, dass d. innere Zustand lediglich durch nur 2 Grössen bestimmt ist, lässt sich folgendermassen leicht beweisen.

Ist A ein Punkt d. Körpers mit den Coordinaten $x\ y\ z$, und ρ d. resultierende Spannung, mit den Richtungswinkeln $a\ b\ c$ gegen d. Axe, in einer durch A gehenden Ebene, deren Normal AB mit den Axen d. Winkel $\alpha\ \beta\ \gamma$ bildet, dann ist nach Seite 10. 3:

$$\begin{aligned}\rho\cos a &= \sigma_x \cos\alpha + \tau_y \cos\gamma + \tau_z \cos\beta \\ &\text{etc.} \qquad \text{etc.} \qquad \text{etc.} \qquad \text{etc.}\end{aligned}$$

Wenn nun aber alle Tangentialspannungen τ für beliebige Ebenen d. Körpers $= 0$ sein sollen, also

$$\tau_x = \tau_y = \tau_z = 0$$

so wird auch $a = \alpha \quad b = \beta$ und $c = \gamma$ für jede Richtung $\alpha\ \beta\ \gamma$, d. h. dann d. resultierende Spannung σ immer normal zur Spannungsebene gerichtet sein muss. Dementsprechend ist dann auch:

$$\rho = \sigma_x = \sigma_y = \sigma_z.$$

Wenn also ein Körper durchaus keine Tangentialspannungen erkennen, so ist d. Normalspannung in irgend einem Punkte für alle Ebenen gleich gross. In diesem Falle sei diese Normalspannung bezogen mit Spannung im betreffenden Punkte bezeichnet. Da ja diese für jeden Punkt ungeachtet Richtungen constante Spannung σ ist dann auch d. Spannungszustand im d. betreffenden Punkte vollkommen bestimmt. Mit Rücksicht auf d. spec. Masse μ und diese Spannung σ ist demnach bei gegebener Art und Aggregatform d. Körpers sein innerer Zustand vollkommen bestimmt in dem betreffenden Punkte, wozu also nur 2 Grössen σ und μ nöthig sind. Die Fundamentalgleichungen Seite 10. 2 nehmen unter diesen Umständen dann folgende einfache Form an:

$$\frac{\partial\sigma}{\partial x} + \mu(X - \varphi_x) = 0\ ; \quad \frac{\partial\sigma}{\partial y} + \mu(Y - \varphi_y) = 0 \text{ und } \frac{\partial\sigma}{\partial z} + \mu(Z - \varphi_z) = 0.$$

Vorausgesetzt wird dabei insbesondere d. Fall, dass d. Körper sich in relativer Ruhe gegen d. Coordinatensystem befindet, also dann: $\varphi_x = \varphi_y = \varphi_z = 0$ und welche d. Grössen $\mu\ \xi\ \eta\ \zeta$ und Functionen von $x\ y\ z$, so folgt dann durch Addition:

$$\frac{\partial\sigma}{\partial x} + \frac{\partial\sigma}{\partial y} + \frac{\partial\sigma}{\partial z} = -\mu(X\,dx + Y\,dy + Z\,dz) = d\sigma.$$

Da nun d. rechte Seite dieser Gleichung ($d\sigma$) das vollständige Differential einer Function von $x\ y\ z$ ist, so gilt dasselbe auch von d. linken Seite. Es muss also eine gewisse Function $\mathfrak{F}$ von $x\ y\ z$ geben, welche so beschaffen sein muss, dass:

$$\mu X = \frac{\partial \mathfrak{F}(x y z)}{\partial x}\ ; \quad \mu Y = \frac{\partial \mathfrak{F}(x y z)}{\partial y} \text{ und } \mu Z = \frac{\partial \mathfrak{F}(x y z)}{\partial z} \text{ ist.}$$

Aus der oben gefundenen Gleichung für $d\sigma$ folgt demnach:

$$d\sigma = -\,d\mathfrak{F}(x\,y\,z)$$

also $\sigma = -\mathfrak{F}(x\,y\,z)$ + Constante.

Diese Constante wird dadurch bestimmt, dass man den Werth von σ für einen gewissen Punkt d. Körpers kennt. Sind z. B. $x_0\ y_0\ z_0$ d. Coordinaten eines Punktes an d. Oberfläche des Körpers und p_0 d. äussere Oberflächendruck in dem betreffenden Punkt, so ist an dieser Stelle $\sigma = -p_0$

und also d. Constante $= \mathfrak{F}(x_0\ y_0\ z_0) - p_0$

Der Körper kann in diesem Fall durch Flächen gleicher Spannung, die man sich [illegible] durch den Körper hindurchgelegt denkt, in unendlich dünne Schichten zerlegt werden, so ist d. Spannung in jeder dieser Flächen gleich gross, dieselbe sich jedoch von Schicht zu Schicht ändert.

Die Gleichung einer solchen Fläche gleicher Spannung ist dann offenbar:

$\mathfrak{F}(x\,y\,z) = C$ worin C als eine Constante bedeutend, welche entsprechend d. verschiedenen Flächen verschiedene Werthe zugetheilt werden kann.

Bemerkenswerth ist dabei noch d. Specialfall, dass nicht nur $\mu(X\,dx + Y\,dy + Z\,dz)$ ein vollständiges Differential d. Coordinaten $x\ y\ z$ ist, sondern dass schon $X\,dx + Y\,dy + Z\,dz$ allein das vollständige Differential einer Function von $x\ y\ z$ ist, dass also:

$$X\,dx + Y\,dy + Z\,dz = d\,f(x,y,z) \text{ ist.}$$

In diesem Falle ist dann:

$$d\sigma = -\mu\,df(x,y,z)$$

und da die linke d. rechte Seite ein vollständiges Differential von $x\ y\ z$ ist, so muss auch rechte Seite [illegible] vollständiges Differential sein d. h. es muss μ eine Function d. Function f sein.

Wenn man also sich den Körper wieder in unendlich dünne Schichten zerlegt denkt durch Flächen deren Gleichungen sind: $f(x\,y\,z) = C$ unter C verschiedene Constanten verstanden, so ist allen Punkten dieser Flächen nicht nur d. Spannung σ sondern auch d. spec. Masse μ constant.

Wenn nun noch spezielle Fall eintritt, dass der Körper äusseren Massenkräften nicht [illegible] und also auch deren Componenten $X\ Y\ Z = 0$ sind, so dass nur d. äussere Oberflächendruck vorhanden ist, so ist auch d. vollständige Differential d. Function $f = 0$; die Function f selbst also hat dann einen constanten Werth für den ganzen Körper. Dementsprechend muss dann auch in allen Punkten d. Körpers gleiche Spannung σ und eine gleiche spec. Massendichte sein, ferner müsste dann auch der äussere Druck p_0 für alle Punkte d. Oberfläche constant sein, es müsste also d. Körper von allen Seiten einen gleich starken Druck auszuhalten haben. Wenn jedoch umgekehrt gegeben ist, dass p_0 in allen Punkten d. Oberfläche gleich gross ist, so ist damit durchaus nicht zu entnehmen, dass in allen Punkten d. Körpers gleiche Spannungen und gleiche spec. Massen vorhanden sind, sondern es würde nur daraus folgen, dass d. Oberfläche d. Körpers eine Fläche gleicher Spannung ist.

Anwendung d. Fundamentalgleichungen auf einen flüssigen Körper im weiteren Sinne d. Wortes.

Zunächst wird es nun darauf ankommen die Seite 10.[?] gefundenen Fundamental-differentialgleichungen zur Untersuchung d. Gleichgewichtszustandes einer Flüssigkeit (im weiteren Sinne) auf eine solche Form zu bringen, wie sie sich für Flüssigkeiten [illegible]. Es wurde damals gefunden:

$$\frac{\partial\sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial\tau_z}{\partial z} + \frac{\partial\tau_y}{\partial y} + \mu(X - \varphi_x) = 0$$

etc.

In den Grössen σ und τ sind jedoch jetzt nicht nur Spannungscomponenten sondern auch Componenten d. inneren Reibungen enthalten.

In Betreff d. Continuitätsbedingungen, womit d. Flüssigkeit begrenzt werden soll, ist zu bemerken, dass man dieselbe nicht in derselben Weise aufstellen kann wie vorher, wenigstens würde dies [illegible] keinen Nutzen bringen da das am Körper sitzende Theilchen mit der Bewegung d. Körpers vielleicht selbst eine sich schnell zu ändernde Bewegung annehmen könnte. Man nimmt deshalb jetzt an, d. Flüssigkeit sei in stationärer Bewegung, d. h., daß d. Strömungen innerhalb derselben stets gleich sind an d. Gefäß, d. Röhre, dem Kanal, überhaupt an d. festen Wände, innerhalb welcher d. Bewegung d. Flüssigkeit vor sich geht. $x\,y\,z$ seien d. augenblicklichen Coordinaten irgend eines Punktes A; diese Coordinaten können in zweifacher Weise aufgefaßt werden, jenachdem man den Punkt A als einen räumlichen Punkt oder [illegible] den materiellen Punkt d. Flüssigkeit betrachtet, welcher sich augenblicklich im Punkte A d. Raumes befindet. Im ersteren Falle sind d. Coordinaten $x\,y\,z$ von einander unabhängige Variable, die sich ändern, wenn man von einem zu einem andern Punkte fortschreitet. Betrachtet man aber d. Punkt als den materiellen Punkt d. Flüssigkeit, welcher sich zur Zeit t im Punkte A d. Raumes befindet, so sind d. Coordinaten $x\,y\,z$ Functionen d. Zeit t.

Es seien ferner für den Punkt A d. Raumes zur Zeit t, die specifische Masse $= \mu$, die Componenten d. beschleunigenden Massenkraft $= X, Y, Z$, d. Componenten d. Beschleunigung $= \varphi_x\ \varphi_y\ \varphi_z$ und d. Componenten d. Geschwindigkeit $= u\ v\ w$, alle Componenten im Sinne d. Coordinatenaxen genommen. Alle diese Größen sind, wenn man sie auf den räumlichen Punkt d. Raumes bezieht, Functionen der bei dieser Auffassung unabhängigen Variabeln $x\,y\,z$ u. t. Betrachtet man jedoch d. Größen als sich beziehend auf den materiellen Punkt d. Flüssigkeit, welcher sich zur Zeit im Punkt $A(xyz)$ d. Raumes befindet, so sind $x\,y\,z$ Functionen von t und mithin mittelbar auch d. anderen Größen Functionen von t. In dem letzteren Sinne sollen nun d. Größen aufgefaßt werden, in welchem also d. Coordinaten $x\,y\,z$ Functionen d. Zeit t und d. anderen fraglichen Größen mittelbare Functionen von t sind.

Die Geschwindigkeitscomponenten sind dann offenbar:

$$u = \frac{dx}{dt} \qquad v = \frac{dy}{dt} \quad \text{und} \quad w = \frac{dz}{dt}$$

Ferner ist beispielsweise d. Beschleunigungscomponente: $\varphi_x = \frac{du}{dt}$, da nun u eine Function von $x\,y\,z$ ist, diese Werthe selbst aber wieder Functionen von t sind, ist also u nur eine mittelbare Function von t, so folgt nach d. bekannten Formel d. Differentiation:

$$\varphi_x = \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{dy}{dt} + \frac{\partial u}{\partial z}\frac{dz}{dt}$$

oder für d. Quotienten $\frac{dx}{dt}$, $\frac{dy}{dt}$ und $\frac{dz}{dt}$ d. Geschwindigkeitscomponenten eingeführt:

$$\varphi_x = \frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} + w\frac{\partial u}{\partial z}$$

Analog erhält man:

$$\varphi_y = \frac{dv}{dt} = \frac{\partial v}{\partial t} + v\frac{\partial v}{\partial x} + v\frac{\partial v}{\partial y} + w\frac{\partial v}{\partial z}$$

$$\varphi_z = \frac{dw}{dt} = \frac{\partial w}{\partial t} + u\frac{\partial w}{\partial x} + v\frac{\partial w}{\partial y} + w\frac{\partial w}{\partial z}$$

Was nun in den hydraulischen Fundamentalgleichungen die Componenten d. inneren Spannkräfte σ und τ betrifft, so schließen diese Größen jetzt im Allgemeinen Componenten d. Spannungen und d. inneren Reibungen in sich. Hinsichtlich d. Spannungen, welche in den inneren Spannkräften vorkommen, [illegible] für d. tropfbare Flüssigkeit daher erzeugt, daß ihre Massenelemente nicht nur einer unterschiedlichen Gestaltänderung fähig sind, sondern daß einer solchen an und für sich [illegible] einer gleichzeitig stattfindenden Volumenänderung und relativ [illegible] Bewegung, sich auch kein Widerstand entgegensetzt. Wenn man dann, wenigstens bei tropfbaren Flüssigkeiten betrifft, die mathematische Untersuchung auf solche **vollkommene Flüssigkeiten** beschränkt, welche (wie luftförmige Flüssigkeiten [illegible]) jeder beliebigen [illegible] widerstandsloser Gestaltänderung d. Massenelemente entsprechen, so sind d. Tangentialspannungen = Null und also d. Größen τ lediglich innere Reibungen, während d. Größen σ außer Normalspannungen auch von d. inneren Reibungen bedingt sind, unter d. Spannungen aber natürlich lediglich Normalspannungen sind. Da diese aber bei Flüssigkeiten der bisher [illegible] Voraussetzung gemäß wenigstens negativ sind, wenigstens nur bei tropfbar flüssigen Körpern kleine positive Werthe haben können, so erscheint es im Interesse zweckmäßiger, um dieselben mit positiven Werthen rechnen zu können, statt dieser Normalspannungen d. entgegengesetzten Pressungen einzuführen.

Es seien ferner p_x p_y p_z d. Pressungen, welche nach d. Flüssigkeit stattfinden in einem Punkte $A(x\,y\,z)$ für Ebenen, welche zu den Richtungen AX AY AZ senkrecht sind. Ist nun durch diesen Punkt A eine beliebige Ebene, deren Normale AB mit den Axen die Winkel α β γ bildet, so sei p d. Pressung im Punkte A auf diese beliebige Ebene.
Die früher eingeführten Bezeichnungen σ_x σ_y und σ_z für die Componenten d. inneren Spannkräfte, sollen jetzt nur für d. Normalcomponenten d. inneren Reibungen im Punkte A für die zu AX AY und AZ senkrechten Ebenen [illegible], so daß dieselben Größen, welche früher mit σ_x σ_y σ_z bezeichnet wurden, jetzt sind:

$$\sigma_x = -p_x + \sigma_x \qquad \sigma_y = -p_y + \sigma_y \quad \text{und} \quad \sigma_z = -p_z + \sigma_z$$

Es haben also jetzt die neuen Bezeichnung σ_x σ_y σ_z eine beschränkteren Bedeutung bekommen, indem sie sich nur auf d. inneren Reibungen und nicht mehr auf d. inneren Spannkräfte überhaupt beziehen. Nach den Formeln 3 Seite 10 sind dann d. 3 Componenten d. inneren Spannkraft, welche im Punkte A d. Ebene $(\alpha\,\beta\,\gamma)$ nach den resp. Coordinaten stattfinden:

im Sinne d. X Axe $= (-p_x + \sigma_x)\cos\alpha + \tau_y \cos\gamma + \tau_z \cos\beta$

im Sinne d. Y Axe $= (-p_y + \sigma_y)\cos\beta + \tau_z \cos\alpha + \tau_x \cos\gamma$

im Sinne d. Z Axe $= (-p_z + \sigma_z)\cos\gamma + \tau_x \cos\beta + \tau_y \cos\alpha$

Während wir früher die ganze Spannkraft im Punkte A d. beliebigen Ebene mit ρ bezeichnet haben, und seine Richtungswinkel gegen d. Axen mit a b c, soll jetzt unter ρ nur d. innere resultierende Reibung verstanden werden, welche im Punkte A d. Ebene $\alpha\,\beta\,\gamma$ stattfindet. Die resultierende innere Spannkraft im Punkte A d. Ebene $\alpha\,\beta\,\gamma$ besteht demnach aus 2 Theilen, nämlich aus d. Pressung und inneren Reibungen. Die Pressung p oder zu Normalspannung [illegible] = negativen Pressung $-p$. Da diese Spannung $-p$ normal zur Ebene $(\alpha\,\beta\,\gamma)$ gerichtet ist entsprechend d. Annahme einer vollkommenen Flüssigkeit, so sind auch ihre Richtungswinkel mit d. Axen $= \alpha\ \beta\ \gamma$, und demnach ihre Componenten im Sinne d. Axen $= -p\cos\alpha \quad -p\cos\beta \quad -p\cos\gamma$.
Fügt man nun zu d. Componenten d. inneren resultierenden Spannkraft im Sinne d. Axen zusammen, d. Componenten der inneren Reibungen $\rho\cos a$ $\rho\cos b$ $\rho\cos c$, und [illegible] Componenten d. inneren Spannkraft im Sinne d. Axen mit Rücksicht auf d. obigen Gleichungen hinzu:

$$-p\cos\alpha + \rho\cos a = (-p_x + \sigma_x)\cos\alpha + \tau_y\cos\gamma + \tau_z\cos\beta$$

$$-p\cos\beta + \rho\cos b = (-p_y + \sigma_y)\cos\beta + \tau_z\cos\alpha + \tau_x\cos\gamma$$

$$-p\cos\gamma + \rho\cos c = (-p_z + \sigma_z)\cos\gamma + \tau_x\cos\beta + \tau_y\cos\alpha$$

Wenn man nun d. Annahme macht, wie sie den theoretischen Untersuchungen über d. Flüssigkeitsreibung fast allgemein zu Grunde gelegt wurde, daß die Pressung und die innere Reibung sich unmittelbar nicht gegenseitig bedingen, aber natürlich innere Reibung noch von den äußeren Reibungen zu unterscheiden ist, indem erstere z. B. bei festen Körpern sich nach d. [illegible] bedingen können, daß also wie es auch durch Versuche bestätigt wurde p und ρ sich und ebenso auch deren Componenten sich nicht gegenseitig bedingen, so müssen die obigen 3 Gleichungen von den Pressungen unabhängig von den Werthen d. inneren Reibungen, und ebenso von letzteren unabhängig von den Werthen d. ersteren erfüllt werden. Sie müssen also auch von d. inneren Reibungen erfüllt werden, wenn man d. ~~[illegible]~~ inneren Reibungscomponenten $= 0$ setzt, wie es d. Fall ist, wenn d. Flüssigkeit sich in relativer Ruhe befindet. Die 3 Gleichungen geben dann mit $\rho = 0$:

$$p = p_x = p_y = p_z$$

demnach sind d. Spannungen in d. betreffenden Punkte gleich groß für alle Ebenen, welche man durch den Punkt hindurch legen kann. Man bezeichnet daher auch p schlechtweg als d. Spannung d. Flüssigkeit in dem betreffenden Punkte. Sie bestimmt natürlich zusammen mit d. spez. Masse μ (u. dem spez. Volumen resp. d. spez. Gewicht) den inneren Zustand in diesem Punkte.

Mit Rücksicht darauf, daß d. 3 Gleichungen auch für d. Spannungen $p = 0$ von den inneren Reibungen erhalten werden müssen, lauten d. Beziehungen:

$$\rho\cos a = \sigma_x\cos\alpha + \tau_y\cos\gamma + \tau_z\cos\beta$$

$$\rho\cos b = \sigma_y\cos\beta + \tau_z\cos\alpha + \tau_x\cos\gamma$$

$$\rho\cos c = \sigma_z\cos\gamma + \tau_x\cos\beta + \tau_y\cos\alpha$$

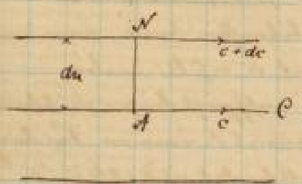
Wegen dieser vollkommenen Übereinstimmung d. Gleichungen für d. inneren Reibungen mit den Seite 10. d aufgestellten Gleichungen für die inneren Spannkräfte überhaupt, wird man auch ganz analoge Folgerungen hinsichtlich d. inneren Reibungen ziehen können wie solche ebenmäßig früher hinsichtlich d. inneren Spannkräfte im Allgemeinen gezogen wurden, und die sich ja direct auf d. entsprechenden inneren Reibungen übertragen. Wenn man also mit σ d. Normalcomponente d. inneren Reibung für eine beliebige Ebene $\alpha\beta\gamma$ bezeichnet, so ist:

$$\sigma = \sigma_x\cos^2\alpha + \sigma_y\cos^2\beta + \sigma_z\cos^2\gamma + 2\tau_x\cos\beta\cos\gamma + 2\tau_y\cos\alpha\cos\gamma + 2\tau_z\cos\alpha\cos\beta$$

und hieraus kann wieder d. bekannten analogen Schluß wieder zu ziehen, daß in jedem Punkte A d. Summe d. Normalcomponenten d. inneren Reibungen für je drei sich rechtwinklig schneidende Ebenen constant ist.

Es handelt sich nun darum Ausdrücke zu finden für d. Componenten d. inneren Reibungen und zwar zunächst für d. tangentialen Reibungscomponenten $\tau_x\ \tau_y\ \tau_z$.

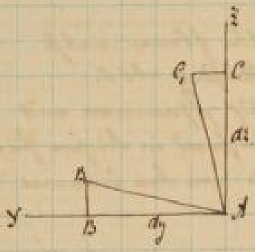
In dieser Beziehung ist eine Annahme zu Grunde zu legen, welche schon von Newton gemacht wurde, und seitdem auch von d. meisten Autoren beibehalten und durch gewisse Erfahrungen bestätigt worden ist, von denen in d. Hydraulik später d. Rede sein wird:



Denkt man sich 2 benachbarte unendlich kleine dünne Flüssigkeitsebenen, von d. Dicke dn, von denen d. untere oben in d. Richtung d. Schnitt eine Geschwindigkeit $= c$ und die andere in derselben Richtung eine Geschwindigkeit $= c + dc$ hat, so daß also d. obere Schicht sich gegen d. untere mit einer relativen Geschwindigkeit $= dc$ bewegt, so wird dadurch entsprechende tangentiale Reibungen verursacht. Die besagte Annahme ist nun die, daß diese Reibungen zwischen 2 oberen Flüssigkeitsschichten proportional dem Differentialquotienten $\frac{dc}{dn}$ sei, also proportional d. Schnelligkeit mit welcher sich d. Geschwindigkeit von einer zur anderen Schicht ändert, wenn man auf d. Normalen AN von A aus um dn fortschreitet. Offenbar ist dieser Quotient $\frac{dc}{dn}$ auch d. Winkelgeschwindigkeit, mit welcher sich AN gegen AC hin dreht, oder d. Winkelgeschwindigkeit mit welcher sich d. rechte Winkel NAC verkleinert. Bezeichnet man nun analog den früheren Bezeichnungen für d. Tangentialspannungen, die innere Reibung im Punkte A in der zu AN senkrechten Ebene im Sinne d. Richtung AC mit τ_{nc}, so ist diese nach der Newton'schen Annahme:

$$\tau_{nc} = R\frac{dc}{dn}$$

und zwar d. innere Reibung bezeichnet als d. Kraft welche die im Sinne AN an die betreffende Ebene grenzende Flüssigkeitsschicht auf d. Flächeneinheit d. Ebene ausübt. Hierin ist R eine durch Erfahrung und Versuche zu bestimmende Constante, welche jedenfalls für verschiedene Flüssigkeiten als auch vielleicht für verschiedene Zustände d. Flüssigkeit verschiedene Werthe annehmen kann.



Es sei nun A ein beliebiger materieller Punkt d. Flüssigkeit, dessen Coordinaten zur Zeit t = $x\ y\ z$ sind. Denn A muß seine zur Zeit t 2 Richtungen gezogen parallel der Y und Z Axe d. Coordinatensystems, innerhalb d. Flüssigkeit legen müssen. B sei ein materieller Punkt auf AY in d. Entfernung $AB = dy$ von A, und C ein materieller Punkt auf AZ in d. Entfernung dz von A.

In dem betreffenden Augenblick t sei ferner angenommen worden d. Geschwindigkeit d. Punktes A im Sinne d. Y Axe $= v$. die Geschwindigkeit d. Punktes C also im Sinne d. Y Axe $= v + \frac{dv}{dz} dz$, und demnach d. relative Geschwindigkeit von C gegen A im Sinne d. Y Axe $= \frac{dv}{dz} dz$. Vermöge dieser relativen Geschwindigkeit wird C gegen A im Zeitelement dt um ein kl. Stück CC_1 verschoben und es ist:

$$CC_1 = \frac{dv}{dz} dz\, dt$$ = partielle relative Verrückung von C gegen A im Sinne AY im Zeitelemente dt.

Ebenso sei im demselben Augenblick t d. Geschwindigkeit von A im Sinne d. Z Axe $= w$ und also d. Geschwindigkeit von B im Sinne d. Z Axe $= w + \frac{dw}{dy} dy$, demzufolge d. relative Geschwindigkeit von B gegen A im Sinne d. Z Axe $= \frac{dw}{dy} dy$ und ferner ist im Zeitelemente dt d. partielle relative Verrückung BB_1 von B gegen A im Sinne d. Z Axe:

$$BB_1 = \frac{dw}{dy} dy\, dt$$

Es muß mithin d. unendlich kl. Winkel $C\hat{A}C_1 = \frac{CC_1}{AC} = \frac{CC_1}{dz} = \frac{dv}{dz} dt$

und d. unendlich kl. Winkel $B\hat{A}B_1 = \frac{BB_1}{AB} = \frac{BB_1}{dy} = \frac{dw}{dy} dt$.

Es ist offenbar d. Verkleinerung d. rechten Winkels BAC = der Summe dieser beiden kl. Winkel also:

$$= B\hat{A}B_1 + C\hat{A}C_1 = \left(\frac{dv}{dz} + \frac{dw}{dy}\right) dt$$

und demzufolge d. Winkelgeschwindigkeit mit welcher diese Verkleinerung d. rechten Winkels BAC ursprünglich d. h. zur Zeit t stattfindet:

$$= \frac{dv}{dz} + \frac{dw}{dy}$$

Diese Verkleinerung d. rechten Winkels BAC kann man nun einerseits betrachten als d. resultierende relative Bewegung d. Punktes C gegen A in d. Richtung AB, da die BAB_1 und CAC_1 unendlich kl. Winkel sind, man also d. Verschiebung CC_1 als parallel zu AB betrachten kann, kann man d. Verkleinerung d. rechten Winkels BAC auch betrachten als das Resultat d. resultierenden relativen Bewegung von C gegen A im Sinne AB. Bei dieser Auffassung entspricht dieser Verkleinerung d. rechten Winkels dem Newton'schen Princip zufolge eine Tangentialcomponente d. inneren Reibung, welche im Punkte A in d. zur Z Axe senkrechten Ebene im Sinne d. Y Axe stattfindet und also mit t_{zy} zu bezeichnen wäre.

Andererseits kann d. Verkleinerung d. rechten Winkels BAC auch betrachtet werden, als d. relative Verschiebung d. Punktes B gegen AC, welche Auffassung eine Tangentialcomponente t_{yz} d. inneren Reibung im Punkte A in d. zur Y Axe senkrechten Ebene im Sinne d. Z Axe stattfindend bedingen würde.

Natürlicherweise müssen demnach beide $t_{yz} = t_{zy}$ sein, es kommen also auch hier ebenso wie früher d. Tangentialcomponenten d. Spannungen, d. Tangentialcomponenten d. inneren Reibungen immer paarweise vor und zwar sind sie auch wieder paarweise einander gleich.

Man kann also für $t_{zy} = t_{yz}$ auch d. bekannte Bezeichnung t_x einführen.

Nach dem Newton'schen Princip ist dann, da $\frac{dv}{dz} + \frac{dw}{dy}$ d. Winkelgeschwindigkeit ist, mit welcher d. Verkleinerung d. rechten Winkels BAC zur Zeit t erfolgt:

$$t_x = R\left(\frac{dv}{dz} + \frac{dw}{dy}\right)$$ und ferner demnach durch Analogie für t_y und t_z durch Buchstabenvertauschung:

$$t_y = R\left(\frac{dw}{dx} + \frac{du}{dz}\right)$$

$$t_z = R\left(\frac{du}{dy} + \frac{dv}{dx}\right)$$

Damit nimmt also d. Tangentialcomponenten d. inneren Reibungen durch d. Geschwindigkeitscomponenten ausgedrückt.
Es fragt sich nun weiterhin auch d. Normalcomponenten d. inneren Reibungen in derselben Weise auszudrücken. Jedenfalls sind nach dem Newton'schen Princip die Normalcomponenten $6x\ 6y\ 6z$ d. inneren Reibungen im Punkte A für d. betreffenden Coordinatenebenen yAz, zAx und xAy auch als lineare Functionen d. partiellen Differentialquotienten der Geschwindigkeitscomponenten $u\ v\ w$ nach $x\ y\ z$ anzunehmen. Damit ist aber wenig gewonnen, indem jede d. Normalcomponenten mit 9 Gliedern behaftet bleiben könnte (d. $u\ v\ w$ nach $x\ y\ z$ partiell differentiirt neun verschiedene Differentialquotienten ergibt). Eine Entscheidung in dieser Hinsicht ergibt sich jedoch zunächst mit folgender Überlegung:

Man denke sich von A aus eine beliebige Richtung AS gezogen, bestimmt durch d. Richtungswinkel $\alpha\ \beta\ \gamma$, dann von A aus ein unendlich kl. Stück $AA_1 = dS$ abgetragen; C sei d. Geschwindigkeit d. Punktes A nach d. Richtung AS zur Zeit t. Diese Geschwindigkeit C ist aber nach d. Mechanik bekanntlich dargestellt durch d. algebraische Summe d. aus den Geschwindigkeitscomponenten $u\ v\ w$ gebildeten Parallelprojectionen, also:

$$C = u\cos\alpha + v.\cos\beta + w.\cos\gamma. \qquad \text{— I}$$

Dieselbe Formel bekommt man nun für d. Geschwindigkeit d. Punktes A_1 $(= C + dC)$ in Sinne AS, wenn man für $u\ v\ w$ die Geschwindigkeitscomponenten von A_1 substituirt.
Die Geschwindigkeitscomponente von A_1 im Sinne d. X Achse ist offenbar $= u +$ d. partiellen Ableitung von u nach $x\ y\ z$, indem beim Übergange von A auf A_1 sich gleichzeitig $x\ y\ z$ ändern.
Man hat also in d. obigen Formel zu setzen

$$\text{anstatt } u.\cos\alpha \quad — \quad \left(u + \frac{du}{dx}dx + \frac{du}{dy}dy + \frac{du}{dz}dz\right)\cos\alpha$$

$$\text{noch anstatt: } v.\cos\beta \quad — \quad \left(v + \frac{dv}{dx}dx + \frac{dv}{dy}dy + \frac{dv}{dz}dz\right)\cos\beta$$

$$\text{und } w.\cos\gamma \quad — \quad \left(w + \frac{dw}{dx}dx + \frac{dw}{dy}dy + \frac{dw}{dz}dz\right)\cos\gamma$$

demnach ist die Geschwindigkeit d. Punktes A_1 zur Zeit t im Sinne d. Richtung AS:

$$C + dC = \left\{\begin{array}{l} \left(u + \frac{du}{dx}dx + \frac{du}{dy}dy + \frac{du}{dz}dz\right)\cos\alpha \\ \left(v + \frac{dv}{dx}dx + \frac{dv}{dy}dy + \frac{dv}{dz}dz\right)\cos\beta \\ \left(w + \frac{dw}{dx}dx + \frac{dw}{dy}dy + \frac{dw}{dz}dz\right)\cos\gamma \end{array}\right\} \qquad \text{— II}$$

Zieht man nun Gleichung I von II ab, so bekommt man, wenn man noch berücksichtigt daß $\frac{dx}{dS} = \cos\alpha$, $\frac{dy}{dS} = \cos\beta$ und $\frac{dz}{dS} = \cos\gamma$ ist, und wenn man noch durch dS dividirt:

$$\frac{dC}{dS} = \frac{du}{dx}\cos^2\alpha + \frac{dv}{dy}\cos^2\beta + \frac{dw}{dz}\cos^2\gamma + \left(\frac{dv}{dz} + \frac{dw}{dy}\right)\cos\beta\cos\gamma$$
$$+ \left(\frac{dw}{dx} + \frac{du}{dz}\right)\cos\gamma\cos\alpha + \left(\frac{du}{dy} + \frac{dv}{dx}\right)\cos\alpha\cos\beta \qquad \text{— III}$$

Wie man sieht ist dieser Ausdruck für $\frac{dC}{dS}$, was ganz seine Abhängigkeit von den Richtungswinkeln $\alpha\beta\gamma$ anbetrifft, genau analog denen, die wir Seite 10 u. 12 gefunden haben für d. Normalspannung $\mathfrak{S}$ und Ausdehnung ε, welche im Punkte A nach d. Richtung AS $(\alpha\beta\gamma)$ stattfinden.
Man kann deshalb auch in dieser Hinsicht ganz analoge Folgerungen ziehen. Es folgt nämlich dieser Analogie, daß für d. Geschwindigkeiten $C_1\ C_2\ C_3$ im Punkte A nach irgend 3 zu einander senkrechten Richtungen $AS_1\ AS_2\ AS_3$ die folgende constante Relation besteht, wie man auch leicht d. Rechnung darthun mag:

$$\frac{de_1}{ds_1} + \frac{de_2}{ds_2} + \frac{de_3}{ds_3} = \frac{du}{dx} + \frac{dv}{dy} + \frac{dw}{dz}$$

Diese constante Summe für je 3 zu einander senkrechte Richtungen in demselben Punkte der partiellen Ableitungen d. Geschwindigkeitscomponenten nach d. Coordinaten $x\ y\ z$, welche in d. Folge mit Δ bezeichnet werden soll, hat eine leicht einzusehende sehr bedeutende Bedeutung:

$$\Delta = \frac{du}{dx} + \frac{dv}{dy} + \frac{dw}{dz}$$

Denkt man sich von A als Eckpunkt ein unendlich kleines rechtwinkliges Parallelepiped mit den Kanten $dx\ dy\ dz$ construirt, sodass d. gegenüberliegende Eckpunkt von A – A', die Coordinaten $x + dx$ $y + dy$ und $z + dz$ hat, so herrscht in der zur x Axe senkrechten, durch A gehenden Seitenebene $dy.dz$ augenblicklich d. Geschwindigkeit u in Richtung d. x Axe also senkrecht zur Ebene $dy.dz$. Folglich ist das Volumen d. Flüssigkeit, welche in dem Zeitelement dt durch diese Ebene $dy\,dz$ in d. Parallelepiped hineinfliesst $= dy.dz\ u.dt$. Andererseits hat d. durch den Punkt A' gehende senkrecht zur x Axe zu ziehende Ebene eine Geschwindigkeit in Richtung d. x Axe aber ausgedrückt: $u + \frac{du}{dx}dx$, und daher d. Volumen d. Flüssigkeit, welche im Zeitelement dt durch diese Ebene $dy.dz$ aus dem Parallelepiped herausfliesst:

$$= dy.dz\left(u + \frac{du}{dx}dx\right)dt.$$

und also d. Differenz d. Volumina, welche im Zeitelement dt durch d. von A' begrenzte Ebene $dy\,dz$ aus dem parallelepipedischen Raumelement mehr herausfliesst, als durch die von A herumliegende Ebene $dy\,dz$ hineinfliesst:

$$= dy\,dz\,\frac{du}{dx}\,dx.dt$$

Ebenso ist:

$$\left.\begin{array}{l} dz\,dx.\frac{dv}{dy}\,dy\,dt \\ \text{und} \quad dx.dy\,\frac{dw}{dz}\,dz.dt \end{array}\right\}$$

= dasjenige Flüssigkeitsvolumen welches in Richtung d. y Axe resp. z Axe also durch die zur y Axe resp. z Axe senkrechten Seitenebenen während d. Zeitelements mehr aus dem Raumelement $dx\,dy\,dz$ heraus als hineinfliessen. Die Summe aller dieser Ausdrücke, erhalten:

$= dx\,dy\,dz\,\Delta\,dt$ ist das Flüssigkeitsvolumen, welches im Zeitelement dt mehr aus dem parallelepipedischen Raumelement heraus- als hineinfliesst.

Man kann demnach Δ als d. Ausdehnung bezeichnen, welche dieses Raumelement $dx\,dy\,dz$ zur Volumeinheit in dem Zeitabschnitt ~~dt~~ erfahren würde, wenn es um d. Volumen d. ausfliessenden Flüssigkeit vergrössert und um das d. hineinfliessenden Flüssigkeit verkleinert würde, und wenn d. augenblickliche Bewegungszustand d. Flüssigkeit während d. Zeiteinheit ununterbrochen bliebe. Da nun diese Grösse Δ für jedes bei A liegende Raumelement gleich gross ist, so erscheint Δ als Maass für d. Geschwindigkeit, mit welcher d. Volumenänderung d. Flüssigkeit im Punkte A stattfindet. Da nun weiter auch die Summe d. Normalcomponenten d. inneren Reibungen nach 3 zu einander senkrechten Richtung $= \sigma_x + \sigma_y + \sigma_z$ für den betreffenden Punkt einen constanten Werth besitzen muss, wie man auch d. Herleitung denken mag, so können mit Rücksicht auf d. gleichartige Bedeutung d. erscheinenden Grössen d.h. weil nicht das Coordinatensystem eine Axe vor der andern, da man eine Flüssigkeit als vollkommen isotropen Körper ansehen kann, die Normalcomponenten der inneren Reibungen im Allgemeinen folgenden Ausdruck haben:

(σ_x muss auf x, σ_y auf y und σ_z auf z bezüglich [illegible] gebildet werden)

$$\left.\begin{array}{l} \sigma_x = S\,\frac{du}{dx} + T\,\Delta \\ \sigma_y = S\,\frac{dv}{dy} + T\,\Delta \\ \sigma_z = S\,\frac{dw}{dz} + T\,\Delta \end{array}\right\}$$

wo S und T noch zu bestimmende Constante sind. Addirt man die Summe $\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z$ so bekommt man auf d. anderen Seite d. Gleichung erhalten $= S\Delta + 3T\Delta = (S + 3T)\Delta =$ Constante Summe.

daß diese Normalkomponenten der inneren Reibungen keine andern Ausdrücke annehmen können, ist ferner allerdings klar, wenn sie überhaupt Geschwindigkeitsfunktionen sein sollen, daß ihre Summe $\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z$ immer constant ist und daß man den einen Ausdruck aus den andern durch bloße Buchstabenvertauschung gewinnen kann.

Ferner kann man nun aber noch weiter schließen, daß die letzten mit Δ verbundenen Glieder gar nicht vorkommen dürfen:

Denkt man sich nämlich, daß die Bewegung der Flüssigkeit im Punkte A nur im Sinne der YZ Ebene stattfindet, daß also die Bewegung in der Richtung der X Axe $= 0$ also $u = 0$ und $\frac{du}{dx} = 0$ ist, so muß offenbar die innere Reibung im Punkte der Ebene YZ eine Richtung in der Ebene YZ fallend annehmen und demnach die Normalkomponente der inneren Reibung im Sinne der X Axe also $\sigma_x = 0$ sein. Wenn aber $\sigma_x = 0$ werden soll mit $u = 0$ und $\frac{du}{dx} = 0$, so darf natürlich das letzte Glied mit Δ gar nicht vorkommen, es muß also $T = 0$ sein und wird so:

$$\sigma_x = S\frac{du}{dx}$$

ebenso ergeben sich die übrigen zugehörigen mit den andern Ausdrücken für die Normalkomponenten und wird also: $\sigma_y = S\frac{dv}{dy}$ und $\sigma_z = S\frac{dw}{dz}$

Es fragt sich nun nur noch welche Beziehungen zwischen der Constanten S und der Constanten R bestehen. Um dies zu erkennen, sei von A aus eine beliebige Richtung $AS\,(\alpha\,\beta\,\gamma)$ gezogen, c sei die Geschwindigkeit des Punktes A nach AS zur Zeit t; nach dem Obigen ist dann die Normalkomponente σ der inneren Reibung im Punkte A für die zu AS senkrechte Ebene:

$$\sigma = S\frac{dc}{ds}$$

wenn man unter dc die Änderung der Geschwindigkeit c begreift, welche diese erfährt, wenn man nach der Richtung AS um ds fortschreitet.
Mit Rücksicht auf den Seite 21 III gefundenen Werth von $\frac{dc}{ds}$ ist nun aber:

$$\sigma = S\left[\frac{du}{dx}\cos^2\alpha + \frac{dv}{dy}\cos^2\beta + \frac{dw}{dz}\cos^2\gamma\right] + \frac{S}{R}\left[l_x\cos\beta\cos\gamma + l_y\cos\gamma\cos\alpha + l_z\cos\alpha\cos\beta\right]$$

indem man für die dort stehenden Ausdrücke $\frac{dv}{dz} + \frac{dw}{dy} = \frac{l_x}{R}$, für $\frac{dw}{dx} + \frac{du}{dz} = \frac{l_y}{R}$ etc. setzt mit Rücksicht auf die Seite 20 gefundenen Werthe von l_x, l_y und l_z.
Seite 10, 4 wurde aber schon ein anderer Ausdruck für σ gefunden, welcher bezüglich der Richtungswinkel $\alpha\,\beta\,\gamma$ genau ebenso wie dieser gebildet ist, wo aber anstatt der Coefficienten S im ersten Glied 1 und statt des Coefficienten $\frac{S}{R}$ 2 steht. Damit also der oben gewonnene Ausdruck, wie es sein muß, für alle Werthe von $\alpha\,\beta\,\gamma$ mit dem Seite 10, 4 gefundenen übereinstimme, muß $S = 2R$ sein und demnach die Normalkomponenten:

$$\sigma_x = 2R\frac{du}{dx} \qquad \sigma_y = 2R\frac{dv}{dy} \quad \text{und} \quad \sigma_z = 2R\frac{dw}{dz} \quad \text{———} \quad a$$

wenn R eine noch auf experimentellem Wege zu bestimmende Constante ist.

Somit wären nun die Vorbereitungen beendigt, die nöthig waren um die Eulerschen Fundamentalgleichungen auf die gewünschte Form zu bringen, in welcher dieselben für die Untersuchung der Zustandsänderungen flüssiger Körper am zweckmäßigsten ist.
Die erste Fundamentalgleichung war:

$$\frac{d\sigma_x}{dx} + \frac{d\tau_y}{dz} + \frac{d\tau_z}{dy} + \mu(X - \varphi_x) = 0$$

In diese hat man nun nach Seite 18 für $\sigma_x = \div p + \sigma_x$; für $\sigma_y = \div p + \sigma_y$ und für $\sigma_z = \div p + \sigma_z$ zu setzen, wenn p den Druck der Flüssigkeit und σ die Normalkomponenten der inneren Reibungen bedeuten. Die Größen $\tau_x\,\tau_y$ und τ_z bedeuten jetzt nur die Tangentialkomponenten der inneren Reibungen. Für $\frac{d\sigma_x}{dx}$ hat man also mit Rücksicht auf den unter a gefundenen Werth von σ_x zu setzen: $= -\frac{dp}{dx} + 2R\frac{d^2u}{dx^2}$ ebenso für $\frac{d\sigma_y}{dy} = -\frac{dp}{dy} + 2R\frac{d^2v}{dy^2}$ etc.

Ferner ist zufolge Seite 17 für φ_x zu setzen: $\frac{du}{dt} + u\frac{du}{dx} + v\frac{du}{dy} + w\frac{du}{dz}$ etc. und endlich noch für $\tau_y\,\tau_z$ die Seite 20 gefundenen Werthe einzusetzen. Setzt man dies ein, so bekommt man die auf d. Fundamentalgleichungen in folgender Form:

$$-\frac{\partial p}{\partial x} + 2R\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + R\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \cdot \partial z} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right) + R\left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y}\right) + \mu\left(X - \frac{\partial u}{\partial t} - u\frac{\partial u}{\partial x} - v\frac{\partial u}{\partial y} - w\frac{\partial u}{\partial z}\right) = 0$$

oder durch μ dividirt und entsprechend umgeformt:

$$X - \frac{1}{\mu}\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{R}{\mu}\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}\right) + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right] = \frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} + w\frac{\partial u}{\partial z}$$

Da nun $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y \partial x} + \frac{\partial^2 w}{\partial z \partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}\right)$ ist. Nach Seite 22 ist der in dieser letzte Coefficient $= \Delta$ und demnach:

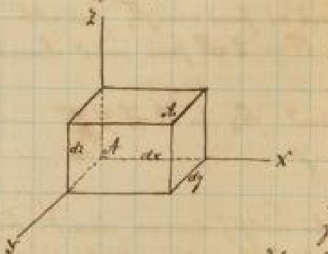
$$X - \frac{1}{\mu}\frac{\partial p}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} + w\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{R}{\mu}\left[\frac{\partial \Delta}{\partial x} + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right]$$

Die beiden anderen Fundamentalgleichungen werden natürlich ganz ähnliche Umformungen erleiden, wenn bekannt durch einfach durch Buchstabenvertauschung aus d. vorliegenden, also:

$$Y - \frac{1}{\mu}\frac{\partial p}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial t} + u\frac{\partial v}{\partial x} + v\frac{\partial v}{\partial y} + w\frac{\partial v}{\partial z} - \frac{R}{\mu}\left[\frac{\partial \Delta}{\partial y} + \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2}\right]$$

$$Z - \frac{1}{\mu}\frac{\partial p}{\partial z} = \frac{\partial w}{\partial t} + u\frac{\partial w}{\partial x} + v\frac{\partial w}{\partial y} + w\frac{\partial w}{\partial z} - \frac{R}{\mu}\left[\frac{\partial \Delta}{\partial z} + \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2}\right]$$

In diesen Ausdrücken kommen nun 5 Größen $u\ v\ w\ \mu\ p$ vor, welche als Functionen von $x\ y\ z\ t$ bestimmt sein werden müssten, um den innern und äußern Zustand d. Flüssigkeit mit Rücksicht auf d. Oberflächenbedingungen und den gegebenen Anfangszustand bestimmen zu können. Der äußere Zustand ist nämlich, wie bekannt, bestimmt durch d. Geschwindigkeitscomponenten $u\ v\ w$ und d. innere Zustand bestimmt durch d. spez. Masse μ und d. hydrostatischen Druck p. Um diese 5 Größen als Functionen von $x\ y\ z\ t$ zu entwickeln, haben wir jedoch erst d. 3 obigen Gleichungen; es müssen also 2 andere Bestimmungsgleichungen aufgestellt werden. Eine derselben findet man durch folgende Betrachtung:



Denkt man sich in Punkte $A(x\,y\,z)$ zur Zeit t 3 zu einander senkrechte Richtungen $\Delta x\ \Delta y\ \Delta z$ gezogen, parallel den Coordinatenaxen, worauf d. ganze Flüssigkeit bezogen ist, und von A als Eckpunkt aus ein unendl. kl. rechtwinklig parallelepipedisches Raumelement, dessen Kanten $dx\ dy\ dz$ mit den Richtungen $x\ y\ z$ zusammenfallen resp. parallel sind, so sind d. Coordinaten d. gegenüberliegenden Eckpunktes A_1 dieses, als unveränderlich zu denkenden Raumelements $= x + dx\quad y + dy$ und $z + dz$.

Ist nun d. spez. Masse zur Zeit t im Punkte $A = \mu$, so ändert sich diese im Laufe d. Zeitelements dt um $\frac{\partial \mu}{\partial t}dt$, die Masse d. ganzen Volumenelements $dx\,dy\,dz$ erfährt also im Zeitelement dt eine Änderung $= dx\,dy\,dz\,\frac{\partial \mu}{\partial t}dt$ = Masse, um welche d. Masse des Raumelements zur Zeit $t + dt$ größer ist als zur Zeit t. Diese Massenänderung kann man aber auch anders ausdrücken. Betrachtet man nämlich d. Flüssigkeitsmassen, welche durch d. Seitenflächen d. Raumelements theils hinein theils heraus fließen, so ist es zunächst d. zur x Axe senkrechten Flächen zu [illegible], ist durch diese Fläche $dy\,dz$, deren Geschwindigkeit in Richtung d. x Axe also senkrecht zu ihr selbst $= u$ ist, so wird d. Zeitelements dt ein Flüssigkeitsvolumen $= dy\,dz\,u\,dt$ in d. Raumelement hineinfließen also eine Flüssigkeitsmasse

$= \mu\,dy\,dz\,u\,dt$. Aus der gegenüberliegenden Fläche fließt dagegen eine Flüssigkeitsmasse heraus, welche man bekommt, wenn man d. eben gefundene Masse um d. partielle Differential nach x vergrößert, indem man um von A nach A_1 zu kommen um dx fortschreiten muss. Das partielle Differential d. fraglichen Masse nach x ist also d. Unterschied derjenigen Flüssigkeitsmasse, welche im Zeitelemente dt mit dem Raumelement hineinfließt, gegen diejenige, welche in demselben Zeitraum dt in d. Volumenelement hineinfließt.

also $dy\,dz \frac{\partial(\mu u)}{\partial x} dx \cdot dt$ = Überschuß, welche im Zeitelement dt in Richtung d. x Achse mehr hinein als hinaus fließt.

Ebenso ist: $dx\,dz \cdot \frac{\partial(\mu v)}{\partial y} dy \cdot dt$ der Überschuß derjenigen Flüssigkeitsmenge, welche im Sinne d. Y- resp. d. Z Achse im Zeitelement dt

und $dx \cdot dy \frac{\partial(\mu w)}{\partial z} dz \cdot dt$ aus dem Volumenelement hinausfließt, gegen diejenige, welche in demselben Zeitraum dt in d. Volumenelement hineinfließt. Die Summe dieser 3 Überschüsse giebt offenbar auch die Massenänderung d. Volumenelements im Zeitraum dt an; man hat also d. Gleichung:

$$-\,dx\,dy\,dz \frac{\partial \mu}{\partial t} dt = dy\,dz \frac{\partial(u\mu)}{\partial x} dx\,dt + dx\,dz \frac{\partial(v\mu)}{\partial y} dy\,dt + dx\,dy \frac{\partial(w\mu)}{\partial z} dz\,dt.$$

Dividirt man diese Gleichung durch $dx\,dy\,dz$, so bekommt man ~~eine~~ die gesuchte Differentialgleichung zur Bestimmung d. 5 Größen $u\ v\ w\ \mu\ p$ als Functionen von $x\ y\ z\ t$. Man bekommt:

$$\frac{\partial \mu}{\partial t} + \frac{\partial(\mu u)}{\partial x} + \frac{\partial(\mu v)}{\partial y} + \frac{\partial(\mu w)}{\partial z} = 0.$$

Da dieser Betrachtung d. Annahme einer continuirlichen Raumerfüllung durch d. Flüssigkeit zu Grunde gelegt ist, so nennt man diese Gleichung auch noch d. Continuitätsgleichung d. Flüssigkeit.

Eine weitere Gleichung kann aus allgemeinen Betrachtungen nicht gezogen werden, es müssen daher zur Aufstellung d. noch fehlenden 5t Gleichung noch gegebene Verhältnisse herangezogen werden, welche auf Wärme und Temperatur Rücksicht zu nehmen haben.

Ehe jedoch diese Verhältnisse näher untersucht werden, sollen erst folgende Betrachtungen gemacht werden:

Allgemeine Arbeit und Gleichung d. lebendigen Kraft eines Körpers im Allgemeinen.

Zunächst soll aus den 3 Fundamentalgleichungen eine Gleichung für d. lebendige Kraft eines Körpers entwickelt werden. Die 3 Fundamentalformeln waren:

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_y}{\partial z} + \frac{\partial \tau_z}{\partial y} + \mu(X - \varphi_x) = 0$$

$$\frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_z}{\partial x} + \frac{\partial \tau_x}{\partial z} + \mu(Y - \varphi_y) = 0$$

$$\frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + \frac{\partial \tau_x}{\partial y} + \frac{\partial \tau_y}{\partial x} + \mu(Z - \varphi_z) = 0$$

Denkt man sich nun bei einem in continuirlicher Zustandsänderung begriffenen Körper ein Massenelement, welches zur Zeit t d. Gestalt eines unendlich kleinen rechtwinkligen Parallelepipeds hat, dessen einer Eckpunkt A d. Coordinaten $x\ y\ z$ hat und dessen Kantenlängen $= dx\ dy\ dz$ sind, so ist das Volumen dieses Elements zur Zeit $t = dx\ dy\ dz$ und sei bezeichnet mit dV.

$u\ v\ w$ seien wieder d. 3 Geschwindigkeitscomponenten d. fraglichen Punktes $A(x\,y\,z)$ im Sinne d. Coordinatenaxen zur Zeit t. Wenn man nun von einer differentiellen Verschiebung dieses Massenelements d. Gestaltsänderung absieht, so sind diese Größen $u\ v\ w$ auch zugleich d. Geschwindigkeitscomponenten d. ganzen Volumenelements, ferner seien $X\ Y\ Z$ die Componenten d. beschleunigenden Massenkraft und μ d. spec. Masse zur Zeit t.

Es soll jetzt die erste Gleichung mit $dV\,u\,dt$, d. 2te mit $dV \cdot v\,dt$ und d. 3te mit $dV \cdot w\,dt$ multiplicirt werden, und dann alle 3 zusammen addirt werden. Dann sollen d. Glieder mit $\mu\varphi_x$, $\mu\varphi_y$ und $\mu\varphi_z$ auf d. andere Seite gebracht werden, wenn für φ_x, φ_y und φ_z die bekannten Werthe $\frac{du}{dt}$ resp. $\frac{dv}{dt}$, $\frac{dw}{dt}$ zu setzen sind; führt man dies aus, so bekommt man:

$$\mu\,\delta V(u\,du + v\,dv + w\,dw) = \mu\,\delta V(X.u + Y.v + Z\,w)\,dt + dQ_1$$

wenn dQ_1 bedeutet:

$$dQ_1 = \delta V\left[\left(\frac{\partial\sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial\tau_z}{\partial z} + \frac{\partial\tau_y}{\partial y}\right)u + \left(\frac{\partial\sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial\tau_z}{\partial x} + \frac{\partial\tau_x}{\partial z}\right)v + \left(\frac{\partial\sigma_z}{\partial z} + \frac{\partial\tau_x}{\partial y} + \frac{\partial\tau_y}{\partial x}\right)w\right]dt$$

Das auf der linken Seite der ersten Gleichung stehende Glied kann man offenbar auch folgendermaßen schreiben:

$$= \mu\,\delta V.\ d\left(\frac{u^2+v^2+w^2}{2}\right).$$

$u^2+v^2+w^2$ ist aber das Quadrat der augenblicklichen Geschwindigkeit und $\mu\,\delta V$ die Masse des Elements.

Nach Seite 2 ist demnach jenes Produkt die lebendige Kraft $= dL$ des Massenelements zur Zeit t. Die ganze linke Seite der Gleichung ist also nichts anderes als das Differential der lebendigen Kraft, d. h. der Zuwachs der lebendigen Kraft des Massenelements während des Zeitelements dt.

Da ferner das Massenelement zur Zeit t sich im Sinne der Achsen mit den Geschwindigkeiten $u\ v\ w$ fortbewegt, so ist das erste Glied der rechten Seite der Gleichung offenbar die Summe der Arbeiten dM, welche die Massenkraftkomponenten $X\ Y\ Z$ auf das Massenelement während der Zeit dt verrichten.

Also: $\mu\,\delta V(Xu + Yv + Zw)\,dt = dM.$

Demnach kann man jetzt obige Gleichung auch schreiben:

$$dL = dM + dQ_1$$

Was nun die Größe dQ_1 anbelangt, so ist diese offenbar nichts anderes als die Arbeit der Flächenkräfte während des Zeitelements dt, mit welcher die das Massenelement umgebende Flüssigkeitsmasse auf seine Oberfläche wirkt, insoweit, als diese Arbeitsleistung unabhängig ist von einer gleichzeitig stattfindenden Deformation des Massenelements, indem die Geschwindigkeitskomponenten $u\ v\ w$ als für das ganze Massenelement constant angenommen wurden. Die abgeleitete Gleichung enthält demnach den bekannten Satz, daß für einen unendlich kleinen Zeitabschnitt für ein System materieller Punkte der Zuwachs der lebendigen Kraft = der Summe der Arbeiten aller äußeren Kräfte ist. Die ganze Arbeit der Oberflächenkräfte des Massenelements sei bezeichnet mit dO, so ist also dQ_1 nur ein Teil von dO, während der andere Teil dO_2 ist. Man kann also setzen:

$$dQ_1 = dO - dO_2,$$

wenn dO_2 die Arbeit der Oberflächenkräfte des Massenelements ist, welche von der Deformation des Raumelements bedingt ist.

Die ganze Arbeit dO der Oberflächenkräfte läßt sich folgendermaßen bestimmen:

Zunächst wird zur X-Achse senkrechten und durch A hindurchgehenden Fläche $dy\,dz$ des parallelepipedischen Massenelements wirkt eine Flächenkraft, welche als Spannung in 3 Komponenten $\sigma_x\ \ \tau_{xy}\ \ \tau_{xz}$ zerlegt werden kann. Diese bedeuten dagegen die Komponenten der inneren Flächenkräfte, welche im Sinne der positiven Achsenrichtungen wirken. Will man also Kräfte haben, mit welchen die an der Fläche $dy\,dz$ angrenzende Flüssigkeitsmasse auf das Element wirkt, so muß man dieselben mit $-\sigma_x\ -\tau_{xy}\ -\tau_{xz}$ bezeichnen, da dieselben in negativer Richtung der Achsen wirken. Die ganzen Flächenkräfte an der Fläche $dy\,dz$ sind also: $dy\,dz.(-\sigma_x)$ $\quad dy\,dz.(-\tau_{xy})$ $\quad dy\,dz(-\tau_{xz})$

Diese Seitenfläche bewegt sich mit der Geschwindigkeit $u\ v\ w$ im Sinne der Achsen; sie bewegt sich also während des Zeitelements dt im Sinne der Achsen um die Strecken $u\,dt$, $v\,dt$ und $w\,dt$ fort. Die Arbeit dieser Flächenkraft ist also:

$$-\sigma_x\,u\,dy\,dz - \tau_{xy}\,.v\,dy\,dz - \tau_{xz}\,w.\,dy\,dz.$$

hier gezählte Arbeit nur von denjenigen Kräften herrührt, welche auf die gegenüberliegenden Seitenflächen d. Elements angreifen. Man bekommt diese offenbar, wenn man nur d. oben gefundenen um ihr partielles Differential genommen nach x vergrößert, da beide Flächen um dx voneinander entfernt sind. Als Summen ~~derjenigen~~ d. Arbeiten derjenigen Kräfte, welche auf beide zu x senkrechten Seitenflächen wirken, ist demnach:

$$-dy\,dz\left\{-\sigma_x u\,dt + \left[\sigma_x u + \frac{\partial(\sigma_x u)}{\partial x}dx\right]dt - \tau_{xy} v\,dt + \left[\tau_{xy} v + \frac{\partial(\tau_{xy} v)}{\partial x}dx\right]dt - \tau_{xz} w\,dt + \left[\tau_{xz} w + \frac{\partial(\tau_{xz} w)}{\partial x}dx\right]dt\right\}$$

oder wenn man d. kürzere Bezeichnung $\tau_{xy} = \tau_z$ und $\tau_{xz} = \tau_y$ wieder einführt und Vereinfachungen vornimmt und für $dx\,dy\,dz$ das Volumen δV einführt:

$$-\delta V\left(\frac{\partial(\sigma_x u)}{\partial x} + \frac{\partial(\tau_z w)}{\partial x} + \frac{\partial(\tau_z v)}{\partial x}\right]dt.$$

Ebenso sind d. Summen d. Arbeiten derjenigen Kräfte, welche auf beide zu y resp. z senkrechten Seitenflächen d. Elements wirken:

$$-\delta V\left(\frac{\partial(\sigma_y v)}{\partial y} + \frac{\partial(\tau_z u)}{\partial y} + \frac{\partial(\tau_x w)}{\partial y}\right)dt \quad \text{resp.:} \quad -\delta V\left(\frac{\partial(\sigma_z w)}{\partial z} + \frac{\partial(\tau_x v)}{\partial z} + \frac{\partial(\tau_y u)}{\partial z}\right)dt.$$

Demnach ist d. Gesamtarbeit d. Oberflächenkräfte:

$$dO = \delta V\left\{\begin{array}{l} \frac{\partial(\sigma_x u)}{\partial x} + \frac{\partial(\tau_z w)}{\partial x} + \frac{\partial(\tau_z v)}{\partial x} \\ + \frac{\partial(\sigma_y v)}{\partial y} + \frac{\partial(\tau_z u)}{\partial y} + \frac{\partial(\tau_x w)}{\partial y} \\ + \frac{\partial(\sigma_z w)}{\partial z} + \frac{\partial(\tau_x v)}{\partial z} + \frac{\partial(\tau_y u)}{\partial z} \end{array}\right\}dt.$$

Vergleicht man diesen Ausdruck mit dem vorhin für dA gefundenen und beachtet, dass $dO_2 = dO - dO_1$ ist, so folgt:

$$dO_2 = \delta V\left\{\begin{array}{l} \sigma_x \frac{\partial u}{\partial x} + \tau_x\left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}\right) \\ + \sigma_y \frac{\partial v}{\partial y} + \tau_y\left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z}\right) \\ + \sigma_z \frac{\partial w}{\partial z} + \tau_z\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right) \end{array}\right\}dt$$

Demnach hat man jetzt als Formel für d. lebendige Kraftzunahme: $dL = dM + dO - dO_2$

Diese Arbeit dO_2 ist der Teil von dO, welcher zur Deformation des Volumenelements verbraucht wird; mit entgegengesetztem Zeichen gleich d. Arbeit $dE = -dO_2$, welche d. Volumenelement selbst durch seine Deformation verrichtet, und welche d. Deformationsarbeit desselben bei d. jeweiligen unendlich kleinen Zustandsänderung genannt werden soll. Indem diese Deformationsarbeit nur von den Spannungen, nicht von den äußeren Kräften an d. Oberfläche d. Volumenelements verrichtet wird, sind unter den Größen σ u. τ, welche in Gleichung für dO_1 zugleich Spannungen und äußere Kräfte sein können, in Gleichung für dO_2 nur Spannungen zu verstehen; in d. That beziehen sich die in diesen Gleichungen vorkommenden Differentialquotienten von $u\ v\ w$ nach $x\ y\ z$ nur auf solche Geschwindigkeitsänderungen, welche innerhalb d. betrachteten Volumenelements stattfinden, während d. äußeren Kräfte durch d. relativen Geschwindigkeiten benachbarter Volumenelemente bedingt sind.

Wenn nun mit $\xi\ \eta\ \zeta$ die Wege bezeichnet werden, welche d. materielle Punkt, der sich zur Zeit t im Raumpunkte A befindet, während dieser Zeit t auf den Koordinatenaxen durchlaufen hat, so sind natürlich $\xi\ \eta\ \zeta$ Funktionen von $x\ y\ z\ t$, und zwar ist offenbar:

$$u = \frac{\partial \xi}{\partial t} \quad . \quad v = \frac{\partial \eta}{\partial t} \text{ und } w = \frac{\partial \zeta}{\partial t}$$

Sind nun ferner $\varepsilon_x\ \varepsilon_y\ \varepsilon_z\ \gamma_x\ \gamma_y\ \gamma_z$ die Ausdehnungen und Verschiebungen, welche d. Deformationszustand des Körpers im Punkte A zur Zeit t bestimmen und welche mit $\xi\ \eta\ \zeta$ in der bekannten Beziehung stehen, so ist:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial^2 \xi}{\partial t\,\partial x} = \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial \xi}{\partial x}\right) = \frac{\partial \varepsilon_x}{\partial t}$$

$$\text{ebenso } \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial \varepsilon_y}{\partial t} \text{ und } \frac{\partial w}{\partial z} = \frac{\partial \varepsilon_z}{\partial t}$$

$$\text{ferner: } \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} = \frac{\partial^2 \eta}{\partial t\,\partial z} + \frac{\partial^2 \zeta}{\partial t\,\partial y} = \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial \eta}{\partial z} + \frac{\partial \zeta}{\partial y}\right) = \frac{\partial \gamma_x}{\partial t}$$

$$\text{ebenso: } \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} = \frac{\partial \gamma_y}{\partial t} \text{ und } \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial \gamma_z}{\partial t}$$

Nach d. Gleichung für dO_i ist ferner:

$$dE = -\,dV\left[\sigma_x \frac{\partial \varepsilon_x}{\partial t} + \sigma_y \frac{\partial \varepsilon_y}{\partial t} + \sigma_z \frac{\partial \varepsilon_z}{\partial t} + \tau_x \frac{\partial \gamma_x}{\partial t} + \tau_y \frac{\partial \gamma_y}{\partial t} + \tau_z \frac{\partial \gamma_z}{\partial t}\right] dt.$$

d. Massenelements

Demnach kann man also d. Differentialgleichung d. lebendigen Kraft auch schreiben:

$$dL = dM + dO + dE.$$

Durch Addition der entsprechenden Gleichungen für alle Massenelemente d. Körpers erhält man dieselbe oben gefundene Gleichung, nur ist aber nun:

dL = die Zunahme d. lebendigen Kraft d. ganzen Körpers

dM die Arbeitssumme aller Massenkräfte

und dO d. Arbeitssumme aller Oberflächenkräfte und inneren Flächenkräfte

dE die Deformationsarbeit d. ganzen Körpers für d. unendlich kleine Zustandsänderung im Zeitelemente dt bedeutet. Dabei kann dO in verschiedene Theile zerlegt werden. Zunächst besteht d. Arbeit d. Oberflächenkräfte aus d. Arbeit dP d. äußeren [illegible], welche [illegible] hier kurz mit dM, und aus d. Arbeit d. Reibung an d. Oberfläche od. d. äußeren Reibung, welche stets negativ ist und absolut genommen mit dR bezeichnet sei. Was die inneren Flächenkräfte betrifft, so sind sie zu je zwei entgegengesetzt gleich, und es ist deshalb ihre Arbeitssumme = 0, falls d. Geschwindigkeitsänderungen im Körper überall continuierlich stattfinden, in Folge d. entgegengesetzten inneren Flächenkräfte, womit 2 benachbarte Körperelemente aufeinander wirken, wird dann das eine beschleunigt, das andere verzögert, indem d. lebendige Kraft des einen eben so viel zunimmt wie bei d. andern abnimmt. Wenn aber discontinuierliche, plötzliche Geschwindigkeitsänderungen vorkommen, — so dass 2 benachbarte Massenelemente eines Theils d. Materie zu ihrer Berührungsfläche eine relative Geschwindigkeit von endlicher Größe besitzen und somit einen Stoß aufeinander ausüben (wie solches bei festen und flüssigen Körpern vorkommen kann), so dass (bei Flüssigkeiten) ihre relative Geschwindigkeit längs d. Berührungsfläche von endlicher Größe ist — so ist damit ein Verlust an lebendiger Kraft, eine negative Arbeitssumme d. inneren Flächenkräfte verbunden. Wird letztere absolut genommen für d. unendlich kleine Zustandsänderung des Körpers mit dS bezeichnet, so ist also nun:

$$dO = dP - dR - dS$$

und also d. Gleichung d. lebendigen Kraft d. Körpers:

$$\text{I.} \quad dL = dM + dP - dR - dS + dE$$

wenn d. Deformationsarbeit dE allgemein bedeutet:

$$dE = -\int dV\left[\sigma_x \frac{\partial \varepsilon_x}{\partial t} + \sigma_y \frac{\partial \varepsilon_y}{\partial t} + \sigma_z \frac{\partial \varepsilon_z}{\partial t} + \tau_x \frac{\partial \gamma_x}{\partial t} + \tau_y \frac{\partial \gamma_y}{\partial t} + \tau_z \frac{\partial \gamma_z}{\partial t}\right] dt$$

Sind alle Tangentialspannungen = 0 und sind alle Normalspannungen im betreffenden Punkte gleich groß = σ, so wird erhalten:

$$dE = -\int dV\,\sigma\,\frac{d(\varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z)}{dt}\,dt = -\int dV\,\sigma\,\frac{de}{dt}\,dt$$

oder wenn mit $d\,dV = dV \frac{de}{dt}\,dt$ die unendlich kleine Volumenänderung d. Körperelements und mit $p = -\sigma$ d. Pressung bezeichnet wird:

$$dE = \int p\,d\,dV$$

Hierbei kann folglich d. Deformationsarbeit mit Expansionsarbeit benannt werden, indem sie nur von den Volumenänderungen d. Körperelements abhängt; d. Deformationsarbeit einer negativen Expansionsarbeit soll eine Compressionsarbeit genannt werden.

Ist d. Pressung in allen Punkten d. Körpers gleich groß, also = dem spec. äußeren Druck p, so wird, unter V das ganze Körpervolumen verstanden,

$$dE = p\,d\int dV = p\,dV$$

Die Geschwindigkeitscomponenten nach den Richtungen d. Coordinatenaxen, welche bisher mit u v w bezeichnet wurden, sollen in d. Folge mit u_x u_y u_z bezeichnet werden, die resultierende Geschwindigkeit mit u, so ist entsprechend d. lebendige Kraft eines Körpers der Ausdruck für:

$$L = \int \mu\,dV\,\frac{u^2}{2} = \int \gamma\,dV\,\frac{u^2}{2g}$$

während d. Buchstabe v stets zur Bezeichnung d. spec. Volumens gebraucht werden soll, welches in d. Regel statt d. spec. Gewichtes $\gamma = \frac{1}{v}$ u. d. spec. Masse $\mu = \frac{\gamma}{g} = \frac{1}{gv}$ zur Charakterisierung des inneren Zustandes benutzt wird.

Wärme & Temperatur.

Dem Vorhergehenden zufolge findet im Allgemeinen eine gegenseitige Abhängigkeit statt zwischen den Änderungen d. inneren und des äußeren Zustandes eines Körpers, indem d. letztere im Allgemeinen mit einer Deformation d. Körpers verbunden ist, wodurch Änderungen d. spec. Volumens und d. Spannungszustandes in den verschiedenen Punkten desselben bedingt werden, infolgedessen falls d. Aggregatform sich ändert, sofern d. Möglichkeit d. Bestehens einer gewissen Aggregatform bei gegebenem Spannungszustande an einen gewissen Grenzwerth d. spec. Volumens, bei gegebenem spec. Volumen an gewisse Grenzwerthe d. Spannungen gebunden sein kann. Es können indessen Änderungen d. inneren Zustandes auch ohne d. gleichzeitige Deformationsarbeit d. Körpers und ohne Änderung d. äußeren Zustandes (ohne Arbeit äußerer Kräfte) stattfinden, so daß sie als Wirkungen einer anderen Ursache erscheinen, als d. Änderungen d. äußeren u. Spannungszustandes. So kann z.B. d. Pressung eines luftförmigen Körpers bei constantem Volumen in hohem Grade veränderlich sein; eine Mischung von Eis und Wasser kann [illegible] u. kann in Wasser übergehen, so daß d. Volumen während d. Schmelzens d. Eises abnehmend und später zunehmend, schließlich dem Anfangsvolumen wieder gleich ist. Bei Vernachlässigung einer in allen Punkten gleichen Pressung ist in beiden Fällen d. Deformationsarbeit = 0, desgl. kann jede d. übrigen auf d. rechten Seite d. Gleichung für d. lebendige Kraft Seite 23 vorkommenden Arbeiten = 0 sein, gleichwohl hat sich d. innere Zustand geändert. In d. Regel ist mit solcher Änderung eine Deformationsarbeit verbunden; wenn aber letztere, wie es freilich d. Fall sein kann, gestattet ist, dass Arbeit d. äußeren Kräfte ohne Änderung d. lebendigen Kraft verzehrt ist (z.B.: bei d. Reibung eines ruhenden Körpers, auf dessen Oberfläche d. Atmosphärendruck wirkt), so kann man nur so vorsichtig nach d. Ursache fragen, welche sein

[illegible]

Ist nun bei gleichförmigem Wärmezustand und bei normalem Atmosphärendruck, gemessen durch eine 0,76 m hohe Quecksilbersäule von d. Temperatur d. schmelzenden Eises:

V_0 d. Volumen einer gewissen Menge [illegible] bei d. Temperatur des unter normalem atmosphärischem Druck schmelzenden Eises,

V_n ist Volumen bei d. Temperatur d. unter normalem Atmosphärendruck siedenden Wassers

V ist Volumen in irgend einem anderen Wärmezustand, so wird als Maßzahl d. Temperatur oder kurzweg als Temperatur d. Luft in diesem letzteren Zustand diejenige Zahl t definiert, welche d. Gleichung entspricht:

$$V = V_0 + \frac{V_n - V_0}{n}(t - t_0) = V_0\left[1 + \frac{V_n - V_0}{n V_0}(t - t_0)\right]$$

woraus $V = V_0$ für $t - t_0 = 0$ und $V = V_n$ für $t - t_0 = n$ ist.

Dabei sind t_0 und n willkürlich zu wählende Zahlen, welche auch je nach d. angenommenen Temperaturskala verschieden zu wählen werden, nach Celsius: $t_0 = 0$ und $n = 100$

nach Réaumur $t_0 = 0$ und $n = 80$

nach Fahrenheit $t_0 = 32$ und $n = 180$

Im Folgenden wird stets d. Celsius'sche, 100theilige Skala zu Grunde gelegt, so daß d. Temperatur d. unter atmosphärischem Druck schmelzenden Eises = 0, die des unter normalem Atmosphärendruck siedenden Wassers = 100, d. h. = 0 Grad (0°) resp. = 100 Grad (100°) ist, indem ein Temperaturunterschied $\Delta t = 1$ ein Temperaturgrad genannt und mit 1° bezeichnet wird.

Aus dem somit festgestellten Begriffe der Lufttemperatur für einen gewissen gleichförmigen Wärmezustand der Luft und dem Gleichheitsbegriffe der Temperaturen zweier Körper von gleichförmigem Wärmezustande ergibt sich sofort auch die Definition der Temperatur eines beliebigen Körpers von gleichförmigem, bzw. der Temperatur in einem gewissen Punkte eines Körpers von im Allgemeinen ungleichförmigem Wärmezustande. Die praktische Messung der Temperatur vermittelst eines sogenannten Thermometers beruht dann auf dem Grundsatze von der Gleichheit zweier Temperaturen, welche einer dritten gleich sind; die Zweckmässigkeit irgend eines Thermometers als [illegible] [illegible] mit der Beziehung, welche zwischen seinen Angaben und denen eines [illegible] atmosphärischer Luft von [illegible] normalem Atmosphärendruck enthaltenden Luftthermometers stattfindet. Mit dem Begriffe der Temperatur [illegible] die der Wärme [illegible] zu verbinden und dementsprechend von hoher und niedriger, [illegible] von größerer und kleinerer Temperatur zu sprechen.

Als Wärmeeinheit oder Calorie wird jetzt diejenige Wärmemenge angenommen, wodurch die Temperatur von 1 Kgr. reinen Wassers unter einem constanten, dem normalen Atmosphärendruck gleichen äußeren Druck von 0° auf 1° erhöht wird. Die Voraussetzung eines bestimmten [illegible] (zu [illegible] war [illegible] wenn auch nicht [illegible]) wegen dessen geringen [illegible] des Wassers, [illegible] deshalb, nicht nur eine bestimmte Temperaturzunahme, sondern auch eine bestimmte Anfangstemperatur bei dieser Definition der Wärmeeinheit anzunehmen, weil die zur Erhöhung der Temperatur eines Kgr. Wassers von $t°$ bis $(t+1)°$ erforderliche Wärmemenge wesentlich von t abhängt.

Nachdem nun somit der Temperatur als ein neuer Begriff in die Betrachtungen eingeführt ist, der fernerhin beständig mitbenutzt werden wird, ist es nun zunächst notwendig die Beziehungen zu bestimmen, in welchen die Temperatur eines Körpers von gleicher Art und Aggregatform zu dessen spezifischem Volumen und Spannungszustand steht. Dabei soll aber in der Folge wie für alle Fälle die einfache Voraussetzung zu Grunde gelegt werden, dass Temperaturänderungen [illegible] nicht [illegible], als [illegible] Formänderungen [illegible] sind, die dann überall für irgend einen Punkt für alle durch denselben gehenden Ebenen gleich groß sind, so dass durch diese Formänderungen der Spannungszustand des Körpers in dem betreffenden Punkte vollkommen bestimmt ist. Durch diese Voraussetzung wird die Allgemeingültigkeit der zu entwickelnden Sätze in Bezug auf flüssige Körper im weiteren Sinne des Wortes nicht beschränkt, während sie in Betreff fester Körper eine Einschränkung erleidet. Die Untersuchung wird also wesentlich vereinfacht, indem dann der Spannungszustand, wie schon erwähnt, durch eine einzige Größe statt im Allgemeinen 6 Größen, nämlich durch die [illegible] genannte Spannung σ. Für diese Spannung σ soll jedoch im Folgenden [illegible] die Pressung $= -\sigma$ in die Rechnung eingeführt werden, weil diese Pressung [in gewöhnlichen Fällen] [illegible] in der Regel positiv ist. Der Wärmezustand eines Körpers [illegible] von gegebener Art und Aggregatform vollkommen bestimmt durch nur 2 Größen, nämlich durch sein spez. Volumen v und die Pressung p, während aber der gemachten Voraussetzung [illegible] 7 Größen, nämlich die den Spannungszustand [illegible] 6 Größen und das spez. Volumen [illegible].

Im Folgenden soll mit t die Temperatur eines Körpers von gleichförmigem Wärmezustande resp. in einem Punkte eines Körpers von ungleichförmigem Wärmezustande bezeichnet werden, [illegible] t zur Bezeichnung der Zeit, so soll die betreffende Temperatur mit τ bezeichnet werden.

Ferner sollen, wenn nicht ausdrücklich andere Bestimmung getroffen wird, zum Messen der in Betracht kommenden Größen als: Längen, Flächen, Volumen, Zeiten, Geschwindigkeiten, Beschleunigungen, Kräfte, Arbeiten, Temperaturen und Wärmemengen als Maßeinheiten zu Grunde gelegt werden: das meter, Kgr., Sekunde, Kgrm., 1° Celsius und 1 Wärmeeinheit = 1 Calorie.

Was nun die zu entwickelnden Beziehungen betrifft, so kommt dabei [illegible] [illegible] zu halten:

Wenn irgend 2 Körper von gleicher Art sich in gleichförmigen und gleichen Wärmezuständen befinden, wenn sie also auch d. nämlichen Molekülen, gleiche Aggregatform, gleiches spez. Volumen und gleiche Spannung haben, so haben sie erfahrungsmäßig auch dieselbe Temperatur d. h.: ihre Wärmezustände würden sich nicht, wenn sie in Berührung gebracht würden, wobei keinerlei äußere Wärmeeinwirkungen stattfinden sein würden. Dieses Gesetz bestätigt sich mit ein paar wenigen Ausnahmen, welche (wahrscheinlich z. B.: bei Wasser) in dem Falle beobachtet werden können, daß d. Wärmezustand sich nahe d. Grenze befindet, welche d. Zustandsgebiete d. festen und flüssigen Aggregatform trennt. Z. B. kann man beobachten, daß 2 Wassermengen, welche gleiches spez. Volumen besitzen und sich unter gleichen Spannungen befinden, dennoch verschiedene Temperaturen haben können (die eine etwa größer als 4° und die andere etwa niedriger als 4°).

Abgesehen von diesen wenigen Ausnahmen, hat sich das obige Gesetz jedoch immer wieder bestätigt.

Die Temperatur t eines Körpers von bestimmter Art (welche durch seinen Wärmezustand d. h. durch d. Aggregatform, d. spez. Volumen v und d. Spannung p im Allgemeinen bestimmt, es ist also t eine Function von v u. p, ~~wobei~~ deren Form und Coefficienten von d. Körperart und von d. Aggregatform d. Körperabhängig sind, die natürlich d. Verhalten eines homogenen Körpers gemäß, sämtliche Elemente eines homogenen Körpers dieselbe ist, sollten man dieselben sich in verschiedenen Wärmezuständen befinden. Wenn wir zunächst einen homogenen Körper voraussetzen, so soll diese fragliche Beziehungsgleichung, welche zwischen d. Elementen v p u. t stattfindet, d. Zustandsgleichung d. homogenen Körpers für d. betreffende Aggregatform genannt werden.

Aus gegenwärtig zu Gebote stehenden Kenntnissen zufolge, hat man Grund anzunehmen, daß die Form dieser Zustandsgleichung (abgesehen von den Ausnahmen, welche gewisse Körper in d. Nähe d. Grenzzuständen 2 Aggregatformen zeigen) nur von d. Art d. Aggregatform und nicht von d. Körperabhängigkeit ist, daß vielmehr d. Körperart nur d. Coefficienten d. Zustandsgleichung bedingt. Es halten also demgemäß verschiedenartige homogene Körper bei gleicher Aggregatform solche Zustandsgleichungen von d. nämlichen Form, wie d. Coefficienten nur entsprechend d. verschiedenen Körperarten verschieden sind. Wenn man also für d. Coefficienten als allgemeine Buchstabengrößen einführt, so kann man auch überhaupt von d. Zustandsgleichung einer Aggregatform sprechen. So z. B. wird sich später zeigen daß:
$$pv = R(a+t)$$
d. Zustandsgleichung eines Gases ist, wenn freilich d. Coefficienten R u. a nach d. Art d. Gases bestimmt werden müssen.

Diese Zustandsgleichung einer Aggregatform kann, abgesehen von speculativen Anschauungen in Betreff d. Molekularconstitution d. Materie, nur durch Herleitung aus einer großen Zahl zuverlässiger experimenteller Bestimmungen d. Größen v p t abgeleitet werden, wobei es sein mag d. Fall sein kann, daß man sich vorläufig mit solchen Gleichungen behelfen muß, welche nur für einen gewissen Theil d. Zustandsgebietes einer Aggregatform entsprechender Annäherung gelten, z. B.: für luftförmige Körper in d. Nähe desjenigen Grenzzustandes, welche dem Übergange zur tropfbar flüssigen festen Aggregatform entspricht (Dämpfe) od. in d. Nähe d. entgegengesetzten Grenzzustandes (vollkommene Gase).

Durch fragliche Zustandsgleichung wird d. Temperatur t im Allgemeinen nur eindeutig bestimmt, in den meisten Ausnahmefällen jedoch 2deutig. Wenn z. B.: bei gewissen Werthen von v u. p d. Temperatur d. Wassers kleiner als 4° ist, so kann sie bei denselben Werthen von v u. p dennoch einen andern Werth größer als 4° haben, indem für $t = 4°$ eingehend d. spez. Volumen bezogen auf Spannung ein Minim. ist.

Im Allgemeinen ist d. Zustandsgleichung von solcher Art, daß:

wenn v constant ist p und t sich im gleichen Sinne gleichzeitig ändern
" p " " v " t " " " " " "
" t " " v " p sich im entgegengesetzten Sinne gleichzeitig ändern.

Mit Hülfe dieser Zustandsgleichung kann natürlich jede d. 3 Größen v p t als Function d. beiden anderen ausgedrückt werden. Da Wärmezustand eines homogenen Körpers von gegebener Art und gegebener Aggregatform kann deshalb nicht nur durch v und p sondern auch durch v u. t od. durch p und t, überhaupt durch irgend 2 Größen d. 3 Elemente v p t bestimmt werden.

In d. Statistik und Technik ist d. geometrische Messung am zweckmäßigsten und daher auch am meisten üblich geworden, d. Wärmezustand bei Flüssigkeiten u. anderen Körpern durch p u. t zu charakterisiren, indem Pressung und Thermometer mit Hülfe d. bekannten Instrumente Manometer und Thermometer am leichtesten meßbar sind.

Bei diesen Betrachtungen wurde immer d. Begriff eines homogenen Körpers vorausgesetzt; bei den speziellen Untersuchungen kommen jedoch auch nicht homogene Körper in Betracht, namentlich Gemische von Körpern gleicher Art und verschiedenen Aggregatformen. Z. B. Gemische von Flüssigkeiten mit luftförmigen Körpern derselben Art (Wasser und Wasserdampf). Diese Gemische können nun bekanntlich entweder continuirlich od. discontinuirlich sein. Auch für solche Gemische kann man eine Zustandsgleichung d. Art [illegible].

Was zunächst d. continuirliche Gemisch betrifft, so sei v d. spec. Volumen dieses Gemisches in einem bestimmten Punkte, also d. Volumen per 1 Kg. an dieser Stelle v = dem Quotient aus dem Volumen d. den Punkt einschließenden Elements durch d. Gewicht desselben. Da d. Definition eines continuirlichen Gemisches zufolge, dasselbe 2 Bestandtheile von gleicher Art aber verschiedenen Aggregatformen enthält, so sei w d. spec. Volumen des einen und $w + \Delta$ d. spec. Volumen d. anderen Bestandtheils. Das Mischungsverhältniß sei ausgedrückt durch y d. h. in einem Kg. d. Gemisches seien y Kg. d. [illegible] Bestandtheils enthalten; es ist also $1 - y$ d. Gewichtsmenge d. ersten Bestandtheils per 1 Kg.

Unter diesen Umständen kann d. spec. Volumen v in einem Kg. d. Gemisches wie folgt ausgedrückt werden:

$$v = (1-y)\,w + y\,(w+\Delta) = w + y\,\Delta.$$

In dieser Gleichung sind w und Δ jede für sich im Allgemeinen Functionen von p u. t, und somit auch d. spec. Volumen v eine Function von p u. t entsprechend den bestehenden Zustandsgleichungen welche den Aggregatformen d. beiden Bestandtheile entsprechen; aber hier sind jedoch p u. t nicht unabhängig von einander, sondern sind durch eine gewisse Beziehung $f(p\,t) = 0$ mit einander verbunden, indem d. Wärmezustände d. beiden Bestandtheile nicht beliebige Zustände für d. betreffenden Aggregatformen, sondern Grenzzustände bezüglich auf den Übergang aus d. einen in d. andere Aggregatform sind.

Z. B. besteht bei gesättigtem Wasserdampf bekanntlich eine so genau untersuchte Beziehung zwischen Pressung und Temperatur, daß man aus d. gegebenen Pressung auf d. Temperatur genau mittelst Rechnung schließen kann. In d. obigen Gleichung können demnach entweder w und Δ als Functionen von p oder als Functionen von t betrachtet werden, und müßte die Gleichung selbst als Beziehung zwischen $v\,p\,y$ oder als Beziehung zwischen $v\,t\,y$ aufgefaßt sein. Diese Gleichung soll in dem vorliegenden Falle die Zustandsgleichung eines solchen continuirlichen Gemisches genannt werden. Sind irgend zwei d. 4 Größen $v\,p\,t\,y$ gegeben, ausgenommen p u. t, welche schon durch d. Beziehung $f(p\,t) = 0$ von einander abhängen, so sind durch d. Zustandsgleichung und d. Beziehung $f(p\,t) = 0$ auch eindeutig d. beiden anderen bestimmt.

Was endlich d. discontinuirliche Gemisch betrifft, d. h. eine einfache Zusammenlagerung d. beiden gleichen Körper von verschiedenen Aggregatformen, so kommen diese nur in Betracht unter d. Voraussetzung daß p u. t in allen Punkten dieselben Werthe haben, widrigenfalls d. Zustandsänderungen d. beiden Bestandtheile verschiedener Aggregatform einzeln für sich untersucht werden müßten. Es bedeute jetzt v d. mittlere spec. Volumen d. discontinuirlichen Gemisches und y d. Mischungsverhältniß d. ganzen Volumens d. h. y sei d. Gewichtsmenge d. [illegible] Bestandtheils per 1 Kg. d. ganzen Körpers. w und Δ haben dieselben Bedeutungen; so ist nun auch wieder: $v = w + y\,\Delta$ etc.

Sollte also in beiden Fällen eines homogenen Körpers und eines Gemisches d. Wärmezustand durch d. nämlichen beiden Größen als unabhängige Variable charakterisirt werden, so können diese entweder v u. p od. v u. t sein. Im Folgenden wird als allgemein v u. p [illegible] als unabhängige Variable zu den Entwickelungen zu Grunde gelegt, indem dadurch bekanntlich d. [illegible] sich am einfachsten ausdrücken läßt. In d. Anwendung auf einzelne bestimmte Fälle kann man natürlich auch d. anderen beiden Größen v u. t als unabhängige Variable zur Charakterisirung d. Wärmezustandes wählen.

[illegible]

Wärmemittheilung durch Berührung.

Werden 2 Körper von verschiedenen Temperaturen mit einander in Berührung gebracht, [illegible] Wärmeleitung [illegible]

[illegible] Temperatur t [illegible] A [illegible] Ax [illegible] A [illegible] Ax [illegible] $d\sigma$ [illegible] A [illegible] Ax [illegible] A_1 [illegible] dx [illegible] A [illegible] Ax [illegible] t [illegible] A_1 d. Temperatur $t + \frac{dt}{dx}dx$ [illegible] dt [illegible] Ax [illegible] dQ [illegible] $d\sigma$ [illegible] Ax [illegible] x [illegible]:

$$dQ = -k\,d\sigma\,\frac{dt}{dx}\,dt$$

[illegible] k [illegible] ~~[illegible]~~ Leitungs[illegible] [illegible] A [illegible] Ax.

[illegible] dQ [illegible] A [illegible] Ax [illegible] $\frac{dt}{dx}$ [illegible].

[illegible] $d\sigma\,dt$ [illegible]:

$$\frac{dQ}{d\sigma\, dt} = \div\, k \frac{di}{dx}$$

d. Ausdruck auf d. linken Seite ist offenbar d. pro Flächeneinheit und Zeiteinheit durchgeleitete Wärmemenge d. h. d. Wärmemenge, welche pro Flächeneinheit u. d. Zeiteinheit hindurchgehen würde, wenn d. Umstände [illegible] bleiben würden. Den Ausdruck auf d. rechten Seite kann man [illegible] betrachten als d. Geschwindigkeit d. Wärmeleitung im Punkte A nach d. Richtung AX.

Wie schon erwähnt kann d. Wärmeleitungscoefficient k in verschiedenen Punkten und in denselben Punkte nach verschiedenen Richtungen im Allgemeinen verschieden sein. Ist d. Körper homogen so kann k u. d. [illegible] in allen Punkten gleich angenommen werden, [illegible] k in allen Richtungen [illegible] constant. In d. Folge wird k immer als unabhängig von d. Richtung angenommen werden, weil bei d. Wärmeleitungen in Flüssigkeiten [illegible], während es bei festen Körpern (namentlich krystallisirten) bei verschiedenen Richtungen verschieden sein kann. Ferner ist k jedoch auch bei Flüssigkeiten vom Wärmezustand zu betrachten, indem d. Wärmeleitung dieses Elements bedingt ist durch d. Wärmezustand [illegible], nämlich durch v u. [illegible]. Da diese aber von Punkt zu Punkt verschieden sein können auch bei homogenen Körpern, so ist d. Leitungscoefficient k streng genommen auch bei homogenen Körpern im Allgemeinen in jedem Punkte verschieden.

Es seien nun x y z d. Coordinaten d. Punktes A, in welchem sich d. Wärmeleitungscoefficient k befindet und x + dx y + dy z + dz seien d. Coordinaten eines unendlich nahe benachbarten Punktes A_1. Durch beide unendlich nahe zusammenliegenden Punkte A und A_1 seien als d. gegenüberliegenden Eckpunkte eines unendlich kl. rechtwinkligen Parallelepipedons gelegt, dessen Kantenlängen also dx dy dz sind. i sei die Temperatur im Punkte A zur Zeit t und also bei Vernachlässigung unendl. kl. Größen höherer Ordnung auch i d. Temperatur d. ganzen parallelepipedischen Elements zur Zeit t. Um nun d. erhaltene Wärmemenge dQ zu bekommen, welche d. Körperelement während d. unendl. kl. Zeitdauer dt durch Leitung mitgetheilt wird, stellen wir folgende Betrachtung an:

Durch jede d. 6 Seitenflächen d. parallelepipedischen Elementes ~~wird~~ findet eine Wärmeleitung von [illegible] nach außen statt. Betrachten wir zunächst diejenige Fläche, welche durch A geht und senkrecht zur x Axe steht, deren Inhalt also dy dz ist, so ist nach dem Vorhergehenden d. Wärmemenge, welche im Zeitelemente dt durch diese Fläche dy dz in d. Richtung d. x Axe dem Elemente dx dy dz = dV mitgetheilt wird: —

$$\div\, k\, dy\, dz \frac{di}{dx}\, dt$$ und zwar bedeutet diese Wärmemenge offenbar eine Zunahme d. Temperatur d. Elements, weil sie im positiven Sinne d. x Axe einströmt. Die Wärmemenge nun, welche durch die gegenüberliegende Fläche durch A_1 gesandt, im Zeitelemente dt im Sinne d. negativen x Axe dem Elemente mitgetheilt wird, findet man offenbar, wenn man nur d. oben gefundenen um ihr Differential nach x vergrößert, weil man um dx im Sinne d. x Axe fortschreiten muß, um von einer Fläche zur anderen zu kommen. Es ist also diese Wärmemenge:

$$- k\, dy\, dz \left(\frac{di}{dx} + \frac{d^2 i}{dx^2} dx\right) dt.$$

und also d. Zunahme an Wärmemenge, welche dem parallelepipedischen Elemente im Zeitelemente dt im Sinne d. x Axe mitgetheilt wird durch die beiden zu x Axe senkrechten Seitenflächen:

$$- k\, dy\, dz \left[\div \frac{di}{dx} + \left(\frac{di}{dx} + \frac{d^2 i}{dx^2} dx\right)\right] dt.$$

Analog ist d. Zunahme an Wärmemenge, welche dem Elemente dV im Zeitelemente dt im Sinne d. y und z Axe mitgetheilt wird:

$$- k\, dx\, dz \left[\div \frac{di}{dy} + \left(\frac{di}{dy} + \frac{d^2 i}{dy^2} dy\right)\right] dt$$

und $$- k\, dx\, dy \left[\div \frac{di}{dz} + \left(\frac{di}{dz} + \frac{d^2 i}{dz^2} dz\right)\right] dt.$$

Die Summe dieser 3 Ausdrücke gibt demgemäß diejenige resultierende Wärmemenge $d\Theta$, welche dem parallelepipedischen Körperelement im Zeitelement dt durch Leitung mitgetheilt wird. Dabei ist k [illegible], entsprechend d. Annahme, daß d. Wärmeleitungscoefficient von d. Richtung unabhängig sei und daß selbe sich nicht von Punkt zu Punkt ändere.
Berücksichtigt man dann noch, daß $dx . dy . dz = dV$, so bekommt man nach d. Summierung:

$$d\Theta = k\,dV\left[\frac{d^2 t}{dx^2} + \frac{d^2 t}{dy^2} + \frac{d^2 t}{dz^2}\right] dt.$$

Diese Gleichung kann man später zur Herleitung d. nachstehenden [illegible] Differentialgleichung dienen. Bevor aber diese Anwendung gemacht werden soll, sind noch bezüglich d. Wärmeleitung einige ergänzende Mittheilungen zu machen.

Zunächst muß noch hervorgehoben werden, daß im Innern eines homogenen Körpers [illegible] continuirlichen Gesetze die Temperatur eine Function d. Coordinaten [illegible] ebenso wie d. [illegible] und d. [illegible] im Falle d. homogenen Körpers [illegible] d. continuirlichen Gesetzes, [illegible]. Dasselbe gilt auch für den Fall eines discontinuirlichen Gesetzes, sofern die einzelnen Bestandtheile [illegible] in ihren Berührungsflächen [illegible] zwischen 2 [illegible] 2 Punkten [illegible] Körper, welche [illegible] unendlich nahe liegen, [illegible] unendlich verschieden [illegible].

Anders verhält es sich aber bei 2 verschiedenartigen, sich berührenden Körpern, wenn nämlich zwischen beiden Körpern K und K_1, die verschiedene [illegible] haben und sich in d. Fläche σ berühren, K eine höhere Temperatur als K_1 hat, so daß eine Wärmeübertragung von K auf K_1 stattfindet, so ändert sich [illegible] d. Temperatur innerhalb d. Körpers K continuirlich abnehmend gegen σ und ebenso continuirlich zunehmend gegen σ in Körper K_1. In d. an d. Berührungsfläche σ angrenzenden unendlich dünnen Oberflächenschichten d. beiden Körper K und K_1 können aber während d. Wärmeübertragung von K auf K_1 die Temperaturen um eine endliche Größe verschieden sein. Ist $d\sigma$ ein Element d. Berührungsfläche d. Körper K und K_1 und Δt d. endliche Temperaturunterschied der in d. Oberflächenschicht von K herrschenden Temperatur gegen diejenige in d. an σ angrenzenden Oberflächenschicht von K_1 und ferner $d\Theta$ d. Wärmemenge, welche im Zeitelement dt von K zu K_1 übergeht, so kann man jetzt d. Gleichung für d. Geschwindigkeit d. Wärmeübergangs schreiben:

$$\frac{d\Theta}{d\sigma . dt} = k_1 . \Delta t$$

; hierin bedeutet k_1 d. Wärmeübergangscoefficient an d. Stelle d. Elements $d\sigma$ d. Berührungsfläche, welche in diesem Falle [illegible] von d. chemischen Beschaffenheit d. beiden sich berührenden Körper abhängig ist. Ebenso wie an d. Berührungsfläche zweier verschiedener Körper kann auch im Innern eines nicht homogenen Körpers, [illegible] d. Grenze zwischen Bestandtheilen von verschiedener Art d. Temperatur sich discontinuirlich von einem Punkte zum andern ändern. Mit verhält sich in dieser Hinsicht [illegible] d. Strahlung, welche bekanntlich sich ebenso nur continuirlich ändert [illegible] im Innern eines homogenen Körpers als auch an den Berührungsflächen zweier sich berührender Körper. [illegible] Strahlungsunterschied könnte nur dann an d. Berührungsflächen d. beiden sich berührenden Körper stattfinden, wenn [illegible] überhaupt [illegible] Körper gäbe. Daß d. Temperaturänderung so verschieden ist von dem Verlaufe d. Strahlung von einem Punkt zum andern, ist leicht einzusehen, wenn man bedenkt, daß d. Strahlung nur abhängig von d. Natur d. Körper ist und nicht von d. chemischen Beschaffenheit ihrer Oberflächen, dagegen d. Temperatur wesentlich bedingt ist von d. chemischen Beschaffenheit d. Berührungsflächen und d. Intensität d. Strahlung. Schließlich muß [illegible] bemerkt werden, daß d. Wärmeleitung im Innern einer Flüssigkeit od. in einem Gemische von festen und flüssigen Bestandtheilen die Wärmeleitung wesentlich beeinflußt werden kann durch [illegible] Strömungen, welche leichter [illegible] werden können. Ehe dann die ganze Mischung dieselbe Temperatur in allen Punkten angenommen hat, kann eine längere Zeit vergehen, so daß

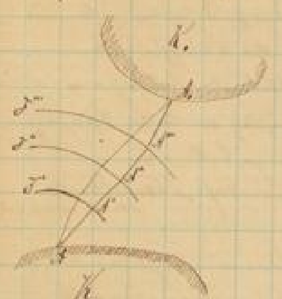
d. Wärmeleitungscoefficient k sehr groß erscheint. [illegible] Flüssigkeit [illegible] Wärme von unten [illegible] so kann durch d. Anordnung d. [illegible] Flüssigkeitsströmung in d. Flüssigkeit [illegible] werden, ist d. Temperatur in demselben Augenblick [illegible] d. Wärmeleitungscoefficient k also [illegible] bei einem [illegible] Gemisch von 2 [illegible] Bestandtheilen verschiedener Aggregatform [illegible] diese Bestandtheile [illegible] d. flüssigen Theile in Folge d. Flüssigkeitsströmungen [illegible] Nur bei homogenen festen Körpern hat k unter allen Umständen einen [illegible] Werth.

Bei d. Anwendung auf eine Flüssigkeit muß noch besonders hervorgehoben werden, daß δV in d. Gleichung für δQ nur das Volumen eines festen Körperelements bedeutet, [illegible] Flüssigkeit [illegible] Temperatur während d. Zeitelements δt [illegible] Wärmeströmungen [illegible] Die Gleichung für δQ hat also nur [illegible] einen theoretischen Werth [illegible] Wärmeleitungscoefficienten k einen festen Werth beilegen, [illegible] Wärmeleitungsvorgänge [illegible] d. Flüssigkeit [illegible] wird.

Wärmemittheilung durch Strahlung.

Außer durch Wärmeleitung kann d. Wärmeübertragung von einem Körper zum andern [illegible] vor sich gehen: [illegible]

[illegible] Wärmestrahlung [illegible]



[illegible] K. [illegible] K. [illegible] Wärmestrahlen [illegible] Zeitelement δt [illegible] Wärmestrahlen [illegible]

[illegible] Wärmestrahlen [illegible] Wärmestrahlung [illegible] Wärmestrahlen [illegible] Punkt A [illegible] Körper K [illegible] A [illegible] Wärmestrahlen [illegible]

[illegible]

Diese [illegible]

[illegible]

Diese mathematische Untersuchung wurde von Clausius ausgeführt. (Siehe: Grashof, Theoretische Maschinenlehre)
[illegible]

[illegible]

Körper einen schwarzen Körper als einen solchen definiren, dessen Absorptionscoefficient = 1 ist. Versteht man unter d. spec. Wärmeemission, so ist dieselbe für einen Punkt A d. Oberfläche eines Körpers diejenige Wärmemenge, welche pro Flächeneinheit und pro Zeiteinheit in diesem Punkte ausgestrahlt wird. Diese hängt im Allgemeinen von d. Beschaffenheit d. Oberflächenschichten dieses Körpers, von dem Temperaturzustand derselben und von d. Beschaffenheit d. Umhüllung ab. Mit Rücksicht d. ersten Umstandes führt man einen Coefficienten ein und versteht unter diesem Wärmeemissionscoefficienten d. Verhältniss d. spec. Wärmeemission eines beliebigen Körpers zu d. spec. Wärmeemission eines vollkommen schwarzen Körpers bei gleichen Umständen; d. Emissionscoefficient für einen schwarzen Körper ist also auch = 1. Aus den obigen Umständen geht dann auch weiter hervor, daß d. Emissions- und Absorptionscoefficienten verschiedener Körper auch in gleichem Verhältniss zu einander stehen.

Aequivalenz von Wärme & Arbeit. Wärmegleichung & Gleichung d. Arbeitsvermögens.

Nach vielfältigen Erfahrungen wird durch Aufwendung von Arbeit Wärme gewonnen, aber auch umgekehrt durch Aufwendung von Wärme Arbeit od. lebendige Kraft gewonnen. Als Beispiel d. ersten Art kann man anführen d. Erzeugung von Wärme durch Reibung, durch Compression von Gasen etc., wozu unbedingt Arbeit erforderlich ist; als Beispiel d. II. Art sind besonders d. calorischen Maschinen anzuführen, vermittelst welcher Arbeit unter Verbrauch von Wärme gewonnen wird. Nach Newton'schen Ansichten werden d. Kräfte als d. Ursachen d. Änderungen d. äusseren Zustandes eines Körpers definirt; wenn man nun, wie oben bemerkt, sieht, daß d. Wärme ganz dieselbe Wirkung haben kann, so müssen Wärme und Arbeit offenbar gleichartige Größen sein. Ferner wird d. Wärme als eine d. Ursachen d. Änderungen d. inneren Zustandes definirt; nach obigen Erfahrungen können aber Kräfte und Arbeiten zu denselben Wirkungen führen, woraus wieder ersichtlich, daß sich beide Größen gegenseitig ersetzen können. Hiernach liegt es also nahe, Wärme in Arbeit verwandeln zu können, indem man findet, daß d. lebendige Kraft eines Körpers durch Wärme vergrößert wird. Wärme und Arbeit sind also vertauschbare Größen. Dieser Begriff fordert nun ein gewisses Umsetzungsverhältniss voraus, dessen Zahlenwerth nur von den Einheiten abhängt, durch welche d. Größen gemessen werden. In d. That lehrt d. Erfahrung, daß wenn man durch Aufwendung von Arbeit den Wärmezustand verändert, und d. aufgewendete od. verbrauchte Arbeit mit d. Wärmemenge vergleicht, welche d. Körper zur Bewirkung derselben Änderung d. Wärmezustandes hätte mitgetheilt werden müssen, od. wenn man umgekehrt durch Änderung d. Wärmezustandes Arbeit verrichtet und d. verrichtete od. gewonnene Arbeit mit d. Wärmemenge vergleicht, welche dem Körper zur Bewirkung derselben Änderung hätte entzogen werden müssen, daß dann jene Arbeit dieser Wärme stets in demselben Verhältniss 1 : A proportional ist. Die Wärmemenge A, welche d. Arbeitseinheit entspricht, nennt man den Wärmewerth d. Arbeitseinheit od. das calorische Arbeitsäquivalent. Die Arbeit $\frac{1}{A} = W$, welche d. Wärmemenge = 1 entspricht, heißt d. Arbeitswerth d. Wärmeeinheit od. das mechanische Wärmeäquivalent. Die Zahlenwerthe von A und W sind am zuverlässigsten durch Reibungsexperimente zu ermitteln. Setzt man bei d. Messung von Arbeiten 1 kgmeter und bei d. Messung von Wärme 1 Calorie zu Grunde, so hat man gefunden:

$$\frac{1}{A} = W = 424 \text{ kgm.}$$

$$\text{also } A = \frac{1}{W} = \frac{1}{424} \text{ Calor.}$$

Diesen vorstehenden Bemerkungen zufolge hat irgend ein Körper in Folge seines augenblicklichen Zustandes aus einem doppelten Grunde d. Vermögen, Arbeit zu verrichten: einmal in Folge seines äußeren od. Bewegungszustandes und andererseits in Folge seines Wärmezustandes. Das Arbeitsvermögen, welches dem ersten Grunde entspringt, ist bekanntlich = d. lebendigen Kraft L und sei benannt mit d. äußeren Arbeitsvermögen, das dem ~~Wärme~~zustand entsprechende Arbeitsvermögen heißt d. innere Arbeitsvermögen und sei mit U bezeichnet, so ist das Gesammtarbeitsvermögen d. augenblicklichen Zustandes also $L + U$. Der Wärmewerth d. inneren Arbeitsvermögens $= AU$ sei d. Körperwärme genannt. Was nun den Ausdruck d. ersten Arbeitsvermögens betrifft, also L, so läßt dieses sich absolut durch Vergleichung d. Bewegungszustandes und d. Masse [illegible]. Diese [illegible] gilt nicht bei U, [illegible] [illegible] Wärmezustand ergeben, welche einer [illegible] Änderung durch Wärmeentziehung [illegible] und für welchen also d. Körperwärme resp. d. innere Arbeitsvermögen $= 0$ wäre. Wenn man aber 2 verschiedene Wärmezustände miteinander vergleichen und sagen will, in einem Zustand ist d. Wärmemenge um so und so viel größer wie in dem anderen, oder wenn man d. Arbeitsvermögen vergleichen will, so würden [illegible], welche zu bestimmende Constanten in d. Rechnung einzuführen sein.

Nach diesen Auseinandersetzungen kann man nun d. [illegible] Gleichung d. lebendigen Kraft dahin erweitern, daß man sagt: Es ist für irgend eine unendlich kleine Zustandsänderung eines Körpers d. Zuwachs an Arbeitsvermögen desselben = d. Arbeitssumme d. auf ihn einwirkenden äußeren Kräfte + dem Arbeitswerth d. ihm von Außen mitgetheilten Wärme. Die Kräfte, welche dabei auf den Körper wirken, sind theils Massenkräfte, zum Theil d. auf d. Oberfläche wirkende Drucke und endlich auch noch d. [illegible] Leitungen an d. Oberfläche. Wenn von den Letzteren abgesehen wird, so ist d. Gleichung, welche [illegible] Satz ausdrückt:

$$d(L+U) = dM + dP + W\,dQ$$

wenn dM, dP und dQ d. vorhin so benannte Bedeutung haben.

Was d. an d. Oberfläche stattfindende Leitung betrifft, so vermehrt sie diese offenbar eine negative Arbeit, indem durch sie theils dem Körper selbst theils dem umgebenden Körper Wärme entzogen wird; es wäre also noch ein Glied $+ dR$ hinzuzufügen. ~~Wenn wäre~~ kann aber d. oben bezeichnete Wärme als negativer Bestandtheil in d. Wärmemenge dQ einrechnen, welche dem Körper bei seiner unendlich kleinen Zustandsänderung von Außen mitgetheilt, [illegible] mitgetheilt [illegible] wird, indem man sich vorstellen kann, daß zunächst d. ganze äußere Leitungswärme an den betrachteten Körper übergeht und erst nachträglich ein Theil derselben ihm wieder entzogen wird. Unter dieser Annahme bekommt man dann d. obige sogenannte Gleichung d. Arbeitsvermögens.

Verbindet man diese Gleichung mit d. schon früher gefundenen (Seite 28, I) Gleichung für d. Zuwachs d. lebendigen Kraft:

$$dL = dM + dP - dR - dS + dE$$

so bekommt man demnach:

$$dU = W\,dQ + dR + dS - dE.$$

Hierin bedeutet nun $W\,dQ$ den Arbeitswerth der d. Körper von Außen mitgetheilten bz. [illegible] Wärme und dR und dS d. Arbeitswerth der theils durch d. [illegible] und theils durch innere Widerstände erzeugten Wärme. Es ist also

$W\,dQ + dR + dS$ den Arbeitswerth der Gesammtwärme,

welche dem Körper im Zeitelement dt mitgetheilt wird. Die eben gefundene Gleichung, welche d. Wärmegleichung heißen soll, drückt also aus, daß die Wärme $dU + dE$ theils zur Vermehrung d. inneren Arbeitsvermögens d. Körpers (resp. d. Körperwärme AU) theils zur Verrichtung von [illegible] od. allgemeiner, [illegible] verwendet wird.

aufzuwenden zur Vermehrung von Expansionsarbeit, wenn in d. Körper durchaus keine Temperaturschwankungen vorkommen, wie dies in d. Folge vorausgesetzt wird, und bei den hauptsächlich [illegible] vorkommenden flüssigen Körper auch vorausgesetzt werden darf. In diesem Falle wird nach Seite 29 [illegible] die Deformationsarbeit dE die Expansionsarbeit genannt, welche dann durch d. einfache Formel:

$$dE = \int p \cdot d(\delta v)$$

Nach den oben gemachten Bemerkungen findet also überhaupt die Verwandlung von Wärme in Arbeit immer nur durch Vermittlung einer Deformationsarbeit statt, indem die Wärme sich zunächst in Deformationsarbeit verwandelt und diese Deformationsarbeit dann nach d. Gleichung für d. lebendige Kraft theils zur Vermehrung d. lebendigen Kraft theils zur Überwindung von Widerständen gebraucht wird. Diese, sich in Deformationsarbeit verwandelnde Wärme kann dabei theils solche Wärme sein, welche dem Körper erst mitgetheilt wird, sei es von äußeren Körpern durch Berührung od. Strahlung, sei es an der Oberfläche durch d. Verwandlung von Reibungsarbeit (dR) od. im Innern durch d. Verwandlung innerer Widerstandsarbeit (dS) in Wärme, theils kann sie dem Körper selbst entnommen sein, entsprechend d. Fall, daß in d. Wärmegleichung dU negativ und dE positiv ist, wie es einer Verwandlung von Wärme in Deformationsarbeit zukommen würde. Umgekehrt kann aber auch sich Deformationsarbeit in Wärme umsetzen entsprechend dem Fall, daß in d. Wärmegleichung dE einen negativen Werth annimmt.

Es ist also d. gegenseitige ~~Verwandlung~~ Verwandlung von Wärme und Deformationsarbeit in einander eine umkehrbare Verwandlung, indem sie in dem einen od. anderen Sinne stattfinden kann. Es besteht jedoch auch eine Art d. Verwandlung von Arbeit od. lebendiger Kraft überhaupt in Wärme, welche ohne Vermittlung von Deformationsarbeit stattfinden kann, nämlich durch Vermittlung d. passiven Bewegungswiderstände d. äußeren Oberflächenreibung und d. inneren Widerstände. Die Verwandlung d. Arbeit passiver Bewegungswiderstände in Wärme ist also eine nicht umkehrbare Verwandlung, indem es im Wesen d. passiven Bewegungswiderstände liegt, daß sie immer eine negative Arbeit verrichten d. h. Arbeit od. entsprechende lebendige Kraft verbrauchen, welche indem sie als solche verschwindet, als Wärme erhalten wird.

Der Definition d. Körperwärme und d. inneren Arbeitsvermögens entsprechend sind diese Größen U u. AU offenbar bestimmt durch d. Wärmezustand, es werden also auch U u. AU durch dieselben bekannten Größen wie d. Wärmezustand charakterisirt. Nehmen wir z. B. unbedeutende Temperaturschwankungen nicht an, so sind diese charakterisirenden Größen v und p d. h. das spec. Volumen und d. Pressung. Im Folgenden bedeutet U nicht sowohl d. inneren Arbeitsvermögen d. ganzen Körpers sondern vielmehr d. spec. innere Arbeitsvermögen d. Körpers. Handelt es sich um einen homogenen Körper von gleichförmigem Wärmezustand, so kann man schlechtweg von d. spec. inneren Arbeitsvermögen d. Körpers sprechen, ebenso auch bei einem continuirlichen Gemisch von durchaus denselben Mischungsverhältnissen und gleichförmigem Wärmezustand. Handelt es sich aber um einen homogenen Körper von ungleichförmigem Wärmezustand od. um ein continuirliches Gemisch von veränderlichem Mischungsverhältniß, so kann man nur von d. spec. inneren Arbeitsvermögen in einem bestimmten Körperpunkte sprechen od. endlich auch von dem mittleren spec. inneren Arbeitsvermögen eines discontinuirlichen Gemisches. Wie schon oben bemerkt wird das innere Arbeitsvermögen durch dieselben Größen bestimmt wie d. Wärmezustand. Allgemein muß man es natürlich finden, daß d. innere Arbeitsvermögen U mit jenen den Wärmezustand charakterisirenden Größen in eine Gleichung zusammenhängt, die, eine Ergänzung d. Zustandsgleichung, ebenso wie diese in d. Form von d. Aggregatform und in den Stoffeigenschaften von dem Körper abhängt. Diese Gleichung soll d. Gleichung d. inneren Arbeitsvermögens genannt werden.

Dieses so definirte Princip d. Äquivalenz und gegenseitigen Umwandelbarkeit von Wärme und Arbeit od. lebendiger Kraft ist offenbar unverträglich mit d. Ansicht mancher, welche man früher von d. Wärme als einer Materie hatte, indem man sich diese Materie als eine unveränderliche Größe zu denken hat. Hierdurch ist dieses Princip zu d. Ansicht geführt [illegible] dieselbe weiter begründet, daß d. [illegible]

Wesen d. Wärme in dem Molekularzustande d. [illegible] Materie zu suchen sei. Um dann alle vorkommenden Wärmeerscheinungen genügend erklären zu können müsste man [illegible] annehmen bezüglich d. Art d. Bewegung, [illegible] und [illegible] die [illegible] mit [illegible] Zusammensetzung [illegible]. [illegible] d. Wärmetheorie [illegible] Weise d. mannigfaltigen Wärmeerscheinungen [illegible] Weise erklären [illegible] nicht zu [illegible] soll. Als [illegible] d. Äquivalenz von Wärme und Arbeit [illegible] Ausführungen und [illegible] als [illegible] zu betrachten.

Nach diesen ausführlichen Auseinandersetzungen, kann nun auf d. Herleitung d. allgemeinen Differentialgleichungen übergegangen werden, welche dazu dienen sollen d. Zustandsänderung einer Flüssigkeit zu bestimmen. Es waren zu dem Zweck schon 4 allgemeine Gleichungen aufgestellt,
(Rühlm. Seite 24 25) nämlich 3 Gleichungen, welche in d. Folge d. Fundamentalgleichungen genannt werden sollen und welche d. [illegible] in jedem Moment zwischen der äußeren Kraft und den Geschwindigkeiten stattfinden muss. Außer diesen dreien war noch d. sog. Kontinuitätsgleichung aufgestellt. In diesen 4 Gleichungen waren aber 5 Größen, welche als Funktionen d. Koordinaten d. betreffenden Punktes und als Funktion d. Zeit bestimmt werden müssten, nämlich d. Größen u v w μ p als Funktionen von x y z t. Es muss also noch eine weitere Bestimmungsgleichung aufgestellt werden um diese [illegible] Aufgabe allgemein auflösbar zu machen. Diese Herleitung ~~kann~~ nun vorgenommen werden.

In d. Folge sollen statt u v w für d. Geschwindigkeitskomponenten die Bezeichnungen u_x u_y u_z und für die resultierende Geschwindigkeit u eingeführt werden.

Ferner wird [illegible] in d. Gleichungen d. [illegible] Zustand charakterisiert durch d. Pressung p und die [illegible] μ [illegible] spez. Volumen v eingeführt werden. Man hat also zu setzen: $\mu = \frac{1}{gv}$ wenn v d. spez. Volumen und g d. Beschleunigung d. Schwere ist.

Durch diese Bezeichnungen eingeführt heißt die erste d. 3 Fundamentalgleichungen:

$$X - gv\frac{dp}{dx} = \frac{du_x}{dt} + u_x\frac{du_x}{dx} + u_y\frac{du_x}{dy} + u_z\frac{du_x}{dz} - \mathcal{R}gv\left(\frac{d\Delta}{dx} + \frac{d^2u_x}{dx^2} + \frac{d^2u_x}{dy^2} + \frac{d^2u_x}{dz^2}\right)$$

Die anderen beiden Fundamentalgleichungen ergeben sich in ganz analoger Weise [illegible] durch entsprechende Buchstabenvertauschungen.

In diesen Gleichungen bedeutet:

$$\Delta = \frac{du_x}{dx} + \frac{du_y}{dy} + \frac{du_z}{dz}$$

Die 4. Gleichung, d. Kontinuitätsgleichung war: $\frac{d\mu}{dt} + \frac{d(\mu u)}{dx} + \frac{d(\mu v)}{dy} + \frac{d(\mu w)}{dz} = 0$

in d. jetzigen Bezeichnungsweise also:

$$\frac{d\frac{1}{v}}{dt} + \frac{d\frac{u_x}{v}}{dx} + \frac{d\frac{u_y}{v}}{dy} + \frac{d\frac{u_z}{v}}{dz} = 0$$

Eine fünfte Bestimmungsgleichung zur Bestimmung von u_x u_y u_z v und p als Funktionen von x y z t erhalten wir nun mit Rücksicht auf die, durch die Temperaturänderungen hervorgerufenen Zustandsänderungen d. Flüssigkeit.

Bezeichnet nämlich τ die Temperatur im beliebigen Punkte x y z zur Zeit t, so ist auf Seite 36 die Wärmemenge dQ, welche dem speziellen Flüssigkeitsvolumelement δv im Zeitelement dt durch Leitung von den umgebenden Flüssigkeitsteilchen mitgeteilt wird:

$$dQ = k\,\delta v\left(\frac{\partial^2\tau}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\tau}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\tau}{\partial z^2}\right)dt$$

wobei k den Wärmeleitungscoefficienten ausdrückt, welcher allgemein als nach allen Richtungen hin gleich groß angenommen werden muß. Hierbei muß jedoch vorausgesetzt werden, daß im Innern d. Flüssigkeit d. Wärme nur durch Leitung und ohne Verschiebungsbewegungen übertragen wird, so daß man d. bekannte Wärmegleichung nur auf das ganze Volumelement δv beziehen kann. Indem nun weiter eigentliche Strahlungsvorgänge nicht in Betracht kommen, also $dR = 0$ sein muß, da d. betrachtete Volumelement im Innern d. Flüssigkeit liegt und man auch von den Temperaturdifferenzen, welche von Elementarwirbeln oder Geschwindigkeitsänderungen hervorgerufen werden, absehen muß, indem diese sich nicht in Elemente zerlegen lassen, sondern ihre Wirkungen nur im Ganzen berücksichtigt werden können. Es folgt dann auch $dS = 0$ (Man könnte sich auch aber denken, daß diese Vernachlässigungen in dem Wärmeleitungscoefficienten k entsprechend berücksichtigt wären)

Unter diesen Voraussetzungen ist dann nach d. bekannten Wärmegleichung d. oben gefundene Wärmemenge dQ auch: (siehe Seite 40)

$$dQ = \frac{dU + dE}{W} \quad \text{oder mit } W = \frac{1}{A}:$$

$$dQ = A(dU + dE)$$

wenn dU d. Zuwachs an innerer Arbeitsmenge und dE d. äußere Arbeit d. Elementes bedeutet. Nach Seite 29 ist aber in diesem Falle:

$$dE = p\cdot d(\delta v).$$

Wenn nun weiter unter U nicht sowohl d. innere Gesamtarbeitsmenge sondern d. innere Arbeitsmenge per Gewichtseinheit, per 1 kgr verstanden wird, so ist offenbar zu setzen anstatt dU:

$$\frac{\delta v}{v}\,dU$$

Ferner kann man offenbar setzen:

$$d(\delta v) = \frac{\delta v}{v}\,dv$$

da d. Änderung d. Volumens d. Elements während d. Zeitelementes dt ~~...~~ jetzt natürlich in demselben Verhältnis vor sich geht wie d. Änderung d. spez. Volumens v.

Setzt man alle die gefundenen Werte in d. Gleichungen für dQ und setzt dann diese beiden Ausdrücke gleich, multipliziert mit $\frac{dv}{d(\delta v)}$ und dividiert durch dt, so bekommt man:

$$A\left(\frac{dU}{dt} + p\,\frac{dv}{dt}\right) = k\,v\left(\frac{\partial^2\tau}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\tau}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\tau}{\partial z^2}\right) \quad \text{——} \quad a$$

Hierin sind $\frac{dU}{dt}$ und $\frac{dv}{dt}$ vollständige Differentialquotienten, indem U und v natürlich d. spez. inneren Arbeitsmengen und d. spez. Volumen auf ein Massenelement bezogen wurden, welches zur Zeit t d. speziellen Raumpunkt $(x\ y\ z)$ ausfüllt. Genau wie bei Herleitung d. Beschleunigungscomponenten $\varphi_x\ \varphi_y\ \varphi_z$ Seite 17, kann man also auch setzen:

$$\frac{dU}{dt} = \frac{\partial U}{\partial t} + u_x\frac{\partial U}{\partial x} + u_y\frac{\partial U}{\partial y} + u_z\frac{\partial U}{\partial z}$$

$$\text{und}\quad \frac{dv}{dt} = \frac{\partial v}{\partial t} + u_x\frac{\partial v}{\partial x} + u_y\frac{\partial v}{\partial y} + u_z\frac{\partial v}{\partial z}$$

Die Gleichung a bildet nun eine weitere 5te Bestimmungsgleichung gefunden; mit derselben sind aber 2 neue Unbekannte in d. Rechnung eingeführt worden, nämlich τ und U, welche ebenfalls Functionen von $x\ y\ z\ t$ zu bestimmen sind. Nun bestehen aber bekanntlich zwischen d. Temperatur τ und d. inneren Arbeitsmenge sowie den, d. Zustand charakterisierenden Größen v u. p 2 Beziehungen, nämlich die gewonnene Zustandsgleichung $f(p\,v\,t) = 0$ (Seite 32) und d. Gleichung d. inneren Arbeitsenergie $F(v\,p\,t\,U) = 0$ (Seite 41). Diese beiden Gleichungen im Zusammenhange mit den 5 früheren Gleichungen, nämlich d. 3 Fundamentalgleichungen, d. Kontinuitätsgleichung und d. oben gefundenen Gleichung A geben nun 7 Gleichungen zur Bestimmung d. 7 Größen $u\, u_1\, u_2\, v\, p\, t\, U$ als Funktionen von $x\,y\,z\,t$ vorausgesetzt, daß d. übrigen in d. Gleichungen vorkommenden Größen entweder als Konstante oder als Funktionen von $x\,y\,z\,t$ gegeben sind. Da aber weiter d. Gleichungen teils partielle Differentialgleichungen sind, so müssen zur vollständigen Bestimmung d. Aufgabe bezüglich d. Werte für d. bei d. Integration einzuführenden Integrationskonstanten, auch noch d. Anfangszustand und d. Oberflächenbedingungen gegeben sein, nämlich d. Zustand (äußerer und Wärmezustand) zu einer bestimmten Zeit, die Oberflächenkräfte und d. Verkehr von welchem d. Wärmezustand zwischen d. Flüssigkeit und ihrer Umgebung abhängt. Die vollständige Durchführung [illegible] kann diese nicht allgemein weiter geschehen, sondern muß nur für spezielle Fälle behandelt werden.

Ehe jedoch diese betrachtet werden, sollen noch einige andere wichtige Begriffe erörtert werden.

Umkehrbare und nicht umkehrbare Verwandlungen und Zustandsänderungen.

Nach den Bemerkungen Seite 41 geschieht d. Umwandlung von Wärme in Arbeit od. entsprechend lebendige Kraft immer durch Vermittlung von Deformationsarbeit, indem die mit Wärme [illegible] Arbeit od. lebendige Kraft stets als Deformationsarbeit erhalten wird, welche nachher [illegible], daß diese Deformationsarbeit [illegible] sei, wenn eine Flüssigkeitsteilchen an einem [illegible] od. ein fester Körper vorbeigeht, an welchem keine Temperaturdifferenzen vorkommen. Umgekehrt geht d. Umwandlung von Arbeit od. lebendige Kraft in Wärme auch durch Vermittlung von Deformationsarbeit vor sich. Jedoch kann auch Wärme unmittelbar aus den Arbeiten [illegible] Temperaturunterschied entstehen, nämlich äußerer Reibung und solcher inneren Widerstände, welche durch diskontinuierliche Geschwindigkeitsänderungen bedingt sind. In umgekehrter Weise kann dieser letzte Vorgang aber nicht stattfinden. Aus diesem Grunde wird d. gewöhnliche Umsetzung von Deformationsarbeit und Wärme in einander eine umkehrbare Verwandlung, dagegen d. Umsetzung d. Arbeit [illegible] Temperaturunterschied in Wärme eine nicht umkehrbare Verwandlung genannt.

In ähnlicher Weise kann man auch d. Übertragung von Wärme von einem Körper od. Körperteil mit d. Temperatur t zu einem andern von d. Temperatur t_0 als eine Verwandlung auffassen, nämlich so, daß d. Wärme selbst von d. Temperatur t_1 in d. Temperatur t_0 übergeht od. sich in solche verwandelt. Eine solche Übertragung od. eine solche Verwandlung von Wärme kann nun entweder unmittelbar durch Leitung, durch Strahlung od. durch Vermittlung eines andern Körpers stattfinden, welcher letztere dann eine Zustandsänderung erleidet und dadurch d. Übertragung d. Wärme vermittelt. Eine unmittelbare Wärmemitteilung durch Leitung (Wärmeleitung) kann d. früheren Definition gemäß nur von einem Körper höherer Temperatur zu einem Körper niedrigerer Temperatur stattfinden. Ganz dasselbe gilt auch für den Fall einer Wärmemitteilung durch Strahlung, wenn nur d. unter Seite 38–39 aufgestellten Bedingungen erfüllt sind. Die letzteren kann man nicht [illegible] als erfüllt ansehen, jedoch lehrt [illegible] d. damit gegebenen Erfahrungen hinsichtlich d. Übereinstimmung mit d. [illegible], daß man dieselben allgemein voraussetzen darf. Geschieht kann also ganz allgemein eine unmittelbare Übertragung d. Wärme immer nur von höherer zu niederer Temperatur stattfinden, so ist also diese Wärmeübertragung als eine nicht umkehrbare Verwandlung zu bezeichnen ist.

Damit nun d. Zustandsänderung eines Körpers mit einer umkehrbaren Verwandlung verbunden sei, ist hiernach also zunächst erforderlich, daß 1) nur verschwindend kleine [illegible] Temperaturunterschiede vorkommen, wodurch also nur eine unendlich kleine Menge lebendiger Kraft od. Arbeit in Wärme umgesetzt werde, und daß 2) nur eine unendlich kleine Wärmeübertragung von ~~[illegible]~~ höheren zu niederen Temperaturen stattfindet.

für unmittelbare Wärmeübertragung ist freilich streng genommen unvermeidlich, sofern überhaupt Wärmemittheilungen nicht ausgeschlossen werden sollen; denn Begriffe d. Unendlichkleinen als einem Grenzbegriff genügt jene jedoch zur Charakterisierung einer Zustandsänderung mit nur umkehrbaren Veränderungen, ist bei einer Zustandsänderung von endlicher Größe eine endliche Wärmemenge eine nur unendlich kleine Temperaturänderung erfahren. Damit dies d. Fall sei, ist nun zunächst mit Rücksicht auf den Wärmeaustausch an d. Körperoberfläche erforderlich, daß d. Differenz zwischen d. Oberflächentemperatur t_1 und d. äußeren Temperatur t_0 beständig unendlich klein sei; unter äußerer Temperatur t_0 d. Körpers die Temperatur d. unmittelbar angrenzenden Körpers verstanden, mit welchem eine Wärmemittheilung durch Berührung, sowie d. Oberflächenelemente entfernter Körper, mit denen ein Wärmeaustausch durch Strahlung stattfindet. Also könnten diese entsprechenden Temperaturen t_1 und t_0 jede für sich an verschiedenen Stellen eine endlich verschiedene sein. Wenn man denn aber durch stetig veränderte Temperatur d. Körper in unendlich dünne Schichten zerlegt denkt, so wird, wenn d. bei d. endlichen Zustandsänderung d. Körpers von einer solchen Schicht zur benachbarten geleitete endliche Wärmemenge nur eine unendlich kleine Temperaturänderung erfahren, ebenso wie d. durch d. Oberfläche geleitete Wärme; sofern aber d. Körper aus unendlich vielen solchen Schichten besteht, wird im Ganzen eine unendlich große Wärmemenge eine unendlich kl. Temperaturänderung od. eine endliche Wärmemenge eine endliche Temperaturänderung erfahren können. Damit also auch mit Rücksicht auf Wärmeleitung im Innern d. Körpers seine Zustandsänderung immer mit umkehrbaren Veränderungen verbunden sei, müssen noch, wenn d. Körper homogen ist, die Temperaturdifferenzen zwischen je 2 unendlich nahen Körperpunkten als unendlich klein höherer Ordnung d. zwischen je 2 beliebigen Körperpunkten als unendlich klein vorausgesetzt werden, so daß dann auch d. äußeren Temperaturen t_0 an verschiedenen Stellen nur unendlich wenig von einander verschieden sein dürfen. Ist aber d. Körper ein [illegible] Gemisch od. ein Gemisch aus Bestandtheilen gleicher Art und verschiedener Aggregatform, welche sich in Grenzzuständen bezüglich auf den Übergang aus d. einen in d. andere Aggregatform befinden, so ist die Temperaturgleichheit [illegible] Wärmemittheilung im Innern d. Körpers müssten eine gleichförmige [illegible] sowie eine gleiche Vertheilung d. Temperaturgradienten, so daß dieselbe [illegible] betreffenden Änderung in einer bestimmten Richtung stattfindet, zur Vermeidung von umkehrbaren Veränderungen muß also in diesem Falle d. Körpertemperatur in jedem Punkte d. Änderung entsprechend sein, während d. Oberflächentemperaturen t_0 an verschiedenen Stellen eine endlich verschiedene sein können unbeschadet d. unendlich kleinen Differenzen zwischen den sich entsprechenden Temperaturen t_1 und t_0.

Die Zustandsänderung eines Körpers heißt nun im Ganzen umkehrbar, wenn d. Umkehrung d. Änderungsgesetze ihrer Ursachen (äußerer Drucks und mitgetheilten resp. entzogenen Wärmemengen) genügt, um seine umgekehrten Sinne d. h. stattfinden zu lassen, so daß d. Körper mit allen seinen Elementen durch dieselben inneren und Wärmezustände in genau umgekehrter Aufeinanderfolge hindurchgeht, die äußeren od. Bewegungszustand betreffend zugleich mit d. entgegengesetzten Geschwindigkeitsrichtungen. Dazu ist offenbar erforderlich, daß mit d. Zustandsänderung nur umkehrbare Veränderungen verbunden sind und daß zu jeder derselben, also in d. Augenblick, in welchem d. Umkehrung stattfinden soll, d. Differenz $t_0 - t_1$ zwischen d. äußeren und d. Oberflächentemperatur d. Körpers an jeder Stelle seiner Oberfläche, wo ein Wärmeaustausch mit d. Umgebung stattfinden kann, $= 0$, sowie daß d. Körper selbst in Ruhe, so daß auch d. Differenz $p_0 - p_1$ zwischen d. äußeren Druck und d. Körperspannung p_1 in jeder äußeren Richtung bezüglicher Stelle d. Oberfläche $= 0$ ist. Während d. Zustandsänderung kann dann d. Körper nicht streng genommen beständig in Ruhe und also jene Differenzen $t_0 - t_1$ und $p_0 - p_1$ nicht streng genommen beständig $= 0$ sein; sie sind vielmehr unendlich klein und von entgegengesetzten Zeichen, jenachdem d. Änderung durch d. betreffenden Zustand in dem einen od. im umgekehrten Sinne stattfindet. Gleichwohl kann d. Begriff einer nicht nur im Ganzen, sondern auch in seinen einzelnen Augenblicken umkehrbaren, einer sogenannten umkehrbaren Zustandsänderung als der eines Grenzfalles aufgestellt werden, dessen Betrachtung von besonderem theoretischen Interesse ist.
So ist demnach eine Zustandsänderung zu verstehen, welche mit nur umkehrbaren Veränderungen verbunden ist und mit verschwindend kleiner Geschwindigkeit stattfindet, unter dem freilich auch d. Voraussetzung einer vorzugsweise unendlich kleinen Änderung d. äußeren Temperatur t_0, d. äußeren Drucks p_0

und d. Geschwindigkeiten gemessen werden muß, wenn von irgend einem Augenblicke an d. Veränderung d. Zustandsänderung durch d. ~~[illegible]~~ Veränderung d. Ausdehnungsgröße oder Wärme bewirkt werden soll.

Durch d. Voraussetzung von unendlich kleinen Geschwindigkeiten kommt nun noch eine Bedingung hinzu, nämlich in betreff d. Körperspannung. Im Allgemeinen ist durch d. z. d. Gesetz, ~~[illegible]~~ unzweifelhaft, daß d. augenblickliche Spannung von Punkt zu Punkt d. Körpers ändert, von 2 Umständen bedingt, nämlich von d. Molekularkräften und d. äußeren Bedingungen. Da nun aber durch äußere Bedingungen entsprechend d. obigen Voraussetzung eine Zustandsänderung mit umkehrbaren Veränderungen mit nur unendlich kleinen Geschwindigkeiten vor sich geht, ist in diesem Falle d. Gesetz nur von d. Molekularkräften abhängig. Als äußere dieser Molekularkräfte, namentlich also d. Schwere, kann man in d. meisten Fällen d. betreffenden Veränderungen abgesehen werden, so daß man Gase und Dämpfe, welche für andere Zustände behandelt werden. Handelt es sich z. B. um d. Wirkung eines Dampfes in einem senkrecht stehenden Dampfcylinder, so wird d. Spannung in den unteren Theilen durch Einwirkung d. Schwere d. Dampfes größer sein als in den oberen Schichten. Dieser Unterschied ist aber wegen d. verhältnißmäßig kleinen Raumes verschwindend klein, so daß man d. Spannung als vollkommen gleichförmig ansehen darf und mithin von d. Schwere d. Dampfes absehen kann. Wenn man also nur noch in solchen Fällen von verschwindend kleinen Geschwindigkeiten von d. Molekularkräften absieht, so ist offenbar d. augenblickliche Spannung in allen Punkten d. Körpers gleich und zwar gleich d. äußeren Druck. Bei festen Körpern ist dann auch d. augenblickliche Temperatur in allen Punkten d. Körpers gleich und gleich d. äußeren Temperatur. Ebenso verhält es sich natürlich mit Gemischen gleichartiger Theile von verschiedenen Aggregatformen, indem d. [illegible] Temperatur immer d. [illegible] herrschenden Spannung entsprechen muß, und da dadurch, abgesehen von unendlich kleinen Differenzen, in solchem Augenblick in allen Punkten dieselbe Spannung herrscht, muß d. augenblickliche Temperatur in allen Punkten d. Gemisches gleich sein und zwar = d. äußeren Temperatur. Bei d. Voraussetzung einer umkehrbaren Zustandsänderung, welche ein fester Körper od. ein solches Gemisch unterworfen ist, kann man also Bezug von d. augenblicklichen Spannung und Temperatur d. Körpers sprechen. Zwischen den beiden Körpern, festem Körper und Gemisch gleichartiger Theile von verschiedenen Aggregatformen, besteht aber noch ein Unterschied, nämlich der, daß bei festem Körper durch gleichförmige Temperatur und Spannung auch ein gleichförmiges spec. Volumen, überhaupt ein gleichförmiger Wärmezustand bedingt wird, während bei einem solchen Gemisch d. Wärmezustand durch Temperatur und Spannung nicht bedingt ist, vielmehr hier noch d. Mischungsverhältniß d. beiden Bestandtheile vorher bestimmt sein muß, um d. spec. Volumen und damit d. Wärmezustand zu bestimmen.

Wenn also in d. Folge von einem Körper d. Rede ist, welcher einer umkehrbaren Zustandsänderung unterworfen ist, so ist bei Abstraction d. Molekularkräfte (Schwere) in allen Punkten d. Körpers d. augenblickliche Temperatur und Spannung gleich groß.

Wenn allgemein d. augenblickliche Körperspannung in allen Punkten herrscht, also zwischen d. Oberflächenspannung [illegible] Differenz $p_0 - p$ in allen Punkten verschwindend klein und mithin d. äußeren Oberflächendruck in allen Punkten d. Oberfläche gleich groß sein. Bei einer ganz umkehrbaren Zustandsänderung ist also d. augenblickliche Spannung in allen Elementen d. Körpers und mithin d. Oberflächendruck in allen Punkten d. Oberfläche gleich groß.

Betrachtet man nun d. allgemeine Differentialgleichung d. bekannten Kraft (Seite 28)

$$dL = dM + dP - dR - dS + dE$$

welche sich auf eine unendlich kl. Zustandsänderung eines unendlich kl. Körperelements bezieht, so ist offenbar unter d. Voraussetzung, daß d. Zustandsänderung mit nur umkehrbaren Veränderungen verbunden ist, $dR = 0$ und $dS = 0$, indem keinerlei Wärmeerscheinungen, welche keine Arbeit in Wärme umsetzen, nicht vorkommen sollen entsprechend d. Definition d. umkehrbaren Veränderungen.

Es bleibt also nur:

$$dL = dM + dP + dE.$$

Ist d. Zustandsänderung eine [illegible] unendlich kleinen Zustandsänderung, stellt zu d. Bedingung, daß dieselbe nur mit unendlich kleinen [illegible] so nach d. Bedingung, daß sie mit verschwindend kleinen Geschwindigkeiten stattfindet, so ist dann auch offenbar d. Änderung d. lebendigen Kraft $= 0$, ist also $dL = 0$ ist, u. d. betreffende Gleichung geht dann über in:

$$dL = \div (dK + dS)$$

Diese Gegenarbeit dL (d. i. [illegible]) ist aber nach Seite 29:

$$dL = \int p \, d\delta V$$ wenn δV d. Volumen eines unendlich kleinen Körperelements, $d\delta V$ also d. Änderung dieses Volumens in d. Zeitelement dt bedeutet und wenn p d. [illegible] Pressung bezeichnet.

Abstrahirt man nun noch weiter von Massenkräften, so ist auch $dK = 0$ und [illegible] Pressung in allen Punkten d. Körpers in demselben Augenblick gleich groß. Dann kann man dann schreiben [illegible]:

$$dL = p \int d\delta V = p \, dV.$$

Also schließlich:

$$dL = \div dS = p \, dV.$$

In diesem [illegible] Falle ist also d. Gegenarbeit gleich dem [illegible] d. Arbeit [illegible] Druck, also gleich d. Arbeit d. Drucks, welchen d. Körper [illegible] seines Pressungszustands auf seine unmittelbare Umgebung ausübt. Im Allgemeinen ist diese Arbeit nur ein Theil d. Gegenarbeit; sie soll deshalb mit dem Namen „äußerliche Gegenarbeit“ od. „Oberflächenarbeit d. Körpers“ bezeichnet werden.

Bei solchen umkehrbaren Zustandsänderungen eines Körpers kann es sich offenbar immer nur um d. Änderungen seines Wärmezustands handeln, indem d. Änderungen d. äußeren od. Bewegungszustands [illegible] d. umkehrbaren Zustandsänderungen [illegible] sind, da dieselben [illegible] unendlich kleinen Geschwindigkeiten [illegible] werden müssen; [illegible] die Wärmemenge, welche einem Körper mitgetheilt od. entzogen werden muß, behufs einer [illegible] und [illegible] einem [illegible] stattfindenden Änderung seines Zustands d. h. einer nur Wärmezustandsänderung. Dazu dient im Allgemeinen d. Wärmegleichung, welche nach Seite 40 d. allgemeine Form hat:

$$dU = W dQ + dK + dS - dL.$$

[illegible] mit Rücksicht auf eine umkehrbare Zustandsänderung $dK = 0$ und $dS = 0$ ist, so kann man d. Wärmegleichung auch schreiben:

$$W dQ = dU + dL = dU + \int p \, d\delta V$$

wenn d. Integral sich auf δV bezieht und über d. ganzen Körper auszudehnen ist. Diese Gleichung drückt also unmittelbar den Arbeitswerth d. Wärme aus, welche d. Körper mitgetheilt werden muß, um eine unendlich kleine Änderung seines Wärmezustands zu bewirken.

Bezieht man diese Gleichung nicht auf d. ganzen endlichen Körper sondern auf 1 kg eines ~~[illegible]~~ Körperelements, welches unter Umständen unendlich klein [illegible] angenommen werden muß, damit man seinen Zustand als gleichförmig annehmen darf d. h. um d. Pressung und Temperatur in allen Punkten als gleich betrachten zu dürfen, so ist offenbar wenn man mit v d. spec. Volumen d. Elements, mit p seine Pressung und mit $U =$ eine Function von v u. p seine spec. innere Arbeitsmenge bezeichnet:

$$W dQ = dU + p \, dv.$$

= die Wärmezuführung bezogen auf 1 kg eines Elements unter d. Voraussetzung einer unendlich kleinen umkehrbaren Zustandsänderung

= dem Arbeitswerth d. Wärme, welche ~~[illegible]~~ dem Körperelement pr. 1 kg behufs einer unendlich kleinen Zustandsänderung mitgetheilt ist, bei welcher sich d. spec. Volumen v um dv und d. innere spec. Arbeitsmenge U sich um dU ändert und welche einem [illegible] Wachsen um dQ offenbar einer zu entsprechenden Wärmemenge entspricht.

Wenn wegen d. Abwesenheit von Massenkräften die eigentliche Pressung in allen Punkten gleich ist, können wir auch d. oben gefundenen Gleichung nicht nur auf 1 kg d. unendl. kleinen Körperelements beziehen sondern auch auf 1 kg d. ganzen Körpers, wobei jedoch, wenn dieselbe auch für jenen gelten soll, im Gewicht ist unter v und U d. mittleres spec. Volumen resp. d. mittlere spec. innere Arbeitsmenge pro 1 kg zu verstehen ist.

Handelt es sich nun darum d. Wärmemenge dQ zu ermitteln, welche d. Körper mitgetheilt resp. entzogen werden muss ~~um~~ resp. dem Körperelement pro 1 kg mitgetheilt werden muss, um eine Zustandsänderung von endlicher Größe zu erlangen, so hat man durch Integration d. vorhin gefundenen Wärmegleichung:

$$WQ = U_2 - U_1 + \int_{v_1 p_1}^{v_2 p_2} p\,dv$$

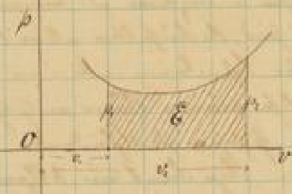
wenn unter $v_1\ p_1\ U_1$ d. spec. Volumen, d. Pressung und d. spec. innere Arbeitsmenge d. Anfangszustandes
und unter $v_2\ p_2\ U_2$ " " " " " " " " " d. Endzustandes
verstanden wird.

Um d. Integral berechnen zu können muss man d. Gesetz kennen, nach welchem sich v und p gleichzeitig ändern, nämlich d. spec. Beziehung, welche hierbei beständig zwischen v und p stattfindet. Man kann also d. vorhin ~~aus~~ gestellte Aufgabe allgemein nicht weiter durchführen, wenn nicht d. Gesetz gegeben ist, nach welchem d. gleichzeitige Änderung von v und p erfolgt.

Dieses Gesetz kann im Allgemeinen gegeben sein durch eine Gleichung zwischen v u. p von d. Form:

$$f(v, p) = 0$$

Diese Gleichung kann man nun offenbar als d. Gleichung einer ebenen Curve betrachten, welche auf ein rechtwinkliges Coordinatensystem (v als Abscissen u. p als Ordinaten) bezogen ist.



d. Integral $\int_{v_1 p_1}^{v_2 p_2} (p\,dv)$, welches nichts anderes als d. äußere Arbeit bei solcher Zustandsänderung ist, wird in d. Figur offenbar durch den Inhalt d. Fläche dargestellt, welche von d. Abscissenaxe v, d. Curve und den Ordinaten p_1 und p_2 begrenzt wird und ~~und~~ welche hierbei d. Anfangs- und Endzustand entsprechen.

Da diese geometrische Darstellung d. Beziehung zwischen d. spec. Volumen v und d. Körperpressung p im weiteren Verlauf von wesentlichem Nutzen sein wird, soll dieselbe mit einem besonderen Namen „Zustandscurve" bezeichnet werden.

Die oben entwickelten 3 Gleichungen, bezogen auf 1 kg eines unendlich kl. Körperelements resp. auf 1 kg d. ganzen Körpers, wurden aus d. allgemeinen Form d. Wärmegleichung entwickelt, indem dR und $dS = 0$ gesetzt wurden, entsprechend einer Zustandsänderung mit umkehrbaren Verwandlungen. Eine umkehrbare Zustandsänderung war damit noch nicht bestimmt, indem eine solche, außer daß sie mit nur umkehrbaren Verwandlungen ~~stattfindet~~ verbunden ist, auch noch mit unendlich kleinen Geschwindigkeiten stattfinden muß. Diese letzte Bedingung wurde aber ganz aus dem Spiel gelassen und es müssen jene Gleichungen ebensowohl für umkehrbare Änderungen d. Wärmezustandes gelten als für d. Änderungen d. Wärmezustandes bei solchen Zustandsänderungen, welche mit nur umkehrbaren Verwandlungen verbunden sind, sonst aber mit beliebig großen Geschwindigkeiten stattfinden können. Nun kann man in solchen Fällen, wo d. Zustandsänderungen mit umkehrbaren Verwandlungen verbunden sind aber mit ~~endlichen~~ Geschwindigkeiten von endlicher Größe vor sich gehen, durch Abwesenheit von Massenkräften auf eine gleichförmige Pressung und Temperatur schließen. Daraus folgt nun so, daß selbst bei d. Abwesenheit von Massenkräften, zur Untersuchung d. Änderung d. Wärmezustandes eines Körpers im Allgemeinen eine Zerlegung desselben in unendlich kleine Elemente nöthig ist, und also d. beiden letzten Gleichungen nur auf 1 kg ~~doch~~ eines solchen Elements bezogen werden können.

Mit dieser Einschränkung gelten alle Gesetze, welche wir folgenden d. Einfachheit wegen für umkehrbare Zustandsänderungen aufstellen werden, allgemein für d. Änderungen d. Wärmezustands bei Zustandsänderungen mit nur umkehrbaren Verwandlungen d.h. für umkehrbare Änderungen d. Wärmezustands. Bei d. Herleitung dieser Gesetze kann man übrigens immer einen Körper von gleichförmiger Temperatur und Pressung voraussetzen von 1 kg Gewicht, dessen Volumen also = d. spez. Volumen v ist, weil ihre Anwendung ist an Einschränkungen gebunden, nämlich im Allgemeinen auf unendlich kl. Körperelemente beschränkt, wenn nicht d. Geschwindigkeiten und Unterschiede entsprechend klein sind, wobei außerdem auch im Falle nicht homogener Körper von endlicher Größe v und U als d. mittleren spez. Volumen und mittleres spez. inneres Arbeitsvermögen zu verstehen sind.

Es gibt nun besondere Arten umkehrbarer Zustandsänderungen, welche von hauptsächlichem Interesse sind, nämlich:

1) Umkehrbare Zustandsänderungen, welche bei constantem Volumen stattfinden, also charakterisiert sind durch $dv = 0$. Die Zustandscurve ist in diesem Falle offenbar eine zur p Axe parallele Gerade.
2) Umkehrbare Zustandsänderungen, welche bei constanter Pressung stattfinden, welche also charakterisiert werden durch $dp = 0$, in welchem Falle d. Zustandscurve natürlich eine zur v Axe parallele ist.
3) Umkehrbare Zustandsänderungen bei constanter Temperatur entsprechend $dt = 0$ unter t d. Temperatur verstanden. Die Zustandscurve ist in diesem Falle allgemein eine krumme Linie und wird bezeichnet mit d. Namen: isothermische Curve.
4) Umkehrbare Zustandsänderung bei constantem inneren Arbeitsvermögen also constanter Körperwärme entsprechend $dU = 0$. Die im Allgemeinen als krumme Linie erscheinende Zustandscurve heißt man isodynamische Curve.
5) Umkehrbare Zustandsänderungen ohne Mittheilung od. Entziehung ~~dQ~~ von Wärme, welcher Fall, charakterisiert durch $dQ = 0$, von besonderer Wichtigkeit ist. Die Zustandscurve heißt in diesem Falle: adiabatische Curve.

Die unter 3 angeführte, nach einer isothermischen Curve vor sich gehende Zustandsänderung kann man sich dadurch vermittelt denken, daß d. betreffende Körper mit einem anderen Körper in wärmeleitender Berührung steht, welcher d. fortwährend constante Temperatur besitzt (d. letztere Körper kann etwa von so großen Dimensionen gegenüber dem betrachteten sein, daß eine Temperaturänderung d. ersteren von dem letzteren ohne Einfluss auf d. Temperatur d. großen Körpers ist). Die unter 5 angeführte und nach einer adiabatischen Curve vor sich gehende Änderung kann man sich dadurch vermittelt denken, daß d. betreffende Körper in eine Hülle eingeschlossen ist, welche für Wärme undurchdringlich ist ohne d. Volumenänderung d. Körpers zu hindern.

Was nun im Gegensatz zu den vorigen die andersartigen Zustandsänderungen betrifft, welche nicht nur mit endlichen Änderungen d. äußeren Zustands d. Körperzustands, sondern auch mit nicht umkehrbaren Verwandlungen verbunden sind, so lassen sich diese häufig selbst durch Zerlegung d. Körpers in unendlich kleine Elemente nicht in ihren einzelnen Theilen bezüglich auf Raum und Zeit verfolgen. Man muss oft ganz und gar verzichten, solche Zustandsänderungen mathematisch zu untersuchen, besonders wenn diese mit Geschwindigkeitsänderungen, Wirbel, Wechselbewegungen etc. überhaupt d. innerlichen Geschwindigkeitsänderungen im Innern verbunden sind, deren Gesetzmäßigkeit nicht [illegible] und dazu [illegible] vollständig unbekannt ist. Indessen muss in solchen Fällen, die sich freilich allgemein nicht in ihrem ganzen Verlauf verfolgen lassen, kann man spezielle Fragen dennoch mit Hilfe d. bekannten allgemeinen Gleichungen (unter Anwendung von Wärme und Arbeit und Wärmezuführung und Steigerung d. Arbeitsvermögens) leicht beantworten. Von besonderem Interesse ist in dieser Hinsicht d. Aufgabe betreffend d. Bestimmung d. Änderung d. inneren Arbeitsvermögens für den Fall, daß vorausgesetzt für d. Anfangs- und Endzustand d. Körper sich in äußerer Ruhe befindet, wenn sie bezüglich gegeben ist die mitgetheilte Wärme $= Q$, die Volumenänderung d. Körpers und d. äußere Druck so in den normal zur Oberfläche bewegten Punkten d. letzteren während d. Dauer dieser Bewegung. Ein spezieller solcher Fall ist z. B. folgender:

Es seien 2 communicirende Gefäße vorhanden, deren Communication aber durch einen Hahn geschlossen werden kann und in diesen Wasser [illegible], in dem einen Gefäß befinde sich eine gasförmige Substanz, aber Dampf, während das andere luftleer gepumpt ist. Vor dem Öffnen d. Hahns befindet sich d. Dampf daher offenbar in äußerer Ruhe entsprechend d. vorher genannten Voraussetzung. Wenn nun aber d. Hahn geöffnet wird, so strömt d. Dampf mit großer Geschwindigkeit von dem einen zum andern Gefäß über und es entstehen dabei Wirbel, Wellenbewegungen etc., deren Geschwindigkeit man nicht sehen kann. Nachdem aber in beiden Gefäßen Gleichgewicht eingetreten ist, ist der Dampf wieder zur Ruhe gekommen und demgemäß auch d. 2te Bedingung, daß die kinetische Energie verschwinden solle, erfüllt, man kann also auch d. ~~[illegible]~~ Änderung d. innern Arbeitsvermögens bestimmen, welche erst mit d. Zustandsänderung verbunden ist, wenn man nur auf d. vorhin entsprechenden Größen kennt. Es muß also d. mitgetheilte Wärme Q gegeben sein; d. Volumenänderung d. Körpers (Dampfs) kennt man, weil d. Volumen d. einen Gefäßes und d. Volumen d. beiden Gefäße zusammen bekannt ist. Ferner ist auch d. äußere Druck p_0 gegeben, welcher in den normal zur Oberfläche gerichteten Punkten d. letzteren während d. Dauer d. Zustandsänderung stattfindet, und ist dieser nämlich in diesem speciellen Falle $= 0$ gegeben, denn so lange überhaupt eine normal zur Oberfläche gerichtete Bewegung d. Dampfes möglich war, [illegible] d. Gefäßwandungen [illegible], ist d. äußere Druck offenbar $= 0$. Erst wenn d. Gleichgewichtszustand wieder eingetreten ist, also keine Bewegung in normaler Richtung zur Oberfläche möglich ist, kann man wieder von äußerem Druck sprechen. In diesem speciellen Fall ist also $p_0 = 0$. Wenn man also d. Wärmemenge kennt, welche d. Dampfe durch d. äußeren Gefäßwände [illegible] mitgetheilt oder entzogen wird, so können wir d. Änderung d. Arbeitsvermögens auch bestimmen.

Um diese Frage allgemein zu beantworten kann man ausgehen von d. bekannten Gleichung d. ~~[illegible]~~ Arbeitsvermögens (Seite 40):

$$d(L+U) = dM + dP + W\,dQ$$

Wenn man diese Gleichung mit Bezug auf d. Vorgang d. oben vorausgesetzten Art integrirt und zwar für d. ganze Dauer d. Zustandsänderung, dann ist offenbar d. Summe von dL: $\int dL = 0$, indem diese dL anfangs erst positiv [illegible] negativ wird und [illegible] sich alle [illegible] gegenseitig aufheben. Die Integration ergibt also:

$$U_2 - U_1 = M + P + WQ$$

wenn U_2 u. U_1 d. Arbeitsvermögen im End- resp. Anfangszustand, unter M d. Gesammtarbeit d. Molecularkräfte, unter P d. Gesammtarbeit d. äußeren Drucks und unter Q d. Gesammtbetrag d. von außen mitgetheilten Wärme verstanden. Was nun d. Arbeit P d. äußeren Drucks betrifft, so sei p_0 d. augenblickliche spec. äußere Druck für ein Element $d\sigma$ d. Oberfläche, also $p_0\,d\sigma$ d. auf [illegible] Flächenelement wirkende äußere Druck. Wenn dieses Element $d\sigma$ während d. Zeitelements dt sich in normal zur Oberfläche stehender Richtung um d. Strecke ds nach außen bewegt, so ist offenbar $p_0\,d\sigma\,ds$ für d. unendl. kl. Zustandsänderung d. Gesammtgröße d. Arbeit d. äußeren Drucks auf d. Oberflächenelement $d\sigma$ und demgemäß d. Summe dieser Werthe bezüglich d. ganzen Oberfläche = d. Gesammtgröße d. Gesammtarbeit d. äußeren Drucks auf d. Körperoberfläche also:

$$\iint p_0\,d\sigma\,ds = -P$$

wovon sich d. eine Integration über den in normaler Richtung bewegten Theil $d\sigma$ d. Körperoberfläche, die andere über den ganzen Betrag dieser Bewegung zu erstrecken hat.

Wenn man nun noch wie es gewöhnlich immer d. Fall sein darf von Molecularkräften absieht also $M = 0$ gesetzt werden kann, so ist d. Änderung d. innern Arbeitsvermögens:

$$U_2 - U_1 = WQ - \iint p_0\,d\sigma\,ds$$

Bei frei stattfindendem Vorgang ist nun [illegible] d.

Zu Anfang d. Zustandsänderung wird Körperwärme in Expansionsarbeit verwandelt, von welcher ein Theil sich in Oberflächenarbeit verwandelt, indem dieselbe zur Ueberwindung d. auf d. Oberfläche wirkenden äußeren Drucks dient; d. Rest verwandelt sich in lebendige Kraft. Ferner

Dadurch geht diese lebendige Kraft durch Stösse [illegible] und Oberflächenschichten wieder in Wärme über, der Arbeitswerth d. äussern [illegible] d. innern Arbeitsgrösse, [illegible] von der Lage d. Oberflächenpunkte [illegible], wenn nicht [illegible] Wärme = Q mitgetheilt würde, welche d. Wärme [illegible] d. innern Arbeitsgrösse um ihren Arbeitswerth = WQ vergrössert.

Wenn nun ferner bei d. Zustandsänderung d. äussere Druck p_0 in dem normal zur Oberfläche [illegible] Theilchen d. letzteren in jedem Augenblick gleichförmig vertheilt ist, d. h. in jedem Augenblick in jedem Punkt gleich gross ist, so kann man auch d. [illegible] folgende Gleichung schreiben:

$$U_2 - U_1 = WQ - \int p_0 \int d\sigma\, ds$$

Die Summe d. Producte aus $d\sigma$ und ds ist aber offenbar nichts anderes als d. Volumenänderung d. ganzen Körpers also $= dV$; folglich:

$$U_2 - U_1 = WQ - \int p_0\, dV.$$

Ist ferner d. äussere Druck p_0 nicht nur in jedem Augenblicke in allen Punkten gleich, sondern auch während d. ganzen Dauer d. Zustandsänderung in allen Oberflächenpunkten constant, so ist natürlich:

$$U_2 - U_1 = WQ - p_0 \int dV = WQ - p_0 (V_2 - V_1)$$

wenn V_1 d. Volumen d. Körpers im Anfangszustand und unter V_2 d. Volumen im Endzustand verstanden wird.

In dem noch einfacheren Fall, d. ein [illegible] luftleeren Gefäss [illegible] (Vacuum) ist deshalb p_0 während d. ganzen Dauer constant und zwar constant = 0. [illegible] Oberfläche [illegible] in normaler Richtung zur Oberfläche [illegible]. In diesem Falle ist also:

$$U_2 - U_1 = WQ$$ d. h. d. Änderung d. innern Arbeitsgrösse = dem Aequivalent d. Arbeit d. mitgetheilten Wärme.

Wenn man nun auch noch von dieser Wärmemittheilung absieht, also wenn d. Wärme [illegible] mit [illegible] Wänden [illegible] ([illegible] d. innern und äussern Temperaturen [illegible] während d. ganzen Dauer d. Zustandsänderung) also $Q = 0$ setzt, so bekommt man:

$$U_2 - U_1 = 0$$; unter diesen Umständen hat also eine Änderung d. innern Arbeitsgrösse nicht stattgefunden.

Die Wärmelehre gestattet überhaupt [illegible] Umformungen um sie zur Lösung von Aufgaben [illegible] zu benutzen. Ehe diese Umformungen [illegible] werden, soll noch ein [illegible] Princip behandelt werden, nämlich [illegible] Princip d.:

Aequivalenz von Verwandlungen.

Im Vorhergehenden [illegible] d. Art von (zweierlei) Verwandlungen von Arbeit od. lebendige Kraft in Wärme und umgekehrt und d. Verwandlung d. Wärme von einer bestimmten Temperatur in eine andere von andrer Temperatur. Zur kürzeren Bezeichnung soll d. erste Verwandlung eine Verwandlung d. ersten Art und d. Verwandlung von Wärme in eine solche von anderer Temperatur eine Verwandlung d. 2ten Art genannt werden. Jede dieser beiden Verwandlungen kann in 2 facher Weise stattfinden, [illegible]. Die Verwandlung von Wärme in Arbeit soll eine positive und d. umgekehrte von Arbeit in Wärme eine negative Verwandlung d. ersten Art genannt werden. D. Verwandlung d. 2ten Art kann stattfinden indem Wärme von einem [illegible] zu höherer und umgekehrt von höherer zu niederer Temperatur übergeht. D. erste Übergang soll eine positive und d. letzte Übergang eine negative Verwandlung d. 2ten Art genannt werden.

Aus dem Vorhergehenden ist es bekannt, daß eine positive Verwandlung d. ersten Art nie unmittelbar stattfinden kann, daß niemals die Wärme sich von selbst in [illegible] umsetzen kann, ohne daß ein anderer Körper verwandelt, welcher d. Verwandlung von Wärme in Arbeit vermittelt. Ebenso ist es auch bekannt, daß eine positive Verwandlung d. 2ten Art auch nicht unmittelbar durch Leitung od. Strahlung stattfinden kann, sondern dazu immer d. Vermittlung eines dritten Körpers nöthig ist. Unterschieden können also positive Verwandlungen nie unmittelbar stattfinden, während d. negativen Verwandlungen auch unmittelbar stattfinden können ohne Zuthun eines dritten Körpers, indem sich bekanntlich lebendige Kraft od. [illegible] Arbeit unmittelbar durch [illegible] in Wärme umsetzen können und ebenso Wärme von höherer Temperatur in solche von niederer Temperatur übergehen kann. Jede positive Verwandlung erfordert also d. Zustandsänderung eines vermittelnden Körpers. Hierbei ist besonders d. Fall von Interesse, daß d. Zustandsänderung ein sogenannter Kreisprozeß ist, d. h. eine solche Zustandsänderung ist, welche d. vermittelnden Körper nachher wieder in seinen Anfangszustand zurückführt. Auf diesen Fall bezieht sich namentlich das von Clausius aufgestellte Princip d. Aequivalenz von Verwandlungen, welches in folgendem Satz besteht:

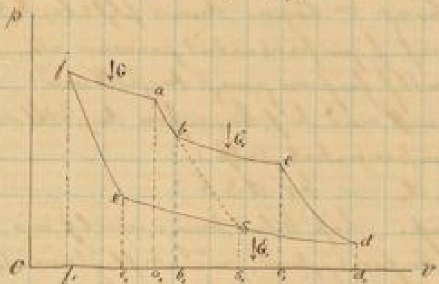
Wenn ein solcher Kreisprozeß eines vermittelnden Körpers mit irgend einer positiven Verwandlung verbunden ist, so muß nothwendig derselbe auch zugleich mit einer negativen Verwandlung stattfinden, welche letztere zu d. positiven Verwandlung in einer solchen Beziehung steht d. Art, daß wenn man jede Verwandlung bezüglich ihrer Art, Größe und Sinn durch eine algebraische Größe, durch ihren sogenannten Verwandlungswerth ausdrückt, alsdann die Summe aller dieser Verwandlungswerthe = 0 oder negativ ist (vorzeichen gezählt) und zwar = 0 in dem Grenzfall, daß d. Kreisprozeß umkehrbar ist d. h. wenn derselbe aus lauter umkehrbaren Zustandsänderungen besteht.

Die Herleitung dieses Princips knüpft sich an eine Erweiterung d. früher genannten Grundsätze betreffs d. Wärmemittheilungen durch Leitung und Strahlung. Wie bekannt ist es durch d. Definition richtig, daß eine unmittelbare Wärmeübertragung von niederer zu höherer Temperatur durch Leitung nicht stattfinden kann. Es wurde ~~aber~~ weiter unmittelbar angenommen, daß auch durch Strahlung solche Übergänge von niederer zu höherer Temperatur nicht möglich seien. D. Erweiterung d. Grundsätze besteht nun in d. Erweiterung dieser Grundsätze, indem man annimmt, daß ein Übergang von niederer zu höherer Temperatur d. h. also eine positive Verwandlung d. 2ten Art, auch mittelbar nie und stattfinden kann, wenn nicht gleichzeitig damit eine Änderung d. Zustandes d. vermittelnden Körpers od. eine sonstige Verwandlung verbunden ist. Allgemein läßt sich dies freilich nicht beweisen, die vielfache Übereinstimmung d. hieraus gezogenen Folgerungen mit den gemachten Erfahrungen kann aber wohl als Rechtfertigung d. obigen Annahme angesehen werden.

Um nun d. fragliche Princip herzuleiten, denke man sich ~~mit~~ einen Körper einem umkehrbaren Kreisprozeß unterworfen von besonderer Art. Zunächst ist zu bemerken, daß d. Zustandscurve, welche d. Gesetz d. Zustandsänderung (Änderung d. Wärmezustandes) graphisch durch v u. p darstellt, für einen Kreisprozeß natürlich eine in sich zurücklaufende ebene Curve ist. Die Art d. Kreisprozesses soll nun d. Art sein, daß d. entsprechende Zustandscurve abwechselnd aus isothermischen und adiabatischen Curvenstücken besteht und zwar aus je 3 Stücken d. einen u. d. andern Art; d. h. also den Körper einem solchen umkehrbaren Kreisprozeß unterworfen d. Art, daß d. Körper erst eine Zustandsänderung bei constanter Temperatur entsprechend d. isothermischen Curve, dann eine umkehrbare Zustandsänderung ohne Mittheilung und Entziehung von Wärme entsprechend d. adiabatischen Curve und so abwechselnd weiter erfährt, bis er schließlich wieder in seinen Anfangszustand zurückgekehrt ist. Die umkehrbare Zustandsänderung ohne Mittheilung od. Entziehung von Wärme nach einer adiabatischen Curve kann man sich sehr einfach dadurch vermittelt denken, daß man d. betreffenden Körper in eine für den Wärmedurchgang undurchdringliche Hülle einschließt, welche aber der Volumänderung keine Hindernisse entgegensetzt. D. umkehrbare Verwandlung bei constanter Temperatur nach einer isothermischen Curve kann man sich dadurch vermittelt denken, daß d. betreffende Körper zunächst an einer Stelle seiner Oberfläche von einer d. Wärme nicht durchlassenden Wand begrenzt ist, am übrigen Theile dagegen mit einem andern Körper von constanter Temperatur in Berührung sich befindet, welche also auch dem Hilfskörper erhalten bleibt, so lange d. Berührung dauert.

Was d. Art d. Hilfskörpers K betrifft, so soll über dieselbe nichts Specielles festgesetzt werden außer den folgenden 2 Voraussetzungen: 1) der Körper K soll von solcher Art sein, daß bei gleichem Volumen sein Druck um so größer wird, je höher seine Temperatur ist und daß 2) bei constanter Temperatur d. Volumenzunahme eine Mittheilung von Wärme erfordert und einer Wärmeentziehung eine Volumenabnahme entspricht. (Im Allgemeinen gelten diese Voraussetzungen nicht für alle Körper, od. doch für d. meisten)

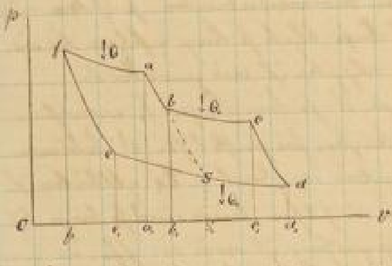
Der Hilfskörper K habe ein Gewicht = 1 Kgr., so daß d. spec. Volumen v zugleich d. Volumen d. ganzen Körpers ist. Im Anfangszustand sei d. Volumen = v und d. Pressung p; bei Abwesenheit von Molecularkräften kann man dann bekanntlich bei einer solchen umkehrbaren Zustandsänderung von d. Pressung und Temperatur in einem Augenblick überhaupt sprechen. Die augenblickliche Temperatur sei = t. Den Anfangszustand kann man sich nun dargestellt denken durch einen Punkt A, dessen Coordinaten in Bezug auf d. bekannten Coordinatenachsen v und p sind.



Die umkehrbare Zustandsänderung d. Körpers K erfolge nun zuerst nach einer adiabatischen Linie ab d.h. diese Linie stellt d. Gesetz dar, nach welchem d. Zustandsänderung ohne Mittheilung od. Entziehung von Wärme erfolgt. Die Temperatur habe sich bis zum Zustand b auf t_1 geändert; d. jetzige Zustand ist dann dargestellt durch d. Abscisse Ob_1 als Volumen und bb_1 als Pressung. Die weitere Zustandsänderung erfolge nach d. isothermischen Linie bc also bei constanter Temperatur so daß d. Temperatur im Zustand c noch t_1 ist; die Zustandsänderung soll unter Volumenzunahme erfolgen, es muß also d. Körper K_1, mit welchem man sich den Hilfskörper verbunden denkt um eine constante Temperatur zu erhalten, eine gewisse Wärmemenge Q_1 abgeben und dem Körper K mitgetheilt werden. Diese d. Hilfskörper von Außen mitgetheilte Wärmemenge sei in d. Zeichnung dargestellt durch einen Pfeil, welcher von Außen gegen d. Curve gerichtet ist. Im Zustand c ist nun d. Pressung dargestellt durch cc_1 und d. Volumen durch Oc_1. Hierauf erfolge wieder d. Zustandsänderung nach einer adiabatischen Linie cd und zwar in einem solchen Sinne, daß die Temperatur abnimmt etwa bis t_2. Im Zustand d ist also d. Volumen entsprechend Od_1, d. Pressung $= dd_1$ und d. Temperatur $= t_2$ $(t_2 < t_1)$. Die weitere Zustandsänderung erfolge wieder nach einer isothermischen Linie de indem man sich d. Hilfskörper K mit einem Körper K_2 von constanter Temperatur t_2 in Berührung befindend denkt. Die Zustandsänderung erfolge, wie es auch d. Zeichnung andeutet, unter Volumenabnahme, so daß also d. Körper K_2 eine gewisse Wärmemenge abgegeben wird und zwar soll diese Abgabe so lange erfolgen bis im Zustand e eine ebenso große Wärmemenge Q_2 an diesen Körper K_2 abgegeben ist wie zuvor bei d. Zustandsänderung nach d. isothermischen Linie bc d. Hilfskörper K dem Körper K_1 entnommen. Angedeutet sei dies durch einen Pfeil welcher von d. Curve weg nach Außen hin gerichtet ist. D. Volumen ist also nun geworden $= Oe_1$, d. Pressung $= ee_1$, während d. Temperatur constant $= t_2$ geblieben ist. Jetzt erfolge d. Zustandsänderung nach einer adiabatischen Linie ef in solchem Sinne und so lange bis d. Körper K wieder seine Anfangstemperatur t erlangt hat. Die Pressung ist nun $= ff_1$, d. Volumen $= Of_1$ und d. Temperatur wieder = d. Anfangstemperatur t. Endlich erfolge d. letzte d. gedachten Zustandsänderungen nach einer isothermischen Linie fa und zwar in solchem Sinne und so lange bis auch d. Volumen d. Hilfskörpers K wieder = Anfangsvolumen v geworden ist. Insofern nun d. Wärmezustand durch v und t vollkommen bestimmt ist, und da diese wieder = dem Anfangsvolumen und Anfangstemperatur geworden sind, muß auch d. Pressung wieder = Anfangspressung geworden sein, überhaupt d. Hilfskörper wieder in seinen Anfangszustand zurückgekehrt sein. Die ausgeführte Zustandsänderung ist also nun ein Kreisprozeß geworden, da d. Zustand wieder geschlossen ist, und zwar ein umkehrbarer Kreisprozeß, weil alle vorkommenden Zustandsänderungen unterschieden werden. Auf Grund d. im Anfang d. Betrachtung gemachten Voraussetzungen ist ab offenbar leicht einzusehen, daß d. Volumen Of, des Körpers im Zustande f kleiner sein muß als das Volumen Oa_1 im Anfangszustand a_1 mit Rücksicht darauf aber, daß wie im Anfang vorausgesetzt wurde, einer Volumenzunahme eine Wärmemitteilung entspricht, während dagegen nach d. [illegible] genannte Zustandsänderung nach d. isothermischen Linie fa, welche bei constanter Temperatur t_1 [illegible] d. die Mitteilung einer gewissen Wärmemenge Q an den Wärmekörper K. Man denkt nun ferner d. adiabatische Linie ab und isothermische Linie de bis zu ihrem Schnittpunkt S verlängert, und stellt sich dann so daß d. Kreisprozeß nach d. mitgeteilten Weise jedoch in dem Sinn $abcdsa$ erfolge, also nach d. isothermischen Linie nur bis S, so ist Q_2 die Wärmemenge, welche bei d. Zustandsänderung d. Körpers nach d. isothermischen Linie dS unter Volumenabnahme bei constanter Temperatur t_2 an den Wärmekörper K_2 mitgeteilt wird. Entsprechend d. im Anfange ausdrücklich gemachten Voraussetzung, daß bei gleichem Volumen einer höheren Temperatur auch immer eine höhere ~~Temper~~ Spannung entspreche, und da d. Temperatur t_2 kleiner als t_1 (entsprechend d. isothermischen Linie bc) angenommen wurde, muß notwendig d. Linie dS zwischen d. Curve bc und d. Abscissenaxe v liegen. Daraus folgt aber, daß bei dem Kreisprozeß $abcdsa$ notwendig ein ~~Ueber~~ mehr Expansionsarbeit gewonnen als verbraucht wird, indem d. Arbeit welche gewonnen wird bekanntlich ihrem Werte nach dargestellt wird durch d. Fläche $a_1abcdd_1a_1$ und d. Arbeit welche verbraucht wird durch [illegible] dargestellt durch d. Fläche $d_1dsaa_1d_1$, die gewonnene überschüssige Expansionsarbeit ist also:

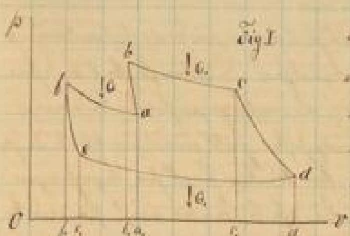
$$a_1abcdd_1a_1 - d_1dsaa_1d_1 = bcdsb$$

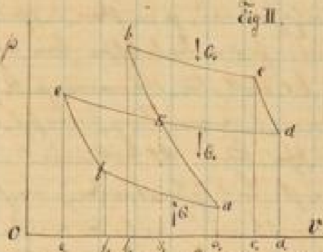
d. h. = d. von d. Zustandscurve $bcdsb$ eingeschlossenen Fläche. Diese Arbeit kann natürlich nur aus Wärme entstanden sein; da aber d. Körper K in seinen Anfangszustand zurückgekehrt ist und also auch seinen Anfangs Wärmeinhalt wieder erlangt hat, so muß diese gewonnene Arbeit offenbar d. Überschuß d. vom Körper K [illegible] mitgeteilten als entzogenen Wärme sein. Dem Körper wird jedoch im betrachteten Falle nur d. Wärmemenge Q_1 mitgeteilt und d. Wärme Q_2 entzogen, so ist natürlich Q_2 kleiner als Q_1 sein muß [illegible]. Damit aber d. Körper seine Wärmemenge wie im Anfang wieder erlange, damit also $Q_2 = Q_1$ wird muß d. Wärmeabgabe bei d. constanten Temperatur t_2 d. Körpers K nach d. isothermischen Linie länger als bis S erfolgen d. h. d. isothermische Linie muß über den Schnittpunkt mit d. adiabatischen Linie ab im Sinne einer Volumenabnahme hinausgehen. Da nun ferner, entsprechend d. unter 2 ausgesprochenen Zustandscurven derselben Art sich nie schneiden können also auch d. beiden adiabatischen Linien ab und ef sich nicht schneiden können, so muß d. Volumen Of im Zustande f kleiner sein als d. Volumen Oa_1 im Anfangszustand a und weiter muß d. nach gemachter Behauptung bekanntlich eine während d. Zustandsänderung nach d. ~~adi~~ isothermischen Linie fa erforderliche Wärmemitteilung $= Q$ nötig sein. Bei dem ursprünglich vorausgesetzten Kreisprozesse



$abcdefa$ wird also natürlich eine Wärmemenge gewonnen nämlich: $Q_1 - Q_2 + Q = Q$, welche zufolge, daß d. Körper wieder derselbe wie im Anfangszustand geworden ist, als Arbeit erhalten wird, welche d. durch d. Zustandscurve eingeschlossenen Fläche $abcdefa$ entspricht und welche $= E$ sei. Es ist also auch zwischen d. gewonnenen Wärmemenge:

$$Q = AE$$ unter A d. calorische Wärmeäquivalent d. Arbeitseinheit verstanden. Mit d. Kreisprozesse ist also eine positive Verwandlung d. ersten Art nämlich eine Verwandlung von Wärme in Arbeit verbunden. Außerdem kommt aber gleichzeitig auch eine andere Verwandlung vor, indem nämlich d. Wärmemenge Q_1 von d. Körper K zum Körper K_2 od. von d. Temperatur t_1 zur Temperatur t_2, wobei $t_2 < t_1$ von höherer zu niederer Temperatur übergeht entsprechend einer negativen Verwandlung d. 2ten Art. Mit dem vorliegenden Kreisprozeß ist also eine positive Verwandlung d. ersten Art und eine negative Verwandlung d. 2ten Art verbunden. Diese beiden Verwandlungen bedingen sich natürlich gegenseitig. Ein solcher Kreisprozeß soll ein umkehrbarer genannt werden, wenn d. Verlauf im Sinne d. entgegengesetzten Bewegung stattfinden kann; im entgegengesetzten Falle dagegen nicht umkehrbar.



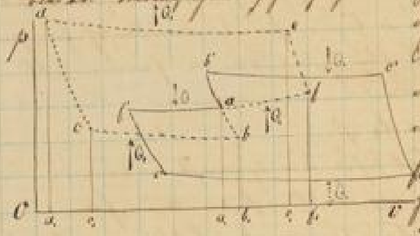


Bei dieser Betrachtung ist die Höhe der Anfangstemperatur t, bei welcher [illegible] Wärme Q dem Körper K mitgetheilt wird, von [illegible] Bedingung [illegible] auf den Fall daß: $t > t_1$; in anderen Fällen ändert sich nur die Figur, aber nicht die Schlußfolgerungen [illegible]. Fig I zeigt z. B. die Zustandsänderung für den Fall, daß $t_1 > t > t_2$ ist und Fig II auf den Fall daß: $t < t_2$ ist.

In dem letzteren Falle [illegible] sich der Kreisprozeß in einen rechtläufigen $sbcds$ und einen rückläufigen $asefa$ zerlegen; bei ersterem wird Arbeit gewonnen, bei letzterem [illegible]. [illegible] aber auch für die ~~[illegible]~~ [illegible] Schlußfolgerung gilt, daß [illegible] Veränderungen der Körper bei der Zustandsänderung auf [illegible] eine gewisse Wärmemenge Q mitgetheilt werden muß, so wird auch im Ganzen Arbeit: $\mathfrak{E} = sbcds - asefa = WQ$ = der Arbeitswerth der mitgetheilten Wärme gewonnen werden, also ist auch in diesem Falle eine positive Verwandlung der ersten Art und eine negative Verwandlung der 2ten Art mit dem Kreisprozesse verbunden. [illegible] diese Verwandlungen [illegible] sich gegenseitig, [illegible] als [illegible] eines rechtläufigen umkehrbaren Kreisprozesses in [illegible] betrachtet werden, welcher [illegible] aus rechtläufigen und rückläufigen Kreisprozessen [illegible] zusammengesetzt sein kann.

[illegible] die Schlußfolgerungen [illegible] Veränderungen [illegible] der Art des [illegible] Körpers K. [illegible] angenommen, daß der [illegible] Körper K von solcher Art sei, daß bei gleichem Volumen der höheren Temperatur auch der höhere Pressung entspreche und daß z. B. bei [illegible] Temperatur eine Volumenzunahme eine Wärmemittheilung und eine Volumenabnahme eine Temperaturerhöhung bedinge. In den bei weitem meisten Fällen ist das Verhalten der Körper auch ein solches, namentlich bei Gasen, Dämpfen und Flüssigkeiten von [illegible] Flüssigkeit. [illegible] auch solche Fälle, wo diese Voraussetzungen nicht erfüllt werden. Es ist aber wesentlich zu bemerken, daß die Schlußfolgerung, betreffend die [illegible] einer positiven Verwandlung der ersten Art und einer negativen Verwandlung der 2ten Art bei irgend einem umkehrbaren Kreisprozesse, auch dann gültig bleibt, wenn das Verhalten des betreffenden Körpers gerade das Gegentheil beider Voraussetzungen [illegible], wenn also, [illegible] eine Volumenverkleinerung des Körpers mit Wärmemittheilung [illegible] Temperatur verbunden ist, daß dann auch bei gleichem Volumen der höheren Temperatur die kleinere Pressung entspricht, und nicht aber nur eine der beiden Bedingungen erfüllt und die andere nicht erfüllt wird. Ein solches abnormes Verhalten findet z. B. statt bei Wasser in der Nähe des Gefrierpunktes oder bei einem Gemisch von Eis und Wasser. Beim Schmelzen des Eises findet bekanntlich eine Volumenverkleinerung statt. Wenn also dem Gemisch Wärme mitgetheilt wird ohne dabei die Temperatur zu erhöhen, so ändert sich natürlich das Mischungsverhältniß indem Eis in Wasser übergeht, wodurch aber eine Volumenverkleinerung bedingt wird, weil ein [illegible] das Volumen des Eises größer als das des Wassers ist. In Betreff der aber genannten ersten [illegible] Bedingung findet also bei diesem Gemisch von Eis und Wasser gerade das Gegentheil statt. Um also die bekannten Schlußfolgerungen auch diesen Fall anwenden zu können, muß das Verhalten des Gemisches auch der ersten Bedingung genau entgegen sein. [illegible] ist nun erwiesen, daß der Schmelzpunkt des Eises unter einem [illegible] Druck [illegible] und zwar mit Zunahme des Drucks tiefer sinkt. Bei normalem Atmosphärendruck liegt der Schmelzpunkt des Eises bei 0 °C. [illegible] man aber das Gemisch von Eis und Wasser einem Druck von mehreren Atmosphären, so sinkt der Schmelzpunkt des Eises merklich herab und zwar nach Thomson um 0,0075 °C für je eine Druckzunahme von 1 Atmosphäre. Also auch in Betreff der ersten Bedingung, daß bei gleichem Volumen der höheren Temperatur auch der höhere Pressung bedinge oder umgekehrt, findet in dem vorliegenden Falle gerade das Gegentheil statt. Man kann also die allgemeine Schlußfolgerung auf diesen Fall anwenden, wenn überhaupt der oben ausgesprochene Satz gültig ist.

daß dieselbe wirklich d. Fall ist, geht aus dem Umstande hervor, daß sämmtliche Curvenstücke d. Zustandscurve [illegible] umgekehrten Richtungen [illegible] eines ursprünglich [illegible] Falles, daß also d. [illegible] bestehen bleibt. Nebenstehende Figur zeigt dies z. B. für den Fall, daß $t_1 > t > t_2$ ist. d. voll gezeichnete Curve zeigt d. Zustandscurve für d. ursprünglich [illegible] Fall und d. punktirte d. Zustandscurve für den Fall, in welchem zugleich in den beiden [illegible] [illegible] [illegible] stattfindet. Die Pfeile deuten [illegible] ob eine [illegible] als betreffende Wärmemenge während d. Zustandsänderung [illegible] [illegible] Curve d. Körper K mitgetheilt od. entzogen wird, so müssen d. Pfeile [illegible] d. Curve [illegible] d. Curve umgekehrt sein. In d. adiabatischen Curve ab [illegible] t_2. In d. isothermischen Curve bc hat die Wärmemenge Q_2 [illegible]



wobei eine Volumenverkleinerung stattfindet. In d. adiabatischen Curve cd geht nun d. Veränderung so vor sich, daß d. Temperatur von t_1 auf t_2 [illegible], wobei d. Pressung wächst. In d. isothermischen Curve de hat nun d. Wärmemenge Q [illegible] bei constanter Temperatur, [illegible] Volumenzunahme [illegible]. [illegible] d. Zustandsänderung [illegible] adiabatischen Curve ef [illegible] d. Temperatur von t_2 bis t [illegible], [illegible] Volumenverkleinerung [illegible] isothermischen Curve fa [illegible] d. Veränderung [illegible] in [illegible] stattfinden, bis d. Volumen [illegible] d. Anfangsvolumen [illegible] ist. [illegible] d. [illegible] umgekehrt [illegible] ist. [illegible] d. Veränderung [illegible] bc [illegible] d. Körper K d. Wärme Q_2 mitgetheilt [illegible] dc Q entzogen [illegible] fa [illegible] d. Anfangszustand [illegible] [illegible] von Q_2 [illegible] [illegible] gilt also [illegible] in diesem Falle, daß d. [illegible] beiden [illegible] [illegible] stattfindet.

[illegible] Fall zu untersuchen, in welchem [illegible] d. [illegible] [illegible] d. [illegible] erfüllt wird, [illegible] Umkehrung [illegible] [illegible] Theil [illegible] Körper [illegible], [illegible] [illegible] [illegible] Volumen nicht bekannt sind. [illegible] [illegible] annehmen, daß d. [illegible] für alle Fälle gültig sei.

[illegible] den im Anfang zu Grunde gelegten Kreisprocess mit demselben Körper K und mit Hülfe derselben [illegible] K_1 und K_2 in umgekehrtem Sinne afedcba [illegible], so [illegible] d. [illegible] [illegible]. Während d. Zustandsänderung nach af bei constanter Temperatur t wird d. Wärme Q dem Körper K entzogen, während d. Zustandsänderung nach ed bei constanter Temperatur t_2 wird d. Wärme Q_2 dem

Körper K von K_2 mitgetheilt und während derselben nach cb bei constanter Temperatur t_1 [illegible] K d. Wärme Q_1 an K_1 ab. [illegible] Wärme Q_2 [illegible] also [illegible] K_2 an K_1 [illegible], [illegible] als Wärme von d. Temperatur t_2 in [illegible] von d. [illegible] Temperatur t_1 verwandelt werden, [illegible] Körper K eine [illegible] Wärme Q von d. Temperatur t entzogen werden, [illegible] Körper K in seinen Anfangszustand zurückgekehrt ist, [illegible] Arbeit [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] Verwandlung [illegible] Arbeit [illegible] [illegible], nämlich mit derjenigen Arbeit, welche zur [illegible] d. Körpers K nach [illegible] aufgewendet werden musste, als [illegible] [illegible] gewonnen wird, und welche Arbeit $E = WQ$ [illegible] d. Zustandscurve afedcba [illegible] dargestellt wird. Mit diesem umgekehrten od. rückläufigen Kreisprocess ist also eine negative Verwandlung d. ersten Art und eine positive Verwandlung d. 2ten Art verbunden.

[illegible] rückläufigen [illegible] Kreisprocesse [illegible], wenn auch d. Temperaturen t, t und t_2 [illegible] bleiben, daß die mit Q und Q_2 bezeichneten Wärmemengen [illegible] [illegible], [illegible] den Körper K im Anfangszustande [illegible] Temperatur t [illegible] Werthe von v u. p entsprechen können, [illegible] von den d. 3 Zustandsänderungen bei constanter Temperatur t, t_1, od. t_2 beliebig [illegible] werden kann, [illegible] d. beiden [illegible] Curven (isothermische und adiabatische Curven) [illegible] d. ganze Zustandscurve d. Kreisprocesses [illegible] [illegible] [illegible] [illegible], wenn [illegible] d. Körper K [illegible] verschiedenartigen Körper K_0 [illegible] Kreisprocess unterwirft. [illegible] Kreisprocess [illegible] d. [illegible] [illegible], welche mit einem Körper K^0 ausgeführt ist, [illegible] Q^0 und Q^0_2 d. [illegible] d. Wärmemengen, welche bei einem, [illegible] Temperaturen t t_1 und t_2

entsprechenden solchen Kreisprocesse d. Körpers K mit Q und Q_1 bezeichnet würden, so ist es nun wichtig zu bemerken, daß, wie auch Q und Q', Q_1 und Q_1' verschieden sein mögen, doch d. Verhältnis dieser Wärmemengen immer constant derselbe ist, also:

$$\frac{Q}{Q'} = \frac{Q_1}{Q_1'} \text{ ist od. } \frac{Q}{Q_1} = \frac{Q'}{Q_1'}.$$

Um dies zu beweisen, setze man $\frac{Q_1}{Q} = \frac{m}{n}$ unter m und n ganze Zahlen verstanden; dieser Bruchteil $\frac{m}{n}$ kann also bei hinreichender Größe von m und n jedes beliebige Verhältnis darstellen und zwar ein irrationales, wenn m und n unendlich groß werden. Der Beweis für d. Richtigkeit d. genannten Verhältnisses kann nun in d. Weise geführt werden, daß man annimmt d. Behauptung d. Gegenteil eines solchen Verhältnisses sei falsch und [illegible] soll dann gezeigt werden, daß man mit dieser letzten Annahme auf Widersprüche stößt.

Angenommen nun $\frac{Q}{Q_1} = \frac{m}{n}$ und $\frac{Q_1'}{Q'} < \frac{m}{n}$.

Denkt man d. Kreisprocess n mal hintereinander rückläufig mit d. Körper K ausgeführt, wobei bei einem jeden dieser Kreisprocesse d. Wärmemenge Q in Arbeit verwandelt wird entsprechend d. früheren Auseinandersetzungen. Infolgedessen wird also bei d. n Kreisprocessen d. Wärmemenge n Q in Arbeit verwandelt und es geht außerdem d. Wärmemenge n Q_1 vom Körper K_1 zum Körper K_2 über, od. es wird d. Temperatur t_1 in d. Temperatur t_2 verwandelt. Wenn jetzt ein anderer Körper K' zwischen d. Temperaturen t t_1 und t_2 einen m maligen rückläufigen Kreisprocess ausführt, so wird d. Wärmemenge m Q' aus Arbeit durch Verwandlung erhalten und es geht dabei d. Wärmemenge m Q_1' in umgekehrter Sinne wie vorher also von d. Temperatur t_2 zur Temperatur t_1 od. es wird d. Wärmemenge m Q_1' vom Körper K_2 zum Körper K_1 überführt. Nachdem d. n + m Kreisprocesse ausgeführt sind, befinden sich die beiden Vermittlungskörper K und K' in ihren ursprünglichen Zuständen; außerdem ist [illegible] Wärme aus Arbeit in Wärme verwandelt und es ist eine gewisse Wärmemenge m Q_1' − n Q_2 von d. Körper K_2 zu dem wärmeren Körper K_1 ohne Compensation d. h. ohne irgend eine gleichzeitige Veränderung übergeführt worden, also vom Körper von d. Temperatur t_2 zu dem von d. Temperatur t_1, wo $t_2 < t_1$, indem n Q_1' − n Q_1 geschlossen ist. Ein solcher Übergang von Wärme von einem Körper niederer Temperatur zu einem Körper höherer Temperatur ist aber nach d. von Clausius aufgestellten Sätzen unmöglich, folglich ist ein Widerspruch mit d. willkürlichen Annahme vorhanden, daß $\frac{Q_1'}{Q'} < \frac{m}{n}$ sein soll und daß dabei $\frac{Q_1}{Q} = \frac{m}{n}$ richtig sei.

Denselben Widerspruch bekommt man mit d. Annahme, daß:

$\frac{Q_1}{Q} = \frac{m}{n}$ und gleichzeitig $\frac{Q_1'}{Q'} > \frac{m}{n}$ sei, wenn man dann nur den n maligen Kreisprocess d. Körpers K rückläufig und den m maligen Kreisprocess d. Körpers K' rechtläufig stattfinden läßt. Wenn also:

$\frac{Q_1}{Q} = \frac{m}{n}$ ist, kann nicht gleichzeitig $\frac{Q_1'}{Q'} \lessgtr \frac{m}{n}$ sein, es muß also $\frac{Q_1'}{Q'} = \frac{m}{n} = \frac{Q_1}{Q}$ sein.

D. Verhältnis ist somit constant, welches auch immer d. Anfangszustand ist und welcher Art d. vermittelnden Körper auch sei, sobald nur d. Temperaturen t, t_1 und t_2 in allen Fällen dieselben sind.

Mit Hülfe eines umkehrbaren Kreisprocesses von d. hier vorausgesetzten Art, d. h. d. jedesmal nur aus 3 adiabatischen und 3 isothermischen Curven besteht, kann jede d. 2 verschiedenen positiven Verwandlungen, nämlich Wärme Q von d. Temperatur t in Arbeit und Arbeit in Wärme von d. Temperatur auf unendlich mannigfache Weise durch eine andere Verwandlung derselben Art od. durch eine Verwandlung d. anderen Art ersetzt werden. Ist z. B. d. Verwandlung eine gewisse Wärmemenge Q von d. Temperatur t in Arbeit gegeben, so kann ein rückläufiger solcher Kreisprocess auf unendlich mannigfaltige Weise hergestellt werden, daß dabei Arbeit in dieselbe Wärmemenge Q von derselben Temperatur t verwandelt, also d. gegebene Verwandlung rückgängig gemacht würde [illegible] aufgehoben würde mit Hülfe eines vermittelnden Körpers. Aber es wird dann aber eine gewisse Wärmemenge Q_1 von d. Temperatur t_2 in d. höhere Temperatur t_1 versetzt, wobei Q_1 unendlich mannigfach verschieden sein kann, wie t_2 und t_1 verschieden gewählt werden, indem d. constante Verhältnis zwischen Q und Q_1 lediglich nach d. Voraussetzung bewirkt, daß t, t_1 und t_2 in den verschiedenen Fällen dieselben Werthe haben. Die ursprünglich gegebene positive Verwandlung d. ersten Art findet sich somit ersetzt durch eine positive Verwandlung d. 2ten Art oder positive vorhandene Veränderung. Nun kann ferner d. rechtläufige Kreisprocess hergestellt werden, daß d. soeben erhaltene Verwandlung wieder aufgehoben, nämlich d. Wärmemenge Q_1 von d. Temperatur t_1 auf d. Temperatur t_2 zurückbringt, wofür aber eine gewisse Wärmemenge Q' von d. Temperatur t' in Arbeit verwandelt wird, wobei Q' je nach d. Werthe von t' unendlich mannigfach verschieden sein kann. Die ursprünglich gegebene Verwandlung d. ersten Art findet sich also durch eine andere Verwandlung derselben Art ersetzt. Sie können also 2 Verwandlungen einander ersetzen ohne bleibende Veränderung, indem d. Hilfskörper in seinen Anfangszustand zurückkehrt.

2 Verwandlungen nun, die sich ohne anderweitige erfüllende Änderung gegenseitig ersetzen können, werden nach Clausius 2 aequivalente Verwandlungen genannt werden. Es wirft sich nun d. Frage auf, ob man irgend eine Verwandlung durch irgend einen algebraischen Ausdruck dem Sinn und d. Größe nach repräsentieren und messen kann und zwar so, daß zwei aequivalente Verwandlungen durch gleiche Werthe dieser Ausdrücke, also durch gleiche sogenannte Verwandlungswerthe charakterisiert werden, d. Art, positiven od. negativen Verwandlungen entsprechen positive resp. negative Verwandlungswerthe entsprechen.

Zu solchen algebraischen Ausdrücken gelangt man nun durch d. folgende Betrachtung:

Was d. Verwandlung d. ersten Art betrifft, also d. Verwandlung einer Wärmemenge Q bei d. Temperatur t in Arbeit, so wird d. Verwandlungswerth eine Function sein von den beiden Größen, durch welche d. Verwandlung bestimmt wird, also von d. Wärmemenge Q und d. Temperatur t. Wir bezeichnen sie mit $f(Q,t)$ d. Werth d. Verwandlung d. Wärmemenge Q bei d. Temperatur t in Arbeit. Die umgekehrte Verwandlung, also d. Verwandlung von Arbeit bei d. Temperatur t in d. Wärmemenge Q wird somit nach d. vorausgeschickten Definition den Werth $-f(Q,t)$ haben.

Die Verwandlungen 2ter Art betreffend muß bemerkt werden, daß sie von 3 Größen abhängig sind, nämlich von d. Wärmemenge Q und den Temperaturen t_1 und t_2. Diese Function sei bezeichnet mit F und es ist somit d. Verwandlungswerth einer Wärmemenge Q von d. Temperatur t_1 in d. Temperatur t_2 $= F(Q\,t_1\,t_2)$. D. Verwandlungswerth einer umgekehrten Verwandlung d. h. d. Verwandlung einer Wärmemenge Q von d. Temperatur t_2 in d. Temperatur t_1 ist somit $= -F(Q\,t_1\,t_2)$, od. wenn man diesen nach derselben Regel, wie man d. Verwandlung einer Wärmemenge Q von d. Temperatur t_1 in t_2 bezeichnet mit $F(Q\,t_1\,t_2)$, bezeichnen mit $+F(Q,\,t_2\,t_1)$, so ist also:

$-F(Q\,t_1\,t_2) = F(Q\,t_2\,t_1)$ d. h., wo also bei einer Umkehrung d. Temperaturen d. Functionen ihr Vorzeichen umkehren. Die Function F soll somit solcher Art sein, daß sie bei gleichem Absolutwerth umgekehrte Zeichen annehmen kann. A u. B sollen nun d. beiden im Kreisprocesse stattfindenden Verwandlungen bezeichnen, welche mit einem umkehrbaren Kreisprocesse d. h. im Kreisprocess stattfindender Art verbunden sind. Ist d. Summe von A u. B jede Verwandlung d. umgekehrten d. anderen aequivalent, also ist A aequivalent $-B$ und B aequivalent $-A$. Denkt man sich d. Kreisprocess somit umgekehrt ausgeführt, so würden damit auch umgekehrte Verwandlungen verbunden sein. Durch d. Verwandlung $-A$ d. Körper wird dann $+A$ d. Früheren aufgehoben, so daß sie durch d. Verwandlung $-B$ ohne sonstige erfüllende Änderung ersetzt. D. Körper wird nun B aufgehoben durch $-B$ und es erscheint dann also B ersetzt durch $-A$. 2 Verwandlungen aber, die einander ersetzen können, wurden aequivalente Verwandlungen genannt und somit muß d. Summe d. Verwandlungswerthe, die mit einem umkehrbaren Kreisprocesse verbunden sind $= 0$ sein, wie sofort ersichtlich für einen solchen Kreisprocess, wie d. betrachtete mit 6 Zustandstheilen bestehend ist.

Es sei nun d. Kreisprocess vorläufig soll zwischen d. Temperaturen t t_1 und t_2 und Q sei d. Wärmemenge, die bei d. Kreisprocesse bei d. Temperatur t in Arbeit verwandelt wird, Q_1 sei d. Wärmemenge, d. gleichzeitig von d. Temperatur t_1 übergeht zur Temperatur t_2. D. Werth d. einen Verwandlung ist dann nach d. Vorausgeschickten $-f(Q\,t)$ und d. Verwandlungswerth der $= F(Q_1\,t_1\,t_2)$ und d. Summe dieser Verwandlungswerthe muß nun $= 0$ sein, da d. eine Verwandlung d. anderen entgegengesetzt ist. Also muß sein:

$$f(Q\,t) + F(Q_1\,t_1\,t_2) = 0.$$

Denkt man sich d. Kreisprocess nochmals mit einem Verwandlungskörper zwischen d. Temperaturen t, t_1 u. t_2 durchgeführt, daß Q in Q' und Q_1 in Q_1' übergeht, so findet d. bekannte Beziehung statt: $\frac{Q}{Q_1} = \frac{Q'}{Q_1'}$. Die Functionen f und F müssen nun so beschaffen sein, daß d. letzten Gleichung für gegebene Werthe von t t_1 und t_2 immer dasselbe Verhältniß $\frac{Q}{Q_1}$ entspricht. Dies ist nur d. Fall wenn $f(Q\,t)$ eine Function d. Art ist, daß man sie in 2 Functionen zerlegen kann, nämlich in d. Factor Q und d. Factor $f(t)$. Man hat somit: $f(Q\,t) = Q\,f(t)$. Dasselbe gilt auch für d. Function F, so daß man auch schreiben kann: $F(Q,\,t_1\,t_2) = Q_1\,F(t_1\,t_2)$.

Die obige Gleichung kann man also schreiben:

$$\text{I} \ldots\ldots\ldots \quad Q\,f(t) + Q_1\,F(t_1\,t_2) = 0$$

Diese Beziehung ist offenbar die Bedingung gefunden, daß der Quotient $\frac{Q}{Q_1}$ constant sei:

Man denke sich nun einen rückläufigen Kreisprocess mit Hilfe eines vermittelnden Körpers so ausgeführt, daß dabei die Wärmemenge Q_1 von der Temperatur t_2 zur höheren Temperatur t_1 übergeht, also eine Verwandlung der 2ten Art stattfindet, und eine gewisse Wärmemenge Q' von der Temperatur t' durch Verwandlung aus Arbeit erhalten wird. Die Summe der Verwandlungswerthe muß dann auch hier wieder $= 0$ sein. $\div Q'f(t')$ ist der Verwandlungswerth der Arbeit in die Wärmemenge Q', der Werth der Verwandlung der Wärmemenge Q_1 bei der Temperatur t_2 in Arbeit ist $\div Q_1 F(t_1 t_2)$ und somit hat man die Gleichung:

$$\div Q'f(t') - Q_1 F(t_1 t_2) = 0 \quad \ldots\ldots\ldots \quad \text{II}$$

Da man nun nach der früheren Annahme setzen kann: $\div Q_1 F(t_1 t_2) = + Q_1 F(t_2 t_1)$ so ist auch:

$$\div Q'f(t') + Q_1 F(t_2 t_1) = \div Q'f(t') - Q_1 F(t_1 t_2) = 0.$$

Durch Subtraction der beiden Gleichungen I und II findet man:

$$Q f(t) - Q' f(t') = 0 \quad \ldots\ldots\ldots \quad \text{III}$$

Der rückläufige Kreisprocess kann nun, unbeschadet gegebenen Werthe von Q, t und t_2 auf unendlich mannigfaltige Weise variirt werden (entsprechend verschiedenen Lagen des Punktes a auf der adiabatischen Curve ab der letzten Figuren, während die Figurentheile bc, de für einen bestimmten vermittelnden Körper gegeben sind); insbesondere kann es so eingerichtet werden, daß $Q' > Q$ ist. Dann ist aber das Resultat der beiden entgegengesetzten Verwandlungen erster Art, welche durch die beiden Kreisprocesse zusammengenommen bewirkt werden, nämlich die Verwandlung der Wärme Q von der Temperatur t in Arbeit und die Verwandlung von Arbeit in die Wärme Q' von der Temperatur t' ganz dasselbe, als ob die Wärme $(Q - Q')$ von der Temperatur t in Arbeit und die Wärme Q' von der Temperatur t in solche von der Temperatur t' verwandelt worden wäre. Diese beiden Verwandlungen sind zusammengenommen den beiden angenommenen Verwandlungen erster Art, deren Verwandlungswerthe nach Gleichung III die Summe 0 haben, äquivalent, so daß auch die Summe der Verwandlungswerthe $= 0$ sein muß. Damit muß also sein:

$$(Q - Q') f(t) + Q' F(t t') = 0$$

indem der Werth der ersten Wärmemenge $Q - Q'$ von der Temperatur t in Arbeit $= (Q - Q') f(t)$ und der Werth der Verwandlung der Wärme Q' von der Temperatur t in solche von der Temperatur t' gleich ist: $Q' F(t t')$.

Aus der letzten Gleichung folgt:

$$\div \frac{Q - Q'}{Q'} f(t) = F(t t') = f(t) - \frac{Q}{Q'} f(t)$$

Nach Gleichung III ist nun $f(t') = \frac{Q}{Q'} f(t)$, dies eingesetzt giebt:

$$F(t t') = f(t) \div f(t')$$

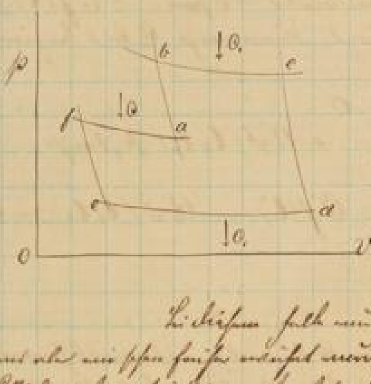
Die Function F ist somit auf die Function f zurückgeführt und es ist daher f noch zu bestimmen, unabhängig [illegible] geschehen kann.

Zur einfacheren Bezeichnung soll gesetzt werden: $f(t) = \frac{1}{T}$, wenn also T eine Function der Temperatur vorstellt, unabhängig von der Art des Körpers, mit dem die Verwandlung vorgenommen wird, sofern der Zustand des Körpers nicht durch die Temperatur allein bestimmt ist. Seien ferner bezeichnet T_1 und T_2 ... die zugehörigen Werthe dieser Function T, welche den Temperaturen $t_1, t_2 \ldots$ entsprechen. Damit ist dann $\frac{Q}{T}$ resp. $\div \frac{Q}{T}$ der Verwandlungswerth, welcher der Umsetzung der Wärme Q von der Temperatur t in äquivalente Arbeit, resp. der Umsetzung von Arbeit in Wärme Q von der Temperatur t entspricht und

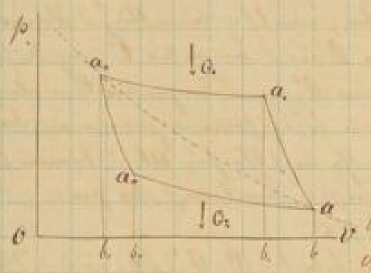
$$Q\left(\frac{1}{T_1} - \frac{1}{T_2}\right) = \frac{Q}{T_1} \div \frac{Q}{T_2}$$ der Verwandlungswerth der Wärme Q beim Übergang von der Temperatur t_1 zur Temperatur t_2.

Eine Verwandlung der 2ten Art kann, wie sofort ersichtlich, immer als Combination einer positiven und einer negativen Verwandlung der ersten Art für dieselbe Wärmemenge betrachtet werden und umgekehrt.

Hierbei wurden auf einen Kreisprocess von d. bestimmten Art ausgedehnt, bestehend nur zu aus 2 isothermischen Curven und 2 adiabatischen Curven erhaltenen Zustandsänderungen. Die Zustandscurve stellt in diesem Falle immer ein Viereck mit zu schneidenden isothermischen und adiabatischen Curven vor z.B. abcdefa. Geschieht d. Kreisprocess im rechtläufigen Sinne, so wird d. Körper K während d. Zustandsänderung nach isothermischer Curve bc d. Wärmemenge Q_1 mitgetheilt bei constanter Temperatur t_1, bei d. Änderung nach isothermischer Curve cd bei constanter Temperatur t_2 d. Wärmemenge Q_2 entzogen und endlich nach d. isothermischen Curve d. Wärmemenge Q bei constanter Temperatur t = Anfangstemperatur mitgetheilt, welche Wärmemenge als solche jedoch nicht erhalten wird, sondern sich als Arbeit erhalten wird nach d. bekannten Formel: $Q = AE$ wobei A d. Wärmewerth d. Arbeitseinheit ersetzen. Die Arbeit E wird dabei bekanntlich durch d. Inhalt d. von d. Zustandscurve umzogenen Fläche dargestellt.



Bei diesem Falle wurde angenommen, daß d. Anfangstemperatur t zwischen t_1 und t_2 liege, was aber nicht immer der Fall zu sein braucht, ohne d. Giltigkeit d. früheren Schlüsse zu beeinträchtigen. Im besonderen Falle ist wenn d. Fall daß $t = t_1$ ist, indem man erhaltene d. isothermische Curve af nur eine Verlängerung d. isothermischen Curve bc wird. Man erhält dadurch eine Zustandscurve bestehend nur aus 2 isothermischen und 2 adiabatischen Curven; d. dieser Zustandscurve entsprechende Kreisprocess soll ein einfacher umkehrbarer Kreisprocess genannt werden. Die Zustandsänderung erfolgt hiernach nach den beiden isothermischen Curven a_0a_1 und aa_2 bei den constanten Temperaturen t_1 resp. t_2 und nach den beiden adiabatischen Curven a_1a und a_2a_0.



Findet d. Kreisprocess im rechtläufigen Sinne statt, so wird hierbei auch schließlich ebenso dem Körper eine überschüssige Wärmemenge mitgetheilt, welche als äquivalente Arbeit erhalten wird. Ist demnach Q_1 die dem Körper K während d. Zustandsänderung nach d. isothermischen Curve a_0a_1 mitgetheilte Wärme bei constanter Temperatur t_1 und Q_2 d. dem Körper K während d. Zustandsänderung nach d. isothermischen Curve aa_2 entzogene Wärme bei constanter Temperatur t_2 ($t_2 < t_1$) so muß offenbar $Q_1 > Q_2$ sein, weil d. Unterschied $Q_1 - Q_2$ die erhaltene überschüssige Arbeit hervorbringen muß, indem d. Körper selbst keine Wärme dazu hergibt, da er seinen Anfangszustand wieder erlangt hat. Es muß also sein:

Wärmewerth d. gewonnenen Arbeit.

$$Q_1 - Q_2 = AE$$

wobei E d. von d. Fläche d. Zustandscurve dargestellte überschüssige gewonnene Arbeit und unter A d. Wärmewerth d. Arbeitseinheit verstanden.

Außer dieser Umsetzung d. Wärme $Q_1 - Q_2$ in Arbeit, ist d. Wärmemenge Q_2 von d. Temperatur t_1 zur Temperatur t_2 übergegangen, d.h. es sind mit d. vorliegenden Kreisprocess 2 Verwandlungen verbunden, nämlich d. Wärmemenge $Q_1 - Q_2$ bei d. Temperatur $t_1 = t$ in Arbeit verwandelt und d. Wärme Q_2 von d. Temperatur t_1 zur Temperatur t_2 übergegangen.

Dem Vorhergehenden zufolge ist demnach d. Werth d. erstgenannten Verwandlung:

$$= \frac{Q_1 - Q_2}{T_1} = \text{Werth d. Verwandlung d. Wärme } Q_1 - Q_2 \text{ in d. äquivalente Arbeit } E.$$

d. Werth d. Übergangs d. Wärme Q_2 von d. Temperatur t_1 zur Temperatur t_2 ist ebenso:

$$Q_2\left(\frac{1}{T_1} - \frac{1}{T_2}\right).$$

Bekanntlich müssen beide Verwandlungswerthe addirt die d. Summe 0 geben, es muß also sein:

$$\frac{Q_1 - Q_2}{T_1} + Q_2\left(\frac{1}{T_1} - \frac{1}{T_2}\right) = 0$$

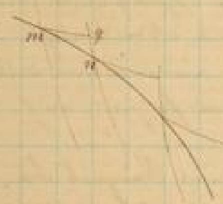
oder

$$\frac{Q_1}{T_1} - \frac{Q_2}{T_2} = 0$$

$\frac{Q_1}{T_1}$ ist offenbar d. Verwandlungswerth, welcher d. Zustandsänderung nach Linie $a_0\,a_1\,a$ entspricht, indem die bei d. Temperatur t_1 dem Körper zugeführte Wärme Q_1 als in Arbeit verwandelt betrachtet werden muss; $-\frac{Q_2}{T_2}$ ist d. Verwandlungswerth welcher d. Zustandsänderung $a\,a_2\,a_0$ entspricht, indem die bei d. Temperatur t_2 dem Körper entzogene Wärme Q_2 als aus Arbeit entstanden zu betrachten ist.
Diese sogenannten umkehrbaren Kreisprozesse ergeben eine besonders wichtige Anwendung bei d. Betrachtung d. calorischen Arbeitsmaschinen.
Findet d. einfache Kreisprozess im umgekehrten Sinne statt, d. h. wird derselbe rückläufig, so bleiben natürlich alle Größen ihrer Größe nach, indem alle Vorgänge im umgekehrten Sinne stattfinden, und diesem Sinne wird d. Wärmemenge $Q_1 - Q_2$ ... entzogen als zugeführt und also bedeutet E eine aufgewendete Arbeit. Die betreffenden Verwandlungswerthe für den Zustandsänderungen $a_0\,a_2\,a$ und $a\,a_1\,a_0$ sind dann $\frac{Q_2}{T_2}$ und $-\frac{Q_1}{T_1}$; die Summe dieser beiden Verwandlungswerthe muss natürlich auch wieder $= 0$ sein

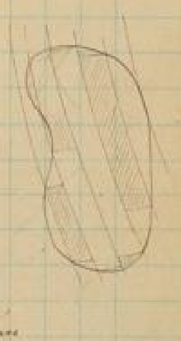
also: $$\frac{Q_2}{T_2} - \frac{Q_1}{T_1} = 0.$$

Bis jetzt wurden immer nur ganz bestimmte Zustandsänderungen vorausgesetzt, nämlich abwechselnd umgekehrte Zustandsänderungen bei constanter Temperatur, entsprechend isothermischen Zustandscurven und umkehrbare Zustandsänderungen ohne Mittheilung od. Entziehung von Wärme entsprechend adiabatischen Zustandscurven.
Im weiteren Verlauf sollen nun aber umkehrbare Zustandsänderungen zu Grunde gelegt werden, welche nach einem ganz beliebigen Gesetz vor sich gehen, entsprechend einer ganz beliebigen Zustandscurve. Jedwede ... Curve als d. Grenze eines unendlich vielseitigen gebrochenen Linienzuges ansehen kann, wenn diese Linienstücke unendlich klein werden, so kann man auch eine jede beliebige Zustandscurve als d. Grenzform eines so gebrochenen Linienzuges ansehen, dessen einzelne Stücke isothermische und adiabatische Linientheile sind; für jedes Element d. Zustandsänderung kann man sich dann abwechselnd d. Wärmemittheilung und d. Temperaturänderung nacheinander statt gleichzeitig stattfindend denken.



Es sei nun $m\,n$ ein unendlich kl. Curvenelement d. Zustandscurve, t d. Temperatur entsprechend d. Zustand m, und nehme man d. Temperatur dt im Allgemeinen als gleichzeitig ändernd unendlich, also $t + dt$ d. Temperatur entsprechend d. Zustand n; dQ sei d. Wärmemenge welche d. Körper bei constanter Temperatur t mitgetheilt wird während d. Zustandsänderung nach $m\,n$ und zwar sei sie mit dt als gleichzeitig entstanden, so ist d. Arbeitsleistung nicht ungleich ... dQ in entsprechender Wärmemenge bedeutet. Anstatt d. unendlich kleinen Zustandsänderung nach d. Curvenelement $m\,n$, während welcher zu gleicher Zeit d. Temperatur t in $t + dt$ übergeht und d. Wärmemenge dQ d. Körper mitgetheilt wird, kann man sich also nacheinander eine isothermische Linie $m\,q$ und dann nachher eine adiabatische Linie $q\,n$ stattfindend denken. Bei d. Zustandsänderung nach d. isothermischen Linie $m\,q$ bei constanter Temperatur t ist als Äquivalent ... eine Verwandlung entstanden; d. Verwandlungswerth ist: $\frac{dQ}{T}$ wobei T d. absolute Temperatur d. Temperatur t entspricht.
Mit d. adiabatischen Linie ist aber keine Verwandlung verbunden, somit ist d. Verwandlungswerth $= 0$ ist.
Ebenso verhält es sich mit jedem anderen Element d. Zustandsänderung.
D. Verwandlungswerth für eine Zustandsänderung von endlicher Größe und beliebigem Charakter ist also:

$$N = \int \frac{dQ}{T}$$



Handelt es sich nun um einen beliebigen umkehrbaren Kreisprozess, entsprechend einer beliebigen geschlossenen Zustandscurve, so kann man sich diesen Kreisprozess in eine unendliche Reihe von einfachen Kreisprozessen zerlegt denken, welche jedesmal offenbar einer Zerlegung d. von d. Zustandscurve eingeschlossenen Fläche entspricht; denkt man sich nämlich durch d. gegebene Zustandscurve umschlossene Fläche von einer Gruppe nacheinander folgender adiabatischer Curven geschnitten und durch d. Schnittpunkte d. adiabatischen Curven mit d. gegebenen Zustandscurve kleine Stücke isothermischer Curven gelegt, so kann man d. gegebene Curve wieder als d. Grenzform d. unendlich gebrochenen Linienzuges betrachten, welcher in einer Zusammensetzung von adiabatischen und isothermischen Curven besteht. Die einzelnen Felder kann man als ... d. von d. Zustandscurven einfacher Kreisprocesse aufgefaßten [illegible] ansehen. Wenn nun für jeden dieser elementaren einfachen Kreisprocesse d. Verwandlungswerth $= \int \frac{dQ}{T}$ ist, so ist d. resultirende Verwandlungswerth jenes gegebenen Kreisprocesses $N = \int \frac{dQ}{T}$, wobei aber d. Integral sich nun auf d. ganzen Kreisprocess zu erstrecken hat.

Haben wir nun für jeden einfachen umkehrbaren Kreisprocess d. Summe d. Verwandlungswerthe $= 0$ gefunden, so muß auch hier d. Verwandlungswerthsumme d. beliebigen umkehrbaren Kreisprocesses $= 0$ sein, also:

$$N = \int \frac{dQ}{T} = 0.$$

Ferner war bei jedem einfachen umkehrbaren Kreisprocess d. überschüssig mitgetheilte Wärmemenge = d. Wärmewerth d. überschüssig gewonnenen Arbeit. Dasselbe muß natürlich auch hier gelten, da [illegible] alle einzelnen einfachen umkehrbaren Kreisprocesse zusammen den beliebigen umkehrbaren Kreisprocess bilden, also:

$$\int dQ = AE$$ worin E d. überschüssig gewonnene Arbeit vorstellt, welche [illegible] durch d. [illegible] umschlossene Fläche und worin A d. Wärmewerth d. Arbeitseinheit vorstellt.

[illegible] ist nun [illegible] dQ algebraisch zu nehmen, [illegible] einen positiven E einen [illegible] und $\div E$ einen [illegible] stattfindenden Kreisprocess entspricht. Setzt man $\int dQ = Q$, so [illegible]:

$$Q = AE$$ worin also Q und E d. überschüssig mitgetheilte Wärme und gewonnene Arbeit, [illegible] mitgetheilte [illegible] Wärme, resp. gewonnene [illegible] Arbeit, gleichzeitig [illegible] sind. [illegible] die beiden Fälle $+$ und $\div Q$ nicht [illegible] zu unterscheiden, wenn man nur [illegible], daß Q $\pm$ sein kann [illegible] auch $E \pm$ ist.

Als Gesammtergebniß [illegible] also, daß bei jedem umkehrbaren Kreisprocesse eines Körpers die demselben überschüssig mitgetheilte od. entzogene Wärme = d. Wärmewerth d. überschüssig gewonnenen od. verbrauchten Arbeit und d. resultirende Werth aller [illegible] Verwandlungen $= 0$ ist.

[illegible] bei diesen Untersuchungen [illegible] vorausgesetzt, [illegible] bei d. [illegible] d. Verwandlungswerthe, daß in demselben Augenblick d. Temperatur in allen Punkten d. Körpers [illegible] allen Punkten d. Oberfläche gleich [illegible] und d. Integral N [illegible] über den ganzen Körper [illegible]. [illegible] einen [illegible] Körper, [illegible] Körper gleicher Art und verschiedener [illegible], so [illegible] die [illegible] d. [illegible], indem d. [illegible] d. [illegible] Temperatur in allen Punkten nicht gleich sind. In diesem Falle [illegible] einzelne Theile [illegible] Elemente [illegible]. Bezeichnet $d\tau$ ein Element d. Oberfläche und dQ d. Wärmemenge, welche pro Flächeneinheit d. Körperoberfläche an d. Stelle d. Flächenelements $d\tau$ im Zeitelement mitgetheilt wird, dann ist $dQ \cdot d\tau$ d. unendlich kl. Wärmemenge [illegible] Ordnung, welche durch d. Flächenelement $d\tau$ [illegible] d. Körper mitgetheilt wird; ist ferner t d. Temperatur an d. Stelle d. Flächenelements $d\tau$, dann ist bekanntlich d. augenblickliche Verwandlungswerth d. unendlich kl. [illegible] $= \frac{dQ \cdot d\tau}{T}$ wobei aber t und [illegible] T für jeden Punkt verschieden sein können.

D. resultirende Verwandlungswerth ist also:

$$N = \int\int \frac{dQ \cdot d\tau}{T}$$

für einen Kreisprozeß gelten aber d. vorhin gefundenen Gleichungen allgemein und ist also insbesondere auch in diesem Falle d. resultirende uncompensirte Verwandlungswerth d. $N = -\int \frac{dQ}{T} = 0$.

Wenn nun mit dem Kreisprozeß eine resultirende Verwandlung verbunden, deren Werth positiv ist, wie also d. Verwandlungswerth positiv, so könnte man diesem positiven Werth entsprechend d. resultirende Verwandlung als einen Übergang von Wärme von niederer zu höherer Temperatur betrachten, ohne daß derartige andere weitere Veränderung verbunden wäre; nach dem von Clausius aufgestellten Princip d. Aequivalenz von Verwandlungen ist dies aber unmöglich. Ebenso kann man auch keinen negativen Werth für den resultirenden Verwandlungswerth zulassen, indem bei Umkehrung d. Kreisprozesses d. Verwandlungswerth N positiv werden würde und somit derselbe Widerspruch sich ergeben würde. Also bei einem jeden umkehrbaren Kreisprozesse ist d. resultirende Verwandlungswerth = 0, selbst wenn die eigentliche Temperatur nicht in allen Punkten gleich ist.

Zum Schluße ist noch zu bemerken, daß die abgeleiteten Gesetze nicht nur für einen umkehrbaren Kreisprozeß gelten, sondern auch für einen Kreisprozeß, welcher, ohne in jedem Augenblick umkehrbar zu sein, mit nur umkehrbaren Zustandsänderungen verbunden ist, [illegible] aber mit beliebiger Geschwindigkeit stattfinden kann. Die soeben gefundenen Gesetze gelten auch dann noch, wenn d. Kreisprozeß mit nicht umkehrbaren Verwandlungen verbunden ist, also wenn Friction, Temperaturdifferenzen und unmittelbare Wärmeleitung im Innern d. Körper vorkommen; denn alsdann ist d. resultirende Verwandlungswerth negativ, indem die Werthe von nicht umkehrbaren Verwandlungen mit negativen Werthen behaftet werden sollen und d. Summe d. Werthe d. umkehrbaren Verwandlungen nach wie vor = 0 ist.

Somit ist also d. allgemeine zu Anfang dieses Abschnitts aufgestellte Satz bewiesen, daß nämlich bei jedem Kreisprozesse d. Summe aller Verwandlungswerthe = 0 od. negativ ist, und zwar Null für den Grenzfall eines umkehrbaren Kreisprozesses d.h. eines solchen, welcher in allen seinen Theilen mit umkehrbaren Zustandsänderungen behaftet ist.

Verschiedene Formen d. Wärmegleichung.

Hauptgleichungen.

Es waren früher 2 allgemeine Gleichungen gefunden worden, nämlich d. Gleichung d. lebendigen Kraft, d. Wärmegleichung und d. Gleichung d. inneren Arbeit. Die Aufstellung d. Gleichung d. lebendigen Kraft erfordert weiter keine Erläuterungen, indem diese direkt mit d. [illegible] Mechanik bekannt war. Die Wärmegleichung wurde gerade aus unseren Untersuchungen gefunden; bezogen auf eine umkehrbare Änderung d. Wärmezustandes hatte sie d. folgende allgemeine Form:

$$W d\theta = dU + p\,dv.$$

Sie drückt d. Arbeitswerth d. Wärmemenge aus, welche d. Gewichtseinheit eines Körpers bedarf, um eine unendlich kleine Änderung d. Wärmezustandes mitzutheilen, wenn dieser Wärmezustand gemeinschaftlich nur durch d. Änderung dv d. spec. Volumens, durch d. Änderung dU d. ges. inneren Arbeit und wenn p d. eigentliche Spannung bedeutet. D. ges. innere Arbeit U ist durch d. Wärmezustand bestimmt als eine Function von v u. p, wenn v u. p als d. unabhängig Veränderlichen angenommen werden, welche d. Wärmezustand charakterisiren. Damit man also mit d. obigen Wärmegleichung etwas anfangen kann auf mathematischem Wege, muß d. allgemeine Function U von v u. p wirklich bekannt sein. Diese Bedingung fast jederzeit zu erfüllen und auch auf empirischem Wege ist es mit großen Schwierigkeiten verbunden und kann nicht U direkt als Function von v und p aufgefunden werden. Aus diesem Grunde erscheint es nützlich andere Größen statt d. unbekannten Function einzuführen, welche ebenfalls d. Wärmezustand bedingen, aber deren Abhängigkeit [illegible] mit Zustandsgrößen [illegible] bekannt sind; dann nun und es gefunden sind d. Wärmegleichungen auf andere Formen zu bringen. Statt dieser Umformungen kann man nun setzen:

$$dU = \frac{\partial U}{\partial v}\,dv + \frac{\partial U}{\partial p}\,dp \quad \text{nach der bekannten Regel d.}$$

Differentialrechnung, indem U jedenfalls eine Function von v u. p ist.

Setzt man diesen Ausdruck, welcher U als Function von v u. p charakterisirt wird, in d. Wärmegleichung, die sich auf eine unendlich kleine Zustandsänderung bezieht, so kann man die beiden Glieder mit d. Coefficienten dv in 1 Glied zusammenfassen und d. Summe:

$$\frac{\partial U}{\partial v} + p = Y \quad \text{setzen, und weiter auch d.}$$

partielle Ableitung von U nach p:

$$\frac{\partial U}{\partial p} \quad \text{mit } X \text{ bezeichnen.}$$

d. Wärmegleichung hat dann d. Form:

$$W\,dQ = Y\,dv + X\,dp$$

In dieser neuen Form d. Wärmegleichung sind natürlich X u. Y wieder Zustandsfunctionen von v u. p, diese beiden Functionen sind aber nicht unabhängig von einander, sondern sind durch eine Gleichung mit einander verbunden; wenn man nämlich den Ausdruck für Y nach p ableitet und hievon d. nach v genommene Ableitung von X, so ergibt sich:

$$\frac{\partial Y}{\partial p} - \frac{\partial X}{\partial v} = \frac{\partial^2 U}{\partial v\,\partial p} + 1 - \frac{\partial^2 U}{\partial v\,\partial p} = 1$$

$$\text{also} \quad \frac{\partial Y}{\partial p} - \frac{\partial X}{\partial v} = 1$$

Diese Gleichung stellt eine allgemeine, Beziehung zwischen den Zustandsfunctionen X und Y von v u. p dar, welche in d. neuen Form d. Wärmegleichung an d. Stelle von U getreten sind.

Nach Zeuner nennt man diese Gleichung auch d. erste Hauptgleichung d. mechanischen Wärmetheorie. Diese erste Hauptgleichung läßt sofort unmittelbar erkennen, daß d. Wärmegleichung nicht ohne Weiteres integrabel ist. Solange nämlich nicht d. Gesetz bekannt ist, nach welchem d. Zustandsänderungen erfolgen, so lange also nicht d. Abhängigkeit von v u. p von einander u. folglich auch d. Coordinaten d. Zustandscurve, bekannt ist, so kann man nicht d. Wärmemenge Q bestimmen, welche d. Gewichtseinheit eines Körpers mitgetheilt werden muß um eine gegebene Zustandsänderung zu bewirken, ohne d. Gesetz zu kennen, nach welchem diese Zustandsänderung erfolgen soll, indem ihr rechter Theil kein vollständiges Differential ist, weil dann:

$$\frac{\partial Y}{\partial p} - \frac{\partial X}{\partial v} = 0 \quad \text{statt} = 1 \text{ sein müßte.}$$

Bekanntlich kann man nun aber eine solche Function $\frac{\partial Y}{\partial p} - \frac{\partial X}{\partial v} = 1$ mit einem gewissen Factor multipliciren, den man so wählen kann, daß d. Product ein vollständiges Differential wird und und als Factor kann man hier d. reciproke Werth d. sogenannten Temperaturfunction T für eine solche Function, ein sogenannter integrirender Factor d. rechten Theils von Gl. 1 ist. Weil nämlich eine Constante und für einen umkehrbaren Kreisprozeß ist $\int \frac{dQ}{T} = 0$, indem d. Integral immer denselben Werth wieder bekommen muß, wenn d. Körper in seinen Anfangszustand zurückgekehrt ist, somit muß auch d. Größe $W \int \frac{dQ}{T}$ wie sie auch im Verlaufe d. umkehrbaren Zustandsänderung eines Körpers sich ändern mag, doch immer denselben Werth wieder annehmen, wenn d. Körper in seinen Anfangszustand zurückkehrt. Da nun d. Zustand d. Körpers durch v u. p bestimmt ist, so muß $\frac{dQ}{T}$ immer ein vollständiges Differential sein von v u. p. Ist aber $\frac{dQ}{T}$ ein vollständiges Differential, so muß ein solches auch $\frac{W\,dQ}{T}$ sein, also $\int \frac{W\,dQ}{T} = 0$. Ist nun nach oben:

$$W\,dQ = Y\,dv + X\,dp$$

und durch Multiplication mit $\frac{1}{\vartheta}$:

$$\frac{W\,dQ}{\vartheta} = \frac{Y}{\vartheta}\,dv + \frac{X}{\vartheta}\,dp$$

wodurch d. Gleichung integrabel ist. Hierzu ist noch zu bemerken, daß d. Ableitung von $\frac{Y}{\vartheta}$ ebenso nach v genommen ist wie d. von $\frac{X}{\vartheta}$ nach p, so daß also sein muß:

$$\frac{\partial}{\partial p}\left(\frac{Y}{\vartheta}\right) = \frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{X}{\vartheta}\right)$$

od. wenn man d. Differentiation ausführt:

$$\left(\vartheta\frac{\partial Y}{\partial p} - Y\frac{\partial \vartheta}{\partial p}\right)\frac{1}{\vartheta^2} = \left(\vartheta\frac{\partial X}{\partial v} - X\frac{\partial \vartheta}{\partial v}\right)\frac{1}{\vartheta^2}$$

od.

$$\vartheta\frac{\partial Y}{\partial p} - Y\frac{\partial \vartheta}{\partial p} = \vartheta\frac{\partial X}{\partial v} - X\frac{\partial \vartheta}{\partial v}$$

od.

$$\vartheta\left(\frac{\partial Y}{\partial p} - \frac{\partial X}{\partial v}\right) = Y\frac{\partial \vartheta}{\partial p} - X\frac{\partial \vartheta}{\partial v}$$

Nach d. ersten Hauptgleichung war nun: $\frac{\partial Y}{\partial p} - \frac{\partial X}{\partial v} = 1$

Also:

$$\vartheta = Y\frac{\partial \vartheta}{\partial p} - X\frac{\partial \vartheta}{\partial v}$$

Diese Gleichung soll nach Zeuner d. 2te Hauptgleichung genannt werden, sie ist ein besonderer Ausdruck d. Prinzips d. Aequivalenz d. Verwandlungen, während d. erste Hauptgleichung eine unmittelbare Folge d. Aequivalenz von Wärme und Arbeit ist.

Man kann diese Gleichung nun auch verschiedenartig umgestalten. Wenn man in d. Gleichung $WdQ = Ydv + Xdp$ den Ausdruck für Y, der sich aus d. 2ten Hauptgleichung ergibt, substituirt, so findet sich:

$$WdQ = \frac{X\frac{\partial \vartheta}{\partial v} + \vartheta}{\frac{\partial \vartheta}{\partial p}}\,dv + X\,dp = \frac{X\left(\frac{\partial \vartheta}{\partial v}dv + \frac{\partial \vartheta}{\partial p}dp\right) + \vartheta\,dv}{\frac{\partial \vartheta}{\partial p}}$$

Da nun ϑ eine Function von t und t wiederum eine Function von v und p ist, so muß auch ϑ eine Function von v und p sein, so daß d. Ausdruck auf d. rechten Seite in d. Klammer ein vollständiges Differential ist, partiell nach v u. p genommen von ϑ, also ist:

$$\frac{\partial \vartheta}{\partial v}dv + \frac{\partial \vartheta}{\partial p}dp = d\vartheta$$

und folglich:

$$WdQ = \frac{X.d\vartheta + \vartheta\,dv}{\frac{\partial \vartheta}{\partial p}}$$

Setzt man ebenso in d. ersten Hauptgleichung d. Werth für X ein, d. sich aus d. 2ten Hauptgleichung ergibt, so findet sich:

$$WdQ = Ydv + \frac{Y\frac{\partial \vartheta}{\partial p} - \vartheta}{\frac{\partial \vartheta}{\partial v}}.dp = \frac{Y\left(\frac{\partial \vartheta}{\partial p}dp + \frac{\partial \vartheta}{\partial v}dv\right) - \vartheta\,dp}{\frac{\partial \vartheta}{\partial v}}$$

Da nun auch $\frac{\partial \vartheta}{\partial p}dp + \frac{\partial \vartheta}{\partial v}dv$ d. vollständige Differential von ϑ ist, da ϑ eine Function von v u. p $= d\vartheta$, so muß auch sein

$$W\,dQ = \frac{Y\,d\vartheta - \vartheta\,dp}{\frac{\partial\vartheta}{\partial p}}$$

Es haben sich also somit 3 verschiedene Formen d. Wärmegleichung ergeben, nämlich:

I. ———— $$W\,dQ = Y\,dv + X\,dp$$

II ———— $$W\,dQ = \frac{X\,d\vartheta + \vartheta\,dv}{\frac{\partial\vartheta}{\partial p}}$$

III ———— $$W\,dQ = \frac{Y\,d\vartheta - \vartheta\,dp}{\frac{\partial\vartheta}{\partial v}}$$

In d. ersten dieser Gleichungen sind X und Y Functionen von v u. p, [illegible] und d. durch die erste Hauptgleichung

IV ———— $$1 = \frac{\partial Y}{\partial p} - \frac{\partial X}{\partial v}$$

gegebenen Beziehung zu einander stehen und übrigens von d. Art und Zustand d. Körpers abhängen. Diese Gleichung entspricht dem Fall, daß d. momentane Zustandsänderung, für welche d. Wärmemenge dQ bestimmt werden soll, unmittelbar durch v und p bestimmt ist; die 2te und dritte Gleichung entsprechen dem Fall, daß d. Zustandsänderung durch d. Pressung p und d. Temperatur t bestimmt ist. In d. 2ten und 3ten Gleichung bedeuten außer X und Y noch d. Größe ϑ eine Größe unmittelbar ein unter allen Umständen gleiche Temperatur-Function und lediglich unmittelbar nur eine Function von d. Körper und Zustand und d. von ihm abhängigen Größen v u. p. ϑ steht wiederum mit X und Y in Beziehung, gemäß d. 2ten Hauptgleichung:

V. ———— $$\vartheta = Y\frac{\partial\vartheta}{\partial p} - X\frac{\partial\vartheta}{\partial v}$$

Wenn d. ϑ als Function d. Temperatur t bekannt, beziehungsweise t als Function von v u. p (durch d. Zustandsgleichung im Falle eines gegebenen Körpers) so dienten d. Gleichungen IV und V zur Bestimmung von X und Y, demnächst auch zur Bestimmung d. Gleichung d. inneren Arbeit [illegible] vermittelst d. Differentialgleichungen:

VI ———— $$\frac{\partial U}{\partial v} = Y - p \quad \text{und} \quad \frac{\partial U}{\partial p} = X.$$

Es sollen jedoch d. Gleichungen I bis V schon jetzt umgeformt werden durch Einführung 2 anderer Größen von einfacher physikalischer Bedeutung statt X und Y, wenn auch diese Bedeutung erst später nach Bestimmung d. Temperaturfunction ϑ vollständig hervortreten wird; die Größen stehen mit d. spec. Wärme in Zusammenhang.
Der Differentialquotient $\frac{dQ}{d\vartheta}$, unter d. Voraussetzung daß v constant also $dv = 0$ sei, werde bezeichnet mit d. C_v und $\frac{dQ}{d\vartheta}$ mit d. Voraussetzung, daß d. Pressung p constant also $dp = 0$ sei, werde mit C_p bezeichnet. Offenbar stehen d. eingeführten Größen C_v und C_p in einfacher Beziehung zu d. sogenannten spec. Wärme. Unter d. spec. Wärme eines Körpers für einen gewissen gleichförmigen Wärmezustand und ein gewisses Veränderungsgesetz desselben versteht man nämlich d. Verhältniß d. Wärme, welche an d. Gewichtseinheit d. Körpers behufs einer unendlich kleinen jenem Gesetze folgenden Änderung d. fraglichen Wärmezustandes mitzutheilen ist, zu d. entsprechenden Temperaturzunahme, also den Differentialquotienten:

$$\frac{dQ}{dt} = \frac{dQ}{d\vartheta}\cdot\frac{d\vartheta}{dt}.$$

dieser Quotient wird, wenn ich bezeichne C d. spec. Wärme für constantes Volumen und C_1 d. spec. Wärme für constanten Druck bedeutet:

$$C = C_v \cdot \frac{d\vartheta}{dt} \quad \text{und} \quad C_1 = C_p \cdot \frac{d\vartheta}{dt}$$

indem für den ersten Fall $C = \frac{dQ}{dt}$ entsprechend $dv = 0$ ist, dessen Werth aber ist $= \frac{dQ}{d\vartheta} \cdot \frac{d\vartheta}{dt}$ und da $\frac{dQ}{dt} = C_v$, so hat man für C den angegebenen Werth. Im zweiten Falle ist:

$$C_1 = \frac{dQ}{dt} = \frac{dQ}{d\vartheta} \cdot \frac{d\vartheta}{dt} = C_p \cdot \frac{d\vartheta}{dt} \quad \text{entsprechend } dp = 0.$$

Sobald also nun ϑ wirklich bestimmt ist, werden d. neu eingeführten Größen eine bestimmte Bedeutung haben. Nun kann später bemerkt, ist es sich in d. Folge zeigen wird, wie ϑ eine lineare Function von t ist, so ist d. Ableitung von ϑ nach t eine Const. Die Größen C_v und C_p, die im Allgemeinen auch als Functionen von v und p zu betrachten sind, sollen nun in d. Gleichungen, wie schon erwähnt, für X und Y eingeführt werden, zu dem Ende müssen wir erst X und Y durch C_v und C_p auszudrücken suchen.

Wenn man in Gleichung II d. Voraussetzung $dv = 0$ macht, also d. Glied $\vartheta \cdot dv$ streicht, und dann d. Gleichung durch $W \cdot d\vartheta$ dividirt, so hat man links den Quotienten $\frac{dQ}{d\vartheta}$, welcher entsprechend d. Voraussetzung $dv = 0$, $= C_v$ sein muß; somit hat man also:

$$C_v = \frac{X}{W \frac{d\vartheta}{dp}} \quad \text{od.} \quad X = W C_v \cdot \frac{d\vartheta}{dp}$$

Setzt man in Gleichung III d. Druck $p =$ einer Constanten also $dp = 0$ so daß $\vartheta \, dp$ ausfällt, so bekommt man, wenn mit $W \cdot d\vartheta$ dividirt wird:

$$C_p = \frac{Y}{W \cdot \frac{d\vartheta}{dv}} \quad \text{od.} \quad Y = W \cdot C_p \cdot \frac{d\vartheta}{dv} \qquad \text{VII}$$

Diese Ausdrücke sind nun in d. Gleichungen einzuführen, wobei zu bemerken ist, daß $A = \frac{1}{W}$ und folglich $AW = 1$ ist gemäß den früheren Bezeichnungen. Die Gleichung I wird nun mit A multiplicirt (Arbeitsäquivalent d. Wärmeeinheit entsprechend) und man bekommt dann mit $AW = 1$:

$$dQ = C_p \frac{d\vartheta}{dv} dv + C_v \frac{d\vartheta}{dp} dp \qquad \text{VIII}$$

Multiplicirt man Gleichung II mit A und führt d. Werthe für X und Y ein, so bekommt man:

$$dQ = C_v \, d\vartheta + \frac{A\vartheta}{\frac{d\vartheta}{dp}} dv \qquad \text{IX}$$

Aus Gleichung III findet man in derselben Weise:

$$dQ = C_p \cdot d\vartheta - \frac{A\vartheta}{\frac{d\vartheta}{dv}} dp \qquad \text{X}$$

Ferner ergiebt sich mit Hülfe derselben Manipulation aus d. ersten Hauptgleichung: $\frac{dY}{dp} - \frac{dX}{dv} = 1$:

$$A = \frac{d}{dp}\left(C_p \cdot \frac{d\vartheta}{dv}\right) - \frac{d}{dv}\left(C_v \cdot \frac{d\vartheta}{dp}\right) \qquad \text{XI}$$

und mit d. 2ten Hauptgleichung:

$$A\vartheta = C_p \cdot \frac{d\vartheta}{dv} \cdot \frac{d\vartheta}{dp} - C_v \cdot \frac{d\vartheta}{dp} \cdot \frac{d\vartheta}{dv} = (C_p - C_v) \frac{d\vartheta}{dp} \cdot \frac{d\vartheta}{dv} \qquad \text{XII}$$

In diesen Formen werden die allgemeinen Gleichungen am meisten angewendet.

Wurden hierbei nun die zwei Volumen v und die Pressung p als unabhängig Veränderliche zur Charakterisierung des Wärmezustandes gebraucht, so erhalten wir dann auch in den allgemeinen Gleichungen die Differentialquotienten $\frac{d\sigma}{dv}$ und $\frac{d\sigma}{dp}$ vorkommen. Nun kann jedoch auch verschiedene andere Größen zur Charakterisierung des Wärmezustandes wählen; unter den in dieser Hinsicht möglichen verschiedenen Fällen sind besonders 2 bemerkenswerth, nämlich wenn eine der Größen v und p und die Temperatur t, oder mit derselben die Temperaturfunction σ als unabhängig Veränderliche angenommen werden, also wenn v und σ und p und σ zu dieser Charakterisierung des Wärmezustandes gewählt werden. [illegible] dieser setzen die unabhängig Veränderlichen v u. p durch v u. σ resp. p u. σ entsprechend müssen natürlich auch für die obigen Differentialquotienten $\frac{d\sigma}{dv}$ u. $\frac{d\sigma}{dp}$ andere eingeführt werden und zwar erhalten

[illegible] v und σ nimmt: $\frac{dp}{dv}$ und $\frac{dp}{d\sigma}$

" " p u. σ " : $\frac{dv}{dp}$ und $\frac{dv}{d\sigma}$

} für $\frac{d\sigma}{dv}$ und $\frac{d\sigma}{dp}$ in den allgemeinen Gleichungen.

Um dies jedoch durchführen zu können muß man die Beziehungen zwischen diesen 6 erhaltenen Differentialquotienten kennen um durch je 2 derselben, welche sich auf die unabhängig Veränderlichen v u. p, v u. σ, od. p u. σ beziehen, die 4 übrigen ausdrücken zu können. Es sind natürlich 4 Relationen zwischen diesen 6 Differentialquotienten vorhanden, welche sich als leicht aufstellen lassen.

Zunächst ist nämlich klar, daß von diesen 6 Differentialquotienten immer 2 u. 2 reciprok sind, weil nach allgemeinen Grundsätzen [illegible] bekannt ist, wenn von den drei Größen v p σ als abhängig [illegible], von den übrigen jede durch die andere allein bestimmt ist. Von den 6 Differentialquotienten sind also reciprok, nämlich diejenigen, welche dieselben Größen v p σ als constant voraussetzen. Diese zusammen liefern schon 3 Relationen, nämlich:

$$
\text{XIII}\quad
\begin{cases}
\dfrac{dp}{d\sigma}\cdot\dfrac{d\sigma}{dp} = 1 \\[2ex]
\dfrac{dv}{dp}\cdot\dfrac{dp}{dv} = 1 \\[2ex]
\dfrac{d\sigma}{dv}\cdot\dfrac{dv}{d\sigma} = 1
\end{cases}
$$

Zu diesen noch nöthigen 4ten Beziehung gelangt man auf folgendem Wege, welche Beziehung offenbar jetzt nur noch eine Relation zwischen den Differentialquotienten

$\frac{dp}{d\sigma}$, $\frac{d\sigma}{dv}$ $\frac{dv}{dp}$ und $\frac{d\sigma}{dp}$, $\frac{dv}{d\sigma}$ $\frac{dp}{dv}$ zu sein braucht, um durch 2 d. Differentialquotienten die übrigen 4 auszudrücken.

Angenommen man betrachtet nur zunächst σ als Function von v u. p, so daß v u. p d. unabhängig Veränderlichen sind, so ist natürlich nach d. Differentialrechnung:

$$d\sigma = \frac{d\sigma}{dv}dv + \frac{d\sigma}{dp}dp.$$

Läßt man nun aber σ als constant voraus entsprechend $d\sigma = 0$, so wird natürlich v eine Function von p und umgekehrt p eine Function von v also:

$dv = \frac{dv}{dp}dp$ und ersetzen wir d. obigen Differentialgleichung mit $d\sigma = 0$ und dividiren dann mit dp:

$$0 = \frac{d\sigma}{dv}\frac{dv}{dp} + \frac{d\sigma}{dp}.$$

Wenn man nun diese Gleichung durch den Differentialquotienten von σ nach p $\frac{d\sigma}{dp}$ dividirt, so kommt die nach dem Obigen gezeigte [illegible] Form, wenn man mit d. Differentialquotienten von p nach σ $= \frac{dp}{d\sigma}$ multiplicirt, die [illegible] folgt:

$$0 = \frac{dp}{d\sigma}\cdot\frac{d\sigma}{dv}\cdot\frac{dv}{dp} + 1$$

od: $$\frac{dp}{d\sigma}\cdot\frac{d\sigma}{dv}\cdot\frac{dv}{dp} = \div 1 \qquad \text{XIV}$$

Mit dieser Gleichung hat man nun auch die 4. Relation gefunden; nach Gleichung XIII, wird nämlich der negative Werth auch = dem negativen Werth von ÷1 sein, welcher aber auch = ÷1 ist, so kann man auch setzen:

$$\frac{d\sigma}{dp}\cdot\frac{dv}{d\sigma}\cdot\frac{dp}{dv} = \div 1$$

Diese 4 Beziehungen (XIII u. XIV) zeigen nun deutlich, wie die 2 u. 6 partiellen Differentialquotienten, welche sich auf die [illegible] unabhängigen Variabeln $v - p$, v u. σ oder $p - \sigma$ beziehen, [illegible] zu können, und [illegible] in die Gleichungen [illegible], wenn man entweder v u. p, entweder v u. σ oder p u. σ als die den Wärmezustand charakterisirenden unabhängigen Variabeln annimmt.

Zur Bestimmung der Wärme dQ welche der Gewichtseinheit eines Körpers bei einer unendlich kleinen umkehrbaren Zustandsänderung mitgetheilt ist, hatten wir 3 verschiedene Gleichungsformen gefunden (I II III und VIII IX X). Werden nun v u. p als unabhängige Variable zur Bestimmung des Wärmezustandes angenommen, so ist zum Zweck des Ausdruckes der fraglichen Wärme dQ die Gleichung I und VIII am vortheilhaftesten. Werden aber v und σ zur Charakterisirung des Wärmezustandes zu Grunde gelegt, so sind zur Bestimmung von dQ die beiden Gleichungen II und IX am besten zu verwenden, wir [illegible] dann die entsprechenden Beziehungen der partiellen Differentialquotienten angenommen werden, so ist die entsprechende Gleichung umzuformen, haben mit Rücksicht auf Beziehungen XIII:

$$W\,dQ = \frac{dp}{d\sigma}\left(x\,d\sigma + \sigma\,dv\right)$$

$$dQ = c_v\,d\sigma + A\sigma\,\frac{dp}{d\sigma}\,dv$$

Werden endlich p und σ als unabhängige Variable zur Charakterisirung des Wärmezustandes zu Grunde gelegt, so werden am vortheilhaftesten die Gleichungen III und X zur Bestimmung der Wärme dQ benützt, nämlich mit den entsprechenden Beziehungen der partiellen Differentialquotienten; mit Rücksicht auf Beziehungen XIII sind dann also die Gleichungen III und X zu schreiben:

$$W\,dQ = \frac{dv}{d\sigma}\left(y\,d\sigma - \sigma\,dp\right)$$

$$dQ = c_p\,d\sigma - A\sigma\,\frac{dv}{d\sigma}\,dp.$$

In ähnlicher Weise werden auch die beiden Hauptgleichungen XI und XII für die verschiedenen Fälle Umformungen erleiden müssen.

Bemerkenswerth in dieser Hinsicht ist die Umgestaltung der 2ten Hauptgleichung XII, wenn man p und σ als unabhängige Variable annimmt zur Charakterisirung des Wärmezustandes. In Gleichung XII hat man dann entweder σ als Function von p u. v, v als Function von p und σ zu betrachten und also entweder die partiellen [illegible] Ableitungen von σ nach p u. v oder die partiellen Ableitungen von v nach p und σ zu bestimmen, [illegible] vermittelst der unter[illegible] Beziehungen (XIII u. XIV) zwischen den fraglichen Differentialquotienten. Man bekommt dann aus Gleichung XII:

$$c_p \div c_v = A\sigma\,\frac{dv}{d\sigma}\cdot\frac{dp}{d\sigma}.$$

Hierin ist nun [illegible] $\frac{dv}{d\sigma}$ eine Ableitung, wie sie [illegible] werden kann, während $\frac{dp}{d\sigma}$ [illegible] als Function von v ausgedrückt werden müsste [illegible] mit Hülfe der 4. Relation $\frac{d\sigma}{XIV}$, welche [illegible] wird man mit Rücksicht auf Gleichung XIV:

$$\frac{dp}{d\vartheta} = -\frac{\frac{dv}{d\vartheta}}{\frac{dv}{dp}}$$

diesen Wert eingesetzt, so bekommt man d. 2. Hauptgleichung in folgender Form:

$$c_p - c_v = A\vartheta \frac{\left(\frac{dv}{d\vartheta}\right)^2}{-\frac{dv}{dp}}$$

Dieser Ausdruck kann nun zu gewissen Zwecken sehr nützlich werden; zunächst ist daraus ersichtlich, daß c_p immer $>$ c_v ist, denn A und ϑ sind d. allgemeinen Grundsätzen zu Folge absolute Größen, also jedenfalls positiv, was $\frac{dv}{d\vartheta}$ betrifft, so kann dies zwar allerdings positiv od. negativ sein, d. Quadrat ist aber jedenfalls positiv. Hinsichtlich $\frac{dv}{dp}$ ist zu bemerken, daß diejenige Änderung von v ist, welche einer Zunahme d. Druckes bei constanter Temperatur $(dt = d\vartheta = 0)$ entspricht; wenn man aber d. Druck eines Körpers bei constanter Temperatur steigert, so muß d. Volumen d. allgemeinen Erfahrung zufolge immer kleiner werden. Wenn also dp positiv ist, wie wir anzunehmen [illegible] ist, so muß dv negativ und also $\frac{dv}{dp}$ negativ od. $-\frac{dv}{dp}$ positiv sein. Demnach ist d. ganze Ausdruck rechts positiv und muß d. linke Seite d. Gleichung somit ebenfalls positiv, so muß notwendig: $c_p > c_v$ sein.

Diese besondere Umformung d. letzten Hauptgleichung war nur ein Beispiel für d. Art und Weise, wie man d. Gleichungen umzuformen hat, wenn irgend 2 andere d. 5 Größen als unabhängig Veränderliche zur Charakterisierung d. Wärmezustandes benutzt werden.

Bevor jetzt diese Formeln auf gewisse Aggregatformen, nämlich auf d. Verhalten von Gasen und Dämpfen angewandt werden, wo solche besonders von großer Wichtigkeit sind, sollen vorher noch einige andere wichtige Folgerungen gemacht werden, nämlich:

Die geometrische Darstellung d. Vorgänge bei umkehrbaren Zustandsänderungen

Ähnlich wie [illegible] früher auch bei den [illegible] und überhaupt bei umkehrbaren Zustandsänderungen zu d. geometrischen Veranschaulichung d. bei ihnen stattfindenden Vorgänge d. sogenannte Zustandsebene benutzt, indem nämlich d. Zustand eines Körpers durch einen Punkt [illegible] ist, dessen laufende Coordinaten v u. p sind, so daß also d. Zustandslinie d. Gesetz d. gleichzeitigen Änderungen von v u. p während d. Zustandsänderung graphisch darstellt und außerdem auch die gewonnene od. aufgewendete Arbeit L durch d. von d. Zustandslinie umschlossene Fläche graphisch veranschaulicht wird. Mit Hilfe d. besonderen solcher gewisser Zustandslinien, nämlich d. isothermischen, isodynamischen und adiabatischen Linien, kann man nun auch außerdem d. bei Zustandsänderung stattfindenden Vorgänge graphisch darstellen, insbesondere nämlich d. Änderung d. inneren Arbeit U, die mitgeteilte Wärme Q und d. Änderung N durch betreffende Flächen veranschaulichen.

Es werde nun im Folgenden ein Körper von 1 kg Gewicht vorausgesetzt und dieser einer beliebigen umkehrbaren Zustandsänderung unterworfen, deren Gesetzmäßigkeit durch d. Zustandslinie $a_1 a_2$ dargestellt ist, wobei a_1 d. Anfangszustand und a_2 d. Endzustand d. Zustandsänderung entsprechend. Im Anfangszustande seien $v_1\ p_1\ t_1\ \vartheta_1\ U_1$ und im Endzustand $v_2\ p_2\ t_2\ \vartheta_2\ U_2$ d. resp. Werte von $v\ p\ t\ \vartheta$ und U; v_1 und v_2 sind in d. Figur bekanntlich dargestellt durch d. Abscisse Ob_1 resp. Ob_2 und p_1 und p_2 dargestellt durch d. Ordinaten $a_1 b_1$ resp. $a_2 b_2$.

Für eine unendlich kleine umkehrbare Zustandsänderung gilt nun d. Wärmegleichung:

$$W d\theta = dU + p\,dv \qquad \text{I}$$

welche Gleichung d. Zunahme d. Arbeitsinhalts d. Wärme ausdrückt, welche d. Körper behufs einer unendlich kleinen Zustandsänderung aufzunehmen hat. Durch Integration bekommt man hieraus:

$$W\theta = U_2 - U_1 + \int p\,dv$$

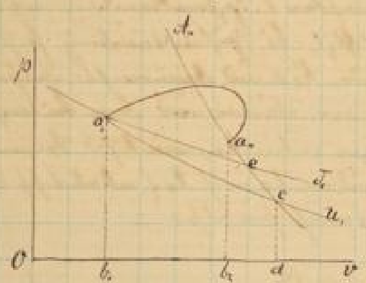
u. wenn man mit E die vom Körper während d. Zustandsänderung verrichtete Arbeit bezeichnet also $E = \int p\,dv$:

$$W\theta = U_2 - U_1 + E,$$ wenn θ d. dem Körper mitgetheilte Wärme bedeutet. Die in dieser Formel vorkommende Expansionsarbeit E wird bekanntlich durch d. ~~von d.~~ Zustandscurve $a_1 a_2$, von d. Abscissenaxe Ov und den beiden Ordinaten p_1, p_2 eingeschlossene Fläche geometrisch dargestellt, also kann man setzen:

$$E = b_1 a_1 a_2 b_2$$

Es frägt sich nun noch wie man d. übrigen Beträge, nämlich Änderung d. inneren Arbeitsinhalts u. mitgetheilte Wärme θ aus dem Verwandlungsbild N graphisch zur Anschauung bringen kann.

Um d. Änderung d. inneren Arbeitsvermögens also $U_2 - U_1$ zur Darstellung zu bringen, zieht man durch den Anfangspunkt a_1 d. isodynamische Curve U_1, welche also eine Zustandsänderung entspricht, wobei d. Körper vom Anfangszustand a_1 an einer umkehrbaren Zustandsänderung bei constantem innerem Arbeitsvermögen U_1 (constanter Energie) unterworfen wird; ferner legt man zu dem Punkt durch d. Endzustand a_2 eine adiabatische Curve A_2 also eine Zustandscurve, welche jene d. Gesetz d. Zustandsänderung darstellt, wenn vom Endzustand a_2 ausgehend d. Änderung fortgesetzt wird ohne Mittheilung od. Entziehung von Wärme.



Denkt man sich nun d. Änderung nach d. adiabatischen Curve A_2 vom Endzustand ausgehend fortgesetzt bis zum Zustand, welcher d. Schnittpunkt c d. adiabatischen Curve mit d. isodynamischen Curve U_1 entspricht, so kann man natürlich d. obige allgemeine Wärmegleichung I auf diese umkehrbare Zustandsänderung anwenden, wobei jedoch entsprechend d. Charakter d. Zustandsänderung nach einer adiabatischen Curve $d\theta = 0$ zu setzen ist, also auch d. Arbeitsinhalt d. mitgetheilten Wärme $W\theta = 0$ zu setzen ist. Dieser Werth sollte nach Oben gleich sein d. Änderung d. inneren Arbeitsvermögens + d. bei d. Zustandsänderung gewonnenen Arbeit. D. Arbeitsvermögen im Anfangszustand a_2 d. Änderung nach d. adiabatischen Curve A_2 ist voraussetzungsgemäß $= U_2$ und d. Arbeitsvermögen im Endzustand $c = U_1$, da c ein Punkt d. isodynamischen Curve U_1 ist, d. Änderung d. Arbeitsvermögens also $= U_2 - U_1$ für d. vorliegende Zustandsänderung; d. gewonnene Arbeit ist aber offenbar dargestellt durch d. Fläche $b_2 a_2 c d$, so erhält man d. Gleichung fest:

$$U_2 - U_1 + b_2 a_2 c d = 0$$

$$\text{Also} \quad U_2 - U_1 = b_2 a_2 c d = \text{Änderung d. inneren Arbeitsvermögens.}$$

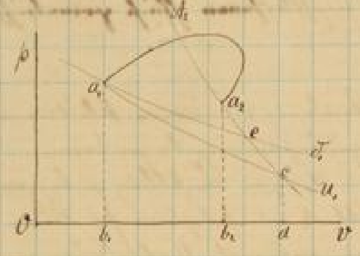
Mit Hilfe dieser Darstellung und d. obigen Gleichung: $W\theta = U_2 - U_1 + E$ hat man also, weil nach Oben $E = b_1 a_1 a_2 b_2$:

Arbeitsinhalt d. mitgetheilten Wärme θ: $$W\theta = b_2 a_2 c d + b_1 a_1 a_2 b_2 = b_1 a_1 a_2 c d$$

D. Arbeitsinhalt d. während d. Zustandsänderung nach d. gegebenen Zustandscurve $a_1 a_2$ dem Körper mitgetheilten Wärme θ ist also = d. Inhalt d. Fläche, welche begrenzt wird 1) von d. v Axe 2) von d. Zustandscurve $a_1 a_2$ und d. durch d. Endpunkt a_2 derselben gehenden adiabatischen Curve A_2 3) von d. Ordinate d. Punktes c, in welchem d. adiabatische Curve A_2 von d. durch d. Anfangspunkt a_1 gehenden isodynamischen Curve U_1 geschnitten wird und 4) von d. Ordinate d. Punktes Anfangspunktes a_1.

diese Fläche wird durch d. Ordinate d. Endpunktes a_2 d. Zustandscurve in 2 Theile getheilt, von welchen d. eine, begrenzt von d. Zustandscurve $a_1 a_2$ = d. äußeren Arbeit L, d. andere, begrenzt von d. adiabatischen Curve A_2 = $U_2 - U_1$ = d. Zunahme d. inneren Arbeitsvermögens in Folge d. Zustandsänderung ist. Dabei sind die Inhalte dieser Flächen positiv od. negativ zu setzen, je nachdem sie von einer beweglichen Ordinate beschrieben gedacht werden, welche zur Erzeugung d. Fläche = L und = WQ von d. Ordinate d. Anfangspunktes a_1 und zur Erzeugung d. Fläche = $U_2 - U_1$ von d. Ordinate d. Endpunktes a_2 d. Zustandscurve ausgeht, diese Ordinate positive od. negative Flächenelemente beschreibt, je nachdem sie sich im Sinne d. positiven od. negativen v-Achse bewegt.

Will man nun auch noch d. Verwandlungswerth $N = \int \frac{dQ}{T}$, welcher d. Zustandsänderung nach d. Zustandscurve $a_1 a_2$ entspricht, auf eine geometrische Darstellung zurückführen, so ziehe man ~~[illegible]~~ Schnittpunkt von U_1 von a_1 d. Curve nämlich eine isothermische Curve gehend, welche d. adiabatische Curve A_2 in c trifft. Wenn man sich nun vorstellt, wenn d. Körper von 1 kgr nach d. isothermischen Curve T_1 bei constanter Temperatur t_1 seinen Zustand ändert, dürfen, entsprechend d. Charakter d. Änderung nach einer isothermischen Curve, eine gewisse Wärmemenge Q_1 entzogen werden muß, so muß diese Wärmemenge Q_1 natürlich auch diejenige sein, welche d. Körper bei d. umgekehrten Zustandsänderung nach $c a_1$ aufnehmen muss.



Nimmt man nun an, daß nachdem d. Zustandsänderung nach d. Zustandscurve $a_1 a_2$ beendigt ist, die Zustandsänderung fortgesetzt wird nach d. adiabatischen Curve $A_2 c$ und dann nach d. isothermischen Curve $c a_1$, also fortgesetzt wird auf einen Kreisprozess d. Mittheilung von Wärme und dann bei constanter Temperatur t_1 = Anfangstemperatur, so sind dabei 2 Verwandlungen entstanden, nämlich d. Verwandlung d. Wärme von d. Temperatur t_1 in solche von t_2 und darauf wieder zurück von t_2 nach t_1 (adiabatische Curve $A_2 c$) d. bei d. Zustandsänderung $a_1 a_2 c a_1$ entsprechenden Verwandlungswerthe sind also:

$$N = \int \frac{dQ}{T} \qquad \text{und} \qquad N_1 = -\frac{Q_1}{T_1}$$

indem nämlich nachdem d. Zustandsänderung nach d. isothermischen Curve $c a_1$ d. Temperatur constant = t_1 ist, so kann man d. Verwandlungswerth schreiben:

$$N_1 = \frac{1}{T_1}\int dQ = -\frac{Q_1}{T_1}$$

wobei Q_1 nun d. dem Körper während d. ganzen Änderung nach $c a_1$ entzogene Wärmemenge vorstellt.

Entsprechend, daß wenn die Zustandsänderung $a_1 a_2$ fortgesetzt gedacht hat nach $a_2 c a_1$, ist dieselbe zu einem umkehrbaren Kreisprozess $a_1 a_2 c a_1$ geworden, dessen Verwandlungswerth natürlich = d. Summe beider also $= N + N_1 = \int \frac{dQ}{T} - \frac{Q_1}{T_1}$ ist.

Bekanntlich ist aber für jeden umkehrbaren Kreisprozess d. Summe d. Verwandlungswerthe d. h. d. entsprechende Verwandlungswerth = 0, also:

$$N - \frac{Q_1}{T_1} = 0$$

$$\text{od.} \quad N = \frac{Q_1}{T_1}$$

d. Arbeitswerth d. Wärme $Q_1 = WQ_1 = WNT_1$ kann aber nach dem Vorigen wie derjenige von $Q = WQ$ mit Hilfe von 2 Curven, einer durch d. Anfangspunkt gelegten isodynamischen und einer durch d. Endpunkt gelegten adiabatischen Curve, durch eine Fläche dargestellt werden. Da da die beiden fraglichen Curven schon gezogen sind $= U_1$ und A_2, so ist nach dem vorhin entsprechenden Satz d. Arbeitswerth d. Wärme Q_1:

$$WQ_1 = WNT_1 = \text{Fläche } b_1 a_1 e c d$$

Man hätte doch gleich ebenso durch W.D. zu [illegible] um d. bildliche Darstellung d. Verwandlungswerthes N zu bekommen, welcher der Zustandsänderung nach d. gegebenen Zustandscurve $a_1 a_2$ entspricht.

Mit Hülfe d. 3 Curven, isothermische, isodynamische und adiabatische, kann man also, wie gesehen, die einer gegebenen beliebigen Zustandsänderung (umkehrbar), ebenfalls durch d. gegebene Zustandscurve, entsprechende Änderung d. inneren Arbeit [illegible], d. mitgetheilte od. entzogene Wärme und deren Verwandlungswerth mit Leichtigkeit zur bildlichen Anschauung bringen.

Bemerkenswerth ist noch, daß nach d. Gleichung $N = \frac{Q_2}{T_2}$ d. Verwandlungswerth ganz unabhängig ist von d. Art, wie d. Punkt a_2 auf d. adiabatischen Curve liegt und unabhängig von d. Gesetz, nach welchem d. Zustandsänderung von a_1 nach a_2 stattfindet, d.h. unabhängig von d. Form d. Zustandscurve $a_1 a_2$, indem d. Größe Q_2 [illegible] für einen gegebenen Körper durch d. Curve $a_1 c$ als durch d. Punkt a_1 und d. isothermische Curve A_2 bestimmt ist und schließlich [illegible] d. Schnittpunkt c d. isothermischen Curve [illegible]. D. Werth N erhält also [illegible], wenn a_2 auf d. adiabatischen Curve A_2 [illegible], da er immer gleich bleibt, d. [illegible] adiabatischen Curve A_2 [illegible] Zustandscurve $a_1 a_2$ d. adiabatische Curve schneidet. [illegible] permanenten [illegible] d. adiabatischen Curven [illegible].

Im Folgenden sollen nun d. entwickelten allgemeinen Sätze auf besondere Fälle angewendet werden, wenn dabei auf d. Verhalten d. Gase und Dämpfe eingegangen wird, [illegible] d. Temperatur [illegible] zu erkennen, welche in den allgemeinen Gleichungen eine so bedeutende Rolle spielt [illegible].

Verhalten d. Gase, insbesondere d. atmosphärischen Luft.

Zunächst müssen wir erst einige physikalische Begriffe und Gesetze [illegible].

Man versteht unter einem permanenten Gase od. auch einem Gase im engeren Sinne einen luftförmigen Körper, welcher uns bis jetzt nur als solcher bekannt ist, indem er durch d. uns zu Gebote stehenden Mittel d. Druckerhöhung und d. Wärmeentziehung bisher nicht in den flüssigen od. festen Aggregatzustand übergeführt werden konnte. Hierher gehören besonders Sauerstoff und Stickstoff, [illegible] Gemische dieser Stoffe z. B. reine atmosphärische Luft, wenn sie von ihren unwesentlichen Bestandtheilen, Wasserdampf, Kohlensäure etc. befreit ist. Außer diesen bilden [illegible] noch 2 Gase, nämlich Wasserstoffgas und Stickoxydgas [illegible], indem alle anderen bekannten Gase auch schon in flüssigen und theilweise festen Aggregatzustand übergeführt worden sind.

D. Verhalten d. permanenten Gase ist mit großer Annäherung an 2 einfache Gesetze gebunden, nämlich an d. Mariotte'sche und Gay-Lussac'sche Gesetz, und wodurch ihr physikalischer Charakter wesentlich bestimmt wird. [illegible] d. Begriff d. permanenten Gases [illegible], [illegible] Zufall [illegible] unterworfen ist, mit deren [illegible] bisher als permanent [illegible] Gas diesen [illegible] kann, weil ferner [illegible] d. permanenten [illegible] luftförmige Körper in gewissen Wärmezuständen [illegible] Gesetzen [illegible] entsprechen können wie permanente Gase, so [illegible] d. Begriff [illegible] Gases [illegible] zu fassen. [illegible] luftförmiger Körper von solcher Art od. in solchen Wärmezustand [illegible] Zustandsänderungen [illegible] d. Mariotte'schen und dem Gay-Lussac'schen Gesetze unterworfen [illegible]

Temperaturen hätten vernachlässigt werden dürfen. Diesem Begriff entsprechend kann man auch von einem Verhalten d. Gase [illegible], indem d. Überschreitung einen solchen Normalzustand haben kann, der ebenso gut wie gewöhnliche atmosphärische Luft den beiden Gesetzen folgt.
d. Zustand eines vollkommenen Gases, für welches jene Gesetze genau gelten, ist nur als ein idealer Grenzzustand zu betrachten, welchem bei kleiner Pressung und hoher Temperatur d. genannten Gase wie auch bekannten [illegible] luftförmigen Körper sich nähern.

Es handelt sich nun besonders darum d. Zustandsgleichung für d. Gase aufzustellen, unter Gas aber nun immer d. obigen Begriff eines luftförmigen Körpers verstanden. Dies kann geschehen mit Hilfe d. beiden genannten Gesetze:
d. Mariotte'sche Gesetz besagt bekanntlich dass, dass d. Volumen v und d. Pressung p eines Gases bei constanter Temperatur t einander umgekehrt proportional sind, so dass also d. Produkt pv bei constanter Temperatur t eine constante Größe ist, welche sich aber mit ändernder Temperatur auch ändert. Diesem Gesetze hat also d. Zustandsgleichung d. Gase d. allgemeine Form:

$pv = f(t)$ unter f eine unbekannte Funktion verstanden, welche ihrer Form nach jedoch nun weiter durch d. Gay-Lussac'sche Gesetz bestimmt wird.
Wenn man nämlich p als constant annimmt, und dann d. Gleichung differenziert, so bekommt man:

$$p\,dv = f'(t)$$

unter $f'(t)$ den nach t genommenen Differentialquotienten von $f(t)$ verstanden, also $f'(t) = \frac{d\,f(t)}{dt}$

Wird d. Gas nun wie atmosphärische Luft und wird d. als constant vorausgesetzte Pressung p = d. normalen Atmosphärendruck, so wird d. Temperaturänderung proportional d. Volumenänderung entsprechend d. früheren Definition d. Temperatur (Seite 30) also $\frac{dv}{dt}$ constant und mithin auch $f'(t)$ constant nach oben gefundener Gleichung. Nach dem Gay-Lussac'schen Gesetze gilt aber diese Proportionalität zwischen d. gleichzeitigen Änderungen d. Volumens v und Temperatur t nicht nur gültig für d. atmosphärische Luft sondern auch für jedes andere Gas und nicht nur gültig für den normalen Atmosphärendruck, sondern für beliebige Werthe einer constanten Pressung, und es ist also $f'(t)$ für alle Gase und beliebige Werthe d. constanten Pressung p = einer Constanten; bezeichnet man diese Constante mit R

also $f'(t) = R$, so folgt durch Integration aus d. letzten Gleichung: $p\,dv = f'(t)$:

$$pv = S + Rt$$

unter S eine andere Constante verstanden.
= Zustandsgleichung d. Gase, worin R und S für verschiedene Gase verschiedene Werthe haben können.

× (Wie schon früher bei Gelegenheit d. Besprechung von Zustandsgleichungen erwähnt wurde, ist im Allgemeinen d. Form d. Zustandsgleichungen abhängig von d. Aggregatform d. betreffenden Körpers, die Größe d. Coefficienten aber bedingt durch d. Art d. Körpers, so dass [illegible] auch d. obige Form allgemein für Gase gilt, während d. Constanten S und R für verschiedenartige Gase verschieden sein können.) ×

Gewöhnlich gibt man d. obigen Zustandsgleichung eine andere Form, indem man S als Factor vorausstellt und d. Verhältnis $\frac{R}{S} = \alpha$ setzt:

I . . . . $pv = S(1 + \alpha t)$

II . . . . od. $pv = R(a + t)$ wenn a d. Verhältnis d. $\frac{S}{R}$ bedeutet

d.h. $a = \frac{1}{\alpha}$ = dem reciproken Werthe von α.

Was nun d. Coefficienten α betrifft, so ist derselbe nichts anderes als d. sog. Ausdehnungscoefficient d. Gases, nämlich d. Verhältnis d. Volumenänderung, welche bei constanter Pressung einer Temperaturänderung von 1° entspricht, zum Volumen bei 0° unter derselben Pressung. Ist also dv d. Änderung d. Volumens v, wenn sich d. Temperatur t bei constanter Pressung p um $dt = 1$ ändert, so ist nach Gleich. I durch Differentiation:

$p\,dv = S\alpha\,dt$ oder da $dt = 1$ sein soll

$p\,dv = S\alpha$

Ist nun noch v_0 d. Werth von v, welcher bei demselben Druck p, d. Temperatur $t = 0$ entspricht, so hat man nach Gesetz I:

$$p v_0 = S$$

und schließlich durch Division beider Gleichungen:

$$\alpha = \frac{dv}{v_0} = \text{d. Ausdehnungscoefficienten d. Gase.}$$

Demnach ist also auch a d. reciproke Werth d. Ausdehnungscoefficienten.

Wie schon gesagt haben d. Constanten R und S in d. ersten Form d. Zustandsgleichung für verschiedenartige Gase verschiedene Werthe. Damit ist aber noch gar nicht gesagt, daß R und S auch bei allen Gasen in ein und demselben Verhältniß zu einander stehen, also $\frac{R}{S}$ für alle Gase constant sei.

Um dies zu constatiren müßte man also d. Ausdehnungscoefficienten α für verschiedene Gase durch Versuche zu bestimmen suchen, und kommt dabei natürlich zunächst darauf für d. Zustandsgleichung:

$$pv = R(a+t) = S(1+\alpha t)$$

2 Größen von zusammengehörenden $p\,v - t$ durch Beobachtung zu bestimmen, diese in d. Gleichung einsetzen, so daß man S direct eliminiren kann und also nur eine Gleichung zur Bestimmung von α übrig bleibt. Es empfiehlt sich hier besonders zur Beobachtung d. beiden Grenzen $t = 0°$ und $t = 100°$ zu wählen, indem man diese Temperaturen lange Zeit hindurch constant erhalten kann durch das Umspülen von Eis und Wasser und Dämpfen siedenden Wassers.

Es seien nun p_0 und v_0 die beobachteten Werthe von p u. v bei d. Temperatur $t = 0°$
und p_1 u. v_1 " " " " " " " $t = 100°$
eines Gases, so ist nach Gesetz:

$$p_0 v_0 = S(1 + \alpha \cdot 0) = S(1 + \alpha . 0) = S$$
$$p_1 v_1 = S(1 + 100\alpha)$$

Also
$$\frac{p_1 v_1}{p_0 v_0} = 1 + 100\alpha \quad \text{u.} \quad \alpha = \frac{p_1 v_1 - p_0 v_0}{100\, p_0 v_0}$$

Von verschiedenen Physikern sind in dieser Hinsicht Versuche gemacht worden und zwar hauptsächlich auf 2fache Weise, entweder wurden in beiden Fällen d. Beobachtung (zur Herstellung d. beiden Grenzzustände [illegible]) bei constantem Volumen oder auch bei constantem Druck vorgenommen.

Wählt man in beiden Fällen d. Druck gleich, also $p_0 = p_1$, so hat man zur Bestimmung von α d. Formel:

$$\alpha = \frac{v_1 - v_0}{100 v_0}$$

und wählt man in beiden Fällen d. Volumen constant, also $v_0 = v_1$, so hat man:

$$\alpha = \frac{p_1 - p_0}{100 p_0}$$ zur Bestimmung d. Ausdehnungscoefficienten.

Für ein vollkommenes Gas, welches d. beiden physikal. Gesetze (Mariotte und Gay-Lussac) ganz strenge unterworfen ist, für welches also d. Zustandsgleichung vollkommen genau gilt, müßte sich natürlich nach beiden Methoden gleiche Werthe von α ergeben für ein und denselben Versuch. Es wurde aber gefunden namentlich von Regnault, daß d. Ausd. Werth α für wirkliche Gase etwas verschieden ausfiel, je nachdem er nach d. ersten od. letzten Bestimmungsgleichung gemessen wurde und ferner [illegible] d. beiden Formeln [illegible] je nach den Werthen von v_0 und p_0, nämlich α wurde um so kleiner unter sonst gleichen Umständen, je größer d. [illegible] Volumen und je kleiner d. Druck, also je größer v_0 und je kleiner p_0 war.

Als voraus müssen wir [illegible] annehmen, daß d. Verhältniß d. Constanten $\frac{R}{S} = \alpha$ = Ausdehnungscoefficient für alle Gase constant sei, und wenn durch diese Versuche und Messungen bewiesen [illegible], indem nämlich α für verschiedene Gase unter gleichen Umständen nicht mehr verschieden ist, als für dasselbe Gas unter verschiedenen Umständen. Mit demselben Recht also, wie man α für ein und dasselbe Gas unter verschiedenen Umständen constant annimmt, mit demselben Rechte kann man auch d. Ausdehnungscoefficienten α für verschiedene Gase constant annehmen.

× Sämmtlich ist d. Ausdehnungscoefficient α für den Grenzzustand eines vollkommenen Gases als eine von d. Natur unabhängige Constante zu betrachten und dem kleinsten Werthe von α gleich zu setzen, welcher für irgend ein Gas unter irgend welchen Umständen bisher gefunden wurde, weil jedes Gas seinem Grenzzustand um so näher kommt, je größer bei gegebener Temperatur sein spec. Volumen ist, mit wachsendem v aber α abnimmt. Dieser kleinste Werth ist:

$$\alpha = 0,00366$$

welcher für Wasserstoffgas nach d. besten Jolly gefunden wurde, indem d. betreffenden Versuche bei Temperaturen von 0° u. 100° unter normalem Atmosphärendruck gemacht wurden. Das Wasserstoffgas ist überhaupt auch dasjenige von allen permanenten Gasen, bei welchem d. Veränderlichkeit von α am kleinsten ist, so daß man auch annehmen kann, es darstelle sich von allen Gasen am meisten d. idealen Grenzzustand eines vollkommenen Gases nahe.

Zu setzen ist es nun aber zweckmäßig, anstatt d. Zustandsgleichung in d. Form $pv = S(1+\alpha t)$ lieber in d. Form $pv = R(a+t)$ zu bringen, zu legen und also anstatt d. Ausdehnungscoefficienten α seinen reciproken Werth $\frac{1}{\alpha} = a$ in d. Rechnung einzuführen.

Es ist: $a = \frac{1}{\alpha} = \frac{1}{0,00366} = 273$

und wird so d. Zustandsgleichung:

$$pv = R(273+t)$$

Während nun dieser Coefficient a in d. Zustandsgleichung als für alle Gase constant zu betrachten ist, ist dagegen R für verschiedenartige Gase verschieden zu werten. Um diesen Werth für R zu bestimmen, muß man erst eine Gruppe zusammengehörender Werthe von v p u. t kennen. Da d. atmosphärische Luft als das für d. technische Anwendung am wichtigste Gas zu betrachten ist, so scheint es am besten zunächst für diese atmosphärische Luft d. Coefficienten R zu bestimmen. Es ist durch d. einfachste experimentelle Versuche, daß 1 cubm Luft bei normalem Atmosphärendruck und d. Temperatur $t = 0$ = 1,2932 kgr wiegt, so ist also ihr spez. Gewicht:

$$\gamma = \frac{1}{v} = 1,2932$$

Der normale Atmosphärendruck ist bekanntlich ebenfalls nicht gleich mit einer Quecksilbersäule von 1 qm Querschnitt und 0,76 m Höhe bei 0° Temperatur d. Quecksilbers, d. normale Atmosphärendruck ist also = dem Gewicht einer Quecksilbersäule von 1 qm Querschnitt und 0,76 m Höhe bei 0° Temperatur d. Quecksilbers ausgedrückt in kgr pr qm.

D. Gewicht d. Quecksilbersäule ist nun = Volumen · spez. Gewicht

= 0,76 cubm · spez. Gewicht

Was d. spez. Gewicht d. Quecksilbers betrifft, so ist d. Dichtigkeit d. Quecksilbers bei 0° 13,596 mal so groß als d. Dichtigkeit d. Wassers bei 4°; ferner wiegt bekanntlich 1 cubdcm Wasser 1 kgr also 1 cubm natürlich 1000 kgr. Demnach ist also d. Gewicht d. Quecksilbers pr cubm bei 0° = 13,596 · 1000 = 13596 kgr

und also d. Gewicht d. Quecksilbersäule = 0,76 · 13596 = 10333 kgr

Dies Gewicht ist aber = d. Atmosphärendruck also:

$$p = 10333 \text{ kgr pr qm.}$$

Man hat also nun zusammengehörende Werthe von v p t, nämlich:

$\frac{1}{v} = 1,2932$ $p = 10333$ kgr pr qm und $t = 0°$

Nach d. obigen Zustandsgleichung ist also:

$$R = \frac{pv}{273+t} = \frac{10333}{1,2932\,(273+0)} = \frac{10333}{1,2932 \cdot 273} = 29,27.$$

Nachdem man in dieser Weise R als eine constante Größe für atmosphärische Luft gefunden hat, kann man nun auch R bestimmen für ein anderes Gas, dessen Dichtigkeit im Verhältniß zur Dichtigkeit d. atmosphärischen Luft bekannt ist, natürlich mit Rücksicht auf gleiche Pressung und Temperatur.

Nach Zustandsgleichung: $pv = R(a+t)$ sind nämlich offenbar d. Coefficienten R zweier verschiedener Gase von übrigens gleicher Pressung und Temperatur umgekehrt d. spec. Volumen, also umgekehrt proportional d. Dichtigkeit. Ist also δ d. Dichtigkeit eines anderen Gases in Bezug auf atmosphärische Luft von gleicher Pressung und Temperatur, so ist für dasselbe d. Coefficient R:

$$R = \frac{29{,}27}{\delta}$$

Es muss hierbei aber bemerkt werden, daß d. Werth $R = 29{,}27$ sich auf solche atmosphärische Luft bezieht, welche ganz sorgfältig von ihren zufälligen Bestandtheilen (Wasserdampf, Kohlensäure etc.) befreit wurde, indem d. genannte Gewicht von 1 cubm Luft $= 1{,}2932$ kgr sich nur auf einen solchen Zustand d. Luft bezieht, in welchem diese Beimischungen, namentlich Kohlensäure und Wasserdampf, durch künstliche Mittel entfernt wurden. Es fragt sich nun, ob d. Constante R nicht für gewöhnliche feuchte Luft wesentlich anders ausfallen wird als für d. reine Luft. In dieser Hinsicht kann man zunächst sagen, daß d. natürliche und zu technischen Zwecken benutzte atmosphärische Luft d. zufälligen Beimischungen, namentlich also Wasserdampf und Kohlensäure, nur in so kleinen Mengen enthält, daß durch diese Beimischungen d. Gas-Charakter d. Gemisches nicht wesentlich geschädigt wird, sodass den betreffenden Rechnungen immer noch d. Zustandsgleichung in d. bekannten Form zu Grunde gelegt werden kann. Immerhin aber werden d. wasserhaltigen Bestandtheile einen Einfluß auf d. Constante R ausüben, während d. anderen Beimischungen einen nur so geringen Einfluß ausüben, daß derselbe nicht in Rechnung gezogen werden kann. Von Interesse erscheint es daher namentlich d. Einfluß d. Wassergehalts d. Luft auf δ und R zu untersuchen und festzustellen. Zu dem Ende muß zunächst d. Wassergehalt d. zu untersuchenden atmosphärischen Luft bekannt sein.

Angenommen es sei p d. Gesammtspannung d. feuchten Luft, so ist bekanntlich nach d. Dalton'schen Gesetze diese Pressung = d. Summe d. Pressungen d. trockenen Luft und d. Wasserdampfs. Ist also p_0 d. Pressung d. in d. Luft enthaltenen Wasserdampfs, so ist $p - p_0$ d. Pressung d. trockenen Luft für sich allein und d. verhältnissmäßige Pressung d. ~~feuchten~~ Wasserdampfes also $= \frac{p_0}{p}$ und d. verhältnissmäßige Pressung d. trockenen Luft $= \frac{p-p_0}{p}$. Nun ist aber weiter d. spec. Gewicht d. Wasserdampfes ungefähr $\frac{5}{8}$ so groß wie d. d. trockenen Luft bei gleicher Pressung und Temperatur; d. Dichtigkeit δ d. feuchten Luft demnach:

$$\delta = \frac{p-p_0}{p} + \frac{5}{8}\frac{p_0}{p} = 1 - \frac{3}{8}\frac{p_0}{p}$$

und also nach Obigem d. Constante R i. d. Zustandsgleichung:

$$R = \frac{29{,}27}{1-\frac{3}{8}\frac{p_0}{p}}$$

Rechnet man z. B., wie es im mittleren Zustand in Luft meist d. Fall ist, $\frac{p_0}{p} = \frac{1}{100}$, d. h. daß d. Pressung d. Wasserdampfes 1% d. Gesammtspannung d. feuchten Luft ausmacht, so bekommt man:

$$R = 29{,}38.$$

Hinsichtlich d. spec. Wärme sind nun noch einige Bemerkungen zu machen. Es wurde im Vorhergehenden immer mit c d. spec. Wärme eines Körpers für constantes Volumen und mit c_1 d. spec. Wärme für constante Pressung bezeichnet. Diese Bezeichnungen sollen nun auch für Gase speciell beibehalten werden, also c d. spec. Wärme d. Gases für constantes Volumen und c_1 = spec. Wärme für constante Pressung. Von diesen spec. Wärmen ist nur d. letztere c_1 = spec. Wärme für constante Pressung (namentlich von Regnault) für verschiedene Gase direct durch Versuche bestimmt worden und es ergab sich dabei, daß c_1, welches übrigens für verschiedenartige Gase verschieden ist, unabhängig von dem augenblicklichen Zustande d. Gases ist, wenigstens mit derselben Annäherung, mit welcher d. Gas dem Mariotte'schen und Gay-Lussac'schen Gesetze folgt. Insbesondere wurde für atmosphärische Luft gefunden

$$c_1 = 0{,}2375.$$

Was d. spec. Wärme c bei constantem Volumen d. Gase betrifft, so ist diese nicht direct ermittelt worden, sondern dieselbe kann bisher nur indirect erhalten werden mit d. Verhältniss $n = \frac{c_p}{c}$, welches Verhältniss man auf verschiedenartige Weise und Versuchen ermitteln kann, wie solche später noch erörtert werden sollen. Unter andern ergibt sich für d. atmosphärische Luft im Mittel aus verschiedenen Versuchen dieses Verhältniss $n = 1,41$.

$$\text{und also } c = \frac{c_p}{n} = \frac{0,2375}{1,41} = 0,1684.$$

Für irgend ein anderes Gas kann d. spec. Wärme c ebenfalls erhalten werden aus seiner spec. Wärme c_p, seiner Dichtigkeit δ in Bezug auf atmosphärische Luft und aus den Werthen für c und c_p für atmosphärische Luft. [illegible] für atmosphärische Luft d. spec. Wärme $c = 0,1684$ [illegible] $n = 1,41$ [illegible] spec. Wärme $c_p = 0,2375$. [illegible] $n = 1,41$ [illegible] d. Verhältnisses n für alle Luft [illegible]. [illegible] d. spec. Wärme c [illegible] c_p [illegible] c [illegible] d. spec. Wärmen c und c_p für jedes Gas constant sind, ihre Werthe also nur von d. Art, nicht vom Zustande d. Gases abhängen.

Bestimmung d. Temperaturfunction T.

Die erwähnten charakteristischen Eigenschaften d. Gase können nun dazu dienen, [illegible] d. beiden Hauptgleichungen d. Temperaturfunction T ein für allemal zu bestimmen, [illegible] Function d. Temperatur [illegible] Aggregatform d. Körper [illegible] Aggregatform [illegible] geeignet.

Die zuerst festgestellten charakteristischen Eigenschaften eines Gases bestanden nun darin, dass seine Zustandsgleichung d. allgemeine Form hatte:

$$pv = S + R\mathfrak{T} = R(a + t)$$

worin a eine Constante $= 273 =$ d. reciproken Werth d. für alle Gase unter allen Umständen constant angenommenen Ausdehnungscoefficienten α bedeutet, während d. Constanten R und S für verschiedenartige Gase verschieden sein können, weiter bestanden d. charakteristischen Eigenschaften d. Gase darin, dass d. spec. Wärmen c und c_p bei constantem Volumen resp. constantem Druck für jedes Gas constant sind, dass ihre Werthe nur von d. Art d. Gases und nicht von dessen augenblicklichem Zustande abhängen.

Die beiden Hauptgleichungen, welche hier benutzt werden müssen, um in Verbindung mit den genannten charakteristischen Eigenschaften d. Gase d. Temperaturfunction T zu erkennen, hatten nach Seite 67 XI und XII folgende allgemein gültige Formen:

$$A = \frac{\partial}{\partial p}\left(c_p \cdot \frac{\partial \vartheta}{\partial v}\right) - \frac{\partial}{\partial v}\left(c_v \cdot \frac{\partial \vartheta}{\partial p}\right)$$

$$A\vartheta = (c_p - c_v)\,\frac{\partial \vartheta}{\partial p} \cdot \frac{\partial \vartheta}{\partial v}$$

In diesen beiden Gleichungen bedeuten c_p und c_v gewisse Functionen d. den Wärmezustand charakterisirenden Größen, welche in besonderer Beziehung stehen zu d. spec. Wärmen c und c_1 und d. Temperaturfunction ϑ; es war nämlich: (Seite 66 u. 67):

$$c_v = \frac{dQ}{d\vartheta} \text{ im Falle } v = \text{const. und } c_p = \frac{dQ}{d\vartheta} \text{ im Falle } p = \text{Constant.}$$

und ferner: $c = c_v \dfrac{d\vartheta}{dt}$ und $c_1 = c_p \dfrac{d\vartheta}{dt}$

u. wenn man d. 1 Ableitung von ϑ nach $t = \dfrac{d\vartheta}{dt} = \vartheta'$ bezeichnet, so hat man:

$$c = c_v \vartheta' \quad \text{und} \quad c_1 = c_p \vartheta'$$
$$\text{od.} \quad c_v = \frac{c}{\vartheta'} \quad \text{und} \quad c_p = \frac{c_1}{\vartheta'}$$

Weiter erhält man d. partielle Ableitung von ϑ nach v, indem ϑ eine mittelbare Function von v ist, da ϑ eine Function von t und t wieder eine Function von v ist, dadurch daß man d. ~~partielle~~ Ableitung von ϑ nach t mit d. partiellen Ableitung von t nach v multiplicirt. Also:

$$\frac{\partial \vartheta}{\partial v} = \frac{d\vartheta}{dt} \cdot \frac{\partial t}{\partial v} = \vartheta' \frac{\partial t}{\partial v}$$
$$\text{und ebenso} \quad \frac{\partial \vartheta}{\partial p} = \frac{d\vartheta}{dt} \cdot \frac{\partial t}{\partial p} = \vartheta' \frac{\partial t}{\partial p}$$

Was nun d. beiden Ableitungen von t nach v und p betrifft, so sind diese bestimmt durch d. Zustandsgleichung d. Gase. Differentiirt man dieselbe partiell nach v, faßt also p als Constante an, so ergiebt sich:

$$\frac{\partial t}{\partial v} = \frac{p}{R}$$

und differentiirt man partiell nach p, also unter Annahme v = Constante, so erhält man:

$$\frac{\partial t}{\partial p} = \frac{v}{R}$$

Substituirt man diese Ausdrücke nun in den beiden obigen Gleichungen, so werden diese dadurch speciell auf Gase angewandt, und man erhält dann diese nur für Gase geltenden Formen:

Aus d. ersten: $$A = \frac{\partial}{\partial p}\left(c_1 \frac{p}{R}\right) - \frac{\partial}{\partial v}\left(c \frac{v}{R}\right)$$

Unter d. gemachten Annahme, daß d. spec. Wärmen c und c_1 und d. Coefficient R für ein und dasselbe Gas constant sind, sind c, c_1 und R als unabhängig von den, d. Wärmezustand charakterisirenden Größen v u. p zu betrachten; man hat demnach:

$$A = \cancel{\frac{(c_1 - c)}{R} \cdot \frac{\partial p}{\partial p} - \frac{\partial v}{\partial v}}$$

$$A = \frac{c_1}{R}\frac{\partial p}{\partial p} - \frac{c}{R}\frac{\partial v}{\partial v} = \frac{c_1 - c}{R}$$

Aus d. 2ten Hauptgleichung ergibt sich nach Einsetzung d. bezüglichen Werthe:

$$A\vartheta = \frac{C_1 - C}{\vartheta'}\,(\vartheta')^2\,\frac{pv}{R^2}$$

$$= \frac{C_1 - C}{R}\,.\,\vartheta'\,\frac{pv}{R}$$

Nach d. Zustandsgleichung ist aber $\frac{pv}{R} = a + t$

also: $$A\vartheta = \frac{C_1 - C}{R}\,\vartheta'(a+t)$$

Dividirt man nun diese Gleichung durch d. Werth für A gefundenen, so bekommt man:

$$\vartheta = \vartheta'(a+t)$$

Dies ist nun eine Differentialgleichung zur Bestimmung von ϑ als Function von t; setzt man nämlich für ϑ' seinen Werth, so bekommt man:

$$\vartheta = \frac{d\vartheta}{dt}(a+t)$$

od. $$\frac{d\vartheta}{\vartheta} = \frac{dt}{a+t}$$ nach d. Differentialrechnung ist aber nun bekanntlich:

$\frac{d\vartheta}{\vartheta} = d\,l(\vartheta)$ und $\frac{dt}{a+t} = d\,l(a+t)$ wobei l d. natürlichen Logarithmus bedeutet.

Also: $$d\,l(\vartheta) = d\,l(a+t)$$

od. durch Integration:

$$l(\vartheta) = l(a+t) + \text{Constante}\,l(C)$$

$$= l[(a+t)C]$$

folglich: $$\vartheta = (a+t)C$$ wenn C eine willkürlich zu wählende Constante bedeutet und wobei a d. reciproke Werth d. Ausdehnungscoefficienten α zu verstehen ist.

Nimmt man nun d. willkürlich zu wählende Constante $C = 1$, so hat man:

$$\vartheta = a + t = 273 + t.$$

Diese Temperaturfunction ϑ unterscheidet sich also von d. Temperatur t nur durch einen constanten Summanden; sie ist also selbst eine Temperatur nur von einem anderen Nullpunkt aus gerechnet als d. thermometrische Temperatur t d.h. sie ist selbst eine Temperatur, welche nur von einem 273° unter d. thermometrischen Nullpunkt = Gefrierpunkt d. Wassers gelegenen Nullpunkt aus gerechnet werden muß. Man nennt diesen Nullpunkt auch d. absoluten Nullpunkt und dementsprechend ϑ d. absolute Temperatur.

Da nun die beiden Temperaturen ϑ und t sich nur durch einen constanten Summanden unterscheiden, $= a = 273$, so kann man auch d. Ableitungen von ϑ und t mit einander vertauschen und also in allen Gleichungen $d\vartheta$ und dt beliebig mit einander vertauscht werden.

Ferner ist nun auch $\vartheta' = \frac{d\vartheta}{dt} = 1$ und daher auch d. Formeln auf voriger Seite:

$c_v = C$ und $c_p = C_1$ d.h. d. Größen c_v und c_p welche im Allgemeinen d. Bedeutung $\frac{dQ}{d\vartheta}$ bei constantem Volumen resp. bei constanter Pressung bedeuten, speziell bei [illegible] Gasen haben, bedeuten also nichts anderes als d. spez. Wärmen bei constantem Volumen resp. constanter Pressung.

In d. Regel wird nur [illegible] d. absolute Temperatur T an d. Stelle d. [illegible] Temperatur t [illegible] eingeführt, [illegible] in manchen Fällen [illegible] werden.

Jedenfalls erhält man damit d. Zustandsgleichung eines Gases in d. einfacheren Form:

für $a + t = T$.

$$pv = RT$$

Aus d. Zustandsgleichungen welche bei d. Behandlung von T als Function von t gefunden wurden, [illegible] ergibt, wenn man [illegible] als [illegible]:

$$A = \frac{C_1 - C}{R}$$

$$\text{od. } C_1 - C = AR.$$

[illegible] Gleichung [illegible] d. allgemeinen Formen d. Wärmegleichung [illegible] d. allgemeinen Formen d. Wärmegleichung [illegible] Ausdruck für d. Wärmemenge dQ, welche einem Körper per 1 kgr. [illegible] Zustandsänderung mitgetheilt werden muss, waren (Seite 67 VIII und Seite 69):

$$dQ = C_p \frac{dT}{dv} dv + C_v \frac{dT}{dp} dp$$

$$dQ = C_v dT + AT \frac{dp}{dT} dv$$

$$dQ = C_p dT - AT \frac{dv}{dT} dp$$

[illegible] d. Wärmemenge dQ zu bestimmen, welche d. Körper per 1 kgr. [illegible] mitgetheilt werden muss, wenn [illegible] d. spec. Volumens v und d. Änderungen d. spec. Pressung p; [illegible] d. absolute Temperatur T und d. spec. Volumen v gegeben ist und endlich d. 3te, wenn d. [illegible] T und d. spec. Pressung p [illegible]

Diese Gleichungen gelten allgemein für einen beliebigen Körper [illegible] für T [illegible] Function von t [illegible] Bedeutung von C_v und C_p [illegible] d. spec. Wärmen C und C_1 für constantes Volumen resp. constante Pressung [illegible]. Zum Unterschied [illegible] für feste und flüssige Körper [illegible] C_v und C_p d. spec. Wärmen bei constantem Volumen resp. constanter Pressung von festen und flüssigen Körpern [illegible] und C und C_1 d. spec. Wärmen bei constantem Volumen resp. constanter Pressung von Gasen und Gasgemischen bedeuten.

Wendet man nun also d. Formeln auf ein Gas an, so ist: $C_v = C$ und $C_p = C_1$ zu setzen; ferner ergibt sich aus d. Zustandsgleichung $pv = RT$ d. Gase durch Differentiation:

$$\frac{dT}{dv} = \frac{p}{R} \quad \text{und} \quad \frac{dT}{dp} = \frac{v}{R}.$$

Mit Rücksicht hierauf nimmt [illegible] d. erste Formel bei d. Anwendung auf Gase folgende Form an:

$$dQ = \frac{1}{R}\left(C_1 p\, dv + C v\, dp\right)$$

= diejenige Wärmemenge, welche d. Gase per 1 kgr. [illegible] mitgetheilt werden muss, damit d. spec. Volumen v in $v + dv$ und d. spec. Pressung p in $p + dp$ übergehen soll, wobei C und C_1 d. spec. Wärmen d. Gases bei constantem Volumen resp. constanter Pressung bedeuten.

Aus d. 2t. Formel wird:

$$dQ = c\,dT + \frac{ART}{v}\,dv$$

und aus d. 3ten:

$$dQ = c_1\,dT - \frac{ART}{p}\,dp$$

Diese können vereinfachter geschrieben werden, wenn man mit Rücksicht auf d. Zustandsgleichung: $pv = RT$ setzt:

$$\frac{RT}{v} = p \quad \text{und} \quad \frac{RT}{p} = v:$$

$$dQ = c\,dT + A p\,dv$$

u.

$$dQ = c_1\,dT - A v\,dp$$

wenn A bekanntlich d. Wärme welche d. Arbeitseinheit $= \frac{1}{424}$ Calorien bedeutet. Diese verschiedenen Formen d. Wärmegleichung für Gase werden wegen ihrer vielen Aufgaben zweckmäßige Verwendung kommen.

Wie schon erwähnt, gestattet d. Gleichung, welche für Gase betreffs d. spez. Wärmen c und c_1 gilt, nämlich:

$$c_1 - c = AR$$

mehrere interessante Folgerungen. Zunächst sieht man, daß d. Differenz d. spez. Wärmen ~~einer~~ verschiedener Gase bei constantem Druck resp. constantem Volumen proportional ist d. Constanten R in d. Zustandsgleichung. Diese Constante R wurde aber Seite 77 als umgekehrt proportional d. Dichtigkeit gefunden, so ergibt sich d. Differenz $c_1 - c$ bei verschiedenen Gasen umgekehrt proportional d. Dichtigkeiten d. Gase sein muss.

Für atm. Luft kennt man mit genügender Genauigkeit und Sicherheit d. Werthe für c_1, c und R und hieraus kann man aus d. obige Gleichung dazu dienen den Werth von A zu bestimmen, umgekehrt erscheint es doch von Interesse zu untersuchen ob d. durch Joule gefundenen, mit anderen Versuchen sicher festgestellten Mittelwerth von $A = \frac{1}{424}$ auch mit diesen gefundenen Werthen von c_1, c und R übereinstimmt und zwar für alle Gase.

Für d. atm. Luft wurde nun aus Versuchen gefunden:

$$c_1 = 0{,}2375 \quad \text{und} \quad \frac{c_1}{c} = 1{,}41$$

$$\text{also } c = \frac{c_1}{1{,}41} = \frac{0{,}2375}{1{,}41} = 0{,}1684.$$

$$\text{und } R = 29{,}27$$

Diese Werthe eingesetzt gibt:

$$\frac{1}{A} = W = \text{Arbeitswerth d. Wärmeeinheit} = \frac{R}{c_1 - c} = \frac{29{,}27}{0{,}2375 - 0{,}1684} = 423{,}6 \text{ kgm.}$$

Also wie d. Tabelle zeigt stimmt dieser Werth fast genau mit d. Mittelwerth überein, welcher aus d. Versuchen von Joule sich ergeben hatte.

Nach d. Gleichung:

$c_1 - c = AR$, wenn A für alle Körper constant $= \frac{1}{424}$, dagegen R umgekehrt proportional d. Dichtigkeit δ d. verschiedenen Gase ist, muss auch $c_1 - c$ umgekehrt proportional d. Dichtigkeit δ d. verschiedenen Gase sein; also d. kann für irgend ein beliebiges Gas diese Differenz $c_1 - c$ gefunden werden d. betreffenden Differenz für atm. Luft dividirt durch d. Dichtigkeit δ d. Gases in Bezug auf d. Dichtigkeit d. atm. Luft. Für atm. Luft war diese Differenz gefunden $= 0{,}2375 - 0{,}1684 = 0{,}0691$

Also für ein beliebiges Gas:

$$c_1 - c = \frac{0{,}0691}{\delta}$$

unter δ d. Dichtigkeit d. Gases verstanden wenn d. Dichtigkeit d. atm. Luft als 1 angenommen wird. D. Werthe von δ und ebenso d. Werthe von c_1 kennt man mit ziemlicher Genauigkeit für verschiedene Gase, während d. Werthe c nur mit schwierigen Versuchen festgestellt werden können. Obige Formel ist nun eine solche Beziehung, aus welcher man c d. spec. Wärme eines Gases für constantes Volumen aus d. bekannten δ und d. spec. Wärme c_1 bei constantem Drucke berechnen kann, wenn man außerdem noch d. Dichtigkeit d. vorliegenden Gases in Bezug auf atm. Luft kennt. Ebenso kann man dann auch den sehr wichtigen Quotienten $\kappa = \frac{c_1}{c}$ berechnen. Man hat diese Rechnungen auch für d. wichtigsten Gasarten ausgeführt, namentlich sind solche von Regnault angestellt und d. richtigen Werthe von δ und c_1 d. verschiedenen Gase bestimmt. Es wurde dann gefunden daß bei d. 4 bisher permanenten Gase, nämlich Wasserstoff, Sauerstoff, Stickstoff und Kohlenoxyd, d. Verhältniß $\kappa = \frac{c_1}{c}$ sich nahe gleich groß = dem schon bekannten Werthe $\kappa = 1{,}41$ für atm. Luft sei.

Während nach d. obigen Gleichung d. Differenz:

$$c_1\delta - c\delta = 0{,}0691$$

für alle Gase gleich groß ist, entsprechen jenen Gasen, für welche κ gleich groß ist, auch gleiche Einzelwerthe d. Producte $c_1\delta$ und $c\delta$. Da δ dem spec. Gewichte (Gewicht pr. Volumeneinheit) eines Gases bei gegebenem Drucke und Temperatur proportional ist, so sind jene Producte $c\delta$ und $c_1\delta$ den betreffenden spec. Wärmen d. Volumeneinheit verschiedener Gase bei gleichem Drucke und Temperatur derselben proportional. Während also für alle Gase d. Differenz d. spec. Wärmen d. Volumeneinheit (b. gleichen Werthen von p u. t) beziehungsweise für constantes Volumen und für constanten Druck gleich groß ist, sind diese spec. Wärmen auch einzeln gleich groß für solche Gase, für welche κ denselben Werth hat, insbesondere also fast genau für d. oben genannten bisher permanenten Gase.

Wie vorhin gesehen hat man nun d. Wärmegleichung auf diejenigen d. Formen gebracht, welche sich besonders zur Anwendung auf Gase eignen. Am zweckmäßigsten ist es aber nach d. spec. innere Arbeitsvermögen in welcher Weise für ein Gas durch d. den Wärmezustand charakterisirenden Größen auszudrücken. Da man aber bekanntlich keinen Wärmezustand angeben kann, für welchen d. innere Arbeitsvermögen = 0 ist, so kann man dieses auch immer nur bis auf einen constanten Summanden bestimmen und drückt man nur den Unterschied d. Arbeitsvermögens in 2 verschiedenen Wärmezuständen od. d. Änderung d. spec. inneren Arbeitsvermögens beim Übergange von einem gegebenen Anfangszustande zu einem anderen Zustande aus.

Um nun einen Ausdruck für diesen Unterschied od. d. Änderung d. inneren Arbeitsvermögens zu bekommen, hat man d. allgemeine Wärmegleichung:

$$W dQ = dU + p\,dv$$

welche bekanntlich ausdrückt, daß eine mitgetheilte Wärmemenge d. Körper nach Theilen verwendet werden muß, damit d. innere Arbeitsvermögen sich um dU ändert und damit bei d. entsprechenden unendlich kleinen Zustandsänderung eine Expansionsarbeit $= p\,dv$ verrichtet wird.

Insbesondere für ein Gas nimmt diese Wärmegleichung d. Form (Seite 82) an:

$$dQ = c\,d\vartheta + A p\,dv$$

welche Form sich dadurch begreift, daß d. Wärmezustand durch d. spec. Volumen v und durch d. absolute Temperatur ϑ charakterisirt wird. Multiplicirt man diese Gleichung mit W, so bekommt man:

$$W dQ = W c\,d\vartheta + p\,dv$$ indem bekanntlich $WA = 1$ ist mit $W = \frac{1}{A}$ (Seite 39)

durch Subtraction beider Gleichungen bekommt man:

$$0 = dU - Wc\,d\vartheta \quad \text{od.:} \quad dU = Wc\,d\vartheta$$

Aus dieser Gleichung geht hervor, weil da c d. spec. Wärme eines Gases bei constantem Volumen für d. betreffende Gas constant ist, ihr Werth also unabhängig von d. augenblicklichen Zustande d. Gases ist, und weil ferner ein ... $d\vartheta$ und dt mit einander vertauscht werden können wegen $\vartheta = 273 + t$, daß d. Änderung d. innern Arbeitsvermögens eines Gases seiner Temperaturänderung proportional ist.

Bezeichnet man nun im Anfangszustand d. absolute Temperatur mit ϑ_1 und d. innere Arbeitsvermögen mit U_1, so erhält man durch Integration d. obigen Gleichung:

$$U - U_1 = Wc(\vartheta - \vartheta_1)$$

od. da mit Rücksicht auf d. Zustandsgleichung eines Gases: $\vartheta = \frac{pv}{R}$ und entsprechend $\vartheta_1 = \frac{p_1 v_1}{R}$ wobei p_1 und v_1 die dem Anfangszustand entsprechenden Werthe von v u. p vorstellen, und wenn man ferner noch $W = \frac{1}{A}$ setzt:

$$U - U_1 = \frac{c}{AR}(pv - p_1 v_1)$$

od. auch da $AR = c_1 - c$ und für $\frac{c_1}{c} = n$ gesetzt, wenn man Zähler und Nenner durch c dividirt:

$$U - U_1 = \frac{pv - p_1 v_1}{n-1}$$ = d. Unterschied d. innern Arbeitsvermögens im End- und Anfangszustand d. Zustandsänderung.

Wir wollen nun zu besondern Arten von Zustandsänderungen von Gasen übergehen, welche bei den technischen Anwendungen von Wichtigkeit sind.

Die wichtigsten dieser besondern Arten von Zustandsänderungen lassen sich gemeinsam umfassen unter d. ziemlich allgemeinen Voraussetzung, daß d. Zustandsänderung in einer solchen Weise erfolge, daß ... d. Pressung ... proportional ... einer gewissen Potenz d. spec. Volumens. Es ist also, wenn m und C Constanten bedeuten, d. Zustandsgleichung, welche d. Gesetz d. gleichzeitigen Änderung von v u. p angiebt, d. Form hat:

I .... $p \cdot v^m = C$

Zunächst kommt es nun darauf an d. Gestalt d. Zustandscurve zu bestimmen, d. h. d. Charakter der Zustandscurve, welche d. Gesetz d. Zustandsänderung geometrisch darstellt, festzustellen.

Zu dem Ende wird d. obige Zustandsgleichung differentiirt; man bekommt:

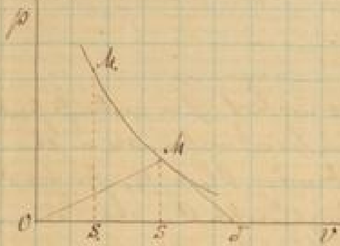
$$v^m dp + p\,m\,v^{m-1} dv = 0$$

Entwickelt man hieraus $\frac{dp}{dv}$, welcher Quotient bekanntlich d. tang. d. Winkels ist, welchen d. Tangente an d. Punkte (v, p) d. Zustandscurve mit d. v Axe bildet, so ergiebt sich:

II .... $\frac{dp}{dv} = -m\frac{p}{v}$

Setzt man nun in d. Zustandsgleichung $pv^m = C$, unter d. Voraussetzung daß d. Constanten m u. C endliche Werthe haben, $v = 0$, so wird nach Gleich. I. $p = \infty$ und also auch nach Gl. II. $\frac{dp}{dv} = \infty$; es sind also $v = 0$, $p = \infty$ und $\frac{dp}{dv} = \infty$ zusammengehörende Werthe und dies nach d. analytischen Geometrie bekanntlich gleichbedeutend ist mit dem Umstand, daß d. Zustandscurve d. p Axe zur Asymptote hat.

Für $v = \infty$ ist einerseits nach Gleich. I, wenn unter Berücksichtigung, daß m eine endliche Größe haben: $p = 0$ und nach Glg II $\frac{dp}{dv} = 0$. Also sind auch $v = \infty$, $p = 0$ und $\frac{dp}{dv} = 0$ zusammengehörende Werthe, entsprechend einem asymptotischen Anschmiegen d. Zustandscurve an d. v Axe.



D. allgemeine Charakter d. Zustandscurve, welche d. Zustandsgleichung: $pv^m = C$ entspricht, ist der, daß dieselbe sich asymptotisch den beiden Coordinatenaxen nähert.

Ist nun $S\sigma = s$ d. Subtangente für den beliebigen Punkt M d. Zustandscurve mit d. Coordinaten $OS = v$ und $SM = p$, so ist für dieselben:

$$\frac{dp}{dv} = -\frac{p}{s} \quad \text{also mit Rücksicht auf} \quad \frac{dp}{dv} = -m\frac{p}{v}$$

ist: $$m = \frac{v}{s} = \frac{OS}{S\sigma}$$

Ist p_1 d. Spannung und σ_1 d. absolute Temperatur, welche d. specifischen Volumen v_1 (mit $OS_1 = v_1$ dem Punkte M_1 d. Zustandscurve) entspricht, so ist, da in jedem Zustand d. Gleichung $pv^m = \text{const. } C$ stattfinden soll, auch:

$$p v^m = v_1^m p_1 \quad \text{und daraus also:}$$

$$\frac{p}{p_1} = \left(\frac{v_1}{v}\right)^m$$ d. h. in 2 verschiedenen, übrigens beliebigen Zuständen verhalten sich d. Spannungen umgekehrt wie d. $m$ten Potenzen d. spec. Volumina und umgekehrt wie d. spec. Volumen selbst.

Ferner ist nach d. allgemeinen Zustandsgleichung d. Gase: $pv = R\sigma$ und also auch: III

$$\frac{\sigma}{\sigma_1} = \frac{pv}{p_1 v_1} = \left(\frac{v_1}{v}\right)^m \frac{v}{v_1} = \left(\frac{v_1}{v}\right)^{m-1} = \frac{p}{p_1}\left(\frac{p_1}{p}\right)^{\frac{1}{m}} = \left(\frac{p}{p_1}\right)^{\frac{m-1}{m}}$$

Die Expansionsarbeit E, welche von 1 kg d. Gases beim Übergange aus d. Zustand $M_1 (v_1\, p_1\, \sigma_1)$ in den Zustand $M (v\, p\, \sigma)$ verrichtet wird, ist nach d. allgemeinen Formel:

$$E = S_1 M_1 M S = \int_{v_1}^{v} p\,dv = p_1 v_1^m \int_{v_1}^{v} \frac{dv}{v^m}$$

od. $$E = \frac{p_1 v_1^m}{m-1}\left(\frac{1}{v_1^{m-1}} - \frac{1}{v^{m-1}}\right) = \frac{p_1 v_1}{m-1}\left[1 - \left(\frac{v_1}{v}\right)^{m-1}\right] \; \ldots\ldots \; \text{IV}$$

Vermittelst d. Gleichungen III kann sie nun auch statt durch v durch p od. σ unter Zuziehung d. mit d. Anfangszustand M_1 gegebenen Größen ausgedrückt werden.

D. spec. Wärme, welche als Funktion von m hiermit zu bezeichnen sei, findet mit Rücksicht auf d. Gleichung Seite 62: $dQ = c\,d\sigma + Ap\,dv = c\,d\sigma + \frac{AR\sigma}{v}dv$ und mit Rücksicht auf d. Zustandsgleichung $pv = R\sigma$:

$$\mu = \frac{dQ}{d\sigma} = c + Ap\frac{dv}{d\sigma} = c + AR\frac{p\,dv}{d(pv)}$$

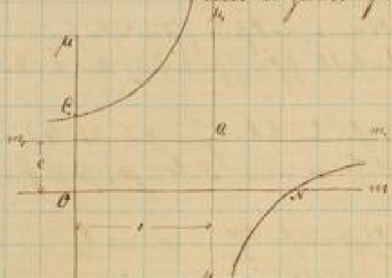
od. da: $c_p - c = AR$ und $\frac{c_p}{c} = n$ also $AR = c(n-1)$ ist und ferner: $d(p.v) = p\,dv + v\,dp$ ist, folgt:

$$\mu = c + \frac{c(n-1)\,p\,dv}{p\,dv + v\,dp} = c + \frac{c(n-1)}{1 + \frac{v\,dp}{p\,dv}}$$

oder endlich nach Glg. II:

V. $$\mu = \left(1+\frac{n-1}{1-m}\right)c = \frac{m-n}{m-1}\,c$$

Diese spez. Wärme ist positiv für $m < 1$ oder $m > n$
und negativ für $1 < m < n$



Das Gesetz, nach welchem sich μ mit m ändert, ist in untenstehender Figur durch die Curve dargestellt, deren Coordinaten m u. μ sind; sie schneidet die μ Achse in der Entfernung $OC_1 = c_1$, die Achse der m in der Entfernung $ON = n$ vom Anfangspunkt O. Die Curve ist eine gleichseitige Hyperbel mit den Asymptoten $M_1 m_1$ in der Entfernung $= 1$ von O aus und $\mu_1\mu_1$ in der Entfernung $= c$ von O, denn mit $m = m_1 + 1$ und $\mu = \mu_1 + c$ wird ihre Gleichung für die Achsen Om_1 und $O\mu_1$:

$$m_1\mu_1 = -(n-1)c = -(c_1 - c)$$

Die Wärmemenge ist die positive oder negative Wärme, welche dem Gase pro 1 kg beim Übergange aus dem Zustand M_1 in den Zustand M mitgetheilt werden muß, nach der bekannten Formel:

VI. $$Q = \mu(\vartheta - \vartheta_1)$$

wenn man nach den Gleichungen III auch ϑ durch v u. p ausdrücken kann.

Es ergibt sich:

$$\vartheta - \vartheta_1 = -\vartheta_1\left[1-\left(\frac{v_1}{v}\right)^{m-1}\right] = -\frac{p_1 v_1}{R}\cdot\frac{m-1}{p_1 v_1}\cdot E$$

$$= -\frac{m-1}{AR}\cdot AE = -\frac{m-1}{c(n-1)}\,AE = -\frac{m-n}{\mu(n-1)}\,AE$$

ist nun:

VII. $$Q = \frac{n-m}{n-1}\,AE$$

also Q von gleichem oder entgegengesetztem Zeichen wie E, je nachdem $m < n$ oder $m > n$ ist.

Für Zustandsänderungen nach dem Gesetz $pv^m = \text{Const.}$ kann im Allgemeinen, zumal wenn [illegible] verhältniß entsprechende Bestimmung von m vorausgesetzt werden, wenn die Zustandscurve oder das Gesetz der Wärmemittheilung nicht gegeben sind, sondern aus Beobachtungen abgeleitet werden müssen. Läßt sich aus denselben mit Hilfe der Gleichungen III und IV der Werth von m bestimmen, so ergibt sich das Gesetz der Wärmemittheilung aus Gleichg. V und VI; oder ist die Annahme des Gesetzes $pv^m = \text{Const.}$, unter m eine Constante verstanden, überhaupt zulässig, [illegible] mehr oder minder vollkommene Übereinstimmung der [illegible] Beobachtungen zu abgeleiteten Werthen von m erkennen.

Diese allgemeinen Formeln können nur benutzt werden um die entsprechenden Werthe für verschiedene besondere Zustandsänderungen zu ermitteln, als spezielle Fälle, wenn der Zustand bekannt, sobald m ~~und n~~ einen speziellen Werth beilegt.

1) Angenommen es sei $m = 0$
dann ist $v^m = v^0 = 1$ und also die Zustandsgleichung:
$$pv^m = p = C \text{ unter } C \text{ eine Constante verstanden.}$$
Man erhält damit also die Zustandsänderung bei constanter Spannung p; die entsprechende Zustandscurve ist also eine mit der v Achse parallele Gerade um die Constante C von der v Achse entfernt.

Weil $m = 0$ wird die spez. Wärme: $\mu = \frac{-n}{-1}c$ oder da bekanntlich $n = \frac{c_1}{c}$
$\mu = c_1$ wie es auch zu erwarten war, indem c_1 eben die spez. Wärme bei constanter Spannung bedeutet.

der Zustandsgleichung ausdrückt, so handelt es sich nur noch um d. Beziehung zwischen d. Temperatur und dem Volumen in verschiedenen Zuständen. Diese Beziehungen sind gegeben durch die mit Gleich. III hergestellt (mit $p = p_0$) Formel:

$$\frac{\vartheta}{\vartheta_0} = \frac{v}{v_0}$$

Für d. Expansionsarbeit E erhält man den Wert mit $p = p_0$ und $m = 0$:

$$E = p(v - v_0)$$

2) Es sei gegeben $m = 1$; dann geht d. Zustandsgleichung über in:

$$pv = \text{Const.}$$

Gemäß d. allgemeinen Zustandsgleichung d. Gase: $pv = R\vartheta$, wenn R für ein und dasselbe Gas constant ist, drückt diese Gleichung aus, daß $\vartheta = \text{const.}$ ist, d. h. daß d. Zustandsänderung bei constanter Temperatur erfolgt und daß d. Zustandscurve eine isothermische Curve wird und zwar ist diese isothermische eine gleichseitige Hyperbel wegen ihrer Gleichungsform: $pv = \text{Const.}$

Ferner ist in diesem Falle:

$$\frac{p}{p_0} = \frac{v_0}{v},$$

und d. spec. Wärme $\mu = \infty$ weil $m - 1 = 0$ also d. Bruch $= \infty$ wird.

Für die Expansionsarbeit E ergibt sich mit $m = 1$ aus Gleich. IIII ein unbestimmter Ausdruck, nämlich $E = \frac{p_0 v_0}{0}(1-1) = p_0 v_0 \frac{0}{0}$

Jedoch läßt sich E direkt leicht bestimmen mit dem allgemeinen Ausdruck für d. Expansionsarbeit, nämlich: $E = \int p\,dv$.

Setzt man nun für p seinen durch Gleich. III bestimmten Werth, und schreibt man d. constanten Größen $p_0 v_0$ vor d. Integral, so erhält man:

$$E = p_0 v_0 \int_{v_0}^{v} \frac{dv}{v} = p_0 v_0 \ln\left(\frac{v}{v_0}\right)$$ unter ln d. natürlichen Logarithmus verstanden.

Mit dieser isothermischen Curve ist bei Gasen d. isodynamische Curve identisch, indem für ein Gas bekanntlich d. Formel für d. spec. Änderung d. inneren Arbeit ist:

$$dU = Wc\,d\vartheta$$

und da nun W und c constant sind, wird mit $d\vartheta = 0$ auch $dU = 0$ ist.

3) Für $m = n = \frac{c_p}{c}$ wird:

d. spec. Wärme: $\mu = 0$ und d. Zustandsgleichung: $pv^n = \text{Const.}$

und ferner auch natürlich: $dQ = 0$.

In diesem Falle geht also d. Zustandsänderung ohne Mittheilung od. Entziehung von Wärme, also nach einer adiabatischen Curve vor sich, deren Gleich. $pv^n = \text{Const.}$ ist. Durch denselben Punkt (v, p) verläuft sich dieselbe, immer asymptotisch sich annähernd an d. Axe, mit d. Schnitte d. v Axe als d. isothermische Curve; ist nämlich φ_n d. spitze Winkel, welchen d. erstere und φ_0 derjenige, welchen d. letztere in demselben Punkte mit d. v Axe bildet, so ist nach Gleich. II:

$$\tan\varphi_n = n \tan\varphi_0$$ wenn n ein unächter Bruch $= \frac{c_p}{c}$ ist,

ist also $\tan\varphi_n > \tan\varphi_0$ w. z. bew. w.

Mit $m = n$ hat man weiter:

$$\frac{p}{p_0} = \left(\frac{v_0}{v}\right)^n \qquad \frac{\vartheta}{\vartheta_0} = \left(\frac{v_0}{v}\right)^{n-1} = \left(\frac{p}{p_0}\right)^{\frac{n-1}{n}}$$

und $$E = \frac{p_0 v_0}{n-1}\left(1 - \left(\frac{v_0}{v}\right)^{n-1}\right)$$

Endlich 4) für $m = \infty$ ergeben, demnach d. Zustandsgleichung auch schreiben kann:
erhält $pv^m = C$ $p^{\frac{1}{m}} v = \sqrt[m]{C}$ = Const., so wird mit $m = \infty$ d. Zustandsgleichung: $p^0 v$ = Const also v = const. d. h. man erhält nur die Zustandsänderung bei constantem Volumen v.

Die spec. Wärme ist in diesem Falle natürlich: $c_v = c$

Da v constant ist, so handelt es sich nur noch um d. Beziehung zwischen Spannung und Temperatur in d. verschiedenen Zuständen; man hat in diesem Falle d. Formel:

$$\frac{T}{T_1} = \frac{p}{p_1}$$

Die hergegebene Arbeit L wird natürlich $= 0$, denn wenn keine Volumenänderung stattfindet, so kann auch keine Expansionsarbeit verrichtet werden.

Von diesen verschiedenen besondern Specialfällen, ist besonders d. 3te von Wichtigkeit, nämlich d. Zustandsänderung ohne Mittheilung od. Entziehung von Wärme entsprechend d. adiabatischen Curve; bei diesem spielt eine wesentliche Rolle d. Verhältniß $n = \frac{c_p}{c}$ und es ist daher interessant zu wissen wie man diesen Werth bestimmen kann.

Eine Methode zur Entwicklung von $n = \frac{c_p}{c}$ ist folgende:

In einem möglichst großen Gefäß, welches mit einem verschließbaren Ausflußöffnung und mit einem Manometer zur Messung d. Drucks im Innern d. Gefäßes versehen ist, befindet sich ein Gas, dessen Spannung $= p_1$ größer ist als d. der umgebenden Atmosphäre [illegible] [illegible] die Ausflußöffnung [illegible] Spannung $= p_2$ [illegible] T_2 [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] Fall 3) [illegible] entsprechend d. Zustandsänderung ohne Mittheilung und Entziehung durch Wärme; es [illegible]:

$$\frac{T_2}{T_1} = \left(\frac{p_2}{p_1}\right)^{1-\frac{1}{n}}$$

[illegible] T_1 [illegible] p_3 [illegible]. Da diese Zustandsänderung d. im Gefäß [illegible] Gases bei constantem Volumen stattfindet, so ist nach Fall 4):

$$\frac{T_1}{T_2} = \frac{p_3}{p_2}$$

Multiplicirt man beide Gleichungen mit einander, so bekommt man:

$$1 = \frac{p_3}{p_2}\left(\frac{p_2}{p_1}\right)^{1-\frac{1}{n}} = \frac{p_3}{p_1}\left(\frac{p_1}{p_2}\right)^{\frac{1}{n}}$$

od.: $\frac{p_1}{p_2} = \left(\frac{p_1}{p_3}\right)^n$ und folgt:

$$n = \frac{\log\left(\frac{p_1}{p_2}\right)}{\log\left(\frac{p_1}{p_3}\right)} = \frac{\log p_1 - \log p_2}{\log p_1 - \log p_3}$$

Auf diese Weise kann man nur d. Verhältniß $n = \frac{c_p}{c}$ schließlich bestimmen und ist d. [illegible] zur Bestimmung von n in Anwendung gekommen.

Verhalten d. Körper beim Uebergange aus d. festen in d. flüssige Aggregatform.

Wenn ein fester Körper in d. Änderung seiner Aggregatform begriffen ist, also wenn ein fester Körper im Schmelzen und ebenso wenn ein flüssiger in d. Erstarrung begriffen ist, so befindet er sich in einem Grenzzustand, welcher durch d. Pressung allein od. durch d. Temperatur allein vollkommen bestimmt ist. Sind nun für einen solchen Grenzzustand p u. t zusammengehörende Werthe von Pressung und Temperatur in einem gewissen Augenblick und $p+dp$, $t+dt$ zusammengehörende Werthe in einem andern Augenblick d. Grenzzustandes, so findet zwischen dp und dt eine bestimmte Beziehung statt, indem Pressung und Temperatur sich gegenseitig bedingen. Um nun diese Beziehung zwischen d. gleichzeitigen Änderungen von Pressung und Temperatur zu bestimmen, sei: $y:(1-y)$ d. Gewichtsverhältniss d. flüssigen und festen Theile in irgend einem Augenblick und zwar y d. Gewichtsmenge d. flüssigen Bestandtheile, also $1-y$ d. Gewichtsmenge d. festen Bestandtheile in 1 kgr d. Gemisches von Körper gleicher Art aber verschiedener Aggregatform; es sei ferner w d. spec. Volumen d. im Schmelzen begriffenen Körpers in festem und $w+\Delta$ d. spec. Volumen desselben in d. flüssigen Aggregatform. Es ist alsdann offenbar in dem betreffenden Augenblick d. entsprechend mittlere spec. Volumen v d. Gemisches:

$$v = (1-y)\,w + y\,(w+\Delta) = w + y\Delta.$$

Angenommen nun 1 kgr eines solchen Körpers ~~Gemisches~~ sei bei constanter Temperatur t und entsprechender Pressung p in d. Schmelzung begriffen. Dann sind w und Δ vollkommen bestimmt durch p od. durch t. Bei constanten Werthen von t und p sind also auch w und Δ constant und d. ändert sich bei diesem Vorgange nur d. mittlere spec. Volumen zunehmend entsprechend um dv mit y. Für eine unendlich kleine Zustandsänderung entsprechend einem unendlich kl. Schmelzungsprocesse ist also bei constanten Werthen von p u. t auf d. obigen Gleichung:

$$dv = \Delta\,dy$$

Nach d. allgemeinen Form d. Wärmegleichung Seite 89 ist nun d. Wärmemenge dQ, welche d. Körper bedarf für diese unendlich kl. Zustandsänderung mitzutheilen ist:

$$dQ = c_v\,d\vartheta + A\vartheta\,\frac{dp}{d\vartheta}\,dv$$

od. da nun bekanntlich $d\vartheta$ und dt wechselseitig miteinander vertauscht werden dürfen:

$$dQ = c_v\,d\vartheta + A\vartheta\,\frac{dp}{dt}\,dv$$

Im vorliegenden Falle findet nun d. Zustandsänderung bei constanter Temperatur t statt, es ist also auch $d\vartheta = 0$ und dann entsprechend, wenn man noch stellt $\frac{dp}{dt}$ und $\frac{dp}{dt}$ fest:

$$dQ = A\vartheta\,\frac{dp}{dt}\,dv \qquad \text{od. mit } dv = \Delta\,dy$$

$$dQ = A\vartheta\,\Delta\,\frac{dp}{dt}\,dy$$

Ist nun mit r d. sog. spec. Schmelzwärme bezeichnet d. diejenige Wärmemenge, welche zur Schmelzung von 1 kgr d. Körpers bei d. Temperatur t od. d. entsprechenden Pressung p erforderlich ist. Die Wärmemenge dQ also, welche zum Schmelzen von dy kgr erforderlich ist:

$$dQ = r\,dy$$

Setzt man diese beiden Ausdrücke für dQ einander gleich, so bekommt man:

$$\frac{dp}{dt} = \underline{A\vartheta\Delta} \quad \text{- - - - - - - - - - - - - - -} \quad \alpha$$

= allgemeines Gesetz, nach welchem sich d. Temperatur und Pressung für einen solchen Process d. Uebergangs von d. festen in d. flüssige Aggregatform wechselseitig gegenseitig bedingt.

Offenbar gilt diese Beziehung A allgemein für den Zustandswechsel d. Übergangs aus einem in einen andern Aggregatzustand und also kann auch von dieser Beziehung in d. Folge für den Übergang aus d. flüssigen in d. dampfförmigen Zustand Gebrauch gemacht werden, wenn wir Δ und r d. entsprechend modificierten Bedeutungen beizulegen haben.

Zu erwähnen ist noch, daß, wie schon früher bei d. Erläuterung d. Princips d. Umkehrung d. Vorstellungen hervorgehoben wurde, sofern d. Schmelzung bei constanter Temperatur stets mit Wärmeaufnahme des schmelzenden Körpers verbunden ist, die Allgemeingültigkeit jenes Princips und somit d. durch dasselbe bedingten Schlüsse [illegible] eines positiven od. negativen Werthes d. Verhältnisses $\frac{dt}{dp}$ erfordert, je nachdem d. spec. Volumen beim Schmelzen zu- oder abnimmt. Beim Verdampfen einer Flüssigkeit ist also $\frac{dt}{dp}$ immer positiv. Diese Beziehung geht auch hervor aus d. Gleichung A; denn, da A u. T absolut positive Größen sind, so ist $\frac{dt}{dp}$ ±, je nachdem Δ ± ist. Δ bedeutet aber, dem allgemeinen Begriffe nach, d. Unterschied d. spec. Volumens d. flüssigen resp. luftförmigen Aggregatform über d. spec. Volumen d. festen resp. flüssigen Aggregatform desselben Körpers. Z. B. ist beim Schmelzen des Eises Δ negativ, indem d. Volumen d. Wassers bei 0° kleiner ist als d. Volumen d. Eises bei 0°; dementsprechend ist auch für Schmelzen des Eises $\frac{dt}{dp}$ negativ. Andererseits ist, wie schon erwähnt, Δ beim Verdampfen von Flüssigkeiten immer positiv, weil d. spec. Volumen zunimmt, also ist bei diesem Vorgange auch d. Differentialquotient $\frac{dt}{dp}$ immer positiv.

Wie oben erwähnt ist $\frac{dt}{dp}$ für schmelzendes Eis od. umgekehrt natürlich auch für gefrierendes Wasser immer negativ; dieses stimmt auch mit d. Erfahrungsthatsache überein, daß d. Schmelzpunkt d. Eises od. d. Gefrierpunkt d. Wassers mit wachsendem Druck herabgedrückt wird und zwar fand Thomson mit einer Reihe ausführlicher Versuche, daß diese Erniedrigung d. Schmelzpunktes d. Eises um je 0,0075° C erfolgt bei einer Druckzunahme von 1 Atm. Es ist also diesen Versuchen gemäß:

$$\frac{dt}{dp} = \div 0,0075$$

Zu demselben Resultate kommt man auch mit Hilfe d. Formel A. Erfahrungsmäßig beträgt nämlich d. Schmelzwärme d. Eises ungefähr bei normalem Atm. Druck:

$$r = 79 \text{ Cal.}$$

Ferner kennt man auch d. Dichtigkeit d. Eises bei 0° also auch d. spec. Volumen d. Eises nämlich d. Volumen von 1 kg Eis in Cubm. ausgedrückt:

$$w = 0,001087$$

dagegen beträgt d. spec. Volumen d. Wassers bei 0° C:

$$w + \Delta = 0,001000$$

Streng genommen ist 0,001000 = d. spec. Volumen bei 4° C d. h. im Zustand d. größten Dichtigkeit, während bei 0° d. spec. Volumen eigentlich schon um etwas zugenommen hat. Indessen ist diese Zunahme so gering, daß dieselbe erst auf d. siebente Decimalstelle einen Einfluß haben würde. Der obige Werth kann also bis auf 6 Decimalstellen genau für d. spec. Volumen d. Wassers bei 0° gelten.

Demnach ist also:

$$\Delta = \div 0,000087$$

Diese Werthe in Formel A eingesetzt giebt mit $A = \frac{1}{424}$ und wenn man p in Atm. statt in kg pr. □m ausdrückt also d. Formel noch mit 10333 multipliciert, entsprechend d. Umstand, daß 10333 kg p. □m = 1 Atm. sind, so erhält man:

$$\frac{dt}{dp} = \div \frac{10333 \cdot 273 \cdot 0,000087}{424 \cdot 79} = \div 0,00733$$

also eine sehr gute Übereinstimmung mit dem durch Versuche von Thomson ermittelten Werthe $\frac{dt}{dp} = \div 0,0075$.

Wie schon oben erwähnt gilt d. Beziehung A nicht nur für schmelzende Körper sondern auch für verdampfende Flüssigkeiten, nur versteht man dann unter Δ d. Unterschied d. spec. Volumens d. luftförmigen über d. flüssige Aggregatform und unter r d. spec. Verdampfungswärme, worunter also d. Wärmemenge verstanden, welche zum Verdampfen von 1 kg d. Flüssigkeit bei constanter Temperatur und Pressung erfordert wird.

Von besonderer Wichtigkeit in den technischen Anwendungen ist nun das:

Verhalten der Dämpfe insbesondere des Wasserdampfs.

Unter Dampf versteht man bekanntlich einen luftförmigen Körper, welcher durch Wärmeentziehung flüssig gemacht und umgekehrt durch Wärmemittheilung aus Flüssigkeiten gebildet werden kann. Hinsichtlich d. Verhaltens d. Dämpfe und Gase müssen zwei wesentliche Unterschiede hervorgehoben werden:

Erfahrungsmäßig kann man in einen bestimmten Raum bei einer gewissen Temperatur von einem gewissen Dampfe nur eine bestimmte Menge aufnehmen, während aber noch gleichzeitig andere luftförmige Körper in dem Raum enthalten sein können, ohne d. Capacität desselben für einen jeden Dampf durch ihre Gegenwart zu beeinträchtigen. Wenn ein solcher Raum mit Dampf gesättigt ist, so nennt man den Dampf selbst gesättigten Dampf. Der Zustand d. gesättigten Dampfes ist also ein Grenzzustand bezüglich auf den Übergang von d. Luftform in d. flüssige Aggregatform. Das spez. Gewicht d. gesättigten Dampfes $\gamma = \frac{1}{v}$ und seine Spannung p sind Maximalwerthe für d. betreffende Temperatur t, oder umgekehrt t ein Minimalwerth für d. betreffende γ und p. Mit Rücksicht hierauf sind also durch eines d. 3 Elemente $p\ \gamma\ t$ d. beiden anderen bestimmt unter d. Voraussetzung d. gesättigten Dampfes.

Im Gegensatz zum gesättigten Wasserdampf versteht man unter überhitztem Dampf einen solchen, für welchen d. Temperatur t größer ist als für gesättigten Dampf bei denselben γ od. p, od. für welchen γ und p kleiner sind als für gesättigten Dampf bei derselben Temperatur t. Bei einem solchen überhitzten Dampf ist ebenso wie bei Gasen und wie im Allgemeinen für jede Zustandsform eines Körpers, nur durch 2 d. Elemente $\gamma\ p\ t$ od. $v\ p\ t$ das dritte bestimmt.

Wenn ein überhitzter Dampf bei unveränderlichem spez. Gewicht γ und unveränderlicher Spannung p die Temperatur t immer mehr und mehr wächst, od. umgekehrt bei constanter Temperatur t d. Werthe γ und p mehr und mehr abnehmen, so nähert d. Zustand d. überhitzten Dampfes sich einem anderen Grenzzustand, nämlich d. Zustand eines Gases, welcher charakterisirt ist durch d. Zustandsgleichung $pv = \text{Const.}\ T$. Die Zustände d. gesättigten Dampfes und d. Gases sind also für d. Zustände d. Dampfs Grenzzustände, zwischen welchen d. verschiedenartigen Zustände überhitzter Dämpfe liegen.

Nachdem d. Gaszustand im Vorhergehenden näher betrachtet wurde, so muß nun auch d. Grenzzustand d. gesättigten Dampfes näher untersucht werden, um dann zur Betrachtung d. dazwischen liegenden Zustände überhitzten Dampfes überzugehen, zumal da auch meistens bei den technischen Anwendungen d. Dampfes, derselbe meistens im Zustand d. Gesättigtseins verwendet wird.

Offenbar wird man einen Dampf nur so lange gesättigt sein, wenn er im Beharrungszustand od. bei einer stetigen Zustandsänderung (Änderung d. Wärmezustands) mit Flüssigkeit derselben Art vermischt oder überhaupt in Berührung ist. Bei den folgenden Untersuchungen, welche d. Annahme od. Änderung, ist d. Dampf bei seinen Zustandsänderungen beständig gesättigt bleiben soll, bedingen, muß man daher im Allgemeinen ein solches Gemisch von Dampf und gleichartiger Flüssigkeit od. d. Berührung mit derselben Flüssigkeit voraussetzen.

Wenn bei einem solchen Gemisch von Flüssigkeit mit gleichartigem Dampf, also in einem gesättigten Dampf enthalten ist, w d. spez. Volumen d. Flüssigkeit und Δ d. Unterschied d. spez. Volumens d. Dampfes über d. spez. Volumen d. gleichartigen Flüssigkeit bedeutet, so ist bekanntlich, wenn v d. spez. Volumen d. Gemisches und zwar d. mittlere spez. Volumen im Falle eines [illegible] Gemisches:

$$v = w + y\Delta$$

unter y d. Gewichtsmenge Dampf verstanden, welche in 1 Kgr d. Gemisches enthalten ist. In dieser Gleichung sind w und Δ solche Größen, welche sich auf den Grenzzustand d. Flüssigkeit hinsichtlich ihrer Umwandlung in d. Luftform od. umgekehrt beziehen, welche also vollkommen bestimmt werden durch d. sich gegenseitig bedingenden Größen p und t, also vollkommen bestimmt sind durch p allein od. durch t allein. Die obige Gleichung stellt demnach unmittelbar eine Beziehung zwischen $v\ p\ y$ od. eine Beziehung zwischen $v\ t$ u. y da. Diese Gleichung zwischen $p\ t\ y$ u. $v\ p\ y$ soll nun in d. Folge d. Zustandsgleichung d. Gemisches im Dampfzustand gleichartiger Flüssigkeit genannt werden.

Was nun d. Eigenschaften und hauptsächlich d. Aufstellen d. gesättigten Dampfes betrifft, so müssen wir diese zu erkennen d. Beziehung $\frac{dt}{dp}$ kennen, wozu aber vorher d. Größe d. Abl. bekannt vorausgesetzt werden muß. Diese Beziehung zwischen p u. t bei gesättigtem Dampf kann man nur durch Versuche bestimmen. In ausführlicher Weise sind diese Versuche während d. letzten 20 Jahre durch Arbeit d. französischen bekannten d. Wissenschaften von Regnault und speziell für gesättigten Wasserdampf auch von Magnus in Berlin ausgeführt worden, dessen Resultate sich mit denen von Regnault gefundenen in befriedigender Übereinstimmung befinden. Unmittelbar aus diesen Versuchen ergeben sich nur einzelne zusammengehörige Werte von p und t. Um nun aber d. gegenseitige Abhängigkeit d. Größen p u. t möglichst darzustellen in Formen von Tabellen mit unabhängig zusammengehörigen Werten, ist durch empirische Formeln [illegible] entsprechende Formen gewählt.

Regnault legte eine solche zu Grunde, welche nur für entsprechende Temperaturintervalle ausgeführt werden, für jedes andere Temperaturintervall d. konstanten Koeffizienten geändert werden. Die allgemeine Form ist d. folgende:

I $$\lg p = C + a\alpha^{t-t_0} + b\beta^{t-t_0}$$

worin lg einen gewöhnlichen Logarithmus für d. Basis 10 und p d. Spannung in mm. Quecksilbersäule bedeutet, aus welcher durch Division mit 760 d. Spannung in Atmosphären erhalten wird, während letztere durch Multiplikation mit 10333 d. Spannung in kg pr. qm liefert. t_0 ist d. Anfang eines bestimmten Temperaturintervalls, für welches d. Formel durch entsprechende Wahl d. Konstanten $C\ a\ b\ \alpha\ \beta$ den Versuchen angepaßt werden soll und unter t eine beliebige Temperatur d. Temperaturintervalls verstanden. Um nun die Angaben d. Werte Konstanten $C\ a\ b\ \alpha\ \beta$ aus d. Versuche zu berechnen verfuhr Regnault folgendermaßen:

Die durch d. Versuche gefundenen zusammengehörigen Werte von p u. t wurden als Ordinaten und Abszissen in möglichst großem Maßstabe aufgetragen und die betreffenden Punkte durch eine möglichst anschließende stetige Kurve verbunden. Das Temperaturintervall $t_4 - t_0$, für welches d. 5 Konstanten bestimmt werden sollten, wurde in 4 gleiche Teile geteilt so daß:

$$\Delta t = t_4 - t_3 = t_3 - t_2 = t_2 - t_1 = t_1 - t_0$$

darauf konnten mit d. Zeichnung zu den als Abszissen dargestellten Temperaturen $t_0\ t_1\ t_2\ t_3\ t_4$ die entsprechenden als Ordinaten dargestellten Spannungen $p_0\ p_1\ p_2\ p_3\ p_4$ abgegriffen werden. Bezeichnet man nun d. Größen:

$$\alpha^{\Delta t} = x \quad \text{und} \quad \beta^{\Delta t} = y$$

so hat man mit Rücksicht auf d. obige Formel:

für $t = t_0$ also $t - t_0 = 0$: $\quad \lg p_0 = C + a + b$

für $t = t_1$ also $t - t_0 = \Delta t$ $\quad \lg p_1 = C + ax + by$

" $t = t_2$ also $t - t_0 = 2\Delta t$ $\quad \lg p_2 = C + ax^2 + by^2$

$t = t_3$ " $t - t_0 = 3\Delta t$ $\quad \lg p_3 = C + ax^3 + by^3$

$t = t_4$ " $t - t_0 = 4\Delta t$ $\quad \lg p_4 = C + ax^4 + by^4$

Auf diese Weise hat man 5 Gleichungen bekommen zur Bestimmung d. 5 Konstanten $C\ a\ b\ \alpha\ \beta$ für d. vorliegende Temperaturintervall, durch x und y sind dann aber auch d. beiden übrigen Konstanten $\alpha\ \beta$ bestimmt.

Für den Gebrauch dieser Formel ist es aber bequemer dieselbe in eine etwas andere Form zu bringen: Es ist nämlich bekanntlich,

$$\lg(a\alpha^{t-t_0}) = \lg a + (t - t_0)\lg\alpha$$

also $a\alpha^{t-t_0} = \text{num}\lg(a_1 + \alpha_1 t)$ unter a_1 und α_1 d. ersten Gleichung entsprechende Konstanten verstanden. Ebenso kann man auch d. beiden Glieder d. obigen Formel umschreiben und kann auch dieselbe in folgender von Zeuner angegebenen Form ausdrücken:

$$\lg p = C \pm mm \lg(a' + \alpha' t) \pm mm \lg(b' + \beta' t)$$

Für gesättigten Wasserdampf stellen den Regnault'schen Versuchen entsprechend in dieser Weise folgende Formeln aufgestellt, welche für d. Grenzen 0–100° und 100–200° gelten, nämlich:

für $t = 0$ bis $100°$ ist: $$\lg p = 4{,}739371 \div mm \lg(0{,}611741 \div 0{,}00327446\,t) + mm \lg(\div 1{,}868009 + 0{,}00686494\,t)$$

für $t = 100°$ bis $200°$ $$\lg p = 6{,}264035 \div mm \lg(0{,}659312 - 0{,}00165614\,t) \div mm \lg(0{,}020760 - 0{,}00595071\,t)$$

die nach diesen Formeln berechneten Werthe von p bekommt man ausgedrückt in mm Quecksilbersäule; durch Dividiren mit 760 (da 760 mm Quecksilbersäule = 1 Atm entsprechen) bekommt man dann p in Atm und mit diesen Werthen durch Multipliciren mit 10333 p in kgr pr. $\square$m ausgedrückt, indem 10333 kgr pr. $\square$m = 1 Atm entsprechen.

Nachdem man solche empirische Formeln gefunden hat, welche d. Zusammenhang zwischen p u. t für gesättigte Dämpfe bestimmen, können dieselben von dem dazu dienen d. zusammengehörenden Werthe von p u. t in einer Tabelle zusammenzustellen (siehe Grashof's Wärmetheorie § 26)

Für die weiteren Untersuchungen ist es indessen nicht nur nöthig d. Zusammenhang zwischen p u. t für gesättigte Dämpfe in analytischer Form zu kennen, sondern es ist auch nöthig d. Differentialquotienten $\frac{dp}{dt}$ als Function von p u. t auszudrücken. Dies kann nun in folgender Weise geschehen:

Bekanntlich ist, wenn $\ln$ d. natürlichen Logarithmus und $\lg$ d. brigg'schen Logarithmus bezeichnet:

$$\ln p = k \lg p$$

unter k verstanden: $k = \ln 10 = 2{,}302585$

Multiplicirt man also d. von Regnault zuerst aufgestellte Gleichung I mit k, so bekommt man:

$$\ln p = kC + ka\alpha^{t-t_0} + kb\beta^{t-t_0}$$

Durch Differentiation dieser Gleichung in Bezug auf t bekommt man:

$$\frac{1}{p}\frac{dp}{dt} = ka.\ln\alpha.\alpha^{t-t_0} + kb.\ln\beta.\beta^{t-t_0}$$

oder da $\ln\alpha = k\lg\alpha$ und $\ln\beta = k\lg\beta$:

$$\frac{1}{p}\cdot\frac{dp}{dt} = k^2 a \lg\alpha.\alpha^{t-t_0} + k^2 b \lg\beta.\beta^{t-t_0}$$

Nach dem Vorangegangenen kann man nun d. Constanten $a\,b\,\alpha\,\beta$ als bekannt ansehen und kann ansetzen:

$$k^2 a \lg\alpha = m \quad \text{und} \quad k^2 b \lg\beta = n$$

worin d. Constanten m und n entsprechend d. Werthen von $a\,b\,\alpha\,\beta$ und $k = 2{,}302585$ berechnet werden können, man hat also nun:

$$\frac{1}{p}\cdot\frac{dp}{dt} = m.\alpha^{t-t_0} + n\beta^{t-t_0}$$

Für den Gebrauch ist es indessen bequemer, d. Logarithmen d. beiden Glieder auf d. rechten Seite als lineare Functionen von t zu berechnen, ... die es für d. empirische Formel zwischen p u. t geschehen würde. Offenbar ist es ganz einerlei in welcher Einheit p ausgedrückt ist für Berechnung von $\frac{1}{p}\frac{dp}{dt}$. Natürlich kann man nun auch dieser Formel entsprechend d. den bestimmten t ... entsprechenden Werthe von $\frac{1}{p}\frac{dp}{dt}$ in einer Tabelle zusammenstellen, wie solche in Grashof's Wärmetheorie § 26 angegeben ist.

Bei den technischen Anwendungen wird d. Zustand gesättigter Wasserdämpfe als meistens nicht durch seine Temperatur charakterisirt sondern durch seine Spannung, oder wie man auch meist als gleichbedeutend zu sagen pflegt durch seine Spannung od. durch seinen Druck, welche durch Manometer gemessen also leicht beobachtet werden kann. Aus diesem Grunde ist es auch bequem für d. technischen Anwendungen d. betreffenden Tabellen so anzuordnen, daß dieselben d. zu irgend einem bestimmten Werthe von p gehörigen Temperaturen t d. gesättigten Wasserdämpfe enthält. Diese Umwandlung d. Regnault'schen Tabellen hat Zeuner vorgenommen nämlich festgestellt. (Siehe Grashof 329)

Interessant und zugleich wichtig ist es nun noch d. spec. Verdampfungswärme für gesättigten ~~Wasser~~ Dampf festzustellen. Flüssigkeiten festzustellen. Unter d. Verdampfungswärme einer Flüssigkeit für eine gewisse Temperatur t wird nach Clausius d. Wärmemenge verstanden, welche ihr zur Verwandlung in gesättigten Dampf von derselben Temperatur t mitgetheilt werden muß wenn dabei d. spezifische Druck constant = demjenigen Spannung p, welche d. Temperatur t d. betreffenden gesättigten Dampfes entspricht. Diese Verdampfungswärme pr 1 Kgr d. betreffenden Flüssigkeit also d. spec. Verdampfungswärme derselben soll in d. Folge mit r bezeichnet werden. Man kann dieselbe als eine für verschiedene Flüssigkeiten verschiedene Function von t oder p betrachten, mit Rücksicht auf d. vorhin genannte zwischen p u. t stattfindende Beziehung.
Auch diese Function von t kann nur durch Versuche ermittelt werden. Hier ist wieder Regnault, welcher d. Größe r für verschiedene Flüssigkeiten und insbesondere für das auch am meisten interessante Wasser und für verschiedene Werthe von t und p bestimmt hat aber nicht unmittelbar sondern mittelbar, indem er diejenige Wärmemenge Q_0 mißt, welche gesättigtem Dampfe von d. Spannung p und von entsprechender Temperatur t pr 1 Kgr entzogen werden mußte, um denselben unter constantem spec. äußerem Druck $p = p$ zu Flüssigkeit von d. Temperatur t_0 $(< t)$ zu verdichten.
Diese Wärmemenge Q_0 ist natürlich auch ebensogroß diejenige Wärmemenge, welche 1 d. Flüssigkeit von d.
Temperatur t_0 pr 1 Kgr mitgetheilt werden muß, um sie bei constanter Spannung p in gesättigten Dampf von dieser Spannung zu verwandeln. Diese Wärmemenge Q_0 ist nun aber als aus 2 Theilen bestehend zu betrachten: es muß bei diesem Vorgange nämlich zunächst d. Flüssigkeit bei constanter Spannung p von d. Temperatur t_0 auf d. Spannung p entsprechende Temperatur t gebracht werden, wozu bekanntlich eine Wärmemenge erforderlich ist bezogen auf 1 Kgr:

$$= \int_{t_0}^{t} c_p\,dt$$ wobei c_p d. spec. Wärme bei constanter Spannung verstanden

Nachdem dies geschehen muß d. Flüssigkeit von d. Temperatur t bei constanter ~~Temp~~ Spannung p in gesättigten Dampf von derselben Temperatur t verwandelt werden, wozu aber d. Definition d. spec. Verdampfungswärme entsprechend eine Wärmemenge $= r$ pr 1 Kgr Flüssigkeit erforderlich ist.
Es ist demnach:

$$Q_0 = \int_{t_0}^{t} c_p\,dt + r$$

od. da man d. Integral zerlegen kann in: $\int_0^{t} c_p\,dt - \int_0^{t_0} c_p\,dt$:

$$Q_0 = \int_0^{t} c_p\,dt - \int_0^{t_0} c_p\,dt + r$$

Hier bedeuten nun offenbar $\int_0^{t} c_p\,dt$ und $\int_0^{t_0} c_p\,dt$ diejenigen Wärmemengen, welche erfordert werden um 1 Kgr Flüssigkeit als solche von d. Temperatur ~~t_0~~ 0° auf d. Temperatur t resp. t_0 zu erwärmen.
Bezeichnet man diese Wärmemengen resp. mit q und q_0, so hat man:
q bei constanter Spannung

$$Q_0 = q - q_0 + r$$

Bei der nicht ganz genauen Zusammendrückbarkeit der Flüssigkeiten, können wir offenbar annehmen, daß die spez. Wärme bei constantem Druck unabhängig von der Größe des Druckes, so daß man also q und q_0 als diejenigen Wärmemengen bezeichnen kann, welche erforderlich sind um 1 kgr Flüssigkeit als solche bei constantem atm. Druck von $0°$ auf $t°$ resp. $t_0°$ zu erwärmen. Diese Größen q und q_0 wurden nun durch besondere Versuche von Regnault als Function von t bestimmt und zwar wie es ebenfalls zulässig erscheinen ist für constanten atm. Druck. Diesen Versuchen gemäß hat sich ergeben, daß die Wärmemenge q mit genügender Annäherung für verschiedene Flüssigkeiten und verschiedene Werthe von t ausgedrückt werden kann als eine algebraische Function 3ten Grades der Temperatur t, also durch einen Ausdruck von der Form:

$$q = at + bt^2 + ct^3$$

worin $a\ b\ c$ den Versuchen entsprechende Constante vorstellen, welche für verschiedene Flüssigkeiten verschiedene sein können.

Insbesondere für Wasser wurde gefunden: $q = t + 0{,}00002t^2 + 0{,}0000003t^3$ worin also q diejenige Wärmemenge bedeutet, welche erforderlich ist um 1 kgr Wasser als solches bei constantem äußeren Druck von $0°$ auf $t°$ zu erwärmen.

Nachdem nun in dieser Weise Q_0 q und q_0 für die verschiedenen Fälle bekannt sind, kann man auch die spez. Verdampfungswärme r berechnen. Zunächst ergiebt die Formel: $Q_0 = q - q_0 + r$:

$$Q_0 + q_0 = q + r.$$

Diese Größe $q + r$ ist nun offenbar diejenige Wärmemenge, welche 1 kgr einer gewissen Flüssigkeit von $0°$ Temperatur mitgetheilt werden muß, um sie bei constantem Druck p in gesättigten Dampf von diesem Druck und der entsprechenden Temperatur t zu verwandeln, wenn p und t gemäß der vorhergehenden Bedingungen zusammengehörende Werthe sind. Diese Wärmemenge hat Regnault die Gesammtwärme der Flüssigkeit genannt, und wir führen nun dieselbe Benennung mit Q bezeichnet. Dieselbe läßt sich nach Regnault im Allgemeinen ausdrücken durch eine ganze Function 2ten Grades der Temperatur t, nämlich von der Form:

$$Q = a + bt + ct^2$$

worin $a\ b\ c$ Constante bedeuten, welche für verschiedene Flüssigkeiten verschiedene Werthe annehmen können.

Für Wasserdampf genügte schon eine lineare Function zu einer guten Übereinstimmung der durch Versuche erhaltenen Werthe mit der Rechnungswerthen, nämlich die Function:

$$Q = 606{,}5 + 0{,}305t.$$

Dieser Ausdruck stellt also diejenige Wärmemenge dar, welche 1 kgr des Wassers von $0°$ Temperatur mitgetheilt werden muß, um es bei constantem Druck p in gesättigten Dampf von demselben Druck und der entsprechenden Temperatur t zu verwandeln.

Nachdem nun so durch Wärmemengen q und die Gesammtwärme Q durch empirische Temperaturfunctionen ausgedrückt sind, ergiebt sich nun auch gemäß der Beziehung: $Q = q + r$ die spez. Verdampfungswärme r als Function von t nämlich:

$$r = Q - q.$$

Insbesondere für Wasser ist diese spez. Verdampfungswärme nach den obigen Rechnungen:

$$r = Q - q = 606{,}5 + 0{,}305t - t - 0{,}00002t^2 - 0{,}0000003t^3$$

In diesem Ausdruck sind die Glieder mit t^2 und t^3 von untergeordneter Bedeutung, so daß schon in den meisten Fällen genügen wird, die spez. Verdampfungswärme r wie ebenso die Gesammtwärme Q als lineare Functionen von t auszudrücken. Daher ist es für die meisten technischen Anwendungen am angemessensten, die Constanten a und b dieser vereinfachten Formel: $r = a - bt$ so zu wählen, daß sie besonders in der Nähe von $t = 100°$ den thatsächlichen Verhältnissen möglichst genau entspricht.

Aus d. Gleichung $Q = q + r$ folgt nun aber mit Rücksicht auf die ergebenen Resultate:

$$q = Q - r = 606{,}5 - a + (0{,}305 + b)\,t$$

und also $c_p = \frac{dq}{dt} = 0{,}305 + b$

Aus dem andern angegebenen Ausdruck für q findet man aber durch Differentiation nach t:

$$c_p = \frac{dq}{dt} = 1 + 0{,}00004\,t + 0{,}0000009\,t^2$$

und insbesondere für $t = 100°C$: $c_p = 1{,}013$

Durch Gleichsetzen erhält man:

$$c_p = 0{,}305 + b = 1{,}013$$

$$\text{also } b = 1{,}013 - 0{,}305 = 0{,}708$$

und daraus d. Formel für r:

$$r = a - 0{,}708\,t$$

Hier ist also nur noch a entsprechend d. angestellten Bedingung zu ermitteln; dies kann man am leichtesten, indem man a so wählt, daß r genau den gefundenen Versuchswerthen entspricht für $t = 100°$. Nach Regnault ist nun für $t = 100°$:

$$r = 536{,}2$$

und demnach $a = r + 0{,}708\,t = 536{,}2 + 70{,}8 = 607.$

Man bekommt also schließlich für d. spez. Verdampfungswärme d. Wassers d. zuerst von Clausius angegebene Formel, welche natürlich genau nur für $t = 100°$ genügend richtig ist, aber auch für d. übrigen Temperaturen gilt:

$$r = 607 - 0{,}708\,t.$$

Diese spez. Verdampfungswärme r muß nun als aus 2 Theilen bestehend betrachtet werden. Wenn es sich nämlich darum handelt, wie es d. Definition d. spez. Verdampfungswärme entspricht, 1 kg einer Flüssigkeit bei einer gewissen Temperatur t in gesättigten Dampf von derselben Temperatur zu verwandeln, wobei d. spez. äußere Druck constant $= p =$ derjenigen Spannung ist, welche d. Temperatur t d. betreffenden gesättigten Dampfes entspricht, so muß bei dieser Verwandlung erfolgen:

1) d. innere Arbeitsvermögen (d. Eigenwärme) vermehrt werden, indem natürlich 1 kg gesättigten Dampfes von d. Temperatur t ein größeres inneres Arbeitsvermögen besitzt als 1 kg d. gleichartigen Flüssigkeit von derselben Temperatur t.

2) muß dabei eine gewisse Expansionsarbeit verrichtet werden, welche dazu dient, um dem vergrößerten Dampfvolumen d. äußeren Druck entgegen Platz zu schaffen.

Zu beiden Leistungen muß eine bestimmte Wärmemenge verwendet werden, welche beide zusammen d. spez. Verdampfungswärme ausmachen. Diese beiden Bestandtheile d. spez. Verdampfungswärme r sollen mit <u>innerer</u> und <u>äußerer spez. Verdampfungswärme</u> bezeichnet werden, wobei also d. innere spez. ~~Wärme~~ Verdampfungswärme zum Vermehren d. Arbeitsvermögens dient, während d. äußere spez. Verdampfungswärme zur Verrichtung d. äußeren Expansionsarbeit verwendet wird.

Diese äußere spez. Verdampfungswärme ist nun unmittelbar anzugeben:

Bezeichnet Δ d. Unterschied d. spez. Volumens d. gesättigten Dampfes über d. spez. Volumen d. Flüssigkeit bei gleicher Temperatur, so ist auch Δ d. Volumenvergrößerung, welche bei d. Verdampfen von 1 kg Flüssigkeit hervorgerufen wird; da nun beim Verdampfen d. äußere Druck p unverändert geblieben ist, so ist bei dem ganzen Verwandlungsvorgange eine Arbeit $= p\Delta$ zu verrichten. Die Wärmemenge dieser Expansionsarbeit $= A\,p\,\Delta$ ist also d. äußere spez. Verdampfungswärme.

Bezeichnet man also mit ρ d. innere spez. Verdampfungswärme, so ist:

$$r = \rho + \Delta p A$$ unter A bekanntlich d. Wärmewerth d. Arbeitseinheit verstanden.

Nachdem nun die Versuchsresultate d. spez. Verdampfungswärme r als Funktion d. Temperatur t durch Versuche abgeleitet ist, ist es nun nicht nothwendig, die innere und äussere spez. Verdampfungswärme durch weitere Versuche empirisch zu bestimmen, indem dieselben auf theoretischem Wege mit den vorher gefundenen Resultaten abgeleitet werden können.

Clausius nämlich hat d. Betrachtung d. Verhaltens d. Dampfes beim Übergange von einer Aggregatform in d. andere d. allgemeingültige Formel gefunden:

$$\frac{dt}{dp} = \frac{A T \Delta}{r}$$ unter Δ und r ganz dieselben Grössen wie jetzt verstanden und wenn A und T d. bekannten Werthe bezeichnen, nämlich A = Wärmewerth d. Arbeitseinheit $= \frac{1}{424}$ Cal und $T = t + 273$ = absolute Temperatur.

Dividirt man nun d. obige Gleichung durch $\frac{r}{T}$ und multiplizirt mit p, so erhält man:

$$A p \Delta = \frac{p \cdot r \frac{dt}{dp}}{T} = \frac{r}{T \frac{1}{p} \frac{dp}{dt}}$$

Nach den Versuchsresultaten ist aber $\frac{1}{p} \frac{dp}{dt}$ durch empirische Formeln als Funktion d. Temperatur t bestimmt und ebenso auch r als empirische Temperaturfunktion gefunden worden. Mit Rücksicht auf $T = 273 + t$ kann man also mittelst dieser Formel auch d. äussere spez. Verdampfungswärme als Funktion von t bestimmen und dann erhält man zugleich d. Gleichung:

$$\rho = r - A p \Delta$$ d. innere spez. Verdampfungswärme als Temperaturfunktion entwickeln.

Ebenso wie r mit 2 Theile besteht, muss man sich auch d. Wärmemenge q, welche dazu erfordert wird um 1 Kgr. Flüssigkeit als solche bei wachsender Pressung von $0°$ auf $t°$ zu erwärmen, als aus 2 Bestandtheilen bestehend betrachten, nämlich aus dem Unterschied d. Eigenwärme d. Flüssigkeit bei d. Temperatur $t°$ über dieselbe bei d. Temperatur $0°$ und aus dem (übrigens sehr kleinen) Wärmewerth d. Expansionsarbeit, welche bei d. Temperaturerhöhung und entsprechenden Ausdehnung von d. Flüssigkeit verrichtet wird. Jedenfalls sind d. Volumenänderungen einer Flüssigkeit als solcher immer sehr klein im Vergleich mit denjenigen Änderungen d. Volumens, welche durch d. Änderung d. Aggregatform nämlich durch d. Verdampfung d. Flüssigkeit od. d. Condensation d. Dampfes zur Flüssigkeit bedingt werden. Man kann deshalb den 2ten Bestandtheil d. Wärmemenge q, nämlich d. Wärmewerth d. Expansionsarbeit als sehr klein vernachlässigen und somit d. Grösse q als Unterschied d. Eigenwärme von 1 Kgr. Flüssigkeit bei $t°$ über dieselbe bei $0°$ betrachtet werden. Nach Zeuner nennt man diese Grösse q deshalb auch einfach d. spez. Flüssigkeitswärme. Ebenso kann auch d. Grösse $q + \rho$ als Unterschied d. Eigenwärme von 1 Kgr. gesättigten Dampfes bei $t°$ über dieselbe von 1 Kgr. d. betreffenden Flüssigkeit bei $0°$ betrachtet und auch d. spez. Dampfwärme genannt werden.

Die Gesammtwärme Q kann man nun auch schreiben:

$$Q = q + \rho + A p \Delta$$

Die obige Formel für $A p \Delta$ = d. äusseren spez. Verdampfungswärme, ist nun aber für die numerische Berechnung etwas unbequem, indem dann d. logarithmische Temperaturfunktion von $\frac{1}{p} \frac{dp}{dt}$ vorkommt. Hauptsächlich deshalb empfiehlt es sich d. äussere spez. Verdampfungswärme $A p \Delta$ und somit auch innere spez. Verdampfungswärme ρ als einfachere algebraische Funktionen von t auszudrücken.

Nach Zeuner ist dies sehr genau möglich durch Formeln von d. empirischen Form: ⟶

Innere spez. Verdampfungswärme:

$$\rho = a - bt - ct^2$$

wo $a\,b\,c$ für verschiedene Flüssigkeiten verschiedene Konstanten sein können. Für Wasserdampf kann man sehr schön das Glied mit t^2 fortlassen und hat:

$$\rho = 575{,}4 - 0{,}791\,t$$

welche Formel bekanntlich die beste Übereinstimmung mit den Versuchswerten für das große Temperaturintervall von $0^\circ - 200^\circ$ zeigt.

Nachdem nun auch ρ als empirische Temperaturfunktion bestimmt ist, bekommt man auch die äußere spez. Verdampfungswärme $Ap\Delta$ als einfache Temperaturfunktion gemäß der Beziehung:

$$Ap\Delta = Q - q - \rho$$

in welche Formel man nur die betreffenden Temperaturfunktionen für Q, q und ρ einzusetzen hat. Mit Rücksicht auf die angegebenen Resultate findet man auch hier für Wasserdampf:

$$Ap\Delta = Q - q - \rho = 606{,}5 + 0{,}305\,t - t - 0{,}00002\,t^2 - 0{,}0000003\,t^3 - 575{,}4 + 0{,}791\,t$$

woraus sich mit Vernachlässigung der Glieder mit t^2 und t^3 ergibt:

$$Ap\Delta = 31{,}1 + 1{,}096\,t - q.$$

Nach diesen beiden Formeln für ρ und $Ap\Delta$ sind für verschiedene Temperaturen und Pressungen für Wasserdampf die betreffenden spez. inneren und äußeren Verdampfungswärmen berechnet worden und tabellarisch zusammengestellt (Grashof 529). Aus den Tabellenwerten von q, ρ und $Ap\Delta$ ergeben sich dann die entsprechenden Werte der spez. Dampfwärme $= q + \rho$

der spez. Verdampfungswärme $= r = \rho + Ap\Delta$

und der Gesamtwärme $Q = q + \rho + Ap\Delta$

in den betreffenden Wasserdampftabellen.

Außer den vorstehenden Größen braucht man zu den folgenden Untersuchungen vielfach das spez. Gewicht gesättigter Dämpfe.

Das spez. Gewicht der Dämpfe ergibt sich nun in einfachster Weise aus den betreffenden Werten der spez. äußeren Verdampfungswärme $Ap\Delta$. Man braucht nur zu dividieren durch Ap, vorausgesetzt, dass p in kg pro qm gegeben ist. Δ ist gemessen in cbm pro kg, wenn bekanntlich unter Δ der Unterschied des spez. Volumens des gesättigten Dampfes von der Temperatur t und des spez. Volumens der gleichwertigen Flüssigkeit von derselben Temperatur verstanden wird. Zu diesem Δ hat man demnach nur das spez. Volumen w der Flüssigkeit zu addieren, um das spez. Volumen v des entsprechenden gesättigten Dampfes zu bekommen, woraus dann schließlich sich das spez. Gewicht γ des gesättigten Dampfes als umgekehrter Wert des spez. Volumens v ergibt, also:

$$\gamma = \frac{1}{v} = \frac{1}{\Delta + w}$$

Was nun die Größe w, das spez. Volumen der Flüssigkeit, betrifft, so ist dieser Wert streng genommen abhängig von der Pressung p und Temperatur t. Da aber alle Flüssigkeiten außerordentlich wenig zusammendrückbar sind, so wird die Größe der äußeren Pressung p auch nur einen verschwindenden Einfluss auf das spez. Volumen der Flüssigkeit ausüben. Einen größeren Einfluss muss aber schon die Temperatur geltend machen. So z. B. ist für Wasser das spez. Volumen w im Zustand der größten Dichtigkeit —

$w = 0{,}001$ (entsprechend d. Definition von 1 kgr.)

für t = 200° ist jedoch $w = 0{,}00113$

Wie man sieht ändert sich d. spez. Volumen d. Wassers innerhalb d. in den genannten Tabellen eingeführten Grenzen 0–200° nur in d. 4 Decimalstelle für seinen Werth. Aus diesem Grunde kann man auch d. spez. Volumen w d. Wassers innerhalb dieser Grenzen als constant annehmen, namentlich zur Berechnung von γ = spez. Gewicht d. Wasserdampfes, indem das zur Berechnung in Anwendung kommende Δ nicht mehr genau bis zur 4 Decimalstellen bestimmt werden kann. Man kann demnach d. spez. Volumen d. gesättigten Wasserdampfes setzen:

$$v = 0{,}001 + \Delta$$

, welcher Werth also innerhalb dieser Grenzen nur höchstens in d. 4t Decimalstelle um eine Einheit falsch sein kann.

Dementsprechend ist d. spez. Gewicht d. gesättigten Wasserdampfes zu berechnen nach d. Formel:

$$\gamma = \frac{1}{\Delta + 0{,}001}$$

= Gewicht per cubm gesättigten Wasserdampfes in kgr.

Vergleicht man die nach dieser Formel gefundenen Werthe von γ = d. spez. Gewichtes d. Wasserdampfes mit dem spez. Gewicht d. atm. Luft von gleicher Temperatur und Spannung, also d. Werthe von $\gamma = \frac{1}{\Delta + 0{,}001}$ vergleicht mit den Werthen von $\gamma' = \frac{1}{v} = \frac{p}{29{,}27\,T}$ (gewicht d. Gewichtseinheit d. atm. Luft) bei gleicher Spannung und Temperatur, so findet man d. d. Dichtigkeit δ d. gesättigten Wasserdampfes in Bezug auf atm. Luft, bei gleicher Spannung und Temperatur, wachsend mit d. Spannung und zwar

$$\delta = 0{,}621 \text{ bis } 0{,}676 \text{ für } p = 0{,}1 \text{ bis } 10 \text{ Atm.}$$

Es hat demnach also zu keinem Sinn, wenn man von einer Dichtigkeit eines gesättigten Dampfes in Bezug auf Luft spricht, indem diese Dichtigkeit wechseln wie bei gesättigtem Wasserdampf bei allen gesättigten Dämpfen bei verschiedenen Spannungen verschieden sein kann. Der Grund dieses Verhaltens ist darin zu suchen, daß d. gesättigten Dämpfe nicht wie früher allgemein angenommen wurde den beiden Gesetzen nämlich d. Mariotte'schen und Gay-Lussac'schen Gesetze nicht folgen. In solchen Fällen freilich wo d. Spannung nur gering ist, also etwa wie Zustand d. atmosphärischen atm. Luft, kann man mit genügender Annäherung auch d. Dichtigkeit δ d. Wasserdampfes in Bezug auf atm. Luft als constant annehmen und etwa setzen $\delta = 0{,}625 = \frac{5}{8}$, vorausgesetzt daß atm. Luft und Wasserdampf gleichen Spannungen und Temperaturen unterworfen sind. Bei höheren Spannungen wird jedoch ein sehr wesentlicher Fehler entstehen.

In manchen Fällen ist es nun bequemer d. spez. Gewicht d. Wasserdampfes unmittelbar als Function d. Spannung p zu kennen. Hiezu wird nach Navier für gesättigten Wasserdampf folgende einfache Formel verwendet:

$$\gamma = a + bp$$

wovon namentlich Pambour und ebenso Redtenbacher in seiner Theorie d. calorischen Maschinen ausgedehnten Gebrauch macht, indem auf Grund d. älteren Versuche d. Constanten a und b für Dämpfe niederer und höherer Spannung, nämlich unter und über 2 Atm. besonders bestimmt wurden. Inzwischen haben d. Werthe von γ, welche man auf Grund d. neueren genaueren Versuche Regnaults kennen lernen, erkennen, daß d. Differenzen von γ, welche gleichen Differenzen von p entsprechen, nicht constant, sondern in sehr merklicher Weise verschieden und veränderlich sind, so kann daß d. genannte Formel bedeutend schlechtere genaue Resultate, wenn man d. Constanten a und b zwischen engeren Grenzen von p bestimmt. —

Eine viel bessere Uebereinstimmung mit d. aus d. Regnault'schen Versuchen abgeleiteten Werthen, und zwar zwischen sehr weiten Grenzen von p, wird nach Zeuner bei passender Bestimmung d. Constanten a und m durch d. Formel erhalten:

$$p v^{m} = a$$

Insbesondere für gesättigten Wasserdampf ergeben sich d. Werthe, wenn v in Kcubm per 1 kgr und p in Atm. ausgedrückt ist:

$$a = 1{,}7049 \text{ und } m = 1{,}0646.$$

Um auf Grund dieser Beziehung d. spez. Gewicht d. gesättigten Dampfes als Funktion d. Pressung zu bestimmen, kann man diese Gleichung mit d. Potenz $\frac{1}{n}$ erheben, man erhält dann:

$$p^{\frac{1}{n}} v = a^{\frac{1}{n}}$$

und ferner:

$$\text{spez. Gewicht} = \gamma = \frac{1}{v} = \frac{1}{a^{\frac{1}{n}}}\, p^{\frac{1}{n}} = \alpha\, p^{\mu}$$

wenn man bezeichnet $\alpha = \left(\frac{1}{a}\right)^{\frac{1}{n}}$ und $\mu = \frac{1}{n}$

Für gesättigten Wasserdampf hat man:

$\alpha = 0,6058$ und $\mu = 0,9393$ bestimmt und somit hat als unmittelbare Beziehung zw. γ und p für gesättigten Wasserdampf:

$$\gamma = 0{,}6058 \cdot p^{0,9393}$$

Die nach dieser Formel für verschiedene Pressungen u. entsprechende Temperaturen gerechneten Werte von γ stimmen mit d. genauen mit Versuchen ermittelten ziemlich gut überein, wenigstens stellt erst in d. 3t Dezimalstelle sich ein Unterschied von einer Einheit ein.

Nachdem nun diese Bemerkungen hinsichtlich d. eigenschaftlichen Verhaltens gesättigter Dämpfe vorausgeschickt sind, können wir nun übergehen zu dem:

Verhalten von Dampf mit gleichartiger Flüssigkeit.

Im besonderen Interesse sind nun zunächst d. allgemeinen Formeln für verschiedene Zustandsänderungen solcher Gemische.

Bei d. Aufstellung dieser allgemeinen Formeln für solche Zustandsänderungen sollen nun wie früher allgemein folgende Buchstaben-Bezeichnungen benützt werden:

p = spez. Pressung und zwar nimmt man d. Gesamtheit dermaßen an, wird d. spez. Pressung ~~pro~~ in kg pro qm Wärme einer Wasserdampfschicht abhängig, so kann man bekanntlich diese Pressung als in allen Punkten d. Gemisches gleich ansehen.

y bedeute d. in 1 kg d. Gemisches enthaltene Dampfmenge ausgedrückt in kg

also $1-y$ = Gewichtsmenge d. in 1 kg Gemisch enthaltenen Flüssigkeit

t = die Temperatur in Celsius'schen Graden ausgedrückt und gemessen vom Gefrierpunkt d. Wassers.

T = absolute Temperatur = $273 + t$

q = Wärmemenge, welche dazu erforderlich wird, um 1 kg Flüssigkeit als solche bei constanter Pressung von 0° auf t° zu erwärmen, od. als spez. Flüssigkeitswärme bezeichnet, = dem Unterschied d. Körperwärme von 1 kg Flüssigkeit bei t° über dieselbe bei 0°.

r = spez. Verdampfungswärme d.h. d. Wärmemenge, welche d. betreffenden Flüssigkeit von t° Temperatur pro 1 kg zur Verwandlung in gesättigten Dampf von derselben Temperatur t mitgeteilt werden muß, wenn dabei d. spez. äußere Druck constant = derjenigen Pressung ist, welche d. Temperatur t d. betreffenden gesättigten Dampfes entspricht.

ρ = innere spez. Verdampfungswärme d.h. derjenige Körperwärmeüberschuß, welchen 1 kg gesättigten Dampfes von d. Temperatur t mehr enthält als 1 kg gleichartiger Flüssigkeit von derselben Temperatur.

w = spec. Volumen d. Flüssigkeit ausgedrückt in Cubm. pr. Kgr.

$w + \Delta$ = spec. Volumen d. Dampfes, welcher eventuell in dem Gemische selbst enthalten ist.

v = spec. Volumen d. Gemisches also unmittelbar spec. Volumen unter d. Annahme [illegible] und [illegible] dieses Gemisches. $v = w + y\Delta$.

Endlich U = spec. innere Arbeitsvermögen d. Gemisches. Dasselbe enthält in seinem Ausdruck im Allgemeinen immer einen unbekannten constanten Summanden, wenn man nicht d. Arbeitsvermögen in seiner Änderung von einem bestimmten Zustand zu einem andern gegebenen Zustand verfolgt. Im Folgenden sei immer angenommen, daß d. spec. Arbeitsvermögen von dem Zustand aus gerechnet wird, in welchem d. ganze Gemisch flüssig, also $y = 0$ und in welchem d. Temperatur $t = 0$ ist.

Die allgemeinen Gleichungen, welche man zur Behandlung eines solchen Gemisches von Dampf und zugehöriger Flüssigkeit zu Grunde legen kann, sind folgende:

1) das spec. Zustandsvolumen d. Gemisches nämlich $v = w + y\Delta$ — 1.

wobei man w als Constante in Rechnung ziehen kann, indem die Volumenänderungen einer Flüssigkeit als solche immer sehr klein sind im Vergleich mit denjenigen Änderungen d. Volumens, welche durch d. Änderung d. Aggregatform, also durch Verdampfung d. Flüssigkeit oder durch d. Condensation d. Dampfes hervorgerufen werden. Unter diesem Umstand braucht man auch keinen Unterschied zu machen zwischen d. spec. Wärme bei constantem Druck und constantem Volumen, indem dieser Unterschied gerade auf den Volumenänderungen aufbaut.

Sodann ist auch d. Volumenzuwachs Δ eine Function von p, und durch d. obige Gleichung wird d. spec. Volumen d. Gemisches ausgedrückt als eine Function d. Pressung p und d. [illegible] specifischen Dampfmenge y.

Ferner bestimmt sich d. innere Arbeitsvermögen U und daraus d. Wärmewerth AU unter d. Wärmewerth d. Arbeitseinheit verstanden. Dabei soll d. innere Arbeitsvermögen U selbst wie oben schon gesagt immer von dem Zustand aus gerechnet werden, in welchem y und t = Null sind.

Der Wärmewerth von $U = AU$ ist d. spec. Wärmeinhalt d. Gemisches bestehend offenbar aus d. spec. Wärmeinhalt d. Flüssigkeit und d. Wärmeinhalt d. dampfförmigen Theils d. Gemisches. Indem wie q u. w als constant angenommen wird, können wir auch die Größe q als Unterschied d. Wärmeinhalte von 1 Kgr. Flüssigkeit bei t^0 und derselben bei 0^0 betrachten, wonach es [illegible] spec. Flüssigkeitswärme bezeichnet werden; ebenso können wir $q + \rho$ d. Unterschied d. Wärmeinhalte von 1 Kgr. gesättigten Dampfes bei t^0 und derselben von 1 Kgr. d. gleichnamigen Flüssigkeit bei 0^0 ist = d. spec. Dampfwärme.

Indem nun weiter in 1 Kgr. Gemisch, y Kgr. Dampf also $1-y$ Kgr. Flüssigkeit enthalten sind, ist d. spec. Wärmeinhalt d. Dampfes $= y(q + \rho)$ und d. spec. Wärmeinhalt d. Flüssigkeit $= (1-y)q$. Für irgend einen bestimmten d. Zustandsänderung d. Gemisches, folgt d. spec. Wärmeinhalt:

$$AU = (1-y)q + y(q+\rho)$$

$$\text{od.}\quad AU = q + y\rho \qquad\text{— 2}$$

Im vorliegenden Falle bedeutet also diese spec. Wärmeinhalt nichts anders als d. Unterschied d. Wärmeinhalte, welche d. Gemisch bei t^0 pr. 1 Kgr. hat, und derjenige, welche d. Gemisch hat, wenn d. ganze Masse flüssig entsprechend $y = 0$ und dabei d. Temperatur 0^0 hätte.

Außer diesen Gleichungen hat man noch d. Beziehungen, welche stattfindet zwischen d. Pressung p und Temperatur t im Grenzzustand d. Übergangs aus einer in d. andern Aggregatform. In dem vorliegenden Gemisch befinden sich aber offenbar beide Theile, Flüssigkeit und Dampf in einem solchen Grenzzustande d. Übergangs von flüssiger in dampfförmiger resp. von dampfförmiger in flüssiger Aggregatform.

Es gilt demnach auch für dieses Gemisch d. bekannte Beziehung:

$$\frac{dt}{dp} = \frac{AT\Delta}{r} \qquad\text{— 3}$$

unter r d. spec. Verdampfungswärme verstanden welche bekanntlich ist:

$$r = \rho + Ap\Delta$$

Diese Gleichungen beziehen sich ... auf d. Geschwindigkeit, mit welcher d. Zustandsänderungen d. Gemisches vor sich gehen, sondern nur auf d. augenblicklichen Wärmezustand, gleichviel wie dieser aus einem früheren Zustande hervorgegangen ist.

Was nun diese Geschwindigkeit betrifft, so kommt es besonders darauf an, diejenige Wärmemenge dQ zu bestimmen, welche dem Gemisch zu 1 kg ... unendlich kleinen ... Wärmezustandes ... Änderung d. Wärmezustandes ... eintreten ...

Diese Frage kann nun leicht beantwortet werden mit Hilfe d. allgemeinen Wärmegleichung, wenn man diese ... entsprechend ... zur ... d. Wärmezustandes ... Gemisches ...

Die allgemeine Form d. Wärmegleichung war nun:

$$W.dQ = dU + p\,dv$$

wenn W d. Arbeitsäquivalent d. Wärmeeinheit bedeutet und bekanntlich ist: $W = \frac{1}{A} = 424$ kgm.

d. Wärmegleichung kann man also auch schreiben, wenn man beachtet, daß A eine Constante ist:

$$dQ = d(AU) + Ap\,dv$$

Setzt man hier wieder wie früher für AU gefundenen Werth, so erhält man:

3) $$dQ = d(q + y\varrho) + Ap\,dv = dq + d(y\varrho) + Ap\,dv$$

Diesen Ausdruck kann man nun zweckmässig umgestalten und ... .

Setzen wir nach Gleich. 1 $v = w + y\Delta$, wobei w = constant angenommen wird, so ist auch

$$dv = d(y\Delta) \text{ und also } Ap\,dv = Ap\,d(y\Delta)$$

... nach d. Differentialrechnung kann man nun aber weiter auch so schreiben:

$$Ap\,dv = Ap\,d(y\Delta) = A\,d(yp\Delta) - Ay\Delta\,dp$$

(weil $d(xyz) = xy\,dz + z\,d(xy)$)

D. letzte Ausdruck für dQ wird demnach nun ...

$A\,d(yp\Delta) = d(y\,Ap\Delta)$ ist, ...

dQ = weil A eine Constante ist, und ferner auch für $A\Delta$ ... Gleich. 2 gefundenen Werth:

$$A\Delta = \frac{dt}{dp}\cdot\frac{r}{\vartheta}$$

und daraus folgt: $Ap\,dv = d(y.\,Ap\Delta) - y\,dp\,\frac{dt}{dp}\,\frac{r}{\vartheta} = d(y.\,Ap\Delta) - y\,\frac{r\,dt}{\vartheta}$

Dies nun in Gleich. 3 eingesetzt giebt:

$$dQ = dq + d(y\varrho) + d(y.\,Ap\Delta) - y\,\frac{r\,dt}{\vartheta}$$

$$= dq + d\left[y(\varrho + Ap\Delta)\right] - y\,\frac{r\,dt}{\vartheta}$$

4) $$dQ = dq + d(yr) - \frac{yr}{\vartheta}\,dt$$ wobei $\varrho + Ap\Delta = r$

Setzen wir nun weiter bekanntlich $dt = d\vartheta$ ... weil $\vartheta = t + 273$, so kann man einfacher schreiben:

$$dQ = dq + d(yr) - \frac{yr}{\vartheta}\,d\vartheta = dq + \vartheta\,\frac{\vartheta\,d(yr) - yr\,d\vartheta}{\vartheta^2}$$

5) od. nach d. Differentialrechnung: $$dQ = dq + \vartheta\,d\left(\frac{yr}{\vartheta}\right)$$

Dieser erscheinende Ausdruck für d. Wärmemenge dQ welche dem vorliegenden Gemisch per 1 kg bei einer unendlich kleinen umkehrbaren Zustandsänderung mitzutheilen ist, findet man besonders häufige Anwendung. Der Weise ist d. jedoch vorziehen die Darstellung für dQ anzunehmen, indem man in d. [illegible] Summanden [illegible] von dQ einsetzt:

Bezeichnet c d. spec. Wärme d. Flüssigkeit, wobei man wie schon erwähnt, entsprechend d. Abweichen einer Volumenänderung d. Flüssigkeit keinen Unterschied zwischen spec. Wärme bei constantem Druck und constantem Volumen zu machen braucht. Dann ist bekanntlich:

$$c = \frac{dq}{dt} \quad \text{also} \quad dq = c\,dt$$

Setzt man dies in Gleichung 4 ein und schreibt dann noch: $d(yr) = y\,dr + r\,dy$, so erhält man:

$$dQ = c\,dt + r\,dy + y\,dr + y\frac{r}{T}\,dt$$

$$= (1-y)\,c\,dt + r\,dy + y\left(c + \frac{dr}{dt} - \frac{r}{T}\right)dt$$

oder wenn man die Summe bezeichnet:

$$c + \frac{dr}{dt} - \frac{r}{T} = h \qquad \Big\} \; 6)$$

so bekommt man: $dQ = (1-y)\,c\,dt + r\,dy + y\,h\,dt$

Die Bedeutung dieser 3 Summanden von dQ ist leicht zu erkennen: Denkt man sich ein solches Gemisch von Dampf und tropfbarer Flüssigkeit vor und theilt diesem eine Wärmemenge mit, so erleidet dieselbe eine 3fache Aufgabe:

1) sie erhöht d. Temperatur d. Flüssigkeit, ~~von~~ welcher $(1-y)$ kg in 1 kg Gemisch enthalten sind.
2) sie verwandelt einen Theil d. Flüssigkeit in Dampf, indem d. Mischungsverhältniss y
3) erhöht und bewirkt so eine Zustandsänderung d. Dampfes als solchen.

Diese 3 Bestandtheile von dQ, welche d. einzelnen Zustandsänderungen entsprechen, sind nun offenbar durch d. 3 Summanden ausgedrückt:

Es ist $(1-y)\,c\,dt$ d. Wärmemenge zur Temperaturerhöhung d. Flüssigkeitsmenge $= (1-y)$ kg.
Um ferner d. Mischungsverhältniss y um ein unendlich Weniges zu ändern, müssen dy kg Flüssigkeit verdampft werden, wozu also eine Wärmemenge erforderlich $= r\,dy$. dy kann offenbar $\pm$ sein, je nachdem eine Wärmemittheilung o. Wärmeentziehung, also Verdampfung od. Condensation erfolgt, entsprechend einem positiven od. negativen Werth von dQ.
Ferner ist noch $y\,h\,dt$ d. Wärmemenge, welche zur Temperaturerhöhung und entsprechenden Volumenänderung d. Dampfmenge $= y$ kg verwendet wird.
Es bedeutet demnach h eine Art spec. Wärme d. Dampfes, nämlich diejenige, welche einer solchen Volumen- und Druckänderung bei d. Wärmemittheilung entspricht, daß dabei d. Dampf gerade gesättigt bleibt. Diese sogenannte spec. Wärme d. gesättigten Dampfes ist d. Größe h, und man wird bei Wasserdampf einen negativen Werth finden. —

Außer dieser Wärmemenge dQ, welche d. Gemisch per 1 kg bei einer unendlich kleinen Zustandsänderung mitgetheilt werden muß, kann man sich noch weiter fragen, welches d. Expansionsarbeit ist, welche von 1 kg d. Gemisches von Dampf und tropfbarer Flüssigkeit bei einer solchen umkehrbaren Änderung seines Wärmezustandes verrichtet wird.

Selbstverständlich ist der allgemeine Ausdruck für d. Expansionsarbeit bei einer unendlich kleinen Zustandsänderung ist:

$$dL = p\,dv$$

oder da $v = w + yu$ und da $w = $ constant $\quad dL = p\,d(yu)$

Nach d. allgemeinen Wärmegleichung ist aber d. Wärmemenge $W\,dQ$, welche dem Gemisch bei sehr kleiner Zustandsänderung mitzutheilen ist — dem Zuwachs an innerer Arbeit und d. äusseren Arbeit entsprechend, welche bei Änderung d. Volumens verrichtet wird, also nämlich:

$$W\,dQ = dU + p\,dv = dU + dL$$

also $$dL = W\,dQ - dU$$

oder $W = \frac{1}{A}$ gesetzt, d. Wärmewerth d. äusseren Arbeit:

$$A\,dL = dQ - A\,dU = dQ - d(AU)$$

Nach Gl. 2 ist aber:

$$d(AU) = d(q + y\rho) = dq + d(y\rho)$$

und nach Gl. 5:

$$dQ = dq + T\,d\left(\frac{yr}{T}\right)$$

diese Werthe eingesetzt gibt:

7) $$A\,dL = T\cdot d\left(\frac{yr}{T}\right) - d(y\rho)$$

NB. Alle diese Formeln und ebenso d. daraus abgeleiteten Specialformeln gelten natürlich nur innerhalb d. Grenzen $y = 0$ und $y = 1$.

Mit Hilfe dieser Formeln kann man nun auch besondere Arten von Zustandsänderungen eines solchen Gemisches von Dampf und gleichartiger Flüssigkeit untersuchen und zwar zunächst:

Zustandsänderung bei constanter Pressung oder Temperatur.

Wie aus den früheren Untersuchungen bekannt, ist für ein Gemisch von Flüssigkeit und [illegible] Dampf bei constanter Pressung p auch d. dadurch bestimmte Temperatur t constant und umgekehrt. Da in diesem Fall d. [illegible] keine [illegible] Zustandsänderung [illegible] mit d. v [illegible]. Alle in unseren Formeln vorkommenden Functionen von p sind also unveränderliche Grössen, also $\Delta\ r\ \rho$ = constant. Ausserdem sind natürlich auch q und w constant.

Was sich in den Formeln bei Zustandsänderungen ändert, ist also nur d. spec. Dampfgehalt y und bei einer dieser Grösse abhängigen Werthe, nämlich d. spec. Volumen v d. Gemisches, entsprechend d. Zustandsgleichung d. Gemisches:

$$v = w + y\Delta,$$ wenn früher w und Δ in diesem Falle constante Grössen sind, wenn sich also y ändert und weil sich auch d. spec. Volumen v ändert und zwar [illegible] diese Grössen proportional ändern durch Differentiation ist:

$$dv = \Delta\,dy$$

Bezeichnet man v_0 d. spec. Volumen im Anfangszustand und y_0 d. spec. Dampfgehalt d. Gemisches im [illegible] Anfangszustand, so geht wenn y_0 in y übergeht d. spec. Volumen

$$v_0 = w + y_0\Delta \text{ in } v = w + y\Delta \text{ über.}$$

Nach Gl. 2 ist nun d. Wärmewerth d. Änderung d. Arbeitsvermögens od. d. spec. Änderung d. spec. [illegible] d. Gemisches bei einer Zustandsänderung von endlicher Grösse, welche durch $v_0\,y_0$ und $v\,y$ gekennzeichnet ist:

$$A(U - U_0) = (y - y_0)\rho$$

also d. Zunahme an innerer Arbeit weil $AW = 1$:

$$U - U_0 = W(y - y_0)\rho$$

ferner d. bei d. Zustandsänderung von endlicher Grösse pro 1 kg d. Gemisches verrichtete äussere Arbeit:

$$L = p(v - v_0) = p\Delta(y - y_0)$$

mit $v = w + y\Delta$ und $v_0 = w + y_0\Delta$

Folglich ist d. Wärmemenge, welche 1 kgr d. Gemisches bedarf, um eine umkehrbare Zustandsänderung von endlicher Größe bei constanter Spannung u. Temperatur mitgetheilt ist nach Gleich. 5) und nach Einführung d. Verdampfungswärme r:

$$Q = r(y - y_0)$$

Nach dieser Formel kann man nun für den umkehrbaren Fall alle diese Wärmen zu berechnen, wenn mit d. Anfangszustand durch d. gegebenen Größen v_0 und y_0 mit d. Endzustand durch y als bekannt gegeben sind, indem alle Größen v, ε, U und Q als Functionen von y und von Größen bekannt sind, welche schon mit d. Anfangszustand gegeben sind.

Wird d. Frage aber so gestellt, daß y nicht direkt gegeben, also d. Endzustand d. Zustandsänderung nicht a priori gegeben, so muß man erst y aus den Bedingungen d. Aufgabe bestimmen, falls das nicht möglich, so ist d. Aufgabe überhaupt nicht vollkommen bestimmt.

Es würde z. B. d. Expansionsverhältniß $\varepsilon = \frac{v_0}{v}$ gegeben sein.

Um hieraus y zu berechnen schreibe man zunächst:

$$\varepsilon = \frac{v_0}{v} = \frac{w + y_0\Delta}{w + y\Delta}$$

und wenn man aus dieser Gleichung y entwickelt, wird:

$$y = \left(\frac{1}{\varepsilon} - 1\right)\frac{w}{\Delta} + \frac{1}{\varepsilon}y_0.$$

$$\text{also } y - y_0 = \left(\frac{1}{\varepsilon} - 1\right)\frac{w}{\Delta} + \left(\frac{1}{\varepsilon} - 1\right)y_0 = \left(\frac{1}{\varepsilon} - 1\right)\left(\frac{w}{\Delta} + y_0\right)$$

Diese Ausdrücke y und $y - y_0$ hat man nun in d. vorigen Formeln einzuführen um so diese Werthe v, ε, U u. Q durch d. gegebene Verhältniß ε und d. andern gegebenen Größen ausgedrückt zu bekommen.

Zustandsänderung bei constantem Volumen.

Die mit dem Zeiger 0 versehenen Buchstaben beziehen sich wie bei den Anfangszustand d. Gemisches von Flüssigkeit und gesättigtem Dampf entsprechenden Größen, welche durch d. früheren Formeln bekannt sind, während d. Buchstaben ohne Zeiger sich auf den Endzustand beziehen sollen, ganz wie in dem oben betrachteten Falle. Nach Gleich. 1) hat man dann:

$$v = w + y\Delta \quad \text{und} \quad v_0 = w + y_0\Delta.$$

Da aber v während d. ganzen Verlaufs d. Zustandsänderung constant sein soll, kann aber auch W im allgemeinen sehr angenähert als constant angenommen werden, ist:

$$y\Delta = y_0\Delta.$$

Weil Δ eine Function d. Spannung ist, so kann diese Gleichung zur Berechnung von y oder von p dienen, vorausgesetzt d. Endzustand durch p resp. einer d. durch p bestimmten Größen od. durch y gegeben ist.

Nach Gleich. 3) ist nun weiter d. Wärmemenge dQ, welche d. Gemisch von 1 kgr bedarf um eine unendlich kleine umkehrbare Zustandsänderung mitzutheilen ist:

$$dQ = dq + d(y\rho) + Apdv$$

Im vorliegenden Falle ist aber wegen $v = const$, $dv = 0$ und mithin d. ganze letzte Glied $= 0$.

Durch Integration ergibt sich dann aus dieser Formel d. Wärmemenge Q, welche d. Gemisch von 1 kgr bedarf um einer gegebenen Zustandsänderung von endlicher Größe bei constantem Volumen mitgetheilt werden muß:

$$Q = q - q_0 + y\rho - y_0\rho_0.$$

Nimmt man nach Gleich.: $y\Delta = y_0\Delta$ substituirt:

$$Q = q - q_0 + \gamma_0 \Delta_0 \left(\frac{\rho}{\Delta} - \frac{\rho_0}{\Delta_0}\right)$$

Diese Formel für die Wärmemenge Q kommt unter Anderem zur Anwendung, wenn gefragt wird, wie lange Zeit $= \vartheta$ erforderlich ist, um die Spannung p_0 eines Gemisches von Flüssigkeit und gesättigtem Dampf, welches sich in einem eingeschlossenen Gefäß befindet, zu steigern bis zu p, wenn dem Gemisch eine gleichförmige Wärmezuleitung gestattet wird.

Nach der Formel oben kann man nämlich die Wärmemenge berechnen, welche dem Gemisch pro 1 kg behufs einer Zustandsänderung entsprechend einer Steigerung der Spannung von p_0 auf p, mitgeteilt werden muß. Sind nun aber M kg des Gemisches in dem geschlossenen Gefäß vorhanden, so ist MQ die Wärmemenge, welche die Spannung des Gemisches von p_0 auf p bringt. Ist dann endlich noch Q_1 die in der Zeiteinheit dem Gemisch mitgeteilte Wärmemenge, so ist offenbar die erforderliche Zeit:

$$\vartheta = \frac{MQ}{Q_1} \text{ Zeiteinheiten}$$

In diesem Falle befindet sich z. B. ein gefüllter Dampfkessel bei abgestellter Dampfableitung und Speisung aber arbeitender Feuerung. (Es tritt dieser Fall ein etwa in einer Fabrik um die Mittagszeit, wo die Maschinen stillstehen, also kein Dampf entnommen und kein Speisewasser zugeführt wird, und wenn dann die Feuerung aus irgend einem Grunde nicht sofort abgedämpft werden kann. Wie lange kann dieser Zustand dauern, ehe die Spannung im Kessel so groß wird, daß dieser springen könnte.)

Vollkommen der Heizung, die sich zur Erzeugung des Kessels festgestellt wird, ist es doch nur ein verhältnismäßig kleiner Teil der vorhandenen Wassermenge, welche in Dampf übergeht, so daß, wenn man das Gesamtvolumen $= V$ Kubikmeter, das Volumen des Dampfes $= \alpha V$ und des Wassers $= (1-\alpha) V$ ... in Rechnung ... werden können, ein ... Wasser durch Erhöhung der Temperatur ... Erwärmung der Spannung vorausgesetzt wird. Ferner ist ... das Gewicht des Dampfes viel mal kleiner als das Volumen des Wassers, so kann man das Gewicht M des im Kessel befindlichen Gemisches setzen:

$$M = 1000(1-\alpha)V$$

indem 1 cubm. Wasser 1000 kg wiegt (freilich nur bei einem Zustand größter Dichtigkeit, also eigentlich etwas zu hoch gegriffen, indem das heiße Wasser weniger spez. Gewicht hat; jedenfalls aber ist M nicht zu klein gegriffen) $(1-\alpha) V$ ist das im Kessel vorhandene Wasser ist.

Heißt man noch die Größe der Heizfläche $= H$ qm und Q_0 die Wärmemenge, welche pro Minute und pro qm Heizfläche in den Kessel eindringt, so ist:

$$Q_1 = H Q_0$$

und demnach:

$$\vartheta = 1000(1-\alpha)\frac{V}{H} \cdot \frac{Q}{Q_0}$$

Ist beispielsweise der Kessel ein mit äußerer Feuerung versehener einfacher cylindrischer Kessel vom Durchmesser d und der Länge l, so ist dann:

$$V = \frac{\pi d^2}{4} l$$

und wenn man annimmt, daß die Heizfläche, wie es meistens der Fall ist, etwa die Hälfte des Umfangs des Kessels einnimmt, also:

$$H = \frac{5}{9} \pi d l$$

so erhält man für ϑ diesen Wert:

$$\vartheta = 450(1-\alpha)\frac{Q}{Q_0} d$$

Die Wärmemenge Θ kann man jetzt aus den vorstehend entwickelten Formeln berechnen, wenn nur die in den letzteren Formeln vorkommenden Größen bekannt sind. Was das Gewicht des Dampfes q_0 im Anfangszustand betrifft, so kann man dieses offenbar wie folgt ausdrücken:

$$q_0 = \frac{\alpha V \gamma_0}{M}$$ wobei γ_0 das spec. Gewicht des Dampfes im Anfangszustand bedeutet.

Nimmt man den Werth für M [illegible]:

$$q_0 = \frac{\alpha V \gamma_0}{1000(1-\alpha)V} = 0{,}001\,\frac{\alpha}{1-\alpha}\,\gamma_0$$

Mit Rücksicht darauf, daß man [illegible]:

$$\gamma_0 \Delta_0 = \frac{\Delta_0}{\Delta_0 + 0{,}001} = 1$$ setzen kann, indem $0{,}001$ im Vergleich zu Δ_0 sehr klein ist,

so hat man nach Substitution dieses Werthes:

$$\Theta = q - q_0 + 0{,}001\,\frac{\alpha}{1-\alpha}\left(\frac{\rho}{\Delta} - \frac{\rho_0}{\Delta_0}\right)$$

Bei einem Dampfkessel ist nun im Allgemeinen der ganze Raum derartig ausgefüllt, daß $\frac{2}{3}$ Wasser und $\frac{1}{3}$ [illegible] Dampf darin enthalten sind, so daß man also $\alpha = \frac{1}{3}$ setzen kann, und dann erhält man:

$$\vartheta = 300\,\frac{\Theta}{\Theta_0}\,\alpha \quad \text{wo} \quad \Theta = q - q_0 + 0{,}0005\left(\frac{\rho}{\Delta} - \frac{\rho_0}{\Delta_0}\right)$$

Diese Wärmemenge Θ kann man nun berechnen und tabellarisch zusammenstellen für den Fall, daß die Spannung wächst von 2 auf 3, von 3 auf 4 etc. —— wie eine solche Tabelle [illegible] Seite 332 [illegible] bis zu $p = 13$ Atm.; man hat dann einfach [illegible] $p_0 = 2$, $p = 3$ Atm., dann $p_0 = 3$ und $p = 4$ u.s.f. —— $p_0 = 12$ und $p = 13$ Atm.

[illegible] ist pro Minute ca. 200 Cal. d. h. 200 Wärmeeinheiten pro qm der Heizfläche in den Kessel [illegible], also ist $\Theta_0 = 200$ ist, so hat man:

$$\vartheta = 1{,}5\,\Theta\,\alpha \text{ Minuten.}$$

Mit Rücksicht auf genannte Tabelle kann man nun leicht die Zeit ϑ berechnen, in welcher bei einem [illegible] cylindrischen [illegible] Dampfkessel von 1 qm Heizfläche, welcher zu $\frac{2}{3}$ seines Volumens mit Wasser gefüllt ist, beispielsweise die Anfangsspannung von 4 Atm. nach und nach bis zu 12 Atm. bei [illegible] Feuerung wächst, [illegible] Zeit [illegible] stattfinden kann.

Die Wärmemenge Θ, welche erforderlich ist, um [illegible] die Spannung von 4 Atm. auf 12 Atm. zu steigern, kann man sich zusammengesetzt denken aus den Wärmemengen, welche [illegible] erforderlich wären, um eine Erhöhung der Spannung von 4 auf 5 Atm., von 5 auf 6, von 6 auf 7 —— von 11 auf 12 Atm. zu bewirken. Nach der genannten Tabelle [illegible] die Zeit mit $\alpha = 1$:

$$\vartheta = 1{,}5\,\Theta = 1{,}5\,(8{,}543 + 7{,}305 + \ldots\ldots 4{,}158) = 70 \text{ Minuten}$$

Hieraus kann man beurtheilen, wie [illegible] es ist, einen Dampfkessel eine längere Zeit ohne Aufsicht zu lassen, wenn kein Speisewasser zugeführt und kein Dampf abgeleitet wird, die Feuerung aber [illegible] unterhält.

Zustandsänderung bei constantem Gewichtsverhältnisse von Dampf & Flüssigkeit.

Diese Zustandsänderung [illegible] durch y = Const.

[illegible]

[illegible]

$$v = w + y\Delta$$

[illegible] w [illegible]

v = [illegible] Δ [illegible] p [illegible] v [illegible] v [illegible] p [illegible] Δ [illegible] p [illegible] 100 [illegible] Zeuner [illegible]

$$p = \alpha p^{\mu}$$ [illegible] α und μ [illegible]

[illegible] $\alpha = 0,6058$ und $\mu = 0,9393$

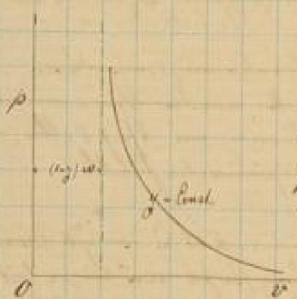
[illegible] Δ = [illegible]

$$\Delta = v - w = \frac{1}{\gamma} - w$$

und mit $\gamma = \alpha p^{\mu}$

$$\Delta = \frac{1}{\alpha p^{\mu}} - w$$

[illegible]



$$v = w + y\left(\frac{1}{\alpha p^{\mu}} - w\right) = (1-y)w + \frac{y}{\alpha p^{\mu}}$$

[illegible] v [illegible] $(1-y)w$ [illegible] p [illegible]

[illegible] $p = 0$, [illegible] $v = \infty$.

[illegible] $p = \infty$, " " " $v = (1-y)w$

[illegible] dQ, [illegible]

[illegible] dQ [illegible] 103 [illegible] 6 [illegible]

$$dQ = (1-y)\,c\,dt + r\,dy + y\,h\,dt$$

wenn h d. Ausdruck bedeutet:

$$h = c + \frac{dr}{dt} - \frac{r}{T}$$

und bezeichnet nach mittl. spez. Wärme d. Dampfes, welche dieser fließen können und Pressungsänderung bei d. Wärmemitteilung entspricht, daß dabei d. Dampf stets gesättigt bleibt.

Im vorliegenden Fall ist nun aber y constant und deshalb $dy = 0$, setzt man d. Werte für dQ d. Mittelpunkt mit dy fortfällt, wenn dieselbe speziell für den zu betrachtenden Fall gelten soll. Also:

$$dQ = (1-y)c\,dt + yh\,dt = [(1-y)c + yh]\,dt$$

Gültig ist für d. Grenzfall, daß $y = 1$ d. h. daß d. Dampf trocken gesättigt ohne Wasserbeimischung ist, also einfach mit Gleichheitszeichen übereinstimmt:

$$dQ = h\,dt$$

Aus dieser Gleichung kann man d. physikalische Bedeutung von h erkennen.

Man erkennt aus d. Gleichung für dQ, daß d. Vorzeichen von h darüber entscheidend ist, ob einem gesättigten oder trockenen, also nicht mit Flüssigkeit gemischten Dampf, wenn er bei d. Ausdehnung (Wachsen von t) gerade gesättigt und trocken bleiben soll, Wärme mitgeteilt oder entzogen werden muß.

Bei d. Expansion muß offenbar mit wachsendem Volumen v d. Pressung p und mithin d. Temperatur t abnehmen, wenn d. Zustandsänderung unter d. Bedingung daß y = constant bleiben soll, entsprechend. Bei d. Expansion ist also immer dt negativ dagegen umgekehrt bei d. Compression d. gesättigten Dampfes positiv. Wenn nun noch h negativ ist, ist dQ positiv
und wenn h positiv ist, ist dQ negativ.

Hieraus ergibt sich ferner, daß d. Vorzeichen von h darüber entscheidet ob dQ positiv od. negativ ist bei einem negativen Werth von dt entsprechend d. Expansion und positiven Werth von dt bei d. Compression.

Bei d. Expansion wird mit negativem h d. Dampfe Wärme mitgeteilt mit: $dQ = +$ für $h = -$
und mit positivem h " " " entzogen mit: $dQ = -$ für $h = +$ } mit $dt = -$
Und bei d. Compression wird mit negativem h " " " entzogen mit: $dQ = -$ für $h = -$
und mit positivem h " " " mitgeteilt mit: $dQ = +$ für $h = +$ } mit $dt = +$

Für gesättigten Wasserdampf kann man nun bemerken, daß h unter allen Umständen einen negativen Werth hat; man kann nämlich schreiben:

$$h = c + \frac{dr}{dt} - \frac{r}{T} = \frac{dq}{dt} + \frac{dr}{dt} - \frac{r}{T} = \frac{d(q+r)}{dt} - \frac{r}{T}$$

Unter $q + r$ versteht man d. sog. Gesamtwärme eines Dampfes, welche nach Regnault für Wasserdampf ist: $q + r = 606{,}5 + 0{,}305\,t$, setzt man dies ein:

$$h = \frac{d(606{,}5 + 0{,}305\,t)}{dt} - \frac{r}{T} = 0{,}305 - \frac{r}{T}$$

Was nun den Ausdruck $\frac{r}{T}$ für gesättigten Wasserdampf betrifft, so findet man ihn durch d. betreffende Rechnung für d. Pressung p in $\frac{1}{10}$ bis zu 14 Atm zwischen d. Grenzen 1,8 und 1.
Innerhalb dieser Grenzen $p = \frac{1}{10}$ – 14 Atm und auch noch ziemlich weiter hinaus ist h für gesättigten Wasserdampf beständig negativ.
Gesättigter, trockener Wasserdampf muß demnach Wärme mitgeteilt werden wenn er bei d. Expansion gesättigt und trocken bleiben soll und dagegen muß bei d. Compression Wärme entzogen werden, wenn er gleichfalls gesättigt und trocken bleiben soll.
Die meisten anderen Dämpfe verhalten sich ebenso wie gesättigter trockener Wasserdampf mit Ausnahme d. Aetherdampfes, indem dieser innerhalb d. obigen Grenzen h beständig positiv hat, dem also bei d. Expansion Wärme entzogen werden und bei d. Compression Wärme mitgeteilt werden muß, wenn er immer gesättigt und trocken bleiben soll.

Bei diesem Verhalten findet man aber offenbar nicht nur dann statt, wenn d. Wasserdampf vollkommen gesättigt und trocken ist, sondern auch dann, wenn derselbe mit einer gewissen Menge Wasser gemischt ist; sofern d. verhältnissmässige y nicht unter einen bestimmten Grenzwerth herabsinkt. Dieser Grenzzustand ist dadurch gekennzeichnet, wo d. Quotient $\frac{dQ}{dt}$ sein Zeichen wechselt, welcher also immer ein Übergang durch die Grenze 0 voraussetzt.

Für $\frac{dQ}{dt} = 0$ folgt nach der vorhergehenden Gleichung von dQ:

$$y = \frac{c}{c-h}$$

Einem solchen Gemisch von Wasser mit gesättigtem Wasserdampf, wenn aber y nicht unter d. Grenze $\frac{c}{c-h}$ herabsinkt, muss demnach, wenn d. verhältnissmässige Dampfmenge y constant bleiben soll, bei d. Expansion Wärme entzogen und bei d. Compression Wärme zugeführt werden.
Mit Hülfe d. früher gefundenen Werthe von c und h [illegible] Tabelle kann man diejenigen Werthe, welche y nicht überschreiten darf, damit d. betreffende Gemisch in d. selben Weise sich verhalte wie vollkommen gesättigter Dampf, [illegible] für Werthe von [illegible] berechnen.
Z. B. findet man zwischen d. Grenzen $p = \frac{1}{2}$ Atm — 8 Atm

$$y_{min} = \frac{c}{c-h} = 0{,}45 - 0{,}57$$

Derjenige Wasserdampf welcher bei Dampfmaschinen arbeitend wirkt, kann zwar unter Umständen mit ziemlich viel Wasser vermischt in die Dampfcylinder kommen, aber derselbe enthält selten mehr als 20% d. ganzen Volumens, so daß also $y = 0{,}80$ sein würde und also d. zulässige Grenze noch [illegible] hat. Dieser Dampf (vermischt mit dem [illegible] Wasser) verhält sich demnach ebenso wie trockener gesättigter Wasserdampf. Einem solchen Dampfe muß also, damit y constant bleibt, bei d. Expansion Wärme entzogen und bei d. Compression Wärme zugeführt werden. Geschieht dies letztere aber nicht, wird d. [illegible] Dampfe bei d. Expansion keine Wärme entzogen, so muß nothwendig eine theilweise Condensation stattfinden, und wird d. Dampfe bei d. Compression keine Wärme entzogen, so muß nothwendig eine theilweise Verdampfung [illegible] Wasser [illegible] bei d. Compression [illegible] stattfinden. Bei den Dampfcylindern findet dieses auch zum Theil statt, indem d. Expansion und Compression so schnell vor sich gehen, daß die durch d. mit schlechten Wärmeleitern umgebenen Cylinderwand an Außen entzogene oder zugeführte Wärmemenge gar nicht in Betracht kommen kann.

Diese Betrachtungen zeigen, daß namentlich d. Annahme Pambour's (welcher derselbe seine Theorie d. Dampfmaschinen begründet), daß d. Mischungsverhältniss von Dampf und Wasser also y im Cylinder immer constant bleibe unzulässig und ganz [illegible] vollkommen falsch. —

Ferner kann noch bemerkt werden, daß d. innere Arbeit eines Gemisches von Dampf und tropfbarer Flüssigkeit [illegible] abnimmt, wenn dasselbe so erwärmt wird, daß d. verhältnissmässige Dampfmenge y constant bleibt.
Allgemein ist nämlich d. Wärmewerth d. inneren Arbeit [illegible] d. [illegible]:

$$AU = q + y\rho$$

Differentiirt man diese Gleichung nach t, während man y constant annimmt, [illegible] entsprechend d. [illegible] bei constanter verhältnissmässiger Dampfmenge y, so erhält man:

$$A\frac{dU}{dt} = \frac{dq}{dt} + y\frac{d\rho}{dt}$$ wo d. $\frac{dq}{dt}$ = spec. Wärme c:

$$A\frac{dU}{dt} = c + y\frac{d\rho}{dt}$$

[illegible] $\frac{dr}{dt}$ [illegible]

$$r = 575{,}4 - 0{,}791\,t \quad \text{also} \quad \frac{dr}{dt} = -0{,}791$$

und folglich $$A\,\frac{dU}{dt} = c - \gamma \cdot 0{,}791$$

[illegible] c [illegible] $A\frac{dU}{dt}$ [illegible] v [illegible] dp und dt [illegible] dU [illegible]

Zustandsänderung bei constantem inneren Arbeitsvermögen

[illegible]

$$U = \text{constant}$$

[illegible] $U = \text{constant}$ [illegible]

$$AU = q + \gamma\rho = \text{constant} = q_0 + \gamma_0\rho_0$$

wenn unter $q_0\ \rho_0\ \gamma_0$ die Werthe von $q\ \rho\ \gamma$ im Anfangszustande verstanden werden.

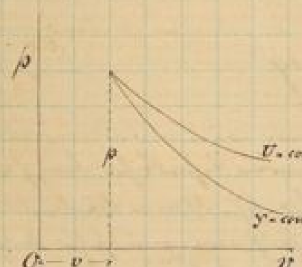
[illegible]

$$v = w + \gamma\Delta,$$ wenn w [illegible] constant [illegible]

[illegible]

$$\gamma = \frac{q_0 + \gamma_0\rho_0 - q}{\rho} \quad \text{so erhält man:}$$

$$v = w + \Delta\,\frac{q_0 + \gamma_0\rho_0 - q}{\rho}.$$ [illegible] v und [Pressung] p, indem $\Delta\ q\ \rho$ [illegible] von p sind [illegible] v und p [illegible] (v, p) [illegible]



[illegible] v [illegible] p [illegible] v [illegible] γ [zunimmt].

[illegible]

$$\gamma = \frac{q_0 + \gamma_0\rho_0 - q}{\rho},$$ [illegible]

$$y = y_0 + \frac{(q_0 + y_0\rho_0) - (q + y_0\rho)}{\rho}$$

Hierin ist $q_0 + y_0\rho_0$ d. ges. Körperwärme $= AU_0$ im Anfangszustand und
$q + y_0\rho = AU'$ d. ges. Körperwärme im geänderten späteren Zustand, bei derselben verhältnißmäßigen Dampfmenge y_0.

Nachdem wegen Arbeitsverrichtung bei d. Expansion d. ges. Körperwärme ihr Wärmeinhalt d. inneren Arbeitsmenge U bei constanter verhältnißmäßiger Dampfmenge y_0 abnimmt, ist also immer:

$$q_0 + y_0\rho_0 > q + y_0\rho$$

und nimmt d. ganze Bruch positiv.

Demzufolge nothwendig auch $y > y_0$ sein.

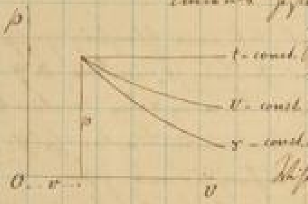
Bei d. Zustandsänderung d. solchen Gemisches von Flüssigkeit und feuchtem Dampf nach d. isodynamischen Curve nimmt also d. verhältnißmäßige Dampfmenge y bei d. Expansion d. Gemisches zu, dagegen bei d. Compression entsprechend ab. Die Expansion nach d. isodynamischen Curve ist also mit Verdampfung d. Flüssigkeit und umgekehrt d. Compression nach d. isodynamischen Curve mit Condensation d. vorhandenen Dampfes verbunden. Wegen dieser Zunahme von y nimmt u nach d. Gleichung:

$$v = \sigma + yu = \sigma + \frac{q_0 + y_0\rho_0 - q}{\rho} u$$

bei gleichem Zunehmen von v auch weniger zu, also nach d. Pressung weniger schnell ab. Wenn y = const. geblieben wäre, so d. isodynamische Curve nicht so [illegible] weniger schnell d. v Achse als d. Curve constanter Dampfmenge, so d. beiden Curven immer d. [illegible] zu einander haben.

Demnach haben solche Gemische von Flüssigkeit und gesättigtem Dampf schon nun also vier verschiedene Zustandsänderungen betrachtet, nämlich:

1) Zustandsänderung bei constanter Pressung und also constanter Temperatur, wodurch sich die Zustandscurve nicht d. v Achse parallele Gerade war.
2) Zustandsänderung bei constantem Volumen entsprechend einer mit d. p Achse parallelen Geraden als Zustandscurve.
3) Zustandsänderung bei constantem y_0 entsprechend d. Zustandsänderung bei constanter verhältnißmäßiger Dampfmenge.
4) Zustandsänderung bei constanter innerer Arbeitsmenge entsprechend einer isodynamischen Curve als Zustandscurve.



Zwischen den beiden ersten Zustandscurven liegen d. beiden letzteren d. entsprechend nachgewiesener Weise. Außer diesen 4 weit gewöhnlichen Zustandsänderungen ist aber noch eine 5te wichtig, bei den Zustandsänderungen für eines solchen festen Gemisches von [illegible] Wichtigkeit nämlich:

Zustandsänderung ohne Mittheilung od. Entziehung v. Wärme.

Diese Zustandsänderung kann z. B. eintreten bei dem in Dampfcylindern befindlichen Dampf, welche einen mit Wärme undurchlässigen [illegible]; d. Expansion geht nämlich so schnell vor sich, daß man die durch d. Cylinderwand mitgetheilte Wärme nicht in Rechnung zu ziehen braucht. Jedoch nur annähernd darf sich ein Dampfcylinder d. feuchte Dampf einer solchen Zustandsänderung ohne Mittheilung od. Entziehung von Wärme unterworfen ist, indem wenigstens nach d. meisten Dampfcylinder mit einer schlechten Wärmeleiter umgeben ist.

Adiabat. Zustandsänderung ist eine charakterisirt durch:

$$dQ = 0$$

Für dQ, nämlich für d. Wärmemenge, welche 1 kg d. Gemisches von Flüssigkeit und gesättigtem Dampf behufs einer unendlich kleinen Zustandsänderung mitgetheilt werden muß, wurden früher d. verschiedene Ausdrücke gefunden (Seite 108). Wählen wir unter d. genannten Werthen von dQ nämlich:

$$dQ = dq + T\,d\left(\frac{xr}{T}\right)$$ so wird mit $dQ = 0$ die d. vorliegende Zustandsänderung charakterisirende Gleichung:

$$0 = \frac{dq}{T} + d\left(\frac{xr}{T}\right)$$

Um nun diese Gleichung auf eine einfache Form zu bringen, sollen einige neue Buchstabenbezeichnungen eingeführt werden und zwar soll gesetzt werden:

$$\int_{0}^{t} \frac{dq}{T} = a \quad \text{und} \quad \frac{r}{T} = b.$$

Da sowohl q wie T und r Funktionen d. Temperatur t sind, so sind auch a und b Temperaturfunktionen. Da andererseits durch d. Temperatur gesättigten Wasserdampfes auch seine Spannung bestimmt ist, so kann man a und b auch als Funktionen von ~~t~~ p betrachten.
Durch Einführen d. Werthe von a und b in d. obige Gleichung bekommt man:

$$0 = da + d\,xb$$ und hieraus durch Integration ergibt sich d. d. vorliegende Zustandsänderung charakterisirende Gleichung:

$$a + xb = \text{const} = a_1 + x_1 b_1$$

wenn $a_1\, x_1\, b_1$ d. Werthe von $a\, x\, b$ für den Anfangszustand bezeichnen.

Die Größen a und b kann man nun mit Hilfe d. obigen Ausdrücke und mit Rücksicht auf d. früher erwähnten Tabelle als Funktionen von p berechnen und für verschiedene Werthe von p tabellarisch zusammenstellen. Ist dies geschehen, so kann man nun auch einfach d. Gleichung d. d. vorliegenden Zustandsänderung entsprechenden adiabatischen Curve bestimmen, welche durch einen bestimmten Punkt hindurchgeht; man hat nur nöthig in d. allgemeinen Zustandsgleichung: $v = w + xu$ die diesem Fall entsprechenden Werthe von x einzusetzen, man erhält dann:

$$v = w + xu = w + \frac{a_1 + x_1 b_1 - a}{b}\,u$$, wenn $a_1\, x_1\, b_1$ als die dem Anfangszustand entsprechenden Größen als gegeben zu betrachten sind, während $a\, b\, u$ als Funktionen von p erscheinen, so ist diese Gleichung eine Beziehung zwischen v und p. w = spec. Volumen d. Flüssigkeit ist annähernd = const zu setzen. Diese eben gefundene Gleichung ist also d. Gleichung d. Zustandscurve mit d. Coordinaten v u. p, welche d. vorliegenden kleinen Zustandsänderung entspricht, also d. Gleichung d. adiabatischen Curve.
Von besonderer Wichtigkeit ist diese adiabatische Curve bei einem Gemisch von Wasser und Wasserdampf und es ist daher wichtig eine Tabelle für a u. b entsprechend verschiedenen Spannungen zu haben.
Was nun b betrifft so kann diese Größe direkt berechnet werden auf Grund d. früher angegebenen Temperaturfunktionen von r und T und mit Rücksicht auf d. damals angeführten Tabellen, es ist nämlich dem Vorigen zufolge:

$$b = \frac{r}{T} = \frac{\varrho + Apu}{273 + t}$$, diese Formel liefert mit Hilfe d. bekannten Werthe von ϱ und Apu für verschiedene Temperaturen und welche für verschiedenen Spannungen d. entsprechenden Werthe von b.

Was aber d. Berechnung d. Größe a betrifft, so ist hierzu eine Modification erforderlich:

Es ist bekanntlich:

$$c = \frac{dq}{dt} \quad \text{also} \quad dq = c\,dt$$ und wenn man für c den Werth einsetzt, gefunden:

$$dq = c\,dt = \left(1 + \frac{4}{10^5}\,t + \frac{9}{10^7}\,t^2\right) dt$$ wo dieser Ausdruck [illegible] die specifische Wärme c.

Bezeichnet man nun mit $T = 273 + t$:

$$a = \int_0^t \frac{dq}{T} = \int_0^t \frac{\left(1 + \frac{4}{10^5}t + \frac{9}{10^7}t^2\right)}{273 + t}\, dt$$

Dieses Integral kann man nun nach den bekannten Regeln d. Integralrechnung in eine endliche Funktion von t umwandeln, welche Funktion dann folgenden Ausdruck ergibt:

$$a = 2{,}431884 \lg \frac{273 + t}{273} - 0{,}0002057\,t + 0{,}00000045\,t^2$$

Mit Hülfe dieser Formel kann man nun auf a die verschiedenen Größen berechnen, indem man t nach und nach verändert. Eine derartige Tabelle findet man Grashof 835.

Um vermittelst d. vorstehenden Tabelle durch Interpolation die Werthe von a u. b auch für solche Werthe von p zu bestimmen, welche nicht unmittelbar in d. Tabelle enthalten sind, kann man bemerken, daß d. Differenzen Δa und Δb von a u. b mit denen der Differenzen von t als dann nahezu proportional gesetzt werden können. Zum Zweck d. Interpolation sind deshalb d. Werthe von t und d. Differenzen von a und b für Δt = 1 in d. vorstehenden Tabelle hinzugefügt worden, vermittelst welcher a u. b genügend genau berechnet werden können.

Mit Hülfe genannter Tabelle ist es schließlich für eine Dampfmenge von Wasser und Dampf möglich d. entsprechende adiabatische Curve zu construiren, welche durch einen gewissen gegebenen Punkt ($v_0\ p_0$) hindurchgeht.

Mittelst d. gegebenen Anfangsspannung p_0 lassen sich d. dem Anfangszustand entsprechenden Größen a_0 und b_0 aus d. genannten Tabelle entnehmen; ferner kann man mit Rücksicht auf solche vermittelst genannter Tabellen den d. Pressung p_0 entsprechenden Werth von Δ bestimmen. Mit Rücksicht auf d. gegebenen Werth von v im Anfangszustand $= v_0$ kann man dann auch d. dem Anfangszustand entsprechende [illegible] Dampfmenge y_0 berechnen mittelst d. Formel $v_0 = w + y_0\Delta$.

$$y_0 = \frac{v_0 - w}{\Delta}$$ und mit w = spec. Volumen d. Wassers = 0,001:

$$y_0 = \frac{v_0 - 0{,}001}{\Delta}$$

Man kennt also jetzt $v_0\ y_0\ a_0\ b_0\ \Delta_0$ und p_0 für den Anfangspunkt $v_0\ p_0$.

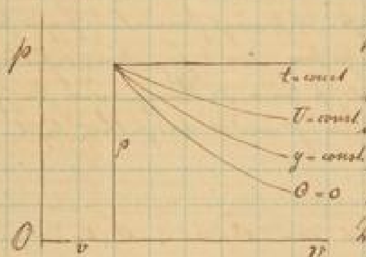
Um nun irgend einen anderen Punkt d. adiabatischen Curve zu finden, hat man für d. angenommene p den entsprechenden Werth von v zu berechnen. Dies kann dadurch geschehen, daß man aus d. vorstehenden Tabellen für p den entsprechenden Werth von a und b entnimmt und ebenso aus d. früheren Tabellen den d. Pressung p entsprechenden Werth von Δ entnimmt. Mit Hülfe d. Gleichung:

$$v = w + \frac{a_0 + y_0 b_0 - a}{b}\,\Delta$$ kann man dann auch den entsprechenden Werth von v berechnen und hat einen Punkt d. adiabatischen Curve bestimmt. Ebenso kann noch eine beliebige Anzahl [illegible] Punkte gefunden werden, welche mit einer stetigen Curve zu verbinden sind um d. gesuchte Form d. adiabatischen Curve zu bestimmen, welche durch den Punkt $v_0\ p_0$ hindurchgeht.

Jedenfalls ist es nun noch zu untersuchen, in welcher Art und Weise d. adiabatische Curve und die Curve constanter Dampfmenge, welche durch denselben Punkt (v, p) gehen, sich schneiden.
In dieser Hinsicht kann man nun bemerken, daß dem früheren zufolge, schon d. verhältnißmäßige Dampfmenge y einen gewissen durch d. Gleichung Seite 110:

$$y_{min} = y_1 = \frac{c}{c-k},$$ worin c und k bekanntlich die specifischen Wärmen [illegible] bezeichnen, bestimmten Grenzwerth y_1 überschreitet, mit d. Expansion d. Gemisches und Dampfes [illegible] Flüssigkeit, wogegen nach d. adiabatischen Curve, eine [illegible] am Dampf zu Flüssigkeit als eine Abnahme von y entstanden ist.
Bei einem Gemisch von Wasserdampf und Wasser jedenfalls nimmt dann wenn $y > 0{,}5$, indem bei zu den früheren [illegible] Grenzwerth $y_1 = \frac{c}{c-k}$ bis einen [illegible] 0,5 fallt.

Die Zustandsgleichung: $$v = w + y\Delta$$
[illegible] bei d. Expansion (Zunahme von v) also bei abnehmender verhältnißmäßiger Dampfmenge y d. Werth Δ schneller wachsen muß, als wachsen würde, wenn y constant bliebe. [illegible] bei d. Expansion also bei einem Wachsen d. Volumens v nach d. adiabatischen Curve entsprechend einer gleichzeitigen Abnahme von y, p schneller abnehmen muß als wenn y constant bleibt entsprechend d. Expansion bei constanter verhältnißmäßiger Dampfmenge. [illegible] daß d. adiabatische Curve $(\Theta = 0)$ [illegible] Punkt (v, p) [illegible] für den Fall $y > y_1$ schneller d. v-Achse [illegible] als d. Curve constanter Dampfmenge $(y = \text{const})$ [illegible]



d. v Achse schneller [illegible] als d. [illegible] Curve $(U = \text{const})$ [illegible] Zustand [illegible] Dampf und Flüssigkeit [illegible] in einem gemeinschaftlichen Durchschnittspunkt (v, p) [illegible]
Die Curven $\Theta = 0$ [illegible] Punkt (v, p) d. Curve $y = \text{const}$ [illegible] Curven $U = \text{const}$ (für wachsende Volumen v) fallen, wenn $y = y_1$ resp. $y < y'$ wird.
Im Allgemeinen und besonders für Wasserdampf [illegible] erfüllt [illegible] $y > y'$ ist.

Mit Rücksicht auf d. [illegible] ist es nun [illegible] d. Expansionsarbeit E kennen zu lernen, welche [illegible] d. Gemisches bei d. Zustandsänderung nach d. adiabatischen Curve [illegible]
Zu ihrer Bestimmung dient d. allgemeine Wärmegleichung:

$$W\,dQ = dU + dL.$$

[illegible] in d. vorliegenden Fall, weder Wärme mitgetheilt noch entzogen wird [illegible] ist, [illegible] $dQ = 0$ sein und [illegible] zu setzen:

$$-\,dU = dL.$$

Die Expansionsarbeit [illegible] ein Theil d. innern Arbeitsvermögens in Expansionsarbeit [illegible] mit A erhält man:
$$A\,dL = -\,A\,dU = -\,d(AU) \text{ mit } A = \text{const.}$$
d. Größe AU ist bekanntlich d. Wärmewerth d. innern Arbeitsvermögens d. [illegible] für welches d. Gleichung gilt: (Seite 101. Gl. 2)
$$AU = q + y\varrho$$
[illegible] Wärmemenge [illegible] bei $0°C$. [illegible] Setzen wir [illegible] AU ein, so erhält sich:

$$A\,dE = -dq - d(y\varrho)$$

durch Integration bekommt man somit für eine Zustandsänderung endlicher Größe, bei welcher die Pressung von p_1 bis p abnimmt, während die verhältnißmäßige Dampfmenge im Anfange $= y_1$ war:

$$A E = q_1 - q + y_1 \varrho_1 - y \varrho$$

Hierin sind q_1 y_1 und ϱ_1 durch den Anfangszustand gegeben. Wenn die Größe der Expansionsarbeit gegeben ist durch die Pressung p im Endzustand, so sind auch q und ϱ bekannt. Der Werth von y ist nach der Gleichung zu bestimmen:

$$a + y b = a_1 + y_1 b_1$$

woraus:

$$y = \frac{a_1 + y_1 b_1 - a}{b}$$

Es sind somit a_1 b_1 und y_1 wieder bekannte Größen, indem a_1 und b_1 durch t_1 p_1 bestimmt sind, y_1 durch den Anfangszustand gegeben ist und a und b mit p bekannt sein müssen entsprechend der bekannten zwischen a, b und p stattfindenden Functionen.

Auf diese Formeln ist z. B. die Arbeit zu berechnen, welche Dampf in einer Dampfmaschine durch Expansion verrichtet, wenn [illegible] Untersuchung im [illegible] und [illegible] gegen Wärme [illegible] geschützt ist. Jedoch [illegible] außer dem Anfangszustand nicht sowohl die Pressung im Endzustand als vielmehr das Expansionsverhältniß

$$e = \frac{v_1}{v}$$

gegeben zu sein pflegt, ist es wünschenswerth durch eine möglichst einfache Näherungsformel die Expansionsarbeit als unmittelbare Function der mit dem Anfangszustand gegebenen Größen und des Expansionsverhältnisses e ausdrücken zu können. Dieser Zweck ist erreicht, wenn sich die [illegible] durch eine einfache Gleichung $p = f(v)$ unmittelbar zwischen p und v darstellen läßt, denn es ist dann die gesuchte Expansionsarbeit E:

$$E = \int_{v_1}^{v} p\,dv = (\text{mit } p = f(v)) = \int_{v_1}^{v} f(v)\,dv = F(v) - F(v_1)$$

und da $e = \frac{v_1}{v}$ also $v = \frac{v_1}{e}$:

$$E = F\left(\frac{v_1}{e}\right) - F(v_1)$$

Es fragt sich nun noch zu untersuchen, ob sich nicht diese Formel ähnlich derjenigen für Gase ermitteln läßt, welche bekanntlich $p \cdot v^n$ = Const war. Als Formel hat man zunächst Rankine

$$p v^m = \text{Const} = p_1 v_1^m$$

vorgeschlagen. Hierbei wird jedoch der Exponent m nicht ebenso wie früher bei den Gasen constant sein, sondern eine Function des Expansionsverhältnisses e und der den Anfangszustand bestimmenden Größen p_1 und v_1 sein. [illegible] die Gleichung [illegible] als zweckmäßig, [illegible] m [illegible] e p_1 und y_1 [illegible] feststellt, um dafür bei gewissen Gruppen von Aufgaben einen [illegible] constanten Mittelwerth setzen zu können.

Es kommt nun darauf an, den Exponenten m als eine Function von e p_1 und y_1 [illegible] für ein Gemisch von Wasser und Wasserdampf [illegible] mit [illegible] Tabellen, welche die [illegible] Größen unmittelbar als Functionen der Pressung enthalten, am bequemsten, diese Bestimmung zunächst für gegebene Werthe von p p_1 und y_1 auszuführen, wodurch man bei [illegible] Bestimmung der entsprechenden Werthe von e [illegible] auch den Zusammenhang zwischen m und e p_1 y_1 findet.

Es ist nämlich:

$$p\,v^m = p_1\,v_1^m \quad \text{also} \quad \left(\frac{v_1}{v}\right)^m = \frac{p}{p_1} = e^m$$

und daraus $m = \dfrac{\lg \frac{p}{p_1}}{\lg e}$

Hierin ist für Wasser:

$$v = 0{,}001 + x\,u \quad \text{und} \quad v_1 = 0{,}001 + x_1 u_1 \quad \text{und} \quad e = \frac{v_1}{v}$$

Auf diese Weise ergeben sich nun für verschiedene Werte von p_1, x_1, p, welche zwischen solchen Grenzen gewählt werden mussten, [illegible] in einer Tabelle zusammengestellten Werte von x, e und m wie solche in Grashof § 35 aufgestellt sind.

Wenn man nun m auf [illegible] Decimalstellen gefunden hat, so kann man die Werte in die Formel einsetzen:

$$m = \alpha - \beta p_1 + \gamma \lg p_1 + b \lg e.$$

Hierin sind α β γ und b von x_1 abhängig und es ergibt sich mit Hilfe der [illegible] Tabellen ihr Wert mit genügender Genauigkeit aus den Formeln:

$$\alpha = 1{,}0014 + 0{,}1924\,x_1 - 0{,}06\,x_1^2$$
$$\beta = 0{,}0024 - 0{,}002\,x_1$$
$$\gamma = \div 0{,}0852 + 0{,}194\,x_1 - 0{,}09\,x_1^2$$
$$b = -0{,}0495 + 0{,}104\,x_1 \div 0{,}04\,x_1^2$$

Die Genauigkeit dieser Werte ist allerdings [illegible] genügend, denn berechnet man mit ihrer Hilfe für verschiedene Fälle den Exponenten m und vergleicht diese Werte mit den in der [illegible] Tabellen angegebenen, so zeigt sich, dass nur die dritte Decimalstelle [illegible] übereinstimmt.

Diese Formel ist jedoch für die praktische Anwendung zu complicirt. Eine etwas einfachere, wenn auch weniger genaue Formel ist:

$$m = \frac{81{,}95 + 2983\,(1-x_1)^2 + \lg p_1}{72{,}20 + 2705\,(1-x_1)^2 - \lg e}$$

Die hieraus berechneten Werte von m zeigen mit denen aus den [illegible] Tabellen entnommenen [illegible] eine Abweichung von 2 Einheiten in der 3ten Decimalstelle.

Will man sich mit einer weniger genauen Annäherung begnügen, so kann man bemerken, dass der Exponent m in geringem Grad von p_1 und e, aber von x_1 abhängt, so dass es [illegible] einer [illegible] Annäherung als Function von x_1 allein dargestellt werden kann. Diese [illegible] Function ist:

$$m = 1{,}035 + 0{,}1\,x_1$$

die welche die Werte von m von denen in den [illegible] Tabellen um höchstens eine Einheit in der 2ten Decimalstelle abweichen.

Wenn man nun auf diese Weise den Exponenten m in der [illegible] Zustandsgleichung:

$$p\,v^m = \text{const.} = p_1 v_1^m$$

den Umständen entsprechend für eine Gruppe von Aufgaben angemessen bestimmt hat, so können auch [illegible] Mittheilung oder Entziehung von Wärme stattfindende Zustandsänderung der im [illegible] befindlichen Gemisches ohne Weiteres die für die einfachen Zustandsänderungen [illegible] Gesetz gefundenen Formeln angewendet werden, natürlich nur insoweit in denselben die Temperatur nicht vorkommt, indem deren Beziehungen zu p und v bei Gasen und Dämpfen wesentlich verschieden sind. Wenn also außer dem Anfangszustand noch [illegible] Expansionsverhältniss:

$e = \dfrac{v_1}{v}$ gegeben ist, so folgt nach dem Früheren:

die Expansionsarbeit per 1 kg des vorliegenden Gemisches:

$$E = \frac{p_1 v_1}{m-1}\left(1 - e^{m-1}\right)$$

und ermittelt man aus der vorausgesetzten Zustandsgleichung $pv^m = p_1 v_1^m = p_1\left(\frac{v_1}{e}\right)^m$ mit $v = \frac{v_1}{e}$ die Spannung im Endzustand:

$$p = \frac{p_1 v_1^m}{v^m} = p_1 e^m .$$

Durch die Spannung p im Endzustand sind dann auch die übrigen davon abhängigen Größen [illegible] Größe Δ bestimmt.
Es bleibt also nur noch übrig die entsprechende Dampfmenge y für den Endzustand zu bestimmen. Dies kann ebenfalls geschehen mit Hilfe der Zustandsgleichung:

$$v = w + y\Delta \quad \text{wobei } v = \frac{v_1}{e}$$

$$\frac{v_1}{e} = w + y\Delta$$

$$\text{Also } y = \frac{\frac{v_1}{e} - w}{\Delta}.$$

Mit Hilfe dieser 3 Formeln findet man demnach die Expansionsarbeit E per 1 kg des Gemisches sowie die den Endzustand charakterisierenden Größen p und y.

Handelt es sich nun um Compression statt um Expansion, so kann man auch dieselben Formeln beibehalten, nur kann man aber nicht den Exponenten m direkt aus den bekannten [illegible] Formeln entnehmen, man müsste vielmehr [illegible] Tabellen [illegible] Berechnungen [illegible] Werte der Größen p, y und $\frac{1}{e}$ darzustellen. Indessen ist diese Aufgabe von ganz geringer Wichtigkeit und daher nicht noch genauer ausgeführt.
Die zur Compression per 1 kg aufzuwendende Arbeit ist natürlich nach oben:

$$-E = \frac{p_1 v_1}{m-1}\left(e^{m-1} - 1\right)$$

Um in diese Formel einen passenden Wert von m einzuführen kann man zunächst versuchsweise einen vermutlich richtigen Wert von m nehmen und mit dessen Hilfe nach obigen Formeln y und p berechnen und dann nachsehen ob die für m aufgestellten Formeln, in welche diese Werte p und y für p_1 und y_1 sowie $\frac{1}{e}$ für e zu setzen sind, die Richtigkeit des angenommenen Wertes von m zeigen.
Wie schon erwähnt ist diese Aufgabe jedoch für die Anwendung von ganz untergeordneter Bedeutung.

Nachdem nun im Vorhergehenden die technisch interessantesten und wichtigsten Fälle von Zustandsänderungen behandelt worden sind, ist noch ein Fall übrig zu besprechen, nämlich betreffend die Zustandsänderungen eines Gemisches zweier verschiedener Dämpfe und Flüssigkeitsgemische ungleicher Art. Ein solches Gemisch kommt bei den technischen Anwendungen nicht häufig, unter Anderem aber bei Dampfmaschinen vor, indem da [illegible] immer bei jedem Hub eine gewisse Dampfmenge zum Teil [illegible] mit [illegible] Flüssigkeitsteilchen [illegible] in einen anderen Zustand übergeht [illegible] Gemisch entsteht, dessen Zustandsänderungen nun näher besprochen werden sollen.

Mischung zweier Dampf- und Flüssigkeitsgemische von gleicher Art und verschiedenem Zustande.

Die allgemeine Aufgabe für einen solchen Fall ist nun folgende:

Man denke sich 2 Gefäße; das eine enthält m_1 kgr eines Gemisches von gesättigtem Dampf und gleichartiger Flüssigkeit, das Volumen sei $= V_1$, d. Pressung d. Gemisches $= p_1$ und d. verhältnismäßige Dampfmenge $= y_1$. Im 2ten Gefäße vom Volumen V_2 seien m_2 kgr eines Gemisches von Dampf und Flüssigkeit derselben Art wie im 1ten Gefäß aber in einem anderen Zustand, indem d. Pressung $= p_2$ und d. verhältnismäßige Dampfmenge $= y_2$ ist.

Ist nun eine Communication zwischen beiden Gefäßen hergestellt, so tritt offenbar eine Mischung ein, indem aus dem Gefäße, in welchem d. Pressung größer ist, ein Überströmen gegen das andere Gefäß stattfindet. Dieser Vorgang, offenbar eine nicht umkehrbare Zustandsänderung darstellend, läßt sich während seines Verlaufs einer rechnungsmäßigen Untersuchung nicht unterziehen. Dagegen läßt sich ziemlich leicht bestimmen den resultierenden Endzustand, welchen d. Masse in den vereinigten Gefäßen angenommen haben wird, nachdem d. Strömung aufgehört hat und sich ein Zustand d. Ruhe, eine gleichförmige Mischung gebildet hat. Dieser Endzustand ist bestimmt durch ~~p und y~~ d. Pressung $= p$ und d. Dampfmenge $= y$ in 1 kgr d. resultierenden Gemisches. Ist d. Flüssigkeitsteilchen fein im Dampfe verteilt, so stellt sich innerhalb beider Gefäße ein vollkommen gleichförmiges Gemisch her, so daß auch y = d. spec. verhältnismäßige Dampfmenge gelten kann. Hat sich aber in beiden Gefäßen am Boden verschiedene Mengen der Flüssigkeit gesammelt, so kann offenbar y nur als d. mittlere spec. verhältnismäßige Dampfmenge gelten.

Q sei d. Wärmemenge, welche während d. Mischungsvorganges etwa von außen durch d. Wand d. Gefäße hindurch d. Masse mitgeteilt wird, oder einem negativen Wert von Q eine Entziehung von Wärme während d. Vorganges entsprechen soll.

Es handelt sich also nun zunächst darum 2 Gleichungen aufzustellen, mit deren Hilfe man die unbekannten Größen p und y und mithin d. Endzustand bestimmen kann.

Zu dem Ende kann man bemerken daß d. Volumen V_1 d. ersten Gefäßes vor d. Herstellung d. Communication war:

$$V_1 = m_1 \text{ (spec. Volumen d. Gewichtseinheit d. Gemisches)}$$

d. Volumen d. Gewichtseinheit d. Gemisches im ersten Gefäße ist aber nach d. allgemeinen Formel:

$$v = w + y_1 \Delta_1 \quad \text{und demnach:}$$

$$V_1 = m_1 (w + y_1 \Delta_1)$$

Ebenso war im 2ten Gefäße vor d. Communication d. Volumen:

$$V_2 = m_2 (w + y_2 \Delta_2)$$

Nachdem d. Communication stattgefunden und Ruhe eingetreten war, befinden sich in den beiden communicierenden Gefäßen: $(m_1 + m_2)$ kgr d. resultierenden Gemisches, dessen spec. Volumen gemäß d. allgemeinen Formel: $v = w + y\Delta$ ist. Das unverändert gebliebene Gesamtvolumen $V_1 + V_2$ d. beiden Gefäße ist also:

$$V_1 + V_2 = (m_1 + m_2)(w + y\Delta)$$

Vergleichen obigen Formeln ab nun: →

$$U_1 + U_2 = m_1(w + y_1 \Delta_1) + m_2(w + y_2 \Delta_2)$$

und daraus eine erste Gleichung zur Bestimmung von p und y:

$$(m_1 + m_2)(w + \Delta y) = m_1(w + y_1 \Delta_1) + m_2(w + y_2 \Delta_2)$$

9 . . . . oder: $(m_1 + m_2) y \Delta = m_1 y_1 \Delta_1 + m_2 y_2 \Delta_2$

Um nun eine 2te Gleichung zur Bestimmung von p u. y zu finden, soll d. allgemeine Gleichung d. Arbeitsvermögens für jede d. beiden Gemische angewendet werden [illegible]. Diese allgemeine Gleichung war:

$$d(L + U) = dM + dD + W dQ$$

Sie drückt aus, daß bei einer unendlich kleinen Zustandsänderung d. Summe d. Arbeitsvermögens bestehend aus d. Summe d. lebendigen Kraft und d. inneren Arbeitsvermögens, zusammengesetzt ist aus d. Summen d. Massenkräfte, d. äußeren Drucke und d. Arbeitswerthes d. mitgetheilten Wärme. Sehen wir allgemein in d. vorliegenden Fällen von d. Schwerkraft, als besonders in Betracht kommende Massenkraft ab [illegible], indem dieselbe einen [illegible] Einfluß haben [illegible], so ist zu setzen:

$dM = 0$ und es bleibt:

$$d(L + U) = dD + W dQ.$$

Wendet man nun diese Gleichung [illegible] Gemische an und integrirt dieselbe über den ganzen Verlauf d. gegenseitigen Mischung, so ist offenbar $\int dL = 0$, indem im Anfangszustand und im Endzustand Ruhe stattfindet also d. resultirende Änderung d. lebendigen Kraft $= 0$ ist.
Bezeichnet man also mit ΔU_1 d. Änderung d. inneren Arbeitsvermögens d. 1sten Gemisches, so ist diese:

$$\Delta U_1 = D_1 + W Q_1$$

unter D_1 u. Q_1 d. Arbeit d. äußeren Drucke und d. während d. Mischungsprozesses mitgetheilten Wärmemenge verstanden, welche Wärmemenge theils von Außen theils von dem anderen Gemisch [illegible].
Ebenso ist auch d. Änderung ΔU_2 d. inneren Arbeitsvermögens d. 2ten Gemisches, wenn D_2 und Q_2 d. Arbeit äußerer Drucke und die während d. Mischungsprozesses auf d. 2te Gemisch mitgetheilte Wärmemenge bedeuten:

$$\Delta U_2 = D_2 + W Q_2$$

Beide Gleichungen addirt giebt d. Änderung d. inneren Arbeitsvermögens d. resultirenden Gemisches. In dieser Summe ist aber offenbar $D_1 + D_2 = 0$, denn da d. Gefäßwände [illegible] sind, so können d. Arbeiten d. äußeren Drucke nur von dem gegenseitigen Druck zwischen beiden beiden Gemischen herrühren, im schließlichen Endzustand d. Ruhe halten sich diese Drucke aber [illegible] d. Gleichgewicht, woraus auch folgt, daß d. Summe ihrer Arbeiten $= 0$ sein muß.
Was nun d. Summe $Q_1 + Q_2$ betrifft, so ist diese theils von d. außen während d. Mischungsprozesses mitgetheilten Wärmemenge Q und theils von dem gegenseitigen Wärmeaustausch d. beiden Mischungen [illegible]. Da diese vom gegenseitigen Wärmeaustausch d. beiden Gemische herrührenden Bestandtheile von Q_1 und Q_2 sich [illegible] entgegengesetzt [illegible], so ist $Q_1 + Q_2 = Q$ und [illegible]
d. Änderung d. inneren Arbeitsvermögens d. resultirenden Gemisches ist also:

$$\Delta(U_1 + U_2) = QW \text{ od.: } \Delta(AU_1 + AU_2) = Q$$

mit $W = \frac{1}{A}$.

In diesem Ausdruck ist offenbar $\Delta U_1 + \Delta U_2$ d. ges. Energiezunahme od. d. Wärmemenge, welche [illegible] beider Gemische zusammen, beim Übergang bis d. Mischungstemperatur [illegible] aufzustellenden Formel = d. mitzuteilenden Wärme Q ist.

Allgemein ist aber d. ges. Energiezunahme eines solchen vorliegenden Gemisches aus Dampf und Flüssigkeit auszudrücken:

$$\Delta U = q + x\varrho$$ unter q d. Wärmemenge verstanden, welche dazu erforderlich wird, 1 kg Flüssigkeit [illegible] bei konstantem Druck von 0 bis t^{o} zu erwärmen und unter ϱ d. spez. innere Verdampfungswärme verstanden.

Dieser Formel entsprechend ist nun demnach d. Gesamtenergiezunahme od. Gesamtwärmemenge [illegible] beider Gemische zusammengenommen:

Im Anfangszustand: $= m_1(q_1 + x_1\varrho_1) + m_2(q_2 + x_2\varrho_2)$
und im Endzustand: $= (m_1 + m_2)(q + x\varrho)$

Beide sollen aber nach vorigem um Q verschieden sein, woraus sich ergibt:

$$(m_1 + m_2)(q + x\varrho) = m_1(q_1 + x_1\varrho_1) + m_2(q_2 + x_2\varrho_2) + Q$$

In diesen beiden Bestimmungsgleichungen für p und x sind q, ϱ und Δ bekanntlich [illegible] Funktionen von p, welche schon früher entwickelt wurden und in den Tabellen [illegible] zusammengestellt wurden. Wenn man nun mittelst d. einen Gleichung eine Unbekannte z.B. x eliminiert, so bleibt noch eine Gleichung zur Bestimmung von p übrig, woraus freilich p nur durch Probieren gefunden werden kann, indem d. Größen q, ϱ und Δ zu [illegible] Funktionen sind [illegible] Gleichung zu entwickeln. Hat man p gefunden, so braucht man nur diesen Wert in eine Gleichung [illegible] Bestimmungsgleichung einzusetzen um x zu bestimmen, womit dann auch d. Endzustand d. resultierenden Gemisches gefunden ist.

Für d. technischen Anwendungen sind besonders [illegible] Fragen von Wichtigkeit und zwar d. folgende:

Wenn [illegible] $Q = 0$ und $p_1 > p_2$ vorausgesetzt wird, wie groß ist dann diejenige Wärmemenge Q_1 resp. Q_2, welche [illegible] Gemische [illegible] mitgeteilt resp. entzogen werden müßte, um ihre Spannung von p auf p_1 zu erhöhen resp. bis p_2 zu vermindern.

Der hierbei stattfindende Vorgang ist ein solcher, wie er früher [illegible] untersucht ist, es ist nämlich eine Zustandsänderung eines Gemisches von Dampf und Flüssigkeit bei konstantem Volumen. Sind demnach nun im Allgemeinen d. Wärmemenge Q angeben, welche ~~[illegible]~~ 1 kg d. Gemisches mitgeteilt werden müßte um bei konstantem Volumen d. Spannung von p_1 auf p zu bringen; wenn nämlich d. Anfangszustand d. Gemisches durch $(p_1 v_1)$ [illegible] ist, so ist diese Wärmemenge:

$$Q = q - q_1 + x_1\Delta_1\left(\frac{\varrho}{\Delta} - \frac{\varrho_1}{\Delta_1}\right)$$

Wendet man diese Formel auf d. vorliegenden Fall an, wo d. Spannung bei konstantem Volumen $V_1 + V_2$ von p auf p_1 gebracht werden soll, so ist d. fragliche Wärmemenge Q_1, welche im Gesamten dazu erforderlich ist:

$$Q_1 = (m_1 + m_2)(\text{Wärmemenge pro 1 kg})$$

Die für 1 kg erforderliche Wärmemenge erhält [illegible] aus d. obigen Formel, indem man nur d. mit d. Index 1 versehenen Buchstaben mit d. ohne Index versehenen Buchstaben vertauscht. Man hat also:

$$Q_1 = (m_1 + m_2)\left[q_1 - q + x\Delta\left(\frac{\varrho_1}{\Delta_1} - \frac{\varrho}{\Delta}\right)\right]$$

oder:

$$\Theta_1 = (m_1 + m_2)\left[q_1 - q + \gamma \Delta \frac{\rho_1}{\Delta_1} - \gamma \rho\right]$$

Setzt man in diese Gleichung die sich aus Gleich 1 und 2) ergebenden Werte für $\Delta \gamma$ und $q + \gamma\rho$, so erhält man:

$$\Theta_1 = (m_1 + m_2)\left[q_1 - q + \frac{m_1 \gamma_1 \Delta_1 + m_2 \gamma_2 \Delta_2}{m_1 + m_2} \frac{\rho_1}{\Delta_1} - \frac{m_1(q_1 + \gamma_1 \rho_1) + m_2(q_2 + \gamma_2 \rho_2)}{m_1 + m_2}\right]$$

$$= m_2 q_1 + m_1 \gamma_1 \rho_1 + m_2 \gamma_2 \Delta_2 \frac{\rho_1}{\Delta_1} - m_1 \gamma_1 \Delta_1 - m_2(q_2 \overset{+q}{} + \gamma_2 \rho_2)$$

$$\Theta_1 = m_2\left[q_1 - q_2 + \gamma_2 \Delta_2\left(\frac{\rho_1}{\Delta_1} - \frac{\rho_2}{\Delta_2}\right)\right]$$

Vergleicht man diesen Ausdruck mit dem allgemeinen, welcher die Wärmemenge ergibt, welche 1 kg eines Gemisches von Flüssigkeit und Dampf mitgeteilt werden muss, um dessen Verdichtung bei constantem Volumen von ρ_1 auf ρ zu erhöhen, so ist leicht ersichtlich, dass dieses Θ_1 diejenige Wärmemenge, welche erforderlich ist, um die Verdichtung des [illegible] Gemisches bei constantem Volumen von ρ auf ρ_2 zu erhöhen, gleich ist der Wärmemenge, welche der Masse m_2 des 2ten Gemisches vor der Mischung mit dem ersten Gemisch hätte mitgeteilt werden müssen, um ihre Verdichtung von ρ_2 auf ρ_1 zu erhöhen.

Ebenso lässt sich zeigen, dass [illegible] für Θ_2, indem die obige Formel entsprechend diese Wärmemenge Θ_2, welche dem resultierenden Gemisch bei constantem Volumen entzogen werden muss, um seine Verdichtung von ρ auf ρ_2 zu vermindern, gleich ist derjenigen Wärmemenge, welche der Masse m_1 der ersten Mischung vor der [illegible] hätte entzogen werden müssen, um ihre Verdichtung bei constantem Volumen V_1 von ρ_1 bis ρ_2 zu vermindern.

also $\Theta_2 = m_1\left[q_1 - q_2 + \gamma_1 \Delta_1\left(\frac{\rho_1}{\Delta_1} - \frac{\rho_2}{\Delta_2}\right)\right]$

Ueberhitzter Dampf.

Wie schon früher erwähnt, sind die bekannten Zustände der Gase und die gesättigten Dämpfe Grenzzustände der überhitzten Dämpfe, indem dem ersteren eine unendlich große und dem letzteren eine verschwindend kleine Ueberhitzung entspricht. In der That sind die in den technischen Anwendungen in Gebrauch kommenden Dämpfe meistens immer mehr oder weniger überhitzt, so daß natürlich auch von besonderer Wichtigkeit ist, das Verhalten überhitzter Dämpfe allgemein zu untersuchen. Um diese Untersuchung unter beliebig gegebenen Umständen also mit Hülfe der allgemeinen Formeln der mechanischen Wärmetheorie durchführen zu können, muß man natürlich die Zustandsgleichung der Dämpfe kennen, d. h. die Beziehung zwischen dem spec. Volumen v, der Pressung p und der Temperatur t resp. der absoluten Temperatur $T = 273 + t$. Jedenfalls muß diese Beziehung, wenn sie allgemein für den ganzen Umfang des Zustandsgebietes vom Zustand der Sättigung bis zu dem entgegengesetzten Grenzzustand des Gaszustandes gelten soll, so beschaffen sein, daß sie bei den beiden Grenzzuständen in die schon bekannten Beziehungen zwischen v p und t resp. T übergeht.

Um diese allgemeine Zustandsgleichung für überhitzte Dämpfe aufzustellen, muß man sich nun erst nach den zur Zeit bestehenden verhältnißmäßig geringen Grundlagen umsehen. Die Erfahrung möglichen Thatsachen betreffen zunächst die Frage, in welchem Maße die überhitzten Dämpfe mehr oder weniger von den Mariotte'schen und Gay-Lussac'schen Gesetzen abweichen, welche Untersuchungen bis jetzt namentlich von Regnault hauptsächlich auch nur für solche Zustände näher untersucht worden sind, welche dem Grenzzustand der Sättigung nicht nahe kommen. Was nun diese Art der Abweichungen der Dämpfe von den festgestellten beiden Gesetzen betrifft, so sei:

$p_0\ v_0\ t_0$ die Pressung, das spec. Volumen und die Temperatur eines Dampfes für irgend einen Zustand
und $p_1\ v_1\ t_1$ " " " " " " " " " " " einen andern " ;

Setzt man nun:

$$m = \frac{v_1}{v_0} \quad \text{für } t_1 > t_0 \text{ und } p_1 = p_0$$

$$m_1 = \frac{p_1}{p_0} \quad \text{für } t_1 > t_0 \text{ und } v_1 = v_0$$

$$n = \frac{p_1 v_1}{p_0 v_0} \quad \text{für } t_1 = t_0 \text{ und } v_1 > v_0 \text{ also } p_1 < p_0$$

so sollte, wenn die Dämpfe nach den Mariotte'schen und Gay-Lussac'schen Gesetzen folgen sollten, sein:

$$m_0 = m_1 = \frac{T_1}{T_0} \quad \text{und} \quad n = 1$$

und zwar unter allen Umständen, denn wenn die Dämpfe den beiden Gesetzen vollkommen folgen sollen, so müsste auch ihre Zustandsgleichung ganz die nämliche sein wie diejenige für Gase, welche bekanntlich war:

$$pv = RT \quad \text{unter } R \text{ eine Constante verstanden.}$$

Es müßte also die Beziehung stattfinden:

$$\frac{p_1 v_1}{p_0 v_0} = \frac{T_1}{T_0} \quad \text{daraus ergiebt sich:}$$

$$\left.\begin{array}{ll} \text{für } p_1 = p_0 & \dfrac{v_1}{v_0} = m = \dfrac{T_1}{T_0} \\ \text{für } v_1 = v_0 & \dfrac{p_1}{p_0} = m_1 = \dfrac{T_1}{T_0} \end{array}\right\} \quad \begin{array}{l} \text{und für } t_1 = t_0 \text{ also } T_1 = T_0 \\ \dfrac{p_1 v_1}{p_0 v_0} = n = 1. \end{array}$$

In Wirklichkeit ergeben aber d. Versuche von Regnault, daß dies Minimum nicht d. Fall ist, indem schon solche [illegible] Werthe, welche man gewöhnlich ohne Verhalten auch zu den Gasen zählt, schon [illegible] zeigten [illegible] überhitzte Dämpfe. Es fand sich nämlich, daß m und m_1 immer $> \frac{c_1}{c_0}$ und auch noch $m > m_1$ sich stellt:

$$m > m_1 > \frac{c_1}{c_0}$$

und zwar fanden diese Ungleichheiten um [illegible] statt, je größer [illegible], bei übrigens gleichen gegebenen Werthen von t_0 und t_1, indem d. Versuche, aus denen diese Resultate gezogen sind, sich immer auf 2 bestimmte Temperaturen, nämlich $t_0 = 0°$ und $t_1 = 100°C$ bezogen.

Ferner ergab sich, daß d. Verhältniß n nicht immer $= 1$ sondern daß n stets mehr oder weniger > 1 und zwar um so mehr je größer p_0 und je größer $p_0 - p_1$ waren. Die Abweichungen d. Dämpfe von dem [illegible] Gesetze finden also in einem um so größeren Maaßstabe statt, je größer d. Spannung wird, d. h. je mehr sich d. Dämpfe dem gesättigten Zustand nähern.

Leider sind d. erwähnten Versuche nur nicht auf Wasserdampf [illegible], der doch von besonderer Wichtigkeit ist, ausgedehnt, so daß man [illegible] diese erhaltenen Angaben auch nicht als Grundlage für [illegible] d. Ableitung allgemeiner Formeln verwenden kann. Zwar haben verschiedene Experimentatoren [illegible] verschiedene überhitzte Dämpfe und speciell d. überhitzten Wasserdampf untersucht, indessen sind d. Angaben, welche [illegible] in den betreffenden Schriften gemacht sind, durchaus nicht übereinstimmend, indem dieselben sich in hohem Grade widersprechen.

Andere Versuche zur Aufstellung d. allgemeinen Zustandsgleichung für Dämpfe sind hinsichtlich d. spec. Wärme c_p bei constantem Drucke angestellt worden und namentlich wurde von Regnault diese Größe c_p für eine große Zahl von Dämpfen bestimmt werden. Ob und nach welchem Gesetze aber diese Größe c_p mit dem Zustand d. betreffenden Dampfes sich ändert, ist freilich mit Sicherheit noch nicht aufgeklärt. Am wichtigsten wäre es natürlich sein dieses Verhalten für den technisch wichtigen Wasserdampf zu untersuchen. Allerdings ist die spec. Wärme c_p bei constantem Drucke für Wasserdampf auch für verschiedene Temperaturen ermittelt worden, so daß man mit ziemlicher Genauigkeit einen Mittelwerth für c_p ableiten kann. So hatte Regnault früher als Mittelwerth für c_p gefunden: $c_p = 0{,}475$.

Nach späteren Versuchen fand er aber im Mittel: $c_p = 0{,}4805$ für $t = 128° - 216°C$.

Natürlich kann in dieser Beziehung auch nur vorläufig festgestellt werden, daß dieser Werth immer nur ein Mittelwerth für d. spec. Wärme c_p bei constantem Drucke ist, wie sich die letztere aber mit d. Änderungen d. Zustandes d. Wasserdampfes ändert, muß auch dahin gestellt bleiben, indem die von Regnault angenommenen Temperaturintervalle, aus denen er den Mittelwerth $0{,}4805$ fand, zu wenig unter sich verschieden sind, als daß diese Versuche über eine etwaige Veränderlichkeit d. spec. Wärme c_p d. Wasserdampfes mit d. [illegible] seines Zustandes irgend einen Aufschluß gewähren könnten.

Unter d. Verhalten d. Wasserdampfes [illegible] ferner [illegible] besonders [illegible] Versuchsreihen von Hirn in Cassel [illegible]. Derselbe bestimmte nämlich d. spec. Volumen v d. Wasserdampfes direct durch Wägungen und zwar für verschiedene Spannungen p und Temperaturen t, welche Resultate [illegible] 837 zusammengestellt sind. [illegible] größten Theils [illegible] diese durch directe Wägungen gefundenen Größen d. spec. Volumens v freilich auch nicht [illegible], indem d. [illegible] Wägungen sehr schwierig zu beschaffen sind und dem zufolge keine [illegible] Versuchsfehler damit verbunden sein können.

Einen weit [illegible] Werth haben jedenfalls d. späteren in Gemeinschaft mit Cazin von Hirn angestellten Versuche und deren Resultate. Diese letzteren Versuche, welche später besonders zu [illegible] gelegt werden sollen, um d. allgemeine Zustandsgleichung d. Dämpfe zu bestimmen, beziehen sich auf d. Zustandsänderungen von Dämpfen und speciell überhitzten Dämpfen, vermöge welcher [illegible] daß ohne Mittheilung od. Entziehung von Wärme, welche Zustandsänderungen wie schon früher erwähnt von besonderer technischer Wichtigkeit sind.

Diese Versuche stellten sich d. Aufgabe d. Beziehung zu finden welche zwischen d. Temperatur t_1 und Spannung p_1 [illegible] Anfangszustand und zwischen d. Spannung p_2 und Temperatur t_2 in einem Endzustand d. [illegible] Zustandsänderung nach [illegible] Curve stattfinden. Die Resultate wurden in folgender Weise gefunden:

Als Behälter zur Aufnahme d. Versuchsgases wurden bei diesen Versuchen zwei cylindrische Gefäße aus Kupfer genommen, deren ebenfalls kupferne Böden in d. Mitte mit Öffnungen versehen waren, die jedoch mittelst Glasplatten geschlossen wurden, so daß man zur Beobachtung d. Vorgänge im Innern d. Gefäßes durch d. Platten in d. Richtung seiner Axe hindurchsehen konnte, wobei außerdem zur größeren Helligkeit an d. einen Glasplatte ein [illegible] weißer Schirm gestellt wurde. Dieser kupferne Cylinder wurde nun mit einem gewöhnlichen Dampfkessel in Verbindung gesetzt, aus welchem man Dampf von bekannter Spannung in d. Gefäß einströmen [illegible]. Dieser Dampf wurde nun auf eine gewisse Temperatur [illegible] d. Gefäß in ein Ölbad von d. [illegible] Temperatur gebracht wurde, [illegible] d. Gefäßes und [illegible] d. Dampfes bewirkt. Angenommen es sei nun in irgend einem Augenblick d. Temperatur t_1 und d. Spannung p_1 d. im Gefäß befindlichen Dampfes, welche Größen man mit Hilfe eines im Ölbad hängenden Thermometers und eines mit d. Gefäß verbundenen Manometers beobachten kann, unmittelbar darauf wurde d. Communication mit d. Dampfkessel geschlossen und dafür eine möglichst weite Öffnung d. Gefäßes mit d. [illegible] Luft hergestellt, so daß ein Theil d. [illegible] Dampfes entströmt. Die Öffnung muß [illegible] so groß genommen werden, damit d. Ausströmen möglichst rasch vor sich geht und also nur eine kurze Zeit in Anspruch nimmt, bis d. Spannung p_1 im Innern d. Gefäßes bis auf d. [illegible] Spannung p_2 herabsinkt. [illegible] dieser Ausgleich stattgefunden, wird d. Öffnung wieder geschlossen. Die bei diesem Vorgang stattfindende Zustandsänderung [illegible] eine Zustandsänderung nach d. adiabatischen Curve angesehen [illegible] Mittheilung [illegible] Wärme, indem während d. sehr kurzen Zeit [illegible] d. Öffnens und Ausströmens nur eine [illegible] Wärmemenge vom Ölbad durch d. Gefäßwandungen hindurch gelangen [illegible] d. Dampfe mitgetheilt werden kann.

[illegible] d. Temperatur t_2 [illegible] zu ermitteln unmittelbar nach d. Öffnung und d. Ausströmen d. Dampfes [illegible] d. Spannung [illegible] Spannung p_2 gesunken war, um dann 2 zusammengehörende Werthe von p und t zu bekommen. Mittelst [illegible] d. im Ölbad befindlichen Thermometers [illegible] eines [illegible] d. Gefäß hineinreichenden Thermometers ist dies natürlich nicht zu [illegible], indem ein solches viel zu langsam d. Temperaturwechsel folgt. Könnte man es aber so einrichten, daß d. überhitzte Dampf nach dem Ausströmen im Gefäße gerade in d. Zustand d. Sättigung übergegangen [illegible], [illegible] mit Wasser [illegible], so könnte man d. Temperatur t_2 im Sättigungspunkt leicht bestimmen, indem [illegible] d. bekannten Beziehungen zwischen d. Temperatur und Spannung eines gesättigten Dampfes d. Temperatur [illegible] Spannung bestimmt [illegible] d. [illegible] Spannung p_2 d. Dampfes kann man aber mittelst d. Manometers beobachten und damit [illegible] d. Temperatur t_2 [illegible] Tabellen [illegible].

Diese Methode wurde nun von Hirn und Cazin angewendet. Bei [illegible] Versuchen, derselben Anfangstemperatur t_1, nämlich derselben Temperatur d. Ölbades entsprechend, wurde man [illegible] d. anfängliche Spannung p_1 [illegible] so lange [illegible], bis der nach d. Ausströmung zurückbleibende Dampf gerade gesättigt war, [illegible] werden konnte, [illegible] einer [illegible] größeren Anfangsspannung, [illegible] geringeren [illegible] Nebel [illegible] im Innern d. Gefäßes zeigten, während bei kleineren Anfangsspannung d. Gefäß vollkommen durchsichtig blieb. Diese Versuche hat man nun für verschiedene Temperaturen und Spannungen [illegible] und damit d. entsprechenden Werthe von p_1 t_1 p_2 t_2 [illegible], wie sie in Tabelle 37 zusammengestellt sind.

Nimmt man die [illegible] 10 Gruppen von zusammengehörenden Werthen von p_1 t_1 p_2 t_2 mit einander [illegible], so findet man, daß dieselben [illegible] folgenden Gesetz entsprechen:

$$\frac{\delta_1}{\delta_2} = \left(\frac{p_1}{p_2}\right)^x$$

, denn wenn man nämlich d. Exponenten x entsprechend d. 10 Gruppen berechnet, so ergeben sich für x in allen 10 Fällen [illegible] Resultate, [illegible] dieselben nur [illegible], daß man d. [illegible] Unterschied den Versuchsfehlern zuschreiben kann. Es ergibt sich nämlich $x = 0{,}233 - 0{,}237$ zwischen welchen Werthen x in 9 Fällen [illegible] und nur in einem Falle wird d. Grenze 0,237 [illegible] überschritten, nämlich für $p_1 = 1{,}685$ Atm. wird $x = 0{,}2437$. Im Mittel [illegible] x [illegible] $= 0{,}236$ [illegible].

Mit Rücksicht darauf aber, daß bei den praktischen Versuchen bei d. angewandten Dampfe mitgetheilte Wärme Q nicht genau = 0 [illegible], wenn auch sehr klein war, indem während d. Ausströmungszeit [illegible] eine kl. Wärmemenge hinzukommt, so [illegible] t_2 etwas kleiner als es im Falle $Q = 0$ unter übrigens gleichen Umständen (bei denselben Werthen von p_1 und p_2) hätte sein müssen; also daß x etwas zu klein berechnet, somit x etwas zu klein gefunden wurde, und zwar um so mehr zu klein, je größer p_1 also t_1 war, [illegible] Wärme [illegible] bei den [illegible] der angewandten Dampfe, [illegible] d. [illegible] von Q [illegible] $t_1 - t_2$ [illegible], mitgetheilt werden müßte. [illegible] dem [illegible] x [illegible] mit p_1 [illegible] Werth beilegen.

Die hier mitgetheilten Versuchsergebnisse sind nun ein [illegible] Material, [illegible] überhitzten Dampfe [illegible] bis jetzt noch nicht genügendes Material liefert, um mit Sicherheit d. Zustandsgleichung d. überhitzten Dampfe allgemein aufzustellen.

Diesen Erfahrungsthatsachen entsprechend kann man eine Menge Zustandsgleichungen aufstellen, deren Coefficienten dann d. erforderlichen Aufgaben entsprechend gut angepaßt werden müssen. Bei d. Bestimmung d. Form d. Zustandsgleichung kann man sich aber auch von gewissen Zweckmäßigkeitsgründen leiten lassen. Es ist nämlich zu berücksichtigen, daß d. Zustand eines Dampfes in d. Praxis meistens durch seine Spannung und seine Temperatur gegeben ist, indem diese Größen mit Hilfe d. Manometer und Thermometer leicht bestimmt werden können. Es wäre daher wünschenswerth, die Zustandsgleichung so einzurichten, daß man die unbekannte Größe, das Volumen etc. mit d. gegebenen Spannung und Temperatur berechnen kann. Zweitens kann man sich auch [illegible] leiten lassen, [illegible] Zustandsänderungen [illegible] nach d. adiabatischen Curve, als ohne Mittheilung od. Entziehung von Wärme d. [illegible] ist, so würde es zweckmäßig d. Zustandsgleichung eine solche Form zu geben, daß dieselbe bei Anwendung auf eine Zustandsänderung nach d. adiabatischen Curve eine möglichst einfache Gestalt annimmt.

Übrigens muß d. Zustandsgleichung auch eine solche Form haben, welche d. allgemeinen Formeln d. mechanischen Wärmetheorie entspricht. Diese Formeln bestanden nämlich aus 3 Ausdrücken für d. Wärmemenge dQ, welche einem Körper pr. 1 kg behufs einer unendlich kleinen Zustandsänderung mitgetheilt werden muß, nämlich:

1 $$dQ = c_p \frac{\partial\tau}{\partial v}\,dv + c_v \frac{\partial\tau}{\partial p}\,dp$$

2 $$dQ = c_v\,d\tau + A\tau \frac{dp}{d\tau}\,dv$$

3 $$dQ = c_p\,d\tau - A\tau \frac{dv}{d\tau}\,dp$$

Welche Gleichungen zur Bestimmung von dQ erh. benutzt werden, je nachdem d. Zustandsänderung durch unendl. kl. Änderungen von v u. p, v u. t resp. τ, p u. t resp. τ gegeben ist.
c_p und c_v bedeuten dann d. spez. Wärme bei constantem Druck resp. bei constantem Volumen;
A = Wärmewerth d. Arbeitseinheit und τ = absolute Temperatur $= 273 + t$.
Außer diesen wurden früher noch 2 allgemeine Beziehungen zwischen d. Größen p v u. t aufgestellt, welche mit d. Namen d. beiden Hauptgleichungen d. mechanischen Wärmetheorie bezeichnet wurden, nämlich:

4 $$A = \frac{\partial}{\partial p}\left(c_p \frac{\partial\tau}{\partial v}\right) - \frac{\partial}{\partial v}\left(c_v \frac{\partial\tau}{\partial p}\right)$$

5 $$A\tau = (c_p - c_v)\,\frac{\partial\tau}{\partial v}\,\frac{\partial\tau}{\partial p}$$

Es ist also nur d. Aufgabe d. Zustandsgleichung d. Dampfes so zu entwickeln, daß sie diesen allgemeinen Formeln Rechnung trägt, denn es muß der allgemein bekannten Erfahrungsthatsachen entspricht und außerdem auch d. experimentellen Ergebnisse berücksichtigt.

Hiemit sind nun besonders 2 zur Geltung gekommene Zustandsgleichungen überhitzter Dämpfe entwickelt, [illegible]

[illegible] Zustand [illegible] Dämpfe [illegible]

[illegible] Sättigung [illegible] Dämpfe [illegible].

[illegible] Zustandsgleichung [illegible]: $pv = R\vartheta$

[illegible] allgemeinen Form:

$$pv = R\vartheta$$ [illegible], unter R und ϑ Constante [illegible]

[illegible] $\vartheta = 273 + t =$ absolute Temperatur, [illegible] ϑ [illegible] Funktion von p [illegible], [illegible] p [illegible] Grenze p [illegible] und V [illegible] Funktion von v, [illegible] v

V [illegible] Grenze v [illegible].

[illegible]:

$$\frac{p(v+a)}{1+bp} = R\vartheta$$

[illegible] Constanten a, b und R, [illegible] Zustandsgleichung [illegible]

[illegible] Dämpfe [illegible] Zustand [illegible].

[illegible] Zustandsgleichung [illegible]

[illegible] Sättigungszustand [illegible] Dämpfe [illegible]

[illegible].

[illegible] Zustandsgleichung [illegible] Hirn und Cazin

[illegible] Hirn und Cazin [illegible] absolute Temperatur [illegible]

[illegible]

[illegible] alle Dämpfe [illegible],

[illegible] Zustandsgleichung [illegible] Dämpfe [illegible] Zustandsgleichung [illegible]

[illegible] absolute Temperatur [illegible]

[illegible].

[illegible]

$$a\vartheta = 0$$

[illegible] Zustandsgleichung [illegible] Dämpfe [illegible]:

$$\vartheta = a\,p^{\text{Exponent}}$$

[illegible] Zustandsgleichung, [illegible] Dämpfe [illegible] Sättigungszustande, [illegible]

[illegible] Zustandsgleichung [illegible]

[illegible] Exponent $= \frac{n-1}{n}$ [illegible]:

$$\vartheta = a\,p^{\frac{n-1}{n}}$$

[illegible] Constante [illegible] a [illegible] n [illegible]

[illegible] $= \frac{c_p}{c_v}$ [illegible].

[illegible] Dämpfe [illegible] $\frac{c_p}{c_v}$ [illegible]

[illegible] n [illegible] $\frac{c_p}{c_v}$ [illegible]

[illegible] Dämpfe n [illegible].

[illegible]:

$$\frac{d\vartheta}{dp} = a\,\frac{n-1}{n}\,p^{\frac{n-1}{n}-1} = a\,\frac{n-1}{n}\,\frac{p^{\frac{n-1}{n}}}{p} = \frac{n-1}{n}\,\frac{\vartheta}{p}$$

[illegible] $a\vartheta = 0$ [illegible]. [illegible] 3. Seite 126 [illegible]

[illegible] $a\vartheta = 0$:

$$\frac{d\vartheta}{dp} = \frac{A\vartheta}{C_p}\,\frac{dv}{d\vartheta}$$

Setzt man diese beiden Ausdrücke von $\frac{d\vartheta}{dp}$ einander gleich, so erhält man:

$$\frac{n-1}{n}\,\frac{\vartheta}{p} = \frac{A\vartheta}{C_p}\,\frac{dv}{d\vartheta}$$ und somit, da ja bekanntlich $\frac{1}{\frac{dv}{d\vartheta}} = \frac{d\vartheta}{dv}$ gesetzt werden kann:

$$\frac{d\vartheta}{dv} = \frac{n}{n-1}\,\frac{Ap}{C_p}$$

[illegible] auf die beiden Hauptgleichungen [illegible] bezogen werden. Setzt man den oben gefundenen Werth von $\frac{d\vartheta}{dv}$ in Gleichung 4 ein, so erhält man:

$$A = \frac{d}{dp}\left(C_p\,\frac{n}{n-1}\,\frac{Ap}{C_p}\right) - \frac{d}{dv}\left(C_v\,\frac{d\vartheta}{dp}\right)$$

$$A = \frac{n}{n-1}\,A - \frac{d}{dv}\left(C_v\,\frac{d\vartheta}{dp}\right)$$

$$\text{oder}\quad \frac{d}{dv}\left(C_v\,\frac{d\vartheta}{dp}\right) = \frac{A}{n-1} = \text{const}$$

und folglich durch Integration:

$$C_v\,\frac{d\vartheta}{dp} = \frac{A}{n-1}\,v + \text{Const}$$

Diese Constante [illegible], welches wie bei der Integration nach v constant [illegible], aber [illegible] eine willkürliche Function von p ist, indem außer v auch p als unabhängige Variable [illegible]. Setzt man also die Integrationsconstante $= \vartheta(p)$, so erhält man:

$$C_v\,\frac{d\vartheta}{dp} = \frac{A}{n-1}\,v + \vartheta(p)$$

Für dieselbe Größe $C_v\,\frac{d\vartheta}{dp}$ [illegible] Gleichung 5 einen anderen Werth entwickelt, wenn man [illegible] $A\vartheta$ setzt; [illegible] oben gefundenen Werthes $\frac{d\vartheta}{dv}$ einsetzt:

$$A\vartheta = (C_p - C_v)\,\frac{n}{n-1}\,\frac{Ap}{C_p}\,\frac{d\vartheta}{dp}$$

und folglich:

$$C_v\,\frac{d\vartheta}{dp} = \frac{n-1}{n}\,\frac{C_p C_v}{C_p - C_v}\,\frac{\vartheta}{p}$$

Durch Gleichsetzen beider Ausdrücke von $C_v\,\frac{d\vartheta}{dp}$ erhält man nun [illegible] Gleichung, welche [illegible] die allgemeinen Bedingungen der mechanischen Wärmetheorie [illegible]. Man erhält nämlich:

$$\frac{n-1}{n}\,\frac{C_p C_v}{C_p - C_v}\,\frac{\vartheta}{p} = \frac{A}{n-1}\,v + \vartheta(p)$$ oder durch Multiplication mit $\frac{n-1}{A}\,p$:

$$\frac{(n-1)^2}{n}\cdot\frac{1}{A}\,\frac{C_p C_v}{C_p - C_v}\,\vartheta = pv + \frac{n-1}{A}\,p\,\vartheta(p)$$

$$= pv + \vartheta_1(p)$$ wenn $\frac{n-1}{A}\,p\,\vartheta(p) = \vartheta_1(p)$

Es fragt sich nun noch, welche Werthe der unbekannten Function ϑ_1 beizulegen sind. Diese Frage kann beantwortet

[illegible] Zustandsgleichung [illegible] $\frac{c_p}{c_v} = n$ und ferner $c_p - c_v = AR$ [illegible] Zustandsgleichung d. Gases: $RT = pv$.
[illegible]

Multiplicirt man die linke Seite in Zähler und Nenner mit c_v, setzt dann $\frac{c_p}{c_v} = n$ od. $c_p = n c_v$, so bekommt man:

$$\frac{(n-1)^2}{n} \cdot \frac{1}{A} \cdot \frac{n c_v}{n-1} = \frac{(n-1) c_v}{A} = \frac{\left(\frac{c_p}{c_v} - 1\right) c_v}{A}$$

$$= \frac{c_p - c_v}{A} = \frac{AR}{A} = R.$$

Die Zustandsgleichung d. Dampfes nimmt also im Grenzzustand d. Form an

$$RT = pv + T_1(p)$$

[illegible] $RT = pv$, [illegible] $T_1(p) = \frac{n-1}{A} p \, T(p)$ [illegible] $= 0$ [illegible] $T_1(p) = 0$ [illegible] $T(p) = 0$ [illegible]

$$\frac{dT}{dp} = \frac{1}{n-1} \frac{A}{c_v} v$$

und

$$\frac{(n-1)^2}{n} \cdot \frac{1}{A} \cdot \frac{c_p c_v}{c_p - c_v} T = pv$$

Also schließlich hat sich folgendes ergeben:
Die [illegible] Zustandsgleichung [illegible] p v und T [illegible] c_p und c_v [illegible] p v u. T [illegible]:

$$\frac{dT}{dv} = \frac{n}{n-1} \frac{A}{c_p} p \quad \text{und} \quad \frac{dT}{dp} = \frac{1}{n-1} \frac{A}{c_v} v \qquad \text{— a.}$$

Die Zustandsgleichung kann man auch schreiben:

$$\frac{(n-1)^2}{n} \frac{T}{pv} = \frac{A(c_p - c_v)}{c_p c_v} = \frac{A}{c_v} - \frac{A}{c_p}$$

[illegible] c_v [illegible]

$$\frac{A}{c_v} = \frac{n-1}{v} \frac{dT}{dp} \quad \text{und} \quad \frac{A}{c_p} = \frac{n-1}{n} \frac{1}{p} \frac{dT}{dv}$$

[illegible] Zustandsgleichung:

$$\frac{A}{c_v} - \frac{A}{c_p} = \frac{n-1}{v} \frac{dT}{dp} - \frac{n-1}{n} \frac{1}{p} \frac{dT}{dv} = \frac{(n-1)^2}{n} \frac{T}{pv}$$ [illegible]

Multiplicirt mit $\frac{pvn}{(n-1)^2}$:

$$T = \frac{n}{n-1} p \frac{dT}{dp} - \frac{1}{n-1} v \frac{dT}{dv}$$

Diese Gleichung ist nun eine partielle Differential Gleichung zwischen p v und ϑ [illegible] [illegible] [illegible]

[illegible]

[illegible]

$$\varphi(x,y)=0$$

[illegible] φ eine ganz beliebige Function [illegible]

[illegible]: $$x = \vartheta v^{n-1}$$ und $$y = \frac{\vartheta}{p^{\frac{n-1}{n}}}$$

[illegible]:

differentiirt man zunächst $\varphi(x\,y)$ nach v, so [illegible] v eine mittelbare Function von x und y ist:

$$\frac{d\varphi}{dx}\cdot\frac{dx}{dv}+\frac{d\varphi}{dy}\cdot\frac{dy}{dv}=0$$

und durch differentiiren nach p, welche ebenfalls eine mittelbare Function von x und y ist:

$$\frac{d\varphi}{dx}\,\frac{dx}{dp}+\frac{d\varphi}{dy}\,\frac{dy}{dp}=0$$

Zwischen diesen beiden [illegible] φ [illegible] Gleichung mit $\frac{dx}{dp}$ [illegible] mit $\frac{dx}{dv}$ multiplicirt, [illegible] durch $\frac{d\varphi}{dy}$ dividirt:

β $$\frac{dx}{dp}\cdot\frac{dy}{dv}-\frac{dx}{dv}\cdot\frac{dy}{dp}=0$$

[illegible] x und y [illegible] x eine mittelbare Function von v und ϑ, [illegible] v und ϑ [illegible]:

$$\frac{dx}{dv}=\vartheta(n-1)v^{n-2}+v^{n-1}\frac{d\vartheta}{dv}$$

Ebenso ist auch y eine Function von ϑ und p nämlich: $y=\vartheta p^{-\frac{n-1}{n}}$ und [illegible]:

$$\frac{dy}{dp}=-\vartheta\frac{n-1}{n}p^{-\frac{n-1}{n}-1}+p^{-\frac{n-1}{n}}\frac{d\vartheta}{dp}$$ mit ϑ eine Function von p.

Da v und p unabhängig [illegible] sind, so folgt:

$$\frac{dx}{dp}=v^{n-1}\frac{d\vartheta}{dp}$$

und weil p [illegible] Function von v ist, ϑ aber mit v [illegible]:

$$\frac{dy}{dv}=p^{-\frac{n-1}{n}}\frac{d\vartheta}{dv}$$

[illegible] Werthe in die obige Gleichung β ein, so erhält man:

$$v^{n-1}\frac{d\vartheta}{dp}\,p^{-\frac{n-1}{n}}\frac{d\vartheta}{dv}-\left(\vartheta(n-1)v^{n-2}+v^{n-1}\frac{d\vartheta}{dv}\right)\left(-\vartheta\frac{n-1}{n}p^{-\frac{n-1}{n}-1}+p^{-\frac{n-1}{n}}\frac{d\vartheta}{dp}\right)=0$$

oder:

$$+\vartheta\frac{(n-1)^2}{n}v^{n-2}p^{-\frac{n-1}{n}-1}+(n-1)v^{n-2}p^{-\frac{n-1}{n}}\frac{d\vartheta}{dp}-\frac{n-1}{n}v^{n-1}p^{-\frac{n-1}{n}-1}\frac{d\vartheta}{dv}=0$$

[illegible] durch den mit ϑ [illegible] Factor erhält man nun:

$$-\vartheta+\frac{n}{n-1}\,p\frac{d\vartheta}{dp}-\frac{1}{n-1}\,v\frac{d\vartheta}{dv}=0$$

Diese Gleichung ist offenbar ganz dieselbe

Differentialgleichung, welche integrirt werden sollte um die Zustandsgleichung in endlicher Form zu bekommen. Die fragliche Differentialgleichung hat als wichtigstes einfaches Integral:

$$\varphi(x, y) = 0,$$ wenn φ eine ganz beliebige Function sein kann und unter x und y die angegebenen Ausdrücke verstanden [werden].

Hiermit ist nun zwar die Zustandsgleichung der Körper in einer allgemeinen endlichen Form gefunden, dieselbe enthält aber die Beziehungen der Größen auf eine ganz willkürlich zu wählende Function φ und es wird daher zunächst besonders darauf ankommen die erforderlichen Mittel diese Function näher zu bestimmen. Dies kann nur geschehen auf Grund weiterer Erfahrungen. Außer den ... angewandten ... Gesetzen stehen aber weiter keine genügend und zuverlässig zu Gebote, so daß man, um φ bestimmen zu können, weitere Annahmen machen muß und dann nachher untersuchen ob die damit gezogenen Schlüsse mit anderweitigen Erfahrungsthatsachen übereinstimmen. Als besonders zweckmäßig ergeben sich in dieser Hinsicht 2 Annahmen:

1) Es sei die spec. Wärme C_p bei constantem ~~Volumen~~ Druck unabhängig von v also eine bloße Function von p.

2) Es sei die spec. Wärme C_v bei constantem Volumen unabhängig von dem Drucke p und nur eine bloße Function von v.

Wenn man nun zunächst annimmt, daß C_p unabhängig von v und nur eine Function von p ist, so kann man die Gleichung:

$$\frac{d\vartheta}{dv} = \frac{n}{n-1}\,\frac{Ap}{C_p}$$ ohne Weiteres integriren, man erhält:

$$\vartheta = \frac{n}{n-1}\,\frac{A}{C_p}\,pv + \text{Const}$$; diese Integrationsconstante braucht natürlich nur keine Function von v zu sein, d. h. nicht bezüglich v constant sein, ... kann sie aber eine Function von $p = f(p)$ sein.

Also: $$\vartheta = \frac{n}{n-1}\,\frac{A}{C_p}\,pv + f(p).$$

Bezeichnet man nun mit: $R = \frac{n-1}{n}\,\frac{C_p}{A}$ und multiplicirt mit diesem Werthe die ganze Gleichung so erhält sich:

$$R\vartheta = pv + R\,f(p)$$

da nun C_p eine Function von p ist, ist auch R eine Function von p, so daß man setzen kann:

$$R\,f(p) = S\,p^{\frac{n-1}{n}}$$ wenn S eine auf Grund der vorigen Annahmen zu ... willkürliche Function von p ist, so daß man erhält durch Substitution:

$$R\vartheta = pv + S\,p^{\frac{n-1}{n}}$$

Diese Zustandsgleichung, in welcher R und S nur bloße Functionen von p sind, muß man aber auch der allgemeinen Form der Zustandsgleichung:

$\varphi(x, y) = 0$ auffassen. Mit Rücksicht hierauf läßt sich dann leicht erkennen, daß R und S nicht nur bloße Functionen von p sind, sondern daß dieselben unveränderliche Größen sind. Denn dividirt man die Zustandsgleichung durch $p^{\frac{n-1}{n}}$, so läßt sich die Gleichung auch schreiben:

$$R\,\frac{\vartheta}{p^{\frac{n-1}{n}}} = p^{\frac{1}{n}}\,v + S$$

$$R\,\frac{\vartheta}{p^{\frac{n-1}{n}}} = \left(\frac{p^{\frac{n-1}{n}}}{\vartheta}\,\vartheta v^{n-1}\right)^{\frac{1}{n-1}} + S$$

Hierin ist aber $\frac{\vartheta}{p^{\frac{n-1}{n}}} = y$ und $\vartheta v^{n-1} = x$, so daß die Gleichung auch geschrieben werden kann:

$$Ry = \left(\frac{x}{y}\right)^{\frac{n-1}{n}} + S$$

Soll diese Gleichung nun d. allgemeinen Form d. Zustandsgleichung [illegible] $\varphi(x,y) = 0$ genügen, so soll [illegible] zwischen den x, y und [illegible] Größen sein, [illegible] R und S [illegible] Werthe haben.
[illegible] d. spec. Wärme bei constantem Drucke $= C_p$ [illegible] Funktion d. Druckes [illegible] d. Zustandsgleichung:

$$R\vartheta = pv + S p^{\frac{n-1}{n}}$$ [illegible] R und S constante Größen sind, [illegible] $R = \frac{n-1}{n}\frac{C_p}{A}$ ist und [illegible] n und A ebenfalls Constante sind, [illegible] $C_p = f(\vartheta)$ [illegible] C_p = constant sein.
[illegible] $C_p = f(p)$ [illegible]

[illegible] spec. Volumen v, d. Zustandsgleichung [illegible] Gleichung [illegible] d. Gleichung [illegible]: $R\vartheta = pv$.
[illegible] $\frac{C_p}{C_v} = n$ sein.
Aus [illegible] Gleichung Seite 129 ergiebt sich:

$$\frac{C_p}{C_v} = 1 + \frac{(n-1)^2}{n}\,\frac{C_p}{A}\cdot\frac{\vartheta}{pv}$$

u. da $R = \frac{n-1}{n}\frac{C_p}{A}$:

$$\frac{C_p}{C_v} = 1 + (n-1)\,\frac{R\vartheta}{pv}$$

u. d. gemäß d. obigen Zustandsgleichung: $\frac{R\vartheta}{pv} = 1 + S\,\frac{p^{\frac{n-1}{n}}}{pv} = 1 + \frac{S}{p^{\frac{1}{n}}v}$, folgt:

$$\frac{C_p}{C_v} = 1 + (n-1)\left(1 + \frac{S}{p^{\frac{1}{n}}v}\right) = n + \frac{(n-1)\,S}{p^{\frac{1}{n}}v}.$$

Mit [illegible] spec. Volumen v [illegible] $\frac{C_p}{C_v} = n$ werden, [illegible] Zustandsgleichung [illegible] Gleichung [illegible] unendlich [illegible] v [illegible]: $\frac{C_p}{C_v} = n$ wird.

Für d. [illegible] ist es nun [illegible] d. Werthe d. Constanten R und S [illegible] zu kennen.
[illegible] $C_p = 0{,}48$, [illegible] Regnault für d. spec. Wärme [illegible] bei constantem Drucke [illegible] Druck [illegible] Kgr. pro □m [illegible] d. Druck p in Atm [illegible] 10333 [illegible] 10333 Kgr. pro □m = 1 Atm [illegible] für R [illegible] $\frac{1}{A} = 424$:

$$R = \frac{0{,}48\cdot 424}{10333}\,\frac{n-1}{n} = 0{,}019696\,\frac{n-1}{n}$$

Mit Rücksicht auf die entwickelten Beziehungen zwischen den Constanten R, n und S braucht man eigentlich nur 2 zu bestimmen, indem dann die dritte durch frühere Gleichungen bestimmt ist.

Um zunächst n zu bestimmen kann man von der Erwägung ausgehen, dass die gefundene Zustandsgleichung die Gesammtheit der Zustandsänderungen des Wasserdampfes und also auch den Grenzzustand des gesättigten Dampfes umfassen muss; indem nämlich die Constanten für gesättigten Wasserdampf und damit auch die zusammengehörenden Werthe von p v und Dichte t genau durch frühere Untersuchungen und die citirten Tabellen mit genügender Genauigkeit bekannt sind, kann man die enthaltenen unbekannten Constanten verhältnissmässig leicht bestimmen, wenn man die gefundene Zustandsgleichung auf den Grenzzustand des gesättigten Wasserdampfes bezieht.

Angenommen es seien p_1 v_1 ϑ_1 zusammengehörende Werthe für irgend einen Zustand des gesättigten Wasserdampfs
und p_2 v_2 ϑ_2 " " " " irgend einen anderen " " " "
so sind diese ohne Weiteres aus bekannten durch frühere Tabellen. Setzt man diese Werthe in die Zustandsgleichung ein, so erhält man:

$$R\vartheta_1 = p_1 v_1 + S p_1^{\frac{n-1}{n}}$$

$$R\vartheta_2 = p_2 v_2 + S p_2^{\frac{n-1}{n}}$$ und hieraus durch Elimination von S:

$$\frac{R\vartheta_1 - p_1 v_1}{R\vartheta_2 - p_2 v_2} = \left(\frac{p_1}{p_2}\right)^{\frac{n-1}{n}}$$

Setzt man nun die Zahlenwerthe für p_1 v_1 ϑ_1, p_2 v_2 ϑ_2 ein und substituirt ferner für R den oben gefundenen Werth:

$$R = 0{,}019696\,\frac{n-1}{n}$$

so erhält man schliesslich eine Gleichung für $\frac{n-1}{n}$, welche freilich eine transcendente Form hat und daher nur durch Probiren gelöst werden kann.

Um den Werth $\frac{n-1}{n}$ möglichst genau abzuleiten ist es natürlich angemessen, die Differenzen zwischen p_1 u. p_2, v_1 und v_2, ϑ_1 und ϑ_2 möglichst gross zu nehmen. Die Ausführung der Rechnung ergibt dann:

$$\frac{n-1}{n} = 0{,}249$$

Nach Versuchen von Hirn und Cazin findet sich bekanntlich im Mittel für $x = \frac{n-1}{n}$ sogar: $x = 0{,}236$ entsprechend einer ... Curve; es scheint aber schon aus den betreffenden Werthen möglich, dass dieser gefundene Werth etwas zu klein sei, weil immerhin die $= 0$ gesetzte Wärmemenge, welche während der Ausdehnung von Aussen der Gefässwände zugeführt wird, auch etwas einen kleinen positiven Werth haben wird.

Um den gefundenen Werth von $\frac{n-1}{n}$ etwas abzurunden kann man setzen:

$$\frac{n-1}{n} = 0{,}25 = \frac{1}{4} \quad \text{und also} \quad n = \frac{4}{3}$$

und dem entsprechend:

$$R = 0{,}019696\,\frac{n-1}{n} = 0{,}019696 \cdot \frac{1}{4} = 0{,}004924$$

Es bleibt also nur noch übrig die Constante S zu bestimmen, natürlich auch für Wasserdampf.

Setzt man zu dem Ende die oben gefundenen Werthe für R und n in die Zustandsgleichung und entwickelt nach derselben S, so erhält man:

$$S = (0{,}004924\,\vartheta - pv)\sqrt[4]{\frac{1}{p}}$$

Nun sind aber für 11 verschiedene Zustände von gesättigtem Wasserdampf die zusammengehörenden Werthe von p v ϑ durch die Versuche bestimmt worden, wie schon früher erwähnt. Setzt man diese als bekannte Grössen zusammengehörende Werthe von p v ϑ nacheinander ein, so erhält man 11 Werthe für S. Diese Werthe sind freilich ziemlich bedeutend verschieden, die Differenzen sind aber so unregelmässiger Natur, dass man

beibehalten nach d. Versuchs- und Untersuchungsfehlern zuzuschreiben ist.
Im Mittel ergibt sich demnach:

$$S = 0,1829$$

Haben aber weiter d. Zustandsgleichung nach d. Gay-Lussac'schen Gültigkeit innerhalb welcher für entsprechend zusammengehörende Werthe von $pv\vartheta$ bekanntermaßen genau bekannt sind, so kann man mit Hilfe derselben auch bestimmt S noch genauer bestimmen, indem man nur entsprechende Grössen zusammengehörige Werthe von $pv\vartheta$ aufsucht und damit S berechnet. Zu d. That stimmen die hier gewonnenen Resultate für S auch bedeutend besser überein. d. Mittelwerth ist:

$$S = 0,1877$$

Im Durchschnitt kann man also wohl mit ziemlicher Genauigkeit annehmen:

$$S = 0,186.$$

Dieser Werth ist wesentlich derjenige, welcher sich ergibt wenn man unter gesättigtem Wasserdampf ... Versuchen zu Grunde legt.

Somit kann man nun d. folgende Gleichung als d. Zustandsgleichung d. überhitzten Dampfes beibehalten, wenn man nur d. Werth d. bezeichneten einsetzt. Also:

$$pv = 0,004924\,\vartheta - 0,186\sqrt[4]{p}$$

wobei freilich vorausgesetzt werden muss bezüglich d. bezeichneten R und S, dass d. Pressung p in Atm. ausgedrückt ist, während dann für n zu ... wird. —

Diese Zustandsgleichung stellt sich ergeben auf Grund d. ganz willkürlichen Annahme, dass d. spec. Wärme c_p eine blosse Function von p sei, vorausgesetzt wird, dass dann auch c_p constant sein muss, während c_v eine Function d. d. Wärmezustand charakterisirenden Grössen sein muss.
Dieser Umstand zwingt, kann man sich fragen, ob man nicht eine andere Annahme machen kann, welche eine Zustandsgleichung ergibt, die sich d. ursprünglichen Versuchen nicht nur besser anschliesst als d. früher gefundenen.
Zu diesem Zweck ist eine oft angestellte Annahme die, dass man d. spec. Wärme c_v bei constantem Volumen als eine blosse Function d. spec. Volumens v also unabhängig von d. Pressung p betrachtet also

$$c_v = f(v)$$

Dieser Annahme entsprechend, bekommt man dann aus d. bekannten Formel:

$$\frac{d\vartheta}{dp} = \frac{1}{n-1}\frac{A}{c_v}v$$

durch Integration sofort:

$$\vartheta = \frac{1}{n-1}\frac{A}{c_v}pv + \text{Const.}$$

Da diese Integrationsconstante nur in Bezug auf p constant zu sein braucht, so kann sie immerhin doch noch eine Function von v sein $= V$, so dass d. Gleichung wird:

$$\vartheta = \frac{1}{n-1}\frac{A}{c_v}pv + V$$

Setzt man nun zur Abkürzung $R = (n-1)\cdot\frac{c_v}{A}$, wo dieses R natürlich ebenso wie c_v eine blosse Function von v sein muss, indem n u. A constant sind, so erhält man durch Multiplication mit R:

$$R\vartheta = pv + RV$$

Da R und V beides blosse Functionen von v sind, so kann man statt dieses Productes auch eine einfache Function von v setzen:

$$RV = \frac{S}{v^{n-1}},$$ so erhält man neuerdings als ferner d. Zustandsgleichung ...

$$RT = pv + \frac{S}{v^{n-1}}$$

Es ist jedoch leicht einzusehen, daß nicht nur R und S letzte Funktionen von v sondern unabhängige Größen sind, denn diese gefundene Zustandsgleichung widerspricht der früheren allgemeinen Form der Zustandsgleichung [illegible], nur dann erhalten kann, wenn R und S constant sind. Multiplicirt man die Gleichung [illegible] mit v^{n-1}, so ergibt sich:

$$RTv^{n-1} = \left(\frac{p^{\frac{n-1}{n}}}{T}\, T v^{n-1}\right)^{\frac{n}{n-1}} + S$$

die man nun mit den Bezeichnungen x und y einführt, indem setzen wir:

$$Tv^{n-1} = x \quad \text{und} \quad \frac{T}{p^{\frac{n-1}{n}}} = y:$$

$$Rx - \left(\frac{x}{y}\right)^{\frac{n}{n-1}} - S = 0.$$

die allgemeine Form der Zustandsgleichung $\varphi(x,y) = 0$ zu setzen soll aber die Zustandsgleichung nur eine Beziehung zwischen x, y und constanten Größen sein, dann folgt daß in dieser Gleichung auch R und S constant sein müssen.

R war aber $= (n-1)\frac{c_v}{A}$, so daß mit constantem R auch c_v constant sein muß, während die spec. Wärme c_p in diesem Fall auch nicht [illegible] $= 0$ sein kann, und [illegible] identisch wird mit dem Zustand des Gases, während [illegible] c_p = spec. Wärme bei constantem Druck ein [illegible] den Wärmezustand charakterisirendes Element.

Aus der allgemein gültigen Gleichung Seite 129: ergibt sich

$$\frac{(n-1)^2}{n}\frac{T}{pv} = \frac{A}{c_v} - \frac{A}{c_p}$$

ergibt sich durch Multipliciren mit $\frac{c_v}{A}$:

$$\frac{c_v}{c_p} = 1 - \frac{(n-1)^2}{n}\frac{c_v}{A}\cdot\frac{T}{pv}$$

oder $(n-1)\frac{c_v}{A} = R$

$$\frac{c_v}{c_p} = 1 - \frac{n-1}{n}\frac{RT}{pv}$$

oder gemäß der obigen Zustandsgleichung: $RT = pv + \frac{S}{v^{n-1}}$:

$$\frac{c_v}{c_p} = 1 - \frac{n-1}{n}\,\frac{pv + \frac{S}{v^{n-1}}}{pv} = 1 - \frac{n-1}{n}\left(1 + \frac{S}{pv^n}\right)$$

$$\frac{c_v}{c_p} = \frac{1}{n} - \frac{n-1}{n}\,\frac{S}{pv^n}$$

Es zeigt sich nun, wie die gefundenen Resultate mit den erfahrungsmäßigen Thatsachen übereinstimmen [illegible] gemäß der Annahme c_v = constant gefundenen ebenso gut oder auch besser übereinstimmen wie die vorher gemachte Annahme c_p = constant gefundenen Resultate.

Zunächst kann man bemerken, daß die Ableitung, daß die Zustandsgleichung der [illegible] bei unendlicher [illegible] mit unendlich wachsendem v in die Zustandsgleichung für Gase übergeht, erfüllt [illegible] mit wachsendem v die letzte [illegible] Zustandsgleichung [illegible], die schließlich die Gleichung wird: $RT = pv$, welche als [illegible] Zustandsgleichung der Gase ist.

Ebenso wird auch d. Forderung genügt, daß d. Verhältniß $\frac{c_v}{c_p}$ mit d. Zunahme [illegible] gleich $= \frac{1}{n}$ und [illegible] Gleichung für $\frac{c_v}{c_p}$ mit wachsendem v d. [illegible] Werth [illegible] entspricht und also d. Gleichung für [illegible] überhitzten Dampf [illegible] ist:

$$\frac{c_v}{c_p} = \frac{1}{n}$$

Ferner kann man bemerken, daß d. Art und Weise d. Abweichung d. Verhaltens d. gesättigten Dampfes von d. Mariotte- und Gay-Lussac'schen Gesetze, welche früher im Anfange dieses Abschnitts nach d. Versuchen von Regnault festgestellt wurden, in d. gefundenen Gleichung vollkommen genügenden Ausdruck finden.

Die [illegible] Wichtigkeit [illegible] nun noch d. Constanten R und S für Wasserdampf zu bestimmen.

Zunächst für Wasserdampf kann man nun wieder d. Werth $n = \frac{4}{3}$ beibehalten, indem derselbe auch [illegible] d. Versuchen von Hirn gut übereinstimmend gefunden wurde und [illegible] für d. Rechnung bedeutende Bequemlichkeit darbietet. (Da nämlich d. entwickelten Zustandsgleichungen überhitzter Dämpfe immerhin [illegible] Annäherungen zu betrachten sind, so kann man bei d. Aufstellung derselben auch d. Bequemlichkeit d. Rechnung einige Rücksicht tragen.)

Die Constante R kann man nun ebenso bestimmen, wie im vorhergehenden Fall c_p = constant, d. h. indem man d. Zustandsgleichung auf d. Zustand d. Sättigung bezieht und dann für $p\,v\,\vartheta$ [illegible] 2 Paare zusammengehörender Werthe einsetzt, welche Größen aus d. bekannten Tabellen mit bedeutender Genauigkeit entnommen werden können. Sind diese zusammengehörenden Werthe $p_1 v_1 \vartheta_1$ und $p_2 v_2 \vartheta_2$, so erhält man aus d. Zustandsgleichung:

$$R\vartheta_1 = p_1 v_1 + \frac{S}{v_1^{n-1}} \quad \text{und} \quad R\vartheta_2 = p_2 v_2 + \frac{S}{v_2^{n-1}}$$

$$R(\vartheta_1 v_1^{n-1} - \vartheta_2 v_2^{n-1}) = p_1 v_1^{n} - p_2 v_2^{n}$$

$$\text{also } R = \frac{p_1 v_1^{n} - p_2 v_2^{n}}{\vartheta_1 v_1^{n-1} - \vartheta_2 v_2^{n-1}}$$

und wenn man hierin d. Zahlenwerthe für $p_1 v_1 \vartheta_1$, $p_2 v_2 \vartheta_2$ einsetzt, so erhält man mit $n = \frac{4}{3}$ od. $n - 1 = \frac{1}{3}$

$$R = 0{,}004792$$

und folglich aus d. Zustandsgleichung:

$$S = (0{,}004792\,\vartheta - pv)\sqrt[3]{v}$$

Hieraus kann man nun, um S zu finden, für $p\,v\,\vartheta$ wieder d. [illegible] Paare zusammengehöriger Werthe setzen und damit 11 Werthe für S bestimmen, deren Mittelwerth sich ergiebt:

$$S = 0{,}1413$$

Andererseits kann man aber auch wieder für $p\,v\,\vartheta$ verschiedenen d. Sättigungszustande d. Dampfes entsprechende zusammengehörige Werthe einsetzen und damit S als Mittelwerth bestimmen, man erhält dann d. genauere Resultat:

$$S = 0{,}1459$$

Im Durchschnitt kann also mit ziemlicher Genauigkeit gesetzt werden:

$$S = 0{,}144$$

Damit ergiebt sich nun unter d. Annahme c_v = constant d. Zustandsgleichung d. Dampfes:

$$pv = 0{,}004792\,\vartheta - \frac{0{,}144}{\sqrt[3]{v}}$$

wenn [illegible] mit Bezug auf R und S in Atm. ausgedrückt sein muß.

Welche von den bisher aufgestellten Formen d. Zustandsgleichung für Dämpfe ist nun d. beste? Was d. Aufschluß d. mit den Zustandsgleichungen gefundenen Resultate betrifft, um d. erfahrungsmäßigen Thatsachen betrifft, so ist keiner von beiden d. Vorzug zu geben, indem zu wenig derartige Erscheinungen und Versuchsresultate vorliegen und man demnach eine Menge Formen von Zustandsgleichungen aufstellen kann, welche alle gleich gut diesen erfahrungsmäßigen Thatsachen entsprechen.

Wegen einiger theoretischer Untersuchungen erscheint d. Annahme c_v = const. an und für sich mehr gerechtfertigt als d. Annahme c_p = const. Indem jedoch [illegible] d. Zustandsgleichung nur als Näherungen zu betrachten sind, empfiehlt sich d. Zeuner'sche Gleichung entsprechend d. Annahme c_p = const. [illegible] d. Umstand, daß sie eine direkte Berechnung von v mittelst d. gegebenen Größen p und T gestattet, [illegible] d. Zustand überhitzter Dämpfe in den Anwendungen allgemein [illegible] zu werden pflegt. Auch zeichnet sie sich aus für Wasserdampf im Grenzzustand d. Sättigung eine recht gute Übereinstimmung mit d. früher schon [illegible] allgemeinen Umfange darstellen.

Aus diesem Grund soll nun zunächst d. zuerst von Zeuner aufgestellte Gleichung gemäß d. Annahme c_p = const. als Zustandsgleichung überhitzter Dämpfe verwendet werden, nämlich d. Gleichung:

$$RT = pv + Sp^{\frac{n-1}{n}}$$

wenn R, S und n d. früher betrachteten Constanten bedeuten.

Für den praktischen Gebrauch empfiehlt es sich d. Gleichung folgendermaßen umzuschreiben:

$$pv = R\left(T - \beta p^{\frac{n-1}{n}}\right)$$

wenn $\beta = \dfrac{S}{R}$ bedeutet, abermals constant.

od.

$$pv = R(T - P)$$

wenn $P = \dfrac{S}{R}\,p^{\frac{n-1}{n}}$ ist, also eine Funktion d. Pressung p ist.

Speciell für Wasserdampf ist dann zu setzen mit Rücksicht auf d. früher gefundenen Werthe für d. Constanten:

$$R = 0{,}004924 \qquad \beta = 37{,}774 \text{ und } \frac{n-1}{n} = \frac{1}{4} \text{ also } n = \frac{4}{3}.$$

Um den Gebrauch dieser Formel wesentlich zu erleichtern, kann man d. Funktion $P = 37{,}774\sqrt[4]{p}$ auch für verschiedene Werthe d. Pressung berechnen und tabellarisch zusammenstellen. (siehe Grashof).

Ist d. gefundene Zustandsgleichung allgemein für d. ganzen Umfang überhitzter Dämpfe gültig, so muß sie auch für den Grenzzustand d. Sättigung gelten. Aus diesem Grund kann sie auch benutzt werden, um d. Beziehung, welche allgemein zwischen Temperatur und Pressung dann stattfindet, genauer und bequemer [illegible] als dies früher schon geschehen war, welche Formeln bekanntlich [illegible] nicht [illegible] waren.

Es wurde nämlich schon früher darauf hingewiesen, daß die zwischen p u. v stattfindende Beziehung für gesättigten Dampf sehr nahe d. Form hat:

$$pv^m = a$$

wenn man den beiden Constanten m und a entsprechende Werthe ertheilt. Insbesondere für gesättigten Wasserdampf hatte man zu setzen:

$$m = 1{,}0646 \text{ und } a = 1{,}7049.$$

Setzt man diese Werthe ein, so kann man direkt für gegebene Werthe von p d. entsprechenden Werthe d. spec. Volumens v berechnen, nämlich auch nur für gesättigten Wasserdampf.

Stellt man nun diese allgemeine Gleichung zwischen v und p für gesättigten Dampf $pv^{n} = a$ [illegible] nach Potenz $\frac{1}{n}$ und multiplizirt mit $p^{\frac{n-1}{n}}$, so bekommt man:

$$pv = a^{\frac{1}{n}} p^{\frac{n-1}{n}} = R\alpha p^{\frac{m-1}{m}}$$

wenn man [illegible] bezeichnet $R \cdot \alpha = \frac{a^{\frac{1}{n}}}{R}$ = constant, unter R die früheren Constante verstanden. Für überhitzten Dampf gilt aber als Zustandsgleichung, [illegible] mit [illegible] Gleichung:

$$pv = R(T - \beta p^{\frac{m-1}{m}})$$

Setzt man diese Gleichungen gleich:

$$T - \beta p^{\frac{m-1}{m}} = \alpha p^{\frac{m-1}{m}}$$

$$\text{oder} \quad T = \alpha p^{\frac{m-1}{m}} + \beta p^{\frac{n-1}{n}}$$

Hiernach haben wir also eine Gleichung gefunden, aus welcher die allgemeinen für gesättigten Dampf absolute Temperatur T [illegible] berechnet werden kann, $t = T - 273$ [illegible].

Zahlenwerthe für gesättigten Wasserdampf [illegible] $T = 273 + t$:

$$t = 335{,}24\, p^{0{,}06068} + 37{,}774\, p^{0{,}25} \div 273.$$

[illegible] Gleichung [illegible] Formel gefundenen Resultate [illegible], [illegible] beispielsweise [illegible] für:

	$p = 1$	3	6	9	12 Atm
	$t = 100{,}01°$	133,04°	159,86°	175,47°	187,08° C
[illegible] =	$t = 100$	133,91°	159,22	175,77	188,41° C
Also eine Differenz [illegible]:	+0,01	+1,13	+0,64	÷0,30	÷1,33

Es [illegible] also in der That diese Formel ziemlich gut mit den [illegible] Resultaten.

[illegible] Zustandsgleichung [illegible] für Dampf [illegible], [illegible] Zustandsänderungen [illegible] Wärmegleichung [illegible].

Die 3 allgemeinen Formen der Wärmegleichung waren bekanntlich:

$$dQ = c_p \frac{dT}{dv} dv + c_v \frac{dT}{dp} dp$$

$$dQ = c_v\, dT + A T \frac{\partial p}{\partial T} dv$$

$$dQ = c_p\, dT \div A T \frac{dv}{dT} dp$$

welche angewendet werden, [illegible] Zustandsänderungen durch unendlich kleine Änderungen von v, p, v und T [illegible] gegeben sind.

Um d. frühere Umformung vorzunehmen, sind d. früher festgestellten Beziehungen erforderlich, nämlich:

$$\frac{d\vartheta}{dv} = \frac{n}{n-1}\,\frac{A}{c_p}\,p \quad\text{und}\quad \frac{d\vartheta}{dp} = \frac{1}{n-1}\,\frac{A}{c_v}\,v$$

welche Formeln hier gelten auf Grund d. allgemeinen Annahmen, [illegible] d. absoluten Temperatur proportional [illegible] Zustandsänderung [illegible]. Setzt man nun diese Werthe für $\frac{d\vartheta}{dv}$ und $\frac{d\vartheta}{dp}$ in d. allgemeinen Formen d. Wärmegleichung, so erhält man:

$$1)\quad dQ = A\left(\frac{n}{n-1}\,p\,dv + \frac{1}{n-1}\,v\,dp\right)$$

$$\text{od. }2)\quad dQ = c_v\left(d\vartheta + \vartheta\,\frac{n-1}{v}\,dv\right)$$

$$\text{od. }3)\quad dQ = c_p\left(d\vartheta - \frac{\vartheta}{p}\cdot\frac{n-1}{n}\,dp\right)$$

Diese Formeln gelten also in allgemeinster Form für d. überhitzten Dämpfe, [illegible] c_p = const. resp. c_v = const. [illegible], so entspricht also d. allgemeinsten Form d. Zustandsgleichung überhitzter Dämpfe:

$$\varphi(x, y) = 0.$$

Setzt man nun [illegible] für Wasserdampf $n = \frac{4}{3}$, so erhält man:

$$1)\quad dQ = A\left(4p\,dv + 3v\,dp\right)$$

$$\text{od. }2)\quad dQ = c_v\left(d\vartheta + \frac{1}{3}\,\frac{\vartheta}{v}\,dv\right)$$

$$\text{od. }3)\quad dQ = c_p\left(d\vartheta - \frac{1}{4}\,\frac{\vartheta}{p}\,dp\right)$$

= Wärmemenge, welche 1 kg überhitzten Wasserdampf bei einer unendlich kl. Zustandsänderung mitgetheilt werden muss.

Es frägt sich ferner d. Gleichung d. inneren Arbeit [illegible] überhitzter Dämpfe [illegible]. Um diese festzustellen muss d. erste Form d. Wärmegleichung [illegible] allgemeinsten Form dargestellt [illegible]. D. allgemeinste Form d. Wärmegleichung ist nämlich:

$$W\,dQ = dU + p\,dv \quad\text{od. mit } A = \frac{1}{W}:$$

$$dQ = A\,(dU + p\,dv)$$

d. erste Form d. auf überhitzte Dämpfe angewandten Wärmegleichung gilt also:

$$dQ = A\left(\frac{n}{n-1}\,p\,dv + \frac{1}{n-1}\,v\,dp\right)$$

od. ausgedrückt ferner:

$$dU + p\,dv = \frac{n}{n-1}\,p\,dv + \frac{1}{n-1}\,v\,dp$$

$$\text{d. }\ dU = \left(\frac{n}{n-1} - 1\right)p\,dv + \frac{1}{n-1}\,v\,dp = \frac{1}{n-1}\,p\,dv + \frac{1}{n-1}\,v\,dp$$

$$= \frac{1}{n-1}\left(p\,dv + v\,dp\right) \quad\text{od. d. }\ p\,dv + v\,dp = d(vp)$$

$$dU = \frac{1}{n-1}\,d(p.v)$$

; d. innere Arbeit ist demgemäss d. inneren Arbeitsvermögen proportional d. Produkt aus Pressung und spez. Volumen.

Sind demnach $p_0\, v_0$ d. Werthe von p und v in einem gegebenen Anfangszustande, so erhält man durch Integration:

$$U - U_0 = \frac{pv - p_0 v_0}{n-1}$$

Wie ersichtlich stimmt diese Gleichung d. inneren Arbeit ganz mit derjenigen früher für Gase gefundenen überein, wie es auch dann nicht zu erwarten war, indem d. Beziehungen zwischen p und v für gesättigte überhitzte Dämpfe und Gase dieselben waren.

Setzt man in dieser Gleichung d. Constante $U_0 - \frac{p_0 v_0}{n-1}$ = einer einzigen Constanten:

$U_0 - \frac{p_0 v_0}{n-1} = C$, und multiplicirt dann d. Gleichung mit A, so erhält man:

$$AU = AC + \frac{A}{n-1}\, pv$$

nach Clausius'scher Zustandsgleichung für überhitzte Dämpfe

ferner:

$$pv = R(T - \mathfrak{T})$$

wobei R eine Constante und unter $\mathfrak{T}$ d. bekannte Function d. Pressung verstanden.

d. spec. Energie ist demnach:

$$AU = AC + \frac{AR}{n-1}(T - \mathfrak{T})$$

d. entwickelte, aber schon in Anwendung gebrachte Zeuner'sche Zustandsgleichung beruhte aber auf d. Annahme c_p = constant, woraus:

$$R = \frac{n-1}{n}\,\frac{c_p}{A}$$

ebenfalls eine Constante war;

also:

$$\frac{AR}{n-1} = \frac{c_p}{n}$$

und demnach

$$AU = AC + \frac{c_p}{n}(T - \mathfrak{T})$$

In dieser Form läßt sich also d. spec. Energie AU als Function von Pressung und Temperatur ausdrücken, indem bekanntlich:

$T = 273 + t$ und $\mathfrak{T} = \beta\, p^{\frac{n-1}{n}}$ worin β eine Constante bedeutet.

Am bequemsten jedenfalls ist d. nun d. Constanten C für Wasserdampf zu bestimmen.
Dieser Werth natürlich ist abhängig von d. Zustande, von welchem aus man anfängt. Angenommen, d. nach man unter AU diejenige Größe verstanden, um welche d. Energie von 1 kg Dampf bei $t°$ größer ist als d. Energie von 1 kg desselben Flüssigkeit bei 0° Temperatur. Nach früherem entspricht dann im besonderen für gesättigten Dampf

$$AU = q + \rho = \text{(spec. Dampfwärme)}$$

wenn q d. Flüssigkeitswärme bedeutet, welche erfordert wird 1 kg Flüssigkeit d. selbe bei constanter Pressung von 0° auf $t°$ zu erwärmen und unter ρ d. innere spec. Verdampfungswärme verstanden.

Aus d. obigen Gleichung erhält man nun:

$$AC = AU - \frac{A}{n-1}\, pv$$

und da dies auch f. Zustand d. Sättigungspunkts gelten muß, kann man $AU = q + \rho$ setzen;

$$AC = q + \rho - \frac{A}{n-1}\, pv$$

also: welche Formel anwendbar ist, p in kg per qm ausgedrückt.

Um nun AC für gesättigten Wasserdampf zu finden, hat man nur d. früher gefundenen Werthe von q, ρ, A einzusetzen und dann noch für $p\,v$ entsprechende zusammengehörige Größen zu wählen. z.B. erhält man für gesättigten Wasserdampf von 1 Atm. Pressung, wobei man also p mit 10333 zu multipliciren hat, wenn $p = 1$ gesetzt wird, entsprechend d. früher erhaltenen Tabellen:

$$Al = 100{,}5 + 496{,}3 - \frac{3 \cdot 10333 \cdot 1{,}6505}{424}$$

$$Al = 476{,}13$$

[illegible]

$$AU = 476{,}13 + 3Apv$$

[illegible] $c_p = 0{,}48$ [illegible] Regnault [illegible]:

$$\text{od. } AU = Al + \frac{c_v}{n}(T - T) = 476{,}13 + 0{,}36(T - T)$$

[illegible] p [illegible] v [illegible] t [illegible]

[illegible]

$$pv^m = C$$ [illegible] m [illegible]

[illegible]

$$pv = R(T - T)$$ [illegible] RT [illegible]:

$$pv = RT$$

[illegible] $T = \beta p^{\frac{m-1}{m}}$ [illegible] $\frac{c_p}{c_v}$, [illegible]

[illegible]:

$$AU = Al + \frac{A}{n-1}pv$$

$$\text{od. } AU = Al + \frac{AR}{n-1}(T - T)$$

$$\text{od. } AU = Al + \frac{c_v}{n}(T - T)$$

[illegible] $pv^m = C$:

$$v^m dp + pmv^{m-1}dv = 0$$

$$\text{also } \frac{dp}{dv} = -m\frac{p}{v}$$

[illegible] p_0 [illegible] T_0 [illegible] v_0 [illegible] $pv^m = p_0 v_0^m$ und $pv = R(T - T)$:

$$\frac{p}{p_0} = \left(\frac{v_0}{v}\right)^m \text{ und } \frac{T - T}{T_0 - T} = \frac{pv}{p_0 v_0} = \left(\frac{v_0}{v}\right)^{m-1} = \left(\frac{p}{p_0}\right)^{\frac{m-1}{m}} = e^{m-1}$$

[illegible] $\frac{v_0}{v}$ [illegible]

[illegible]: $\frac{T}{T_0} = \left(\frac{v_0}{v}\right)^{m-1} = \left(\frac{p}{p_0}\right)^{\frac{m-1}{m}} = e^{m-1}$

Also muß diese Beziehungen zwischen pv und ϑ in 2 verschiedenen Zuständen unterscheiden sich für Dampf und Gas nur dadurch, daß einmal ersetzt ϑ (entsprechend Gas) $\vartheta - \mathfrak{D}$ gesetzt ist für Dampf. Wo also die Temperatur nicht weiter in Betracht kommt, wird man ganz dieselben Resultate wie früher für Gase finden, so daß man die betreffenden Entwicklungen nicht alle durchzuführen hat.

Man kann daher auch für Dampf den früher gefundenen Ausdruck für die Expansionsarbeit der Gase gelten lassen als seine Expansionsarbeit, nämlich:

$$E = \frac{p_1 v_1}{m-1}\left(1 - \varepsilon^{m-1}\right)$$

Was endlich unsere Wärmemenge Q betrifft, welche dem Dampf pr. 1 Kgr. mitgetheilt werden muß, um ihn von Zustand $p_1 v_1$ in den Zustand pv zu bringen, so gilt für diese Wärmemenge der allgemeine Ausdruck:

$$Q = A(U - U_1 + E)$$

indem diese Wärmemenge theilweise zur Vergrößerung des inneren Arbeitsvermögens, theils zur Verrichtung der Expansionsarbeit verwendet wird.

Was nun den Wärmewerth der Zunahme an innerem Arbeitsvermögen — der Zuwachs der [illegible] — $A(U - U_1)$ betrifft, so ist derselbe [illegible] hergeleitet:

$$A(U - U_1) = \frac{AR}{n-1}\left(\vartheta - \mathfrak{D} - \vartheta_1 + \mathfrak{D}_1\right)$$

$$= \frac{AR}{n-1}\left(\vartheta_1 - \mathfrak{D}_1\right)\left[\frac{\vartheta - \mathfrak{D}}{\vartheta_1 - \mathfrak{D}_1} - 1\right]$$

u. da nach unserer Zustandsgleichung: $R(\vartheta_1 - \mathfrak{D}_1) = p_1 v_1$ ist:

$$A(U - U_1) = \frac{A}{n-1}\, p_1 v_1 \left[\varepsilon^{m-1} - 1\right]$$

$$= \div A\,\frac{m-1}{n-1}\,\frac{p_1 v_1}{m-1}\left(1 - \varepsilon^{m-1}\right)$$

Nun haben wir aber $\frac{p_1 v_1}{m-1}\left(1 - \varepsilon^{m-1}\right) = E$ und folglich:

$$A(U - U_1) = \div \frac{m-1}{n-1}\, AE$$

diesen Ausdruck oben eingesetzt giebt:

$$Q = \left(1 - \frac{m-1}{n-1}\right) AE = \frac{n-m}{n-1}\, AE.$$

Wie ersichtlich ist auch diese Formel ganz dieselbe wie sie früher für dieselbe Wärmemenge bei Gasen gefunden wurde. Überhaupt findet man lauter entsprechende Ausdrücke bei Dämpfen und Gasen, nur stellen aber [illegible] keine Abweichungen ein, solange die Temperatur nicht mit in Betracht kommt.

Diese allgemeinen Formeln sollen nun auf Specialfälle von Zustandsänderungen von Dämpfen, welche nach dem allgemeinen Gesetze folgen $pv^m = C$, angewendet werden.

1) Zustandsänderung bei constantem Volumen.

Diese Zustandsänderung erhält man sofort aus der allgemeinen Zustandsgleichung, wenn man $n = \infty$ setzt; man kann nämlich die Zustandsgleichung $pv^n = C$ auch schreiben:

$$p^{\frac{1}{n}}\, v = C^{\frac{1}{n}} = \text{constant}$$

woraus mit $n = \infty$ folgt: $v = \text{constant}.$

Die Beziehung zwischen Endzustand und Anfangszustand ist in diesem Falle gegeben durch:

$$\frac{\vartheta - \vartheta_0}{\vartheta_1 - \vartheta_0} = \frac{p}{p_0}$$

Die Expansionsarbeit E ist natürlich im vorliegenden Falle bei constantem Volumen $= 0$ also $E = 0$.

Die Wärmemenge Q, welche 1 Kgr Dampf mitgetheilt werden muß, um die Pressung von p_0 auf p zu steigern, würde sich aus der allgemeinen Formel mit $n = \infty$ im vorliegenden Falle in unbestimmter Form $= 0 \cdot \infty$ ergeben; indessen kann man auch unmittelbar in diesem Falle die erforderliche Wärmemenge Q bestimmen, aus der allgemeinsten Form:

$$Q = A(U - U_0 + E) \quad \text{und da } E = 0:$$

$$Q = A(U - U_0)$$ diese Wärmemenge Q dient also jetzt nur zur Vermehrung der ges. Körperwärme. Nach der früher erhaltenen Formel für die ges. Körperwärme:

$$AU = AJ + \frac{A}{n-1}\, pv$$ erhält man nämlich mit constantem v:

$$Q = A(U - U_0) = \frac{A}{n-1}(p - p_0)\, v$$

Insbesondere erhält man z. B. diejenige Wärmemenge welche 1 Kgr Wasserdampf mitgetheilt werden muß um die Pressung von p_0 Atm. auf p Atm. zu steigern, mit $n = \frac{4}{3}$ also $n - 1 = \frac{1}{3}$:

$$Q = 3A(p - p_0)\, v$$

2) Zustandsänderung bei constanter Pressung.

Man erhält dieselbe sofort aus der allgemeinen Zustandsgleichung $pv^n = C$ indem $n = 0$ gesetzt wird, denn dann wird $v^n = v^0 = 1$ und also geht die Zustandsgleichung über in:

$$p = \text{constant} = C.$$

Um in diesem Falle den Endzustand aus dem Anfangszustand zu entwickeln handelt es sich nur um die Beziehungen zwischen Temperatur und Volumen im Anfangs- und Endzustand; diese ist aus der früheren Gleichung, wenn man nachstehend berücksichtigt, daß mit constantem p auch die Temperaturfunction ϑ constant sein muß:

$$\frac{\vartheta - \vartheta_0}{\vartheta_1 - \vartheta_0} = \left(\frac{v}{v_0}\right)^1 = \frac{v}{v_0}$$

Was die während der Zustandsänderung verrichtete Expansionsarbeit E betrifft, so erhält man diese im vorliegenden Falle natürlich am einfachsten:

$$E = p(v - v_0)$$

Die Wärmemenge Q, welche 1 Kgr Dampf mitgetheilt werden muß um bei constanter Pressung p das Volumen von v_0 auf v zu steigern, erhält man aus der allgemeinen vorhin aufgestellten Gleichung mit $n = 0$:

$$Q = \frac{n}{n-1}\, AE = \frac{n}{n-1}\, Ap(v - v_0)$$ und insbesondere für

Wasserdampf mit $n = \frac{4}{3}$: $$Q = 4Ap(v - v_0)$$

3) Zustandsänderung des Dampfes bei constantem innerem Arbeitsvermögen oder was dasselbe ist, bei constanter Eigenwärme.

Wie der Ausdruck für die innere Arbeit erkennen läßt, ist dieselbe constant bei den Änderungen von $p\,v\,T$, wenn das Product pv = constant ist. Dieses ist dann der Fall, wenn in der Zustandsgleichung $m = 1$ ist. Da dann:

$$pv = C = \text{constant wird.}$$

Dieser Gleichung gemäß ist die Zustandscurve in diesem Falle offenbar eine gleichseitige Hyperbel.

Die Beziehung zwischen Druck, spec. Volumen und Temperatur im Anfangs- und Endzustand ist im vorliegenden Falle:

$$\frac{T - T}{T - T_0} = 1 \quad \text{indem } pv = p_0 v_0 = \text{constant sein soll.}$$

Was die Expansionsarbeit E betrifft, so ergibt sich dieselbe nicht aus der vorhin aufgestellten Formel in unbestimmter Gestalt, indem dieselbe mit $m = 1$ übergeht in $E = \frac{0}{0}$.

Folglich kann man die Expansionsarbeit direct mit der allgemeinen Formel berechnen:

$$E = \int_{v_0}^{v} p\,dv \quad \text{wobei } p = \frac{p_0 v_0}{v} \text{ in diesem Falle ist und constant wenn } p_0 v_0 \text{ constant ist:}$$

$$= p_0 v_0 \int_{v_0}^{v} \frac{dv}{v} = p_0 v_0 \ln\left(\frac{v}{v_0}\right)$$

Die mitgetheilte Wärmemenge Q dient im vorliegenden Falle nur dazu um die Expansionsarbeit zu verrichten, so daß:

$$Q = AE = A p_0 v_0 \ln\left(\frac{v}{v_0}\right) \text{ ist, wie sich dies auch mit der allgemeinen Gleichung für } Q \text{ mit } m = 1 \text{ ergibt.}$$

4) Zustandsänderung ohne Mittheilung oder Entziehung von Wärme als Zustandsänderung nach adiabatischer Curve.

Offenbar erhält man diese besondere Art von Zustandsänderung, wenn man in der allgemeinen Zustandsgleichung $m = n$ setzt; dann soll $Q = 0$ werden, entsprechend keiner Mittheilung oder Entziehung von Wärme, gemäß unserer allgemeinen Gleichung für Q, $m = n$ sein.

Die entsprechende Zustandsgleichung heißt demnach:

$$p v^n = C = \text{constant.}$$

Nach der Annahme, welche der ganzen Entwicklung der allgemeinen Zustandsgleichung für Dämpfe zu Grunde gelegt wurde, ändert sich gemäß den Versuchen von Hirn und Cazin die absolute Temperatur bei der Zustandsänderung nach adiabatischer Curve immer proportional einer gewissen Potenz des Druckes, so daß man hat:

$T = a\,p^{\frac{n-1}{n}}$ wenn a eine bestimmte Constante vorstellt, und ferner kann man setzen mit $T = \beta\,p^{\frac{n-1}{n}}$ worin β ebenfalls eine Constante vorstellt. Demnach ändert sich im vorliegenden Falle der Zustandsänderung die absolute Temperatur T auch immer proportional der Function T. Man kann daher in diesem Falle den Werth des Quotienten $\frac{T-T}{T_0-T}$ einfach setzen:

$$\frac{T - T}{T_1 - T_0} = \frac{T}{T_1} \quad \text{und ferner} \quad \frac{p}{p_1} = \left(\frac{v_1}{v}\right)^n$$

Also: $$\frac{\sigma}{\sigma_1} = \left(\frac{v_1}{v}\right)^{n-1} = \left(\frac{p}{p_1}\right)^{\frac{n-1}{n}} = e^{n-1}$$

welche Formeln vollkommen mit d. entsprechenden für Gase früher entwickelten übereinstimmen.

D. Expansionsarbeit E von 1 kg Dampf ist unter diesen Umständen nach d. allgemeinen Formel mit m = n:

$$E = \frac{p_1 v_1}{n-1}\left(1 - e^{n-1}\right)$$

und insbesondere für Verhältniszahl $n = \frac{4}{3}$ d. $n-1 = \frac{1}{3}$:

$$E = 3 p_1 v_1 \left(1 - \sqrt[3]{e}\right)$$

Alle diese Formeln gelten natürlich nur so lange, als d. Sättigungszustand nicht überschritten ist. [illegible] über diesen Grenzzustand überschritten wird, [illegible] d. Dampf in einen gewissen Flüssigkeit und gleichzeitig [illegible] Dampf übergeht, [illegible] für diesen Specialfall entwickelten Formeln in Kraft treten.

[illegible] d. Grad d. Ueberhitzung zu bestimmen, welchen ein Dampf im Anfangszustand haben muss, damit derselbe bei d. [illegible] Expansion im Verhältniss $\frac{v_1}{v} = e$ im Endzustand gerade gesättigt wird [illegible].

Angenommen also 1 kg Dampf habe d. Anfangsspannung p_1 und d. absolute Temperatur [illegible] Dampf im Zustand d. Sättigung sei $= \sigma$ und d. entsprechende Spannung p, [illegible] Anfangszustand d. Dampf [illegible] absolute Temperatur im Anfangszustand [illegible] $\sigma_1 = \sigma + x$ unter x d. Grad d. Ueberhitzung im Anfangszustand verstanden. Dieser Dampf expandire nun im Verhältniss $e = \frac{v_1}{v}$ ohne Mittheilung od. Entziehung von Wärme. [illegible] Ueberhitzungsgrad x im Anfangszustand [illegible], damit d. Dampf im Endzustand gerade gesättigt sein soll. ([illegible] d. Dampf [illegible] nicht [illegible] Flüssigkeit, [illegible] früher entwickelten Formeln Anwendung finden müssen).

In den allgemeinen Formeln hat man diesen Angaben entsprechend zu setzen: $\sigma_1 = \sigma + x$; also d. Beziehung:

$$\frac{\sigma}{\sigma+x} = \left(\frac{p}{p_1}\right)^{\frac{n-1}{n}}$$

[illegible] d. Dampf gerade gesättigt werden soll, [illegible] entwickelte Beziehung, welche im gesättigten Zustand von Dämpfen zwischen p und σ stattfinden muss, nämlich:

$$\sigma = \alpha p^{\frac{m-1}{m}} + \beta p^{\frac{n-1}{n}}$$

oder, [illegible]: $\frac{m-1}{m} = a$ und $\frac{n-1}{n} = b$

$$\sigma = \alpha p^a + \beta p^b.$$

Diese Beziehung [illegible] Sättigungszustand entsprechend [illegible] σ entsprechen, [illegible] durch Substitution erhält:

$$\frac{\alpha p^a + \beta p^b}{x + \alpha p_1^a + \beta p_1^b} = \left(\frac{p}{p_1}\right)^b$$

od. durch Multipliziren [illegible] d. Nenner d. [illegible] Glieds und Dividiren durch p^b:

$$\alpha p^{a-b} + \beta = x p_1^{-b} + \alpha p_1^{a-b} + \beta$$

und wenn man noch durch $\alpha (p_1)^{a-b}$ dividirt:

$$\left(\frac{p}{p_1}\right)^{a-b} = \frac{x\,p_1^{-a}}{\alpha} + 1$$

$$\text{also } x = \alpha\,p_1^{a}\left[\left(\frac{p}{p_1}\right)^{a-b} - 1\right]$$

Nun ist aber: $\frac{p}{p_1} = \left(\frac{v_1}{v}\right)^{n} = e^{n}$

$$\text{Also } x = \alpha\,p_1^{a}\left[e^{n(a-b)} - 1\right] = \alpha\,p_1^{a}\left[\left(\frac{1}{e}\right)^{n(b-a)} - 1\right]$$

Hiernach kann man nun leicht d. erforderlichen Unterschiedsgrad berechnen, damit ein Festsitzen d. Achse zumal gewährleistet wird.

Insbesondere für Wasserkraft erhält man x, wenn man die schon bekannten Zahlen einsetzt:

$$x = 335{,}24\,p_1^{0{,}06068}\left[\left(\frac{1}{e}\right)^{0{,}2524} - 1\right]$$

wobei aber p_1 in Atm. eingesetzt sein muß.

Zur leichteren Berechnung kann man für verschiedene Werte von p_1 d. Werte von x berechnen und tabellarisch zusammenstellen (siehe Graphik).

Hydraulik.

A. Gleichgewicht d. Flüssigkeiten (Hydrostatik).

Allgemeine Gesetze; Niveauflächen.

Denken wir uns irgend eine relative Flüssigkeit im relativen Gleichgew. bezüglich auf ein rechtwinkliges Coordinatensystem $x\,y\,z$. Die Flüssigkeit sei z. B. in einem Gefäße, sodass, indem d. Flüssigkeit in relativem Gleichgew. bezüglich d. Gefäßes ist, dadurch auch d. Flüssigkeit sich in relativem Gleichgew. mit d. Coordinatensystem befindet, welches mit d. Gefäß fest verbunden ist.

Für irgend einen Punkt, dessen Coordinaten $x\,y\,z$ sind, seien nun d. Componenten d. beschleunigenden, also auf d. Masseneinheit wirkenden Massenkraft $X\,Y\,Z$ im Punkte $x\,y\,z$ d. Flüssigkeit, wo diese Massenkraft einerseits herrühren kann, nicht nur von d. gegebenen äusseren Kräften als Schwerkräften, sondern auch von d. ergänzenden Kräften d. relativen Bewegung. Es sei ferner in demselben Punkte, dessen Coordinaten $x\,y\,z$ sind, d. Pressung d. Flüssigkeit bezeichnet mit p und die specifische Masse mit μ. Im Allgemeinen ist diese Masse als eine veränderliche Grösse zu betrachten, indem hinsichtlich d. Art d. Flüssigkeit keine einschränkende Voraussetzung gemacht ist. Diese Grössen $X\,Y\,Z\,p$ und μ sind im vorausgesetzten Gleichgewichtszustande d. Flüssigkeit natürlich unabhängig von d. Zeit t, also Functionen lediglich d. Coordinaten. Bezüglich d. X Achse ist (siehe Seite

$$X - \frac{1}{\mu}\frac{dp}{dx} = \frac{du}{dt} + u\frac{du}{dx} + \ldots\ldots$$

Die Glieder d. rechten Seite enthalten d. Geschwindigkeitscomponenten $u\,v\,w$, diese sind aber im vorausgesetzten Fall $= 0$, da sich d. Flüssigkeit in relativer Ruhe bezüglich d. Achsen befindet, dann muss d. rechte Seite $= 0$ und mithin:

$$\frac{dp}{dx} = \mu X; \quad \frac{dp}{dy} = \mu Y \text{ und } \frac{dp}{dz} = \mu Z.$$

Wenn man diese 3 Gleichungen d. erste mit dx, d. 2te mit dy und d. 3te mit dz multiplicirt und addirt, so erhält man links d. vollständige Differential von p, da p nur von $x\,y\,z$ abhängt.

Also:
$$dp = \mu(X\,dx + Y\,dy + Z\,dz).$$

Diese Glg. lässt diejenige Änderung kennen, welche d. Pressung d. Flüssigkeit erfährt, wenn man von irgend einem Punkte x zu einem unendlich nahen $x + dx$ etc. übergeht. Da nun d. linke Seite dieser Glg. das vollständige Differential einer gewissen Function d. Coordinaten ist, so muss dasselbe auch von d. rechten Seite gelten und dazu ist bekanntlich erforderlich, dass d. Grössen folgenden Bedingungen entsprechen:

$$\frac{d(\mu Y)}{dz} = \frac{d(\mu Z)}{dy}; \quad \frac{d(\mu Z)}{dx} = \frac{d(\mu X)}{dz} \text{ und } \frac{d(\mu X)}{dy} = \frac{d(\mu Y)}{dx}.$$

Angenommen es sei ja auch den Umständen d. betreffenden Falls diese Function gefunden, von welcher $\mu(X\,dx + Y\,dy + Z\,dz)$ das vollständige Differential ist; diese Function sei bezeichnet mit $F(x\,y\,z)$, so folgt:

$$p = F(x\,y\,z) + B$$

unter B eine Constante verstanden, welche bestimmt sein wird durch d. Werth, welchen d. Pressung p in einem bestimmten Punkte besitzt, welcher nothwendig gegeben sein muss. Durch diese Glg. findet man dann d. Pressung in jedem beliebigen anderen Punkt und ebenso findet man jetzt auch für jeden beliebigen Punkt d. im Gleichgew. befindlichen Flüssigkeit d. spec. Masse μ, denn dieselbe entspricht d. Gleichung:

$$\mu = \frac{1}{X}\frac{dp}{dx} = \frac{1}{Y}\frac{dp}{dy} = \frac{1}{Z}\frac{dp}{dz}$$

Durch diese Formel ist in allen Punkten d. im Gleichgew. befindlichen Flüssigkeit bekannten spec. Masse μ, kennt man auch d. spec. Gew. $\gamma = \mu g$ und somit auch d. Druckhöhe, worunter d. Quotient $\frac{p}{\gamma}$ zu verstehen ist; dies ist nichts anderes als d. Höhe einer Flüssigkeitssäule von d. Grundfläche 1, deren Gew. = d. Pressung p an d. betreffenden Stelle ist. Insbesondere findet man durch diese Glch., durch welche p als Function von $x\,y\,z$ ausgedrückt ist, diejenige Pressung, die an verschiedenen Stellen d. Gefäßwandung stattfindet. Umgekehrt ist ferner durch diese Glch., wenn d. äußere Druck gegeben ist, welcher auf d. freie Oberfläche wirkt, die Gestalt dieser freien Oberfläche bestimmt. —

Es ist nun ferner von Interesse, das Gesetz näher in Betracht zu ziehen, nach welchem sich d. Pressung von Punkt zu Punkt in d. Flüssigkeit ändert und dazu ist es von Wichtigkeit einen neuen Begriff, nämlich den d. Niveauflächen einzuführen. Unter Niveaufläche wird jede so beschaffene Fläche verstanden, daß d. resultierende Massenkraft $P = \sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2}$ in jedem Punkt normal zu derselben gerichtet ist. Es läßt sich leicht angeben welches d. allgemeine Differentialglch. dieser so definierten Niveaufläche ist:

Versteht man unter den Coordinaten, die sonst beliebige Raumcoordinaten bedeuteten, nun d. Coordinaten einer solchen Niveaufläche, so wird offenbar d. Niveaufläche charakterisiert durch d. Glch.:

$$X\,dx + Y\,dy + Z\,dz = 0,$$

denn $X\,Y\,Z$ sind proportional den cos d. Winkel, unter welchen d. Kraft P gegen d. Axen geneigt ist; ebenso sind, wenn $x\,y\,z$ d. laufenden Coordinaten einer solchen Niveaufläche sind $dx\;dy\;dz$ proportional den cos d. Winkel, welche irgend eine an d. gegebenen Punkt gezogene Tangente mit d. Axen bildet. Diese Glch. drückt also aus, daß d. Winkel d. Richtung von P normal zu jeder Tangente, und damit normal zur Fläche sei und dies ist d. festgestellte Eigenschaft d. Niveaufläche. Hieraus ergibt sich sofort eine andere, sehr natürliche Eigenschaft d. Niveaufläche, ~~denn, wenn dieser~~ Ausdruck für jede Niveaufläche $= 0$ ist, so ist mit Rücksicht auf Gl. 2 für jede Niveaufläche $dp = 0$ also $p = \text{const}$, es haben also d. Niveauflächen d. Eigenschaft, daß in allen ihren Punkten d. Pressung constant ist. —

Was d. endliche Glch. d. Niveauflächen betrifft, so muß man bemerken, daß im Allgemeinen $X\,dx + Y\,dy + Z\,dz$ kein vollständiges Integral zu sein braucht, es wäre dazu erforderlich, daß $X\,Y\,Z$ solche Functionen d. Coordinaten seien, die d. Beziehung entsprechen:

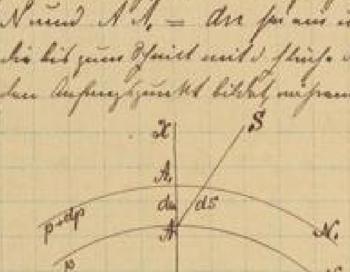
$$\frac{dY}{dz} = \frac{dZ}{dy}, \quad \frac{dX}{dy} = \frac{dY}{dx} \quad \text{und} \quad \frac{dX}{dz} = \frac{dZ}{dx},$$

dann ist aber je ein Factor, welcher diese Function herstellt, also d. allgemeinen vollständiges Integral. Um also d. Glch. d. Niveauflächen zu erhalten, muß man sie mit je multiplicieren und integriert dann

$$F(x\,y\,z) = C.$$

unter F diejenige Function verstanden, welche in Glch. 6 vorkommend. Dabei ist d. Constante C, welche gleich p – einen verschiedenen Werth für verschiedene Niveauflächen und einen gleichen Werth für gleiche Niveauflächen hat eine arbiträre Constante. —

Es sei N eine solche Niveaufläche, in deren Punkten d. Pressung $= p$ ist, in d. unendlich nahe gelegenen nächsten Niveaufläche N_1 herrsche d. Pressung $p + dp$, es sei A irgend ein Punkt d. Niveaufläche N und $AA_1 = dn$ sei ein unendlich kl. Element d. im Punkte A zur Fläche N errichteten Normale, die bis zum Schnitt mit d. Fläche N_1 geht. d. Coordinatenaxen sollen so angenommen werden, daß A den Anfangspunkt bildet, während AA_1 d. X axe ist. Die Componenten und d. Richtungen d. Axen von dp sind:



$y = z = 0$ und $X = \pm P$; ferner ist $dx = dn$ und somit nach d. allgemeinen Gl. für dp: $dp = \pm \mu P\,dn$

Wenn dp positiv ist, so kann in d. Gl. blos $+$ stattfinden, es ist dann: $dp = \mu P\,dn$, daraus sieht offenbar, daß d. Kraft P nur d. Richtung von A nach A_1 haben kann und zwar muß dieselbe Richtung überall von einer zur anderen Niveaufläche bleiben, und zwar in dem Sinne, in welchem d. Pressung p wächst. Diese Entfernung $dn = AA_1$ wird an verschiedenen Stellen verschieden sein.

Da dp für diese Niveauflächen überall d. gleichen Werth hat, so ist dn umgekehrt proportional dem Producte $\mu . P$ und da μ u. P endliche Werthe haben, so kann dn niemals $= 0$ sein. Denkt man sich jetzt ferner d. Flüssigkeit von Linien durchzogen, welche d. Niveauflächen senkrecht durchschneiden, so kann jede dieser Linien eine Linie größter Pressungsänderung genannt werden; also ist d. resultirende Kraft P in jedem Punkte einer im Gleichgew. befindlichen Flüssigkeit tangential an d. betreffende Linie größter Pressungsänderung gerichtet und zwar in dem Sinne, in welchem d. Pr. wächst und d. Product aus P u. μ ist umgekehrt proportional d. Linienelement d. betreffenden Linie größter Pressungsänderung, welches zwischen 2 unendl. nahen Niveauflächen enthalten ist. Wenn d. Flüssigkeit eine tropfbare ist, so kann man bei ihr 2 Oberflächen unterscheiden: d. Wandoberfläche und d. freie Oberfläche. —

Ist bei einer im Gleichgew. befindlichen tropfbaren Flüssigkeit d. ausgeübte Druck in allen Punkten d. freien Oberfl. gleich groß, so ist d. freie Oberfl. selbst eine Niveaufl. Wenn nun auch d. Ausdruck $X dx + Y dy + Z dz$ nicht d. vollständige Differential zu sein braucht, so ist doch d. Fall bemerkenswerth, in welchem schon ohne Multiplication mit μ das vollständige Differential hergestellt ist. Die Function d. Coordinaten, deren Differential d. Ausdruck ist, sei U; U wird später d. **Kraftfunction** genannt. Es geht dann d. Glch. für dp über in: $dp = \mu . dU$ und d. endl. Gl. d. Niveaufl. ist in diesem Fall:

$$U = C.$$

Wenn man d. Ausdruck von $dp = \mu\, dU$ und anderseits $= \mu P dn$ gleich setzt, so folgt:

$$P = \frac{dU}{dn}.$$

Dieser Ausdruck gilt nicht nur allgemein für d. Richtung AA_1 wo A_1 d. normale Richtung zur Niveaufl. ist, sondern auch für eine beliebige von A aus gezogene Richtung AS. ds sei ein unendl. kl. Stück auf d. Strecke AS, S d. Kraftcomponente von P in d. Richtung auf AS, so ist:

$$S = X \frac{dx}{ds} + Y \frac{dy}{ds} + Z \frac{dz}{ds},$$

wenn $dx\ dy\ dz$ d. Projectionen von ds auf d. Axen bedeuten, also:

$$S = \frac{\partial U}{\partial x}\frac{dx}{ds} + \frac{\partial U}{\partial y}\frac{dy}{ds} + \frac{\partial U}{\partial z}\frac{dz}{ds}.$$

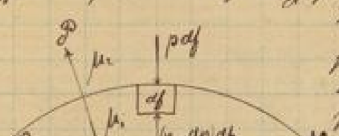
Diese Gl. ist nichts anderes als d. vollständige Differential von U, also:

$$S = \frac{dU}{ds}.$$

Ferner ist auch, da dp ein vollständiges Differential ist, $\mu\, dU$ auch ein vollständiges Differential, wenn aber μ eine Function von U ist, so ist U mit μ constant, also wenn U constant ist, so ist auch μ constant. —

Die Niveaufl. haben 3 Eigenschaften:
1) In allen Punkten ist d. resultirende Massenkraft normal zur Niveaufl. gerichtet.
2) Die Pressung in allen Punkten einer Niveaufläche ist constant
3) d. Wärmezustand ändert sich nur von einer zur anderen Niveaufl.

Handelt es sich um Flüssigkeiten, die gemischt sind, so finden diese Regeln nur statt, wenn in allen Punkten gleiches Mischungsverhältniß stattfindet. Wäre aber μ willkürlich gegeben, so könnte d. Ausdruck $\mu(X dx + Y dy + Z dz)$ nur dann ein vollständiges Differential sein, wenn schon d. Ausdruck in d. Klammern ein vollständiges Differential ist und dies kann bei Flüssigkeiten im Allgemeinen angenommen werden wegen ihrer geringen Zusammendrückbarkeit. Dasselbe ist auch dann d. Fall, wenn es sich um ein discontinuirliches Gemisch verschiedener Flüssigkeiten handelt. Es ist leicht zu erkennen, daß, wenn ~~[illegible]~~ in einem solchen Flüssigkeitsgemisch Gleichgew. herrscht, die spec. Masse in d. Richtung zunimmt, in welcher d. Richtung von P geht. Ist nämlich N eine solche Trennungsfläche, in welcher 2 Schichten von verschiedener spec. Masse sich berühren, dF ein unendl. kl. Stück dieser Fläche, die spec. Masse auf d. einen Seite $= \mu_1$ und auf d. anderen μ_2 und zwar sei μ_2 d. spec. Masse auf d. Seite, nach welcher d. Pr. p zunimmt. Denkt man sich über dF als Basis ein unendl. kl. Prisma abgegrenzt. Hierzu kommt [illegible] auf d. Masse wirkende Kraft $= P$ mal d. Masse d. Flüssigkeitselements, diese Masse ist aber $\mu_1 . dF . dn$, folglich die Massenkraft $= \mu_1\, dF . dn . P$ und mithin:



$$dF(\mu_1 P dn - dp) = 0.$$

Nun ist d. Gleichgew. dann als ein sicheres zu bezeichnen, wenn in Folge einer unendl. kl. Störung dasselbe sich selbst wieder hergestellt wird. Angenommen diese Störung werde dadurch herbeigeführt, dass in d. Raum d. Flüssigkeitselements eine unendl. kl. Flüssigkeitsmenge hineintrete, welche d. Flüssigkeitsdichte μ_2 hat, dann erhält man für diesen gestörten Zustand die resultirende Kraft, welche auf d. Flüssigkeitselement wirkt, indem man μ_2 an die Stelle von μ_1 in d. letzten Gl. setzt, also:

$$d\tau(\mu_2 P\, dn - dp) = \text{d. resultirenden Kraft.}$$

Soll d. Gleichgew. sicher sein, so muss dieser Ausdruck negativ sein. Setzt man hier für dp seinen Ausdruck $\mu_1 P\, dn$, so ist dieser Ausdruck positiv od. negativ, je nachdem μ_2 grösser od. kleiner als μ_1 ist; offenbar ist diese Sicherheitsforderung gewiss gehörig erfüllt unt. d. Umstand, dass μ_1 u. μ_2 eine endl. Verschiedenheit haben.

Handelt es sich um d. relative Ruhe, so ist es erforderlich, dass d. Massenkraft P in d. Componenten X Y Z auch diejenige ergänzende Kraft in sich begreift, die durch d. eigene Bewegung d. Coordinatensystems erforderlich wird. Die 2te Ergänzungskraft d. relativen Bewegung ist aber für diesen Fall = 0, es kommt also nur d. erste Kraft hinzu, die zu Massenkraft nichts anderes ist, als d. entgegengesetzte Beschleunigung d. Punktes, wenn er mit d. Coordinatensystem fest verbunden ist. P ist also d. Resultante d. Schwerkraft und d. Kraft, welche hinzugefügt werden muss, um d. relative Ruhe wieder in absolute zu verwandeln. Die Ergänzungskraft ist gleich gross und gleich gerichtet mit d. Beschleunigung.

Natürlich kann dieselbe nicht immer in einem solchen Fall d. relative Ruhe d. Flüssigkeit gegen d. Coordinatensystem möglich sein, nur bei ganz besonderen Bewegungsarten ist dies möglich; vor allem dagegen muss d. resultirende Massenkraft P durchaus unabhängig von d. Zeit sein, damit eine solche relative Ruhe dauernd bestehe, ferner ist erforderlich, dass d. Translationsbewegung d. Coord.-Systems mit einer Beschleunigung von constanter Grösse und Richtung gegen d. Coord.-System stattfindet und dass, wenn gleichzeitig d. Coord.-System in Rotation begriffen ist, dieselbe um eine Axe von fester Lage stattfindet. —

Je nach d. Art d. gegebenen gewissen Massenkraft kann d. zulässige eigene Bewegung d. Coord.-Systems auch an andere Bedingungen geknüpft sein, d. früheren allgemeinen Gesetze gelten übrigens allgemein, von welcher Art d. Flüssigkeit auch sein möge. —

I. Gleichgewicht d. Wassers.

Voraussetzungen.

Es befinde sich d. Wasser in einem Gefässe, dessen Dimensionen als klein genug im Vergleich mit d. Dimensionen d. Erde vorausgesetzt werden sollen, um d. beschleunigende Schwerkraft g in allen Punkten als gleich gross und gleich gerichtet voraussetzen zu dürfen; diese beschleunigende Schwerkraft g schliesst d. Einfluss d. Erdrotation bereits in sich, diese ist bereits d. Resultat d. Zusammenwirkung d. Anziehungskraft und d. Rotation d. Erde, so dass eine Ergänzung d. auf d. Flüssigkeit wirkenden Kraft nur noch dann überall erforderlich ist, wenn d. Gefäss eine eigene Bewegung bezüglich d. Erde besitzt, eine solche Bewegung soll daher hier schlechtweg d. Bewegung d. Gefässes genannt werden.

Ich setze ferner bezüglich dieses relativen Gleichgew. voraus, dass d. äussere Druck p. Flächeneinheit d. freien Oberfl. in allen Punkten gleich gross $= p_0$ sei; in d. Regel besteht dieser äussere Druck aus dem Atmosphärendruck und kann dann in d. That in allen Punkten als gleich gross vorausgesetzt werden. Die freie Oberfl. ist hiernach immer eine Niveaufl.

Bekanntlich ist nach d. vorhergehenden allgemeinen Bedingungen d. Stabilität d. Gleichgew. an d. Bedingung geknüpft, dass d. Dichtigkeit d. Flüssigkeit im Sinne d. Druckzunahme, also in demselben Sinne wachse, in welchem P gerichtet ist; nun ist aber d. Dichtigkeit d. Wassers bekanntlich von d. Pressung in nur äusserst geringem Grade abhängig (als tropfbare Flüssigkeiten sind nur äusserst wenig zusammendrückbar) so dass eine Änderung d. Dichtigkeit nur von ~~einer~~ übrigen Temperaturverschiedenheit herrscht und deshalb kann d. Wasser sich nur dann im stabilen Gleichgew. befinden, wenn d. Dr., in welchem Sinne d. wirkt, die Temperatur im Wasser von Schicht zu Schicht kleiner wird. Bei d. folgenden Betrachtungen will ich indeß nur von solchen etwaigen Temperaturverschiedenheiten absehen; sodaß d. spez. Masse als durchaus constant vorausgesetzt werden darf, wenigstens an allen solchen Punkten d. Flüssigkeit die von d. Oberfl. eine endl. Entfernung haben. Unmittelbar an d. Oberfl. d. Flüssigkeit kann nämlich allerdings durch d. Einfluß d. Molekularkräfte eine ganz wesentlich verschiedene Dichtigkeit stattfinden, überhaupt eine ganz andere Molekular… d. einzelnen Theile und es können dadurch d. Erscheinungen d. Gleichgew. besonders dann wesentlich modificirt werden, wenn d. Gefäß d. Flüssigkeit stattfindet, während dieselbe zwischen sehr engen festen Wänden, also in kleinen Räumen sich befindet, weshalb diese Molekularkräfte unter d. Namen Capillarität zusammengefaßt werden. Hiervon muß jedoch auch abgesehen werden. —— Die auf d. Flüssigkeit wirkenden Kräfte sind demnach: 1) die Schwerkraft und 2) eventuell d. erste Erzeugungskraft mit Rücksicht auf d. eigene Bewegung d. Gefäßes. –

Was die im Allgemeinen hierbei mögliche Art d. eigenen Bewegung d. Gefäßes betrifft, damit d. Wasser sich in relativer Ruhe gegen dasselbe befinden können, so ist hervorzuheben, daß dieselbe abgesehen von d. Massenkraft mit d. Translationsgeschwindigkeit und einer Rotationsgeschwindigkeit besteht, im vorliegenden Fall, wenn ferner Bestandtheil d. resultirenden Massenkraft d. d. Schwerkraft hinzukommt muß offenbar d. weitere Beschränkung hinzugefügt werden, daß d. Axe d. Gefäßes, um welche dasselbe rotirt, durchaus vertical ist, widrigenfalls würden d. Componenten $X\,Y\,Z$ d. resultirenden Massenkraft d. Coordinatenaxen veränderlich werden gegen d. Richtung d. Schwerkraft, was nicht sein darf, wenn eine relative Ruhe d. Flüssigkeit gegen d. Gefäß bestehen soll.

a. Gleichgewicht d. Wassers ohne Rücksicht auf Molekularkräfte.

Niveauflächen und Druckhöhe in verschiedenen Fällen.

Die Coordinatenaxen seien zunächst fest verbunden mit d. Gefäße, d. Z Axe sei vertical und zwar positiv in d. Richtung von unten nach oben also z. B. d. Ursprung im Boden d. Gefäßes. Es sei:

1) das Gefäß in Ruhe od. es habe höchstens eine geradlinige und gleichförmige Translationsbewegung nach irgend einer Richtung.

In diesem Fall ist d. Erzeugungskraft d. relativen Bewegung $= 0$ und man hat also:

$$X = 0 \quad Y = 0 \quad \text{und} \quad Z = \div g.$$ einfach als Componenten d. Massenkraft. Die Differentialgl. d. Niveaufl. ist:

$$X dx + Y dy + Z dz = 0$$ in diesem Fall also: $\div g dz = 0$

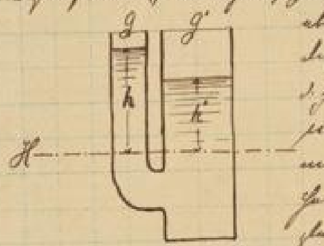
und demnach d. Gl. d. Niveaufl. in endl. Form: $z = \text{const.}$ d. h. d. Niveauflächen sind horizontale Ebenen, insbesondere ist also im Gleichgew.-zustande auch d. freie Oberfl. d. Wassers eine Horizontalebene.

Was d. Dr. p betrifft, die an irgend einer Stelle in d. im Gleichgew. befindlichen Flüssigkeit stattfindet, so ist allgemein: $dp = \mu(X dx + Y dy + Z dz)$ also hier: $dp = \div \mu g dz$

und also $p = \div \mu g z + B.$ — Ist insbesondere h d. Höhe d. freien Oberfl. d. Flüssigkeit über d. Ursprung d. Coord., so muß wenn man in dieser Gl. $z = h$ setzt, $p = p_0$ werden, also $=$ dem gegebenen äußeren Druck auf d. freie Oberfl., also $p_0 = - \mu g h + B$

oder. $p - p_0 = \mu g (h - z)$; nun ist μg d. Product aus spez. Masse und Beschleunigung d. Schwere nichts anderes als d. spez. Gew. d. Wassers, welches unterändlich auch constant sein und mit γ bezeichnet werde, demnach Gl.: $\frac{p - p_0}{\gamma} = h - z$. Hiernach wurde d. Quotient $\frac{p}{\gamma}$ bereits früher d. Druckhöhe in d. Punkte genannt, in welchem d. Dr. p stattfindet, ebenso $\frac{p_0}{\gamma}$ an d. fr. Oberfl., und mithin $\frac{p - p_0}{\gamma} =$ Unterschied d. Druckhöhe in d.

beliebigen Punkt über das in d. freien Oberfl.; dieser Ueberschuß sei genannt: die Ueberdruckhöhe in dem Punkte, in welchem d. Pressung = p ist, $h - z$ ist d. Tiefe dieses Punktes unter d. freien Oberfl. Diese Gl. drückt also aus in Worten, daß d. Ueberdruckhöhe in irgend einem Punkte = der Tiefe dieses Punktes unter d. freien Oberfl. ist. Was d. Gesetz betrifft, daß in allen Punkten einer und derselben Horizontalebene ein gleicher Druck stattfindet, so ist dies Gesetz offenbar bedingt durch d. Voraussetzung, daß man von irgend einem Punkte d. Horizontalebene zu einem andern gelangen könne, indem man beständig innerhalb d. nämlichen Flüssigkeit von constanter Dichtigkeit bleibt. — Denken wir uns 2 communicirende Gefäße von irgend einer Form, in denselben mögen sich 2 verschiedene Flüssigkeiten befinden, die sich nicht miteinander mischen. Nach d. allgemeinen Gesetzen d. Flüssigkeiten kann d. Gleichgew. nur in d. Weise stattfinden, daß d. Ebene, in welcher sich d. Flüssigkeiten berühren eine horizontale sei. Es sei diese Berührungsebene, die eine Flüssigkeit steht in d. einen Schenkel bis zur Höhe h über diese Ebene die andere bis zur Höhe h'. Damit d. Gleichgew. statt hat muß d. Flüssigkeit im Gefäße g' die leichtere von beiden sein. Wenn ich also mit μ' die spez. Masse d. Flüssigkeit in g' bezeichne und mit μ d. spez. Masse d. andern, so muß $\mu > \mu'$ sein. Es wird in allen Punkten irgend einer Horizontalebene, die tiefer liegt als d. Berührungsebene H, eine durchweg gleiche Pressung stattfinden, man kann also bei d. Folgerungen d. Gl. für d. [illegible] vollständig [illegible] beibehalten, dagegen für eine Horizontalebene,



die höher als H liegt, müßte man durch d. Masse μ' hindurchgehen, hier trifft d. Bedingung nicht zu, es erhält d. Höhe H in einer und derselben Ebene d. Pr. d. Flüssigkeiten gleich groß sei; bis zu Ebene H gilt dieses Gesetz in beiden Gefäßen zusammen, oberhalb nicht mehr. Es fragt sich nun, wie weit diese Ebene H hinaufreicht? Was dies betrifft, so kann man dieses Gesetz für jedes Gefäß für sich Anwendung bringen. Legt man also d. Ursprung d. Coord. in diese Horizontalebene H und versteht unter p_0 d. Pr. in irgend einem Punkte d. Ebene H, so erhält man mit Rücksicht auf d. erste Gefäß: $p - p_0 = \mu g h$. Für d. 2te Gefäß und zwar für alle Punkte, die oberhalb d. Ebene H liegen hat man: $p - p_0 = \mu' g h'$, wo in beiden Fällen $p - p_0$ denselben Werth hat, wenn ich d. äußeren Druck auf beide Gefäßoberfl. gleich groß setze; also muß im Gleichgewicht: $\mu h = \mu' h'$ sein; es verhalten sich also d. Höhen, bis zu welchen d. Flüssigkeiten in communicirenden Röhren hinaufreichen, umgekehrt wie d. spez. Gew. d. Flüssigkeiten.

2) Das Gefäß, in welchem d. Wasser in relativer Ruhe sei, befinde sich selbst in Bewegung.

Ich nehme wiederum d. Coord.-Axen fest verbunden mit d. Gefäße und zwar so, daß d. Z Axe vertikal und positiv nach oben gerichtet ist. D. Gefäß kann, wie schon hervorgehoben allgemein eine solche Bewegung haben, daß es um eine vertikale Axe mit constanter Winkelgeschwindigkeit rotirt und dabei zugleich eine translatorische Beschleunigung besitzt. —

Die Z Axe möge mit d. Rotationsaxe d. Gefäßes zusammenfallen, dann steht es mir frei, die beiden andern Axen zweckmäßig zu wählen, es seien dieselben so gewählt, daß d. constante Richtung d. Translationsbeschl. d. Gefäßes beständig in d. XZ Ebene bleibt und also d. Componente im Sinne d. Y Axe = 0 ist. Dadurch sind d. Coord.-Axen in ganz bestimmter Weise angenommen bis auf willkürliche Lage d. Ursprungs. Die constante Winkelgeschwindigkeit d. Gefäßes um d. Z Axe sei = ω. Die Componente d. Translationsbeschl. im Sinne d. X Axe sei = αg, wo α eine positive Constante, welche durch Annahme von X erreicht werden kann. D. Componente d. Translationsbeschl. im Sinne d. Y Axe ist = 0 und im Sinne d. Z Axe kann sie ~~nicht allgemein~~ mit $\pm Cg$ bezeichnet werden. Hier muß $\pm$ hinzugefügt werden, da über d. Sinn d. Z Axe schon verfügt war. Diese Componenten d. Translationsbeschl. d. Gefäßes bedingen entsprechende Bestandtheile d. Kraftcomponenten $X\ Y\ Z$, welche diesen Beschl.-componenten gleich aber gerade entgegengesetzt gerichtet sind. Was d. Rotation d. Gefässes mit d. Winkelgeschw. ω betrifft, so bedingt diese eine Beschl., welche horizontal, senkrecht zu d. Z Axe gerichtet, deren Componenten diese Centrifugalbeschl. entsprechen. Diese sind $-\omega^2 x$ und $-\omega^2 y$ bezüglich beider Axen. Es sind diese 3 Componenten d. Beschl. d. Punktes $x\, y\, z$, welche er besitzt, wenn man ihn mit d. Gefäss fest verbunden denkt. Diese 2 Beschl. bedingen nun auch entsprechende Bestandtheile d. Kraftcomponenten $X\, Y\, Z$, welche diesen gleich aber gerade entgegen gesetzt gerichtet sind; schliesslich hat man in diesem Fall für $X\, Y\, Z$ also für d. Componenten d. beschleunigenden Massenkraft folgende Ausdrücke:

$$X = -ag + \omega^2 x;\quad Y = \omega^2 y \text{ und } Z = \mp cg - g$$

demnach lautet d. Differentialgl. d. Niveaufl.:

$$(-ag + \omega^2 x)\,dx + \omega^2 y\,dy - (1 \pm c)\,g\,dz = 0.$$

Wenn man d. Anfangspunkt d. Coord. im Sinne d. X Axe verlegt, so dass d. neue X Coord. $= x_1$ wird und zwar d. Art, dass $x = \frac{ag}{\omega^2} + x_1$, so ist $dx = dx_1$ und d. Gl. lautet:

$$\omega^2 (x_1\,dx_1 + y\,dy) - (1 \pm c)\,g\,dz = 0$$

Wenn man d. ganze Gl. durch $\frac{\omega^2}{2}$ dividirt, d. 2te Glied auf d. rechte Seite bringt und dann integrirt, so folgt:

$$x_1^2 + y^2 = \left(x - \frac{ag}{\omega^2}\right)^2 + y^2 = 2\frac{(1 \pm c)}{\omega^2}\,g\,(z - C). \quad \text{———} \quad \alpha$$

Die Gl. lässt sofort erkennen, dass d. Niveauflächen eine Gruppe congruenter Umdrehungsparaboloide sind, die d. Parameter $2\frac{(1\pm c)}{\omega^2}g$ haben, deren gemeinschaftliche Axe in d. Entfernung $\frac{ag}{\omega^2}$ von d. Z Axe ist und es unterscheiden sich diese verschiedenen Niveaufl. nur dadurch, dass ihre Scheitelpunkte in verschiedenen Höhen über d. Ursprung d. Coordinaten liegen. Insbesondere stellt diese Gl. d. Gl. d. freien Oberfl. d. Flüssigkeit dar, wenn man d. Constante C nur so bestimmt, dass d. Volumen, welches durch d. betreffende Paraboloid von d. Gefässraum abgeschnitten wird, gleich ist d. gegebenen Wasservolumen. Es fragt sich ferner, welche Pressung unter solchen Umständen für eine gegebene Stelle stattfindet. Zu diesem Zweck will ich davon ausgehen, dass bekanntlich: $\frac{dp}{dz} = \mu Z$ ist und da: $Z = \mp cg - g$

$$\frac{dp}{dz} = -\mu g (1 \pm c). \text{ Hieraus folgt durch Integration: } p = -\mu g (1 \pm c) z + f(x\,y),$$

wenn $f(x\,y)$ eine von z unabhängige Function bedeutet.

Diese Gl. liefert d. Pressung in einem Punkt A, dessen Coord. $x\, y\, z$ sind. Denkt man sich durch A eine verticale Linie gezogen und bezeichnet mit A_0 ihren Schnittpunkt mit d. freien Oberfl., so sei h d. Z Coord. d. freien Oberfl., also d. Höhe über d. Ursprung; da nun in jedem Punkt A_0 derselbe gegebene Dr. p_0 herrscht, so muss dieselbe Gl. befriedigt werden für $z = h$ und $p = p_0$, während x u. y dieselben bleiben,

also: $p_0 = -\mu g (1 \pm c)\, h + f(x\,y)$ und subtrahirt man beide Gl. von ~~einander~~:

$p - p_0 = \mu g (1 \pm c)(h - z)$ oder wenn ich d. Product μg = spec. Gew. mit γ bezeichne:

$$\frac{p - p_0}{\gamma} = (1 \pm c)(h - z)$$

$\frac{p - p_0}{\gamma}$ ist wieder d. sog. Ueberdruckshöhe; dieselbe ist also proportional d. vertical gemessenen Tiefe d. Punktes von d. freien Oberfl. Die Ueberdruckshöhe würde dieser Tiefe genau gleich sein, wenn $c = 0$ wäre, also wenn d. Gefäss keine Verticalbeschleunigung hätte. Durch dieses Gesetz ist d. Bestimmung d. Dr. in allen Punkten zurückgeführt auf d. Bestimmung d. freien Oberfl. — Was d. besonderen Fälle betrifft, die in d. hier vorausgesetzten allgemeinen Aufgabe enthalten sein können, so vermuthe ich, als hätte d. Gefäss **nur eine Translationsbeschleunigung**, also $\omega = 0$, so wird d. eben stehende Gl. α unbrauchbar, indem die rechte Seite derselben für $\omega = 0$ unendl. wird. Man muss also zurückgehen auf d. Differentialgl., aus welcher diese Gl. entstanden ist, nämlich: $(-ag + \omega^2 x)\,dx + \omega^2 y\,dy - (1 \pm c)\,g\,dz = 0$.
Setzt man hier $\omega = 0$, so lautet d. Gl.: $-a\,dx - (1 \pm c)\,dz = 0$. und hieraus durch Integration:

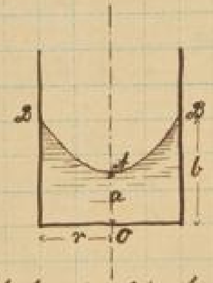
$$z = -\frac{a}{1 \pm c}\,x + C.$$

Die Niveaufl. sind also in diesem Falle parallele Ebenen, welche d. XZ Ebene rechtwinklig schneiden in solchen Geraden, die mit d. X Axe den Winkel φ bilden derart, dass: $tg\,\varphi = -\frac{a}{1 \pm c}$ ist. Diese Ebenen wären horizontal, wenn $tg\,\varphi = 0$ wäre, also wenn $a = 0$ wäre. Dies ist d. Fall, wenn d. Translationsbeschl. vertical ist. Bemerkenswerth ist hierbei noch d. Fall, dass d. Gefäss selbst vermöge d. Schwere frei fällt. Dann hat d. Gefäss eine Translationsbeschl. mit einer constanten Beschl., welche in diesem Fall = d. Beschleunigung g d. Schwere wäre. ⟶

Dann ist: $a = 0$ und $\pm c = -1$. Hiernach würde folgen: $z = \frac{0}{0} x + C$. Dies ist offenbar von vornherein leicht begreiflich, in diesem Fall ist d. resultierende Kraft P für irgend ein Flüssigkeitselement $P = Z = 0$. Es wirkt hier d. Schwerkraft auf d. Masseneinheit pr. 1 kg. hinzu kommt eine entgegengesetzte, durch die eigene Bewegung d. Gefäßes, d. ebenso groß ist, also $P = 0$, es kann also in diesem Fall d. Wasser sich in jeder beliebigen Form gegen d. Gefäß im Gleichgewicht befinden. –

Von größerem Interesse ist d. Fall, daß d. Gefäß nur um d. Z Achse rotiert, für diesen Fall erhält man d. Gl. d. Niveauflächen aus d. allgemeinen Gl. indem man $a = c = 0$ setzt, also:

$$x^2 + y^2 = \frac{2g}{\omega^2}(z - C).$$



Die angegebenen parabolischen Umdrehungsflächen haben d. Z Achse selbst zur gemeinschaftlichen Achse. Was d. Gestalt d. Gefäßes selbst betrifft, habe dasselbe d. Gestalt eines vertikalen Kreiszylinders, der horizontale Querschnitt ist also ein Kreis vom Radius r. O sei d. Coordinatenursprung. d. Meridianschnitt d. freien Oberfl. ist eine Parabel, dieselbe sei DAD. Es sei d. Höhe d. Scheitelpunktes A über O also $AO = a$ und $BO = b$, dann besteht d. Aufgabe darin a u. b zu bestimmen, wenn r und d. Wasservolumen V im Gefäß gegeben ist. $V = \pi r^2 h$. also h d. Höhe, bis zu welcher diese Wassermenge im Gefäß reichen würde, wenn dasselbe nicht rotiert. Wenn nun ein solches Gefäß mit d. Radius r mit d. constanten Winkelgeschw. ω um seine geometrische Achse in Rotation versetzt wird, so fragt es sich, wie groß werden a u. b im Gleichgew.-Zustand sein. Die entsprechende Gl. d. freien Oberfl. ergibt sich aus d. allgemeinen Gl., wenn man $C = a$ setzt, da C die Höhe d. Scheitelpunktes über d. Ursprung bedeutet, da für $C = z - C$, $x = y = 0$ wird; also:

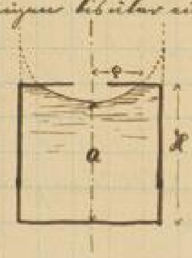
$$x^2 + y^2 = \frac{2g}{\omega^2}(z - a)$$

Es ist nun bekanntlich d. Volumen eines Umdrehungsparaboloids = d. Hälfte eines Kreiszylinders von gleicher Grundfl. und Höhe, also d. Volumen, welches enthalten ist zwischen d. freien Oberfl. und d. Ebene BD. ist = d. Hälfte eines Cylinders von d. Grundfläche πr^2 und d. Höhe $b - a$, also ist auch d. übrige Wasservolumen, welches zwischen der durch d. Scheitelpunkt A und durch DD gehenden Horizontalebenen = d. Hälfte des zwischen diesen beiden Ebenen liegenden Cylinders vom Radius r. Also das über A befindliche Wasservolumen ist: $= \frac{1}{2}\pi r^2 (b - a)$. Dieses Wasservolumen läßt sich anderweitig ausdrücken: Im Ruhezustand d. Gefäßes hat dieses selbe Wasservolumen d. Gestalt eines Kreiszylinders von d. Grundfl. πr^2 und d. Höhe $h - a$. Also folgt: $b - a = 2(h - a)$ oder: $b + a = 2h$.

Wenn man andererseits in d. Gl. d. freien Oberfl. $z = b$ setzt, so wird $x^2 + y^2 = r^2$ und folglich erhält man aus dieser Gl.: $b - a = \frac{r^2\omega^2}{2g}$. Nun ist $r\omega$ offenbar d. Peripheriegeschwindigkeit, bezeichnet mit u und also: $b - a = \frac{u^2}{2g}$. Mit Hilfe dieser beiden Gl. sind a u. b bestimmt und man findet: $a = h - \frac{u^2}{4g}$ und $b = h + \frac{u^2}{4g}$.

Also wenn ein solches zylindrisches Gefäß anfänglich ruht und das darin befindliche Wasser im Gleichgew. ist, und wenn dann d. Gefäß mit d. Winkelgeschw. ω um seine Achse gedreht wird, so wird d. Wasser in d. Mitte um ebensoviel herabgedrückt, wie es am Rand in d. Höhe geht, nämlich um d. Hälfte d. Geschwindigkeitshöhe, welche d. Peripheriegeschw. d. Gefäßes entspricht.

Wenn d. Gefäß nun aber oben durch einen horizontalen Deckel geschlossen wäre, wodurch d. Emporsteigen bis über eine gewisse Grenze verhindert wird, so kann sich in dieser Weise d. Gleichgew. natürlich nicht ausbilden, es wird dann d. freie Oberfl. eben unterbrochen sein.



Dies ist ein Fall, der in d. Technik sehr oft vorkommt und es fragt sich, welches wird unter diesen Umständen die Höhe a sein? Es muß natürlich in diesem Fall die Höhe dieses oberen Randes über d. Ursprung $= H$ gegeben sein, welche Höhe größer als h vorauszusetzen ist, damit bei ruhendem Gefäß d. obere Fläche noch etwas tiefer als dieser Rand steht. Dagegen sei H kleiner als d. Höhe b, bis zu welcher

d. Randlinie steigen würde, wenn d. Deckel nicht vorhanden wäre, also: $b > H > h$.

Es fragt sich, wenn nun d. Rotation eintritt, bis zu welcher Tiefe sinkt nun a; es sei in diesem Fall d. Halbmesser d. Kreises, in welchem d. freie Oberfl. die obere Deckelebene trifft $= \varrho$, dann ist d. Volumen, welches zwischen dieser Deckelebene und d. freien Wasseroberfl. enthalten ist $= \frac{1}{2}\pi\varrho^2(H-a)$, dieses selbe Volumen ist aber $= \pi r^2(H-h)$, denn ursprünglich hatte dieses Luftvolumen d. Gestalt eines Cylinders von d. Grundfl. πr^2 und d. Höhe $H-h$. Wenn man in dieser Gl.:

$$\tfrac{1}{2}\pi\varrho^2(H-a) = \pi r^2(H-h)$$

für ϱ^2 seinen Werth setzt, welcher sich aus d. Gl. d. freien Oberfl. ergibt indem $z = H$ gesetzt wird, also wenn man setzt: $\varrho^2 = \frac{2g}{\omega^2}(H-a)$ so erhält man:

$$\frac{g}{\omega^2}(H-a)^2 = r^2(H-h)$$

und daraus ergibt sich, wenn man $r\omega = u$ setzt:

$$a = H - u\sqrt{\frac{H-h}{g}}.$$

Was d. Dr. betrifft, welcher in einem solchen Fall an irgend einer Stelle herrscht, so findet man diesen mit Rücksicht darauf, daß d. Ueberdruck an dieser Stelle gleich ist d. vertical gemessenen Tiefe dieses Punktes unter d. freien Oberfl., wobei man sich diese Oberfl. ergänzt denken muß bis über den Deckel hinaus. —

Hydrostatischer Druck auf ausgedehnte Flächen.

Wenn man in irgend einer Flüssigkeit d. Dr. so kennt, sowie d. Druck auf d. Oberfl., so kann man daraus den resultirenden Druck bestimmen, den d. Wasser auf irgend eine Fläche ausübt. Es kommen dabei 2 Auffassungen in Betracht, entweder handelt es sich um denjenigen Druck, den d. Wasser vermöge seiner Schwere ausübt oder um denjenigen, den es mit Rücksicht auf d. Schwere und den Druck auf d. freie Oberfl. ausübt. Diese Berechnung ist nur für den Fall von besonderem Interesse, wenn d. freie Oberfl. eine horizontale Ebene ist, welches hiermit vorausgesetzt sei. Dann kann d. Druck, der auf irgend eine Fl. ausgeübt wird, aufgefaßt werden als ausgeübt von d. Schwere, sowie auch von dem umgebenden Druck d. Atmosphäre. In d. ersten Auffassung kann d. Druck d. **Ueberdruck** und in d. 2ten d. **Gesammtdruck** genannt werden. Die Art und Weise d. Berechnung ist in beiden Fällen dieselbe, d. Gesammtdruck ist von d. gesammten Druckhöhe in den verschiedenen Punkten d. Fläche abhängig, ebenso d. Ueberdruckhöhe. Die Ueberdruckhöhe ist die Tiefe d. Punktes unter d. freien Oberfl., die gesammte Druckhöhe eine Höhe, die um $\frac{p_0}{\gamma}$ höher liegt als d. wirkliche freie Oberfl. Es sei deshalb im Folgenden die eine od. die andere bezügliche Druckhöhe begriffen und mit dem Buchstaben z bezeichnet und unter d. Wasseroberfl. sei entweder d. wirkliche Wasserfl. oder d. um $\frac{p_0}{\gamma}$ höhere Wasserfl. verstanden. —

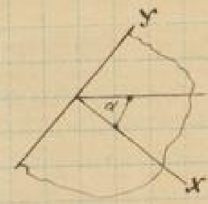
Zunächst sei vorausgesetzt, die gedrückte Fl. F sei eben, dann sind d. Dr. auf alle Elemente dieser Ebene parallel und ihre Resultante ist einfach = ihrer Summe. Gemäß d. Bedeutung d. Druckhöhe z ist dann insbesondere d. Druck auf d. Element dF d. gegebenen Fl. gleich dem Gew. einer Wassersäule von d. Grundfl. dF und d. Höhe z also $= \gamma z\,dF$ unter γ d. spec. Gew. d. Wassers verstanden. Der Gesammtdruck demnach:

$$P = \int \gamma z\,dF.$$

ausgedehnt über d. ganze Fl. Hier kann γ als constanter Factor herausgesetzt werden und wenn z_0 d. Druckhöhe für d. Schwerpunkt d. gegebenen Fl. bedeutet d.h. die Tiefe d. Schwerpunktes unter d. freien Oberfl., so ist:

$$P = \gamma z_0 F.$$

also = dem Gew. einer Wassersäule, deren Grundfl. $= F$ und deren Höhe = d. Höhe d. Schwerpunktes unter d. freien Oberfl. ist. Dieser Druck ist nicht gleichmäßig vertheilt, sondern d. tieferen Elemente erleiden einen höheren Druck als d. oberen; die Richtungslinie von P geht also nicht durch d. Schwerpunkt, sondern durch einen Punkt S_1, der tiefer liegen muß als d. Schwerpunkt und welcher d. Mittelpunkt d. hydrostatischen Drucks genannt wird. Um diesen Punkt zu bestimmen werde angenommen, d. Fl. sei gegen d. Horizont geneigt unter d. Winkel α und unter d. Fl. F ausgedehnt bis zum Durchschnitt mit d. Oberfl. Diese Durchschnittslinie sei als Y Axe angenommen und eine Neigungslinie d. Ebene F als X Axe, so daß d. X Axe gleichfalls den Winkel α mit dem Horizont bildet. ⟶



Für dieses Coord.-System seien nun x u. y d. Coord. eines beliebigen Punktes dJ d. gedrückten Fläche, x_0 u. y_0 d. Coord. d. Schwerpunktes S_0 und x_1 y_1 d. gesuchten Coordinaten von S_1, die entsprechenden Abstände von d. Horizontalebene seien z z_0 u. z_1. Nach d. bekannten Regel zur Bestimmung d. Mittelpunktes eines Systems paralleler Kräfte ist: $x_1 = \frac{1}{\mathfrak{D}}\int \gamma z \, dJ \cdot x$ und $y_1 = \frac{1}{\mathfrak{D}}\int \gamma z \, dJ \cdot y$.

Setzt man hierin für $\mathfrak{D}$ seinen Werth so erhält man:

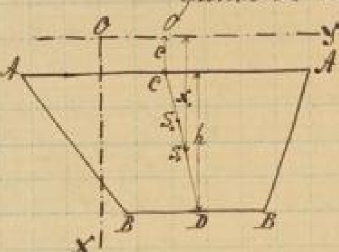
$x_1 = \frac{1}{J z_0}\int x z \, dJ$ und $y_1 = \frac{1}{J z_0}\int y z \, dJ$; überdies ist: $\frac{z}{x} = \frac{z_0}{x_0} = \sin\alpha$ also auch $\frac{z}{z_0} = \frac{x}{x_0}$ und somit:

$x_1 = \frac{1}{J x_0}\int x^2 \, dJ$ und $y_1 = \frac{1}{J x_0}\int x y \, dJ$. Nun ist bekanntlich $\int x^2 \, dJ$ d. Trägheitsmoment d. gedrückten Fl. in Beziehung auf ihre Durchschnittslinie mit d. Oberfl. Denkt man sich durch d. Schwerpunkt S_0 d. gedrückten Fl. eine Gerade gezogen parallel d. Y Axe, so sei d. Trägheitsmoment d. Fl. J in Beziehung auf diese Gerade bezeichnet mit $J k^2$. d. Trägheitsmoment d. Fl. J in Beziehung auf d. Y Axe also $\int x^2 \, dJ$ ist bekanntlich = diesem Trägheitsmomente + d. Produkt d. Fl. J mal d. Abstand von d. Schw. S_0 mit d. Y Axe parallelen Gerade also $= J(x_0^2 + k^2)$. Setzt man dieses oben ein, so erhält man:

$$x_1 = \frac{x_0^2 + k^2}{x_0} = x_0 + \frac{k^2}{x_0}.$$ Die Coord. y_1 würde $= 0$ sein, wenn die X Axe Symmetrieaxe wäre.

Von besonderen Fällen in dieser Beziehung sind folgende bemerkenswerth:

1) Es sei d. gedrückte ebene Fläche ein Trapez, dessen beide parallele Seiten horizontal liegen, also AA und BB horizontal und parallel d. Y Axe. Es sei also d. Ebene d. Figur die unter d. Winkel α gegen d. Horizont geneigte Ebene J. Es sei $AA = a$ und $BB = b$, d. Höhe d. Trapezes sei $= h$ und d. Entfernung d. Seite AA von d. Y Axe sei $= c$. Jedenfalls liegt hier d. Schwerpunkt sowie d. Druckmittelpunkt in d. Mittellinie d. Trapezes, also in d. Linie CD, wo C u. D d. Mitten zwischen AA resp. BB sind. Es sei nun S_1 d. Druckmittelpunkt, S_0 d. Schwerpunkt, x_1 d. Abstand d. Druckmittelpunktes von d. Y Axe, dann ist: $x_1 = c + \xi_1$, wenn mit ξ_1 die Entfernung d. Druckmittelpunktes S_1 von d. Seite AA bezeichnet wird. Um ξ_1 zu finden, kann man sich d. Trapez in Streifen zerlegt denken durch horizontale Linien; und es ist dann, wenn dJ d. Inhalt eines solchen Streifens bedeutet: $\xi_1 = \frac{1}{\gamma z_0 J}\int \gamma z \, dJ \, \xi$ wobei ξ die Entfernung d. Flächenstreifens dJ von d. Seite AA vorstellt, es ergibt sich:



$$x_1 = c + \frac{1}{J x_0}\int x \xi \, dJ = c + \frac{\int_0^h (c+\xi)\xi\left[a - \frac{\xi}{h}(a-b)\right]d\xi}{h\frac{a+b}{2}\cdot c + \frac{h}{3}\cdot\frac{a+2b}{a+b}}$$

da $x = c + \xi$ ist und da d. Länge eines solchen Flächenstreifens in d. Entfernung ξ von $AA = a - \frac{\xi}{h}(a-b)$ ist. Hieraus findet sich nun: $x_1 = c + \frac{h}{2}\,\frac{2c(a+2b) + h(a+3b)}{3c(a+b) + h(a+2b)}$. —

Wenn insbesondere d. horizontale Seite AA d. Trapezes mit d. Y Axe zusammenfällt, so ist $c = 0$ und es wird:

$$x_1 = \frac{h}{2}\,\frac{a+3b}{a+2b}$$

Wird d. Trapez ein Dreieck, dessen AA in d. Y Axe fällt, während $BB = 0$ wird, so wird $c = b = 0$. also

$$x_1 = \frac{h}{2}.$$

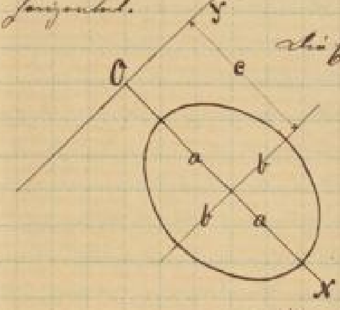
Um von d. Fall eines Trapezes zu einem Parallelogramm überzugehen hat man $b = a$ zu setzen, so erhält man:

$$x_1 = c + \frac{h}{3}\,\frac{3c + 2h}{2c + h}$$

Wenn man d. Höhe $h = d - c$ setzt, also d d. Entfernung d. unteren Seite d. Parallelogrammes von d. Y Axe, so geht dieser Ausdruck über in:

$$x_1 = \frac{2}{3}\,\frac{d^3 - c^3}{d^2 - c^2}. \text{ —}$$

2) Es sei d. gedrückte Fläche eine Ellipse und zwar sei dieselbe so gelegen, daß d. eine Durchmesser = 2a in einer Neigungslinie liegt, also etwa in d. X-Axe und d. andere Durchmesser = 2b horizontal.



Die Entfernung d. Mittelpunktes d. Ellipse von d. Y Axe sei = C, natürlich liegt d. Druckmittelpunkt irgendwo in d. Durchmesser 2a und es handelt sich nur um d. Entfernung desselben von d. Y Axe. Dieselbe ist aus dem früheren Ausdruck: $x_1 = x_0 + \frac{k^2}{x_0}$ zu berechnen.
Nun ist: $x_0 = C$; was k^2 betrifft, so ist d. Trägheitsmoment d. Ellipse bezüglich d. Durchmessers 2b: $\sigma k^2 = \pi a^3 b$ also $k^2 = \frac{a^2}{4}$ und folglich: $x_1 = C + \frac{a^2}{4C}$ und $P = \gamma \pi ab c$ sind.
πab ist d. gedrückte Fl. und C sin α d. Druckhöhe über d. Schwerpunkt.

Wenn d. gedrückte Fl. eine krumme Fl. ist, dann lassen sich d. Elementardrücke im Allgemeinen nicht zu einer Resultierenden zusammensetzen, es kann sich also nur handeln um d. hydrostatischen Druck, welchen dieselbe nach irgend einer gewissen Richtung AB auszuhalten hat. Dieser Druck auf eine gegebene krumme Fl. nach einer gegebenen Richtung AB ist folgendermaßen zu berechnen: Zunächst sei vorausgesetzt, d. krumme Fläche werde von irgend einer zu AB parallelen Geraden nur in einem Punkte geschnitten, dσ sei irgend ein Element d. krummen Fl., z sei d. Druckhöhe für dieses Flächenelement. Ist nun α d. Winkel, unter welchem d. Normale (im Sinne dieser [illegible]) gegen d. Druckrichtung geneigt ist, so ist d. Componente dieses Drucks nach d. Richtung AB = $\gamma z\, d\sigma \cos\alpha$. Also:

$$P = \int \gamma z\, d\sigma \cos\alpha = \gamma \int z\, d\sigma \cos\alpha.$$

Wenn man sich d. Fl. projiciert denkt auf irgend eine zu d. Linie AB senkrechten Projectionsebene, so sei $d\sigma'$ d. Projection von $d\sigma$, dann ist: $P = \gamma \int z\, d\sigma'$.

Ist d. gegebene Fl. von solcher Art, daß sie von einer in d. Richtung AB gezogenen Geraden in mehr als einem Punkt geschnitten wird, so kann man d. Fl. so zerlegen, daß jeder Theil d. Fl. von d. Geraden AB nur in einem Punkte geschnitten wird, dann kann man jeden Theil für sich berechnen und schließlich daraus d. algebraische Summe ziehen, um so d. resultierenden Druck zu erhalten.

1) Ist d. Richtung AB, nach welcher sich dieser Druck P bezieht, horizontal, dann ist, wenn man auch d. Projectionsebene senkrecht zu AB annimmt, z zugleich d. Entfernung dieser Projection $d\sigma'$ von d. Wasseroberfl., es ist dann $\gamma z\, d\sigma'$ d. hydrostatische Druck auf d. Element $d\sigma'$ in d. Ebene, in welche sich d. Element projiciert, man kann sagen es ist d. Horizontaldruck = demjenigen hydrostatischen Druck, welchen d. Projection dieser krummen Fl. auf irgend eine zur gegebenen horizontalen Richtung senkrechten Projectionsebene erfahren würde. Daraus ist insbesondere sofort ersichtlich, daß d. resultierende Horizontaldruck, den irgend ein eingetauchter Körper nach irgend einer Richtung auszuhalten hat = 0 ist. Es zerfällt immer d. resultierende Druck in solche Bestandtheile, die sich 2 u. 2 gegenseitig aufheben, weil immer d. ganze Oberfl. in solche Theile zerfällt, die sich gegenseitig decken.

2) Wenn insbesondere d. Richtung AB vertical ist, wenn es sich also um d. resultierenden Verticaldruck auf eine krumme Fl. handelt, so ist $\gamma z\, d\sigma'$ offenbar = d. Gew. eines verticalen Wasserfadens, der sich von d. Flächenelement dσ erstreckt bis zur Wasseroberfl. und es ist also P d. resultierende Verticaldruck auf d. gegebene Fl. P = d. Gew. einer Wassermasse, welche begrenzt ist durch d. gedrückte Fl. σ, durch d. horizontale Wasseroberfl. und durch eine verticale Cylinderfläche, und zwar ist d. resultierende Verticaldruck nicht nur d. Größe nach, sondern auch d. Richtungslinie nach übereinstimmend mit d. Gew. dieser Wassermasse. Daraus ergibt sich sofort, daß insbesondere d. Verticaldruck auf d. Oberfl. eines eingetauchten Körpers d. Größe und d. Richtungslinie nach übereinstimmend mit d. Schwerpunkt d. von diesem verdrängten Wassers und da d. Horizontaldruck = 0 ist, so übt also immer d. im Gleichgew. befindliche Wasser auf d. Oberfl. d. eingetauchten Gegenstandes einen Auftrieb, welcher übereinstimmt mit d. Schwerkraft dieses eingetauchten Körpers. Dieses Gesetz ist bekannt unter d. Namen: Archimedisches Princip. Der Verticaldruck pflegt d. Auftrieb genannt zu werden.

Bewegung d. Flüssigkeiten.

Die im folgenden zu untersuchenden Bewegungen von Flüssigkeiten sind theils strömende theils oscillirende Bewegungen, von denen d. letzteren hauptsächlich als Wellenbewegung d. Wassers besondere Wichtigkeit haben. Strömende Bewegungen d.h. solche, welche dauernd in gleichem Sinne stattfinden, pflegen durch feste Wände begrenzt und hinsichtlich ihrer Gestalt bedingt zu werden, jedoch ist angemessen, je nach d. Art dieser Wände od. Leitflächen verschiedene Fälle zu unterscheiden. Bei d. Bewegung in Gefäßen und Röhren d.h. in solchen Leitungen durch welche d. Flüssigkeit ringsum umschlossen wird, so daß sie ohne freie Oberfl. (außer am Anfang und am Ende d. ganzen Leitung) sich strömend bewegt, kann dieselbe tropfbar od. luftförmig sein, und es sind daher namentlich d. beiden Fälle d. <u>Ausflusses ~~und~~ aus Gefäßmündungen</u> und d. <u>Bewegung in längeren Röhren</u> zu betrachten. Bei luftförmigen Flüssigkeiten beschränkt sich hierauf d. Untersuchung, da dieselben überhaupt nur durch einschließende Wände eine bestimmt geregelte Bewegung erhalten; was aber d. tropfbaren Flüssigkeiten betrifft, so ist d. <u>Bewegung d. Wassers in Canälen</u> von nicht geringerer Wichtigkeit d.h. in oben offenen Leitungen, längs deren ganzer Länge somit d. Oberfl. d. strömenden Wassers theils frei, theils Wandoberfl. ist. Von beschränkterem technischen Interesse ist d. Bewegung freier Wasserstrahlen, namentlich in Beziehung auf d. Wurfhöhe eines in d. Luft vertical aufsteigenden, sog. springenden Strahls.

In allen Fällen strömender Bewegung ist d. Beharrungszustand od. d. permanente Bewegung von besonderer Wichtigkeit, charakterisirt durch d. Unveränderlichkeit d. äußeren und inneren d.h. d. Bewegungs- und Massenzustands in jedem bestimmten Punkt d. Raumes, sodaß d. Zustand nur von Ort zu Ort, nicht aber an demselben Orte mit d. Zeit veränderlich ist, mit Rücksicht auf d. etwaige eigene Bewegung d. Gefäßes, d. Röhre, d. Canals überhaupt d. festen Leitung (bezüglich auf d. Erde) ist dabei unter einem bestimmten Punkt d. Raumes stets ein solcher zu verstehen, welcher eine bestimmte Lage gegen d. Leitung (bei freien Wasserstrahlen gegen d. Erde) besitzt, mit welcher auch d. zeitweilige System von Coordinatenaxen fest verbunden zu denken ist. —

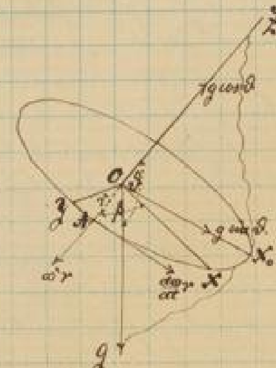
Zu den Aufgaben d. Hydraulik gehört endlich d. Untersuchung d. gegenseitigen Drucks zwischen Flüssigkeiten und festen Körpern bei ihrer relativen Bewegung, bezüglich auf d. festen Körper kann derselbe theils als bewegender od. beschleunigender Druck, theils als hemmender Widerstand d. Mittels in Betracht kommen. Dabei sind wieder verschiedene Fälle je nach d. Begrenzung d. Flüssigkeit zu unterscheiden, welche entweder ein isolirter freier Strahl sein od. den festen Körper allseitig umschließen od. auch als tropfbare Flüssigkeit mit freier Oberfl. nur unterhalb derselben einen theilweise eingetauchten Körper umgeben kann. —

Zur Lösung dieser verschiedenen Aufgaben sind bekanntlich im Allgemeinen 7 Größen als Functionen d. Coordinaten x y z und d. Zeit t zu bestimmen; nämlich d. Geschwindigkeitscomponenten u_x u_y u_z, d. spec. Volumen v, d. Pressung p, die Temperatur und d. innere Arbeitsvermögen. Zur Verfügung sind dabei d. 3 Differentialgleichungen, welche d. Gleichgew. zwischen d. auf ein Massenelement wirkenden Massen- und Flächenkräften und d. Trägheitskräften gegen seine Schwpkt. entsprechen und welche d. <u>Fundamentalgleichungen</u> heißen mögen, dann d. Continuitätsgl., eine Gl. bezüglich auf d. Wärmeleitung im Innern d. Flüssigkeit, die Zustandsgl. d. Flüssigkeit und d. Gl. d. inneren Arbeitsvermögens. Die 5 ersten dieser Gl. sind partielle Differentialgl. und allgemein gültig, die beiden letzten sind für verschiedene Flüssigkeiten verschieden; in d. 4 ersten sind d. Temperatur und d. innere Arbeitsvermögen, in d. 3 letzten d. Geschw.-Componenten nicht enthalten. Die Integrationen müssen mit Rücksicht auf d. Grenzbedingungen bezüglich auf Zeit und Raum d.h. mit Rücksicht auf d. gegebenen Anfangszustand und auf d. Oberflächenbedingungen vorgenommen werden. Letztere betreffen theils d. Gestalt d. Oberfl. theils d. äußeren Druck an derselben, theils d. etwaigen Wärmeaustausch zwischen d. Flüssigkeit und andern Körpern. —

schließlich auch dieser allgemeinen Unterschied leicht einsehen daß d. allgemeine Durchführung d. Aufgaben nicht möglich ist wenigstens bis jetzt nicht durchgeführt ist. Außerdem müssten dagegen d. festgestellten Coordinaten angenommen werden hinsichtlich erfahrungsmäßiger Coefficienten, also mit Rücksicht auf d. Abweichungen d. letzt in Betracht kommenden Flüssigkeiten von dem in d. theoretischen Gl. vorausgesetzten idealen Zustande vollkommener Flüssigkeit und mit Rücksicht auf solche Bewegungswiderstände, welche in jenen Gl. und in d. ursprünglichen Grenzbedingungen nicht zum Ausdruck gebracht werden konnten. Aus diesem Grunde ist es daher notwendig bei d. verschiedenen in d. Hydraulik vorkommenden technischen Aufgaben auf Grund specieller Voraussetzungen vorzugehen. –

Wenn zunächst keine bedeutende Mittheilung od. Entziehung von Wärme an d. Wasser und Wärmeentwicklung durch Bewegungswiderstände und deshalb auch nur unbedeutende Wärmeleitung im Innern stattfindet, so kann eine Vereinfachung wesentlich dadurch herbeigeführt werden, daß eine gewisse Beziehung zwischen d. Dr. p und d. spec. Volumen v von vornherein angenommen wird, insbesondere z. B. Gl.: $p v^m = const.$, unter m eine Constante verstanden, welche, wenn d. Zustandsänderung als bei constanter Temperatur stattfindend vorausgesetzt werden kann, für tropfbare Flüssigkeiten $= \infty$ (weil $v = const.$ p unabhängig von v) für Gase $= 1$ zu setzen ist aber bei Zustandsänderungen ohne Mittheilung resp. Entziehung von Wärme für Gase $= \varkappa$ d.h. = d. Verhältniß d. spec. Wärmen bei constantem Dr. und bei constantem Volumen, für Dämpfe und (näherungsweise und innerhalb gewisser Grenzen) für Gemische von Dampf und gleichartiger tropfbarer Flüssigkeit = einem unterschiedlichen constanten Werth zu setzen ist. Dadurch sind d. Temperatur und d. innere Arbeitsleistungen von d. Untersuchung ausgeschlossen, und sind d. 3 Geschwindigkeitscomponenten nebst d. Größen p u. v durch d. vorausgesetzte Beziehung zwischen d. letzteren und durch d. 4 ersten d. vorhin genannten 7 Gl. (durch d. 3 Fundamentalgl. und d. Continuitätsgl.) mit Rücksicht auf d. gegebenen Grenzbedingungen bestimmt. Zur leichteren Integration bzw. zur Entwicklung ihrer Ausdrücke in endlicher Form, können weitere Vereinfachungen durch d. vorläufige Abstraction von d. inneren Reibungen (Vernachlässigen d. Glieder mit K in d. 3 ersten d. allgemeinen Gl.) und durch gewisse Annahmen in Betreff d. Gesetzes, wonach sich d. Geschw.-Componenten mit d. Coord. ändern, herbeigeführt werden. Letzteres wird auch besonders dann nöthig, wenn wegen erheblicher Wärmeleitungen und Wärmeentwicklungen durch Bewegungswiderstände d. zuerst genannte Vereinfachung unzulässig ist, d. Geschwindigkeit d. Temperaturänderungen d. Untersuchung wesentlich mit unterstützt werden muß. Eine willkürliche, wenn auch im Allgemeinen d. Verhältnissen angepaßte Annahme in Betreff d. Änderungsgesetzes d. Geschwindigkeiten ist dann jedenfalls um so mehr gerechtfertigt, als dieses Gesetz durch d. Einfluß d. Wärme und d. Widerstände mittelbar od. unmittelbar in einer solchen Weise beeinflußt werden kann, welche sich d. mathematischen Untersuchung gänzlich entzieht. Was d. beschleunigenden Massenkräfte betrifft, welche bei d. technisch interessantesten Fällen in Betracht kommen, so reduciren sich diese auf d. Schwerkraft und 2 sogenannten Ergänzungskräfte d. relativen Bewegung. Indem die Dimensionen d. Systems von Flüssigkeiten immer winzig gegen d. Dimensionen d. Erde ausfallen so kann man d. Beschleunigung g d. Schwerkraft pr. Masseneinheit als gleich groß für jeden Ort und zu jeder Zeit voraussetzen. Die beiden Ergänzungskräfte spielen besonders dann eine wichtige Rolle, wenn es sich nicht nur um d. relative Bewegung d. Flüssigkeiten in d. Gefäß sondern auch um d. Bewegung dieser Flüssigkeiten gegen d. Erde handelt. In diesen Fällen gehören außer d. Schwerkraft auch diese beiden Ergänzungskräfte zu d. beschleunigenden Massenkräften. Von Interesse ist es nun diese beiden Ergänzungskräfte festzustellen für d. technisch wichtigsten Anwendungen also insbesondere wenn d. Gefäß od. was dasselbe bedeutet, wenn das an dem Gefäße feste Coord.-System in Rotation um eine feste Axe begriffen ist.

Es sei angenommen d. Coord.-System, auf welches d. relative Bewegung d. Flüssigkeit bezogen wird, bewege sich um eine feste Axe und zwar sei d. Z Axe als Rotationsaxe angenommen, um welche d. Rotation mit d. Winkelgeschw. ω erfolgt, welche im Allgemeinen im Laufe d. Zeit vorausdeutlich sein kann. ϑ sei d. constante Winkel d. Z Axe mit d. Richtung d. Schwerkraft = Og. Durch d. Ursprung O denkt man eine Ebene gelegt senkrecht zur festen Rotationsaxe OZ, welche von d. durch g O Z bestimmten Ebene in d. Geraden OX_0 geschnitten wird. Die Zeit t werde gerechnet von dem Augenblick an, in welchem d. X Axe, welche ebenso wie d. Y Axe immer in d. Ebene X_0OA bleibt, durch diese Gerade OX_0 geht; zur Zeit $t = 0$ hat demnach d. X Axe d. Lage OX_0 und zur Zeit t habe sich d. Lage OX und d. Y Axe d. Lage OY. In d. Zeit t hat X Axe sich demnach gedreht um d. Winkel X_0OX, welcher offenbar gleich ist:



$$X_0OX = \int_0^t \omega\, dt.$$

Zerlegt man d. Beschl. g d. Schwerkraft in 2 Componenten nach d. Richtung OX_0 und OZ, so hat man in d. Richtung OZ d. Componente $g.\cos\vartheta$ und in d. Richtung OX_0 d. Componente: $g.\sin\vartheta$; letztere kann man wieder in 2 Componenten nach OX und OY zerlegen und erhält dann offenbar als d. Componenten d. Beschl. d. Schwerkraft nach d. 3 Axenrichtungen:

Nach d. Richtung OX od. im Sinne d. X Axe: $-g.\sin\vartheta.\cos X_0OX = g.\sin\vartheta.\cos\left[\int_0^t \omega\, dt\right]$

im Sinne d. Y Axe: $-g.\sin\vartheta.\cos X_0OY = \div g \sin\vartheta \sin\int_0^t \omega\, dt.$

im Sinne d. Z Axe: $= g.\cos\vartheta.$

Sind nun X Y Z d. im Sinne d. ursprünglichen Coord-axen genommenen Componenten d. gesammten beschleunigenden Wirkung, so sind d. obigen Componenten diejenigen Bestandtheile dieser Beschleunigungscomponenten, welche von d. Schwerkraft herrühren. Hierzu kommen nun noch die von d. beiden Erzeugungskräften herrührenden Bestandtheile. — d. Beschl.

Was nun d. erste Erzeugungskraft d. relativen Bewegung betrifft, so ist dieselbe bekanntlich ebenso groß aber gerade entgegengesetzt gerichtet d. Beschl. eines mit d. Coord. System fest verbundenen Punktes, in welchem sich d. betrachtete materielle Punkt augenblicklich befindet. Ist nun A irgend ein Punkt (hier ist er in d. XY Ebene liegend angenommen, was d. Einfachheit wegen geschieht und was sich auch nachher als vollkommen zulässig erweist, indem [illegible] gleich sei, werden ob d. Punkt A in d. XY Ebene selbst od. in einer mit ihr parallelen Ebene liegt) in dem Abstande r von d. Rotationsaxe fest mit d. Coord. verbunden, so beschreibt dieser Punkt einen Kreis vom Radius r mit d. Winkelgeschw. ω und seine Beschl. kann demnach zerlegt werden in eine Centripetalbeschl. $\omega^2 r$ und eine Tangentialbeschl. $= \frac{d\omega}{dt} r$, welche nach d. Richtung AO resp. tangential an dem von A beschriebenen Kreis im Sinne d. Geschw. ω gerichtet sind. Da nun aber d. ersten Erzeugungskraft gerade ebenso groß aber entgegengesetzt gerichtet ist d. Beschl. dieses Punktes A und demnach d. Componenten in derselben Beziehung zu einander stehen, so haben d. Componenten d. Beschl. d. ersten Erzeugungskraft d. Größen $\omega^2 r$ und $\frac{d\omega}{dt} r$ und d. Richtungen OA resp. AA_1. Diese beiden Componenten kann man nun wieder zerlegen in Componenten nach d. Axenrichtungen. Ist $A\hat{O}X = \beta$ so ist d. Componente im Sinne d. Z Axe natürlich $= 0$ (was so offenbar auch sein würde, wenn A nicht in d. Ebene XY liegend angenommen wäre), während d. Beschl. Comp. im Sinne d. X Axe ist herrührend von d. Centripetalbeschl. $\omega^2 r$: $= \omega^2 r\cos\beta = \omega^2 x$

und im Sinne d. Y Axe " " " " " : $= \omega^2 r \sin\beta = \omega^2 y.$

ferner im Sinne d. X Axe herrührend von d. Tangentialbeschl. $\frac{d\omega}{dt} r$: $= \frac{d\omega}{dt} r\cos\left(\beta - \frac{\pi}{2}\right) = \frac{d\omega}{dt} r \sin\beta = \frac{d\omega}{dt} y$

im Sinne d. Y Axe " " " " " " " : $= \frac{d\omega}{dt} r \sin\left(\beta - \frac{\pi}{2}\right) = \div \frac{d\omega}{dt} r.\cos\beta = \div \frac{d\omega}{dt} x$

denn offenbar ist $r\cos\beta = x$ und $r.\sin\beta = y$ d. Coordinaten d. Punktes A.

Demnach ~~...~~ sind d. von d. ersten Zusatzkraft d. relativen Bewegung herrührenden Bestandtheile d. Beschl.-Componenten der Gesammten Massenkräfte:

Im Sinne d. X Axe: $\omega^2 x + \frac{d\omega}{dt} y$ (kommt zu X hinzu)

" " Y Axe: $\omega^2 y \div \frac{d\omega}{dt} x$ (kommt zu Y hinzu). —

Die 2te Zusatzkraft hängt bekanntlich ab von d. relativen Geschw. d. Punktes A gegen d. Coord.-System. Ist nämlich u_{xy} d. Projection d. relativen Geschw. des beliebigen materiellen Punktes A gegen d. Coord.-System auf die zur Rotationsachse OZ senkrechte XY Ebene, so ist d. durch d. 2te Zusatzkraft bewirkte Beschleunigung bekanntlich $= 2\omega u_{xy}$ und zwar hat sie eine senkrechte Richtung zu Z Axe und d. Projection u_{xy} senkrechte Richtung, und zwar in solchem Sinne, daß eine Drehung von 90° um d. Z Axe im Sinne von ω diese Beschl. in d. Richtung von u_{xy} versetzen würde. Ist nun α d. Winkel zwischen u_{xy} und d. X Axe, so sind d. Componenten d. Beschl. $2\omega u_{xy}$ offenbar:

Im Sinne d. X Axe: $= 2\omega u_{xy} \cos(\alpha - \frac{\pi}{2}) = 2\omega u_{xy} \sin\alpha$

" " " Y Axe: $= 2\omega u_{xy} \sin(\alpha - \frac{\pi}{2}) = \div 2\omega u_{xy} \cos\alpha$.

Nun ist aber offenbar $u_{xy}\sin\alpha = u_y$ und $u_{xy}\cos\alpha = u_x$ die Componenten d. relativen Geschw. d. materiellen Punktes im Sinne d. Y und X Axe, so daß d. fraglichen Beschl.-Componenten herrührend von d. 2ten Zusatzkraft auch sind: $= 2\omega u_y$ im Sinne d. X Axe und $\div 2\omega u_x$ im Sinne d. Y Axe. —

Demnach wären nun d. Componenten d. Beschl. d. Gesammtmassenkräfte:

$$X = g.\sin\vartheta.\cos\left[\int_0^t \omega\, dt\right] + \omega^2 x + \frac{d\omega}{dt} y + 2\omega u_y$$

$$Y = \div g.\sin\vartheta.\sin\left[\int_0^t \omega\, dt\right] + \omega^2 y \div \frac{d\omega}{dt} x \div 2\omega u_x$$

$$Z = g.\cos\vartheta$$

In den meisten Fällen vereinfachen sich diese Ausdrücke noch dadurch, daß d. Leitflächen und mit ihnen d. an denselben feste Coord.-System um d. feste Axe mit constanter Winkelgeschw. rotieren, wie bei d. Wasser welches durch eine Turbine ... fließt. Wenn aber $\omega = const.$ ist, so folgt: $\int_0^t \omega\, dt = \omega \int_0^t dt = \omega t$ und dementsprechend d. Ausdrücke für X u. Y.

Untersuchung d. strömenden Bewegungen von Flüssigkeiten.

In den meisten Fällen, welche in d. Praxis vorkommen, ist d. strömende Bewegung d. Flüssigkeiten durch Leitflächen derartig eingeschränkt, daß man von vornherein d. Bahnen bestimmen kann, welche von d. verschiedenen materiellen Punkten durchlaufen werden, namentlich wenn man von stoßweisen und wirbelförmigen Bewegungen absieht, diese vielmehr später durch empirische Coefficienten in Rechnung bringt. Wenn z. B. Wasser in einer geraden cylindrischen Röhre strömt, so ist es offenbar anzunehmen, daß alle Wassertheilchen parallele Linien mit d. Mittellinie d. Röhre durchlaufen. Ebenso werden auch ganz offenbar d. Bahnen aller Flüssigkeitstheilchen, welche einen kegelförmigen Canal durchfließen, in dessen Spitze zusammentreffen. Ähnlich wird d. Bewegung bei vielen anderen Fällen sein. Dadurch wird natürlich von vornherein d. Aufgabe ganz wesentlich vereinfacht, indem d. Bewegungszustand durch ~~eine einzige~~ Größe vollkommen bestimmt ist. An Stelle d. 3 unbekannten Geschw.-Componenten u_x u_y u_z tritt hier nur d. Größe u zu jedem Orte und zu jeder Zeit hinzu. Wenn ferner d. Verhältnisse derart sind, daß noch eine gewisse Beziehung zwischen

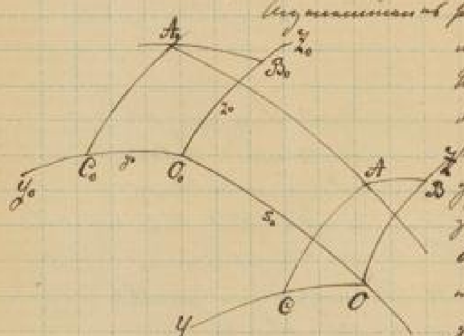
d. Dr. p und d. spec. Volumen v nach d. spec. Masse ρ ausgedrückt werden darf, so sind es überhaupt nur 2 Größen, d. als Functionen d. Orts und d. Zeit bestimmt werden müssen, nämlich d. Geschw. u und d. Dr. p und es handelt sich darum, allgemeine G. aufzustellen, vermittelst deren namentlich diese beiden Größen u u. p bestimmt werden können, wenn d. Bahnen gegeben sind, d. von d. Flüssigkeitstheilchen durchlaufen werden.

Vor Allem ist es in d. Regel vortheilhaft das bisher gebrauchte rechtwinklige Coord.-System aufzugeben und es zu ersetzen durch ein anderes Coord.-System, welches sich enger genau anschließt an d. Bahnlinien. Zu dem Ende möge folgende Festsetzung dienen:

Unter einem Querschnitt d. strömenden Flüssigkeit sei jede Fl. zu verstehen, welche d. ganze System von gegebenen Bahnen rechtwinklig schneidet. Da d. gegebenen Teilchen an d. Oberfl. d. strömenden Flüssigkeit jedenfalls einen Theil dieser Bahn in sich enthalten, d. Oberfl. d. Flüssigkeit bildet tangential an diesen Teilchen hinstreicht, so wird auch diese Teilfl. von d. Querschnitt rechtwinklig geschnitten. Z. B. im Falle einer ruhigen Strömung würde, wenn d. Bahnen alle in einem Punkte convergiren, d. System d. Querschnitte concentrische Kugelflächen sein. Durch ein solches System von in unendl. kl. Abständen sich befindenden Querschnitten kann man sich d. Flüssigkeit in unendl. dünne Schichten zerlegen; irgend ein solcher Querschnitt sei bezeichnet mit σ. Um nun innerhalb eines solchen Querschnitts d. Ort eines Punktes zu fixiren, erscheint es angemessen, 2 Systeme von sich rechtwinklig schneidenden Curven in einem solchen Querschnitt anzunehmen. Es sei im Allgemeinen A irgend ein Punkt d. Querschnitts σ, A S d. Bahn, welche durch diesen Punkt hindurchgeht, welche also in A d. Querschnitt σ rechtwinklig schneidet. Diese im Allgemeinen doppelt gekrümmte Linie A S hat in A 2 ausgezeichnete Normalen, den Krümmungsradius und d. Binormale senkrecht zu d. ersteren; beide Normalen fallen natürlich in d. Berührungsebene d. Querschnitts σ.

Stellen wir uns nun vorhanden d. Krümmungsradius d. Bahn A S vor, wenn man im Querschnitt σ diesen Krümmungsradius um ein unendl. kl. Stück AA_1 fort, so wird d. Querschnitt auch in A_1 rechtwinklig von A_1S_1 geschnitten. Nun denke man sich wieder ein unendl. kl. Linienelement gezogen für d. Krümmungsradius d. Bahn A_1S_1, so erhält man eine Curve in d. Querschnittsfl., welche dadurch charakterisirt ist, daß ihre sämmtlichen Tangenten zusammenfallen mit d. Krümmungsradien d. Bahnen, welche durch d. betreffenden Punkte d. Querschnitts σ hindurchgehen.

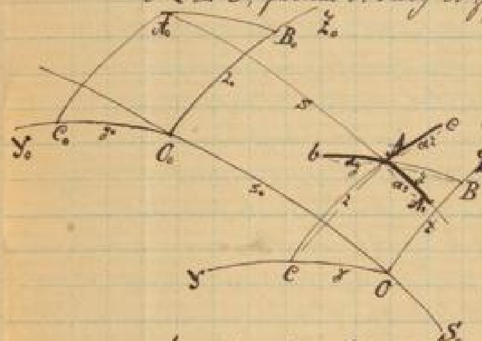
Diese Curven seien d. Krümmungscurven genannt. Denkt man nun ein solches System von Krümmungscurven in d. Querschnitt angenommen hat, kann man sich dieses System von Krümmungscurven durch ein anderes Curvensystem rechtwinklig durchschnitten denken, welche d. Normalcurven genannt werden sollen und welche dadurch charakterisirt sind, daß deren Tangenten zusammenfallen mit d. Binormalen d. Bahnen, welche durch diese Punkte hindurchgehen. Hiernach läßt sich nun d. Lage irgend eines beliebigen Raumpunktes, in welchem d. strömende Bewegung d. Flüssigkeit stattfindet, durch 3 Coord. bestimmen.



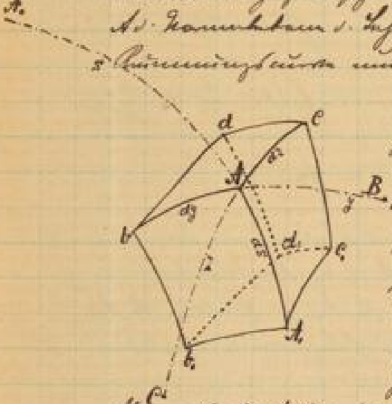
Angenommen es sei σ_0 irgend ein bestimmter Querschnitt d. strömenden Flüssigkeit, von welchem ausgegangen wird; in diesem Querschnitt werde d. Punkt O_0 gewissermaßen als Ursprung eines neuen Coord.-Systems angenommen; es sei $O_0 Y_0$ d. durch d. Punkt O_0 im Querschnitt σ_0 gehende Krümmungscurve und $O_0 Z_0$ sei d. durch d. Punkt O_0 gehende Normalcurve und endlich $O_0 S_0$ sei d. durch O_0 gehende Bahn. Um nun d. Lage irgend eines beliebigen Punktes A durch 3 Coord. zu bestimmen, kann man sich durch diesen Punkt A d. betreffenden Querschnitt σ gelegt denken, welcher von d. Bahn $O_0 S_0$ ein gewisses Stück $O_0 O = s$ abschneiden wird; ist umgekehrt dieses Stück $O_0 O = s$ gegeben, so ist damit d. Querschnitt σ gegeben. Um nun d. Lage d. Punktes A in d. Querschnitt σ zu bestimmen, kann man so verfahren, daß man sich d. Bahn denkt, welche durch d. Punkt A hindurchgeht; dieselbe schneidet d. Querschnitt σ_0 in A_0; durch d. Punkt A_0 werde in d. Querschnitt σ_0 erstens d. Krümmungscurve $A_0 B_0$ und 2tens d. Normalcurve $A_0 C_0$ gelegt, d. erstere schneidet $O_0 Z_0$ in B_0 und d. letztere $O_0 Y_0$ in C_0 und hiernach kann man d. 3 Größen $O_0 O = s$, $O_0 C_0 = y$ und $O_0 B_0 = z$ als Coord. d. Punktes A betrachten. Durch diese 3 Größen ist d. Lage d. Punktes A bestimmt, denn durch d. Bogen $O_0 C_0 = y$ ist d. Normalcurve $C_0 A_0$ bestimmt, durch d. Bogen

$O_0B_0 = z_0$ ist d. Krümmungslinie B_0A_0 bestimmt und durch $O_0O = S$ auch A_0A.

Man kann auch d. Coord. d. Punktes A anders festsetzen. Zu dem Zweck denke man sich im Durchschnitt $\mathfrak{F}$ vom Punkte O aus zunächst d. betreffende Krümmungslinie OY gezogen, ebenso d. betreffende Normallinie OZ, ferner d. durch d. Punkt A gehende Krümmungslinie im Durchschnitt $\mathfrak{F}$, diese schneidet d. Curve OZ in B, ferner d. durch A gehende Normallinie, welche OY in C schneiden möge. Es sei nun d. Länge A_0A d. durch A gehenden Lage = S, ferner d. Curvenbogen ACB d. durch A gehenden Krümmungslinie = y, d. Bogen AC d. durch A gehenden Normallinie = z.



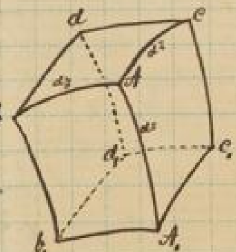
Zeichen durch d. 3 vom Punkte O_0 auslaufenden Größen $s_0\ y_0\ z_0$ d. Lage d. Punktes A und schließlich d. Lagen S y z bestimmt sind, so werden umgekehrt auch durch S y z, welche von A auslaufen $S_0\ y_0\ z_0$ bestimmt sein, und es können auch diese 3 Größen S y z als Coord. von A betrachtet werden, welche gemessen werden sollen S von A_0 gegen A, y von B gegen A und z von C gegen A. Offenbar ist hier ein geradliniges rechtwinkliges Coord-System, so würden diese Coord. von A identisch sein, wenn $S = S_0$ $y = y_0$ und $z = z_0$, hier ist dies im Allgemeinen nicht d. Fall. Im Folgenden sollen immer S y z als Coord. d. Punktes A betrachtet werden. Ich denke mir nun vom Punkte A aus auf d. hindurchgehende Lage und zwar im Sinne, in welchem d. Bogen S wächst ein unendl. kl. Bogenelement $AA_1 = dS$ abgetragen, ferner auf d. durch d. Punkt A gehenden Krümmungslinie von A aus und zwar im Sinne, in welchem d. Bogen $BA = y$ wächst, ein unendl. kl. Bogenelement $Ab = dy$ abgetragen und endlich in d. Richtung von C gegen A ein $AC = dz$ abgetragen. Diese 3 von A ausgehenden unendl. kl. und doppelt als gerade Linien zu betrachtenden Bogenelemente bestimmen als Kanten ein unendl. kl. gekrümmtes Raumelement, welches Parallelepiped ähnlich ist. Man denke sich durch AA_1 d. Normalebene d. Lage, welche bAC ist, ferner durch AA_1 d. Normalebene A_1AC d. betreffenden Krümmungslinie und drittens d. Normalebene A_1Ab d. betreffenden Normallinie gelegt.



Ferner denke ich mir durch A_1 d. Normalebene zur Lage, diese schneidet d. Ebene A_1Ab in A_1b_1 und d. Ebene A_1AC in A_1C_1, ferner denke ich mir durch b d. Normalebene d. Krümmungslinie Ab gelegt, sie schneidet bAA_1 in bb_1 und Ebene bAC in bd, also ist b_1bd d. Normalebene d. Krümmungslinie Ab für d. Punkt b. Endlich denke ich mir durch C d. Normalebene d. Normallinie AC, sie ist C_1Cd. Durch diese 6 Ebenen wird ein gekrümmtes Raumelement bestimmt, dessen übrige Kanten d. punktierten b_1d_1, C_1d_1 und dd_1 sind. Dies Raumelement ist aber nicht parallelepipedisch, weil Kanten und Winkel nur an d. Ecke A gebildet. D. durch d. Punkt A gehende zur Lage senkrechte Seitenfl. dieses gekrümmten Elements also bdC sei bezeichnet mit f_s, ferner d. durch A gehende zur Krümmungslinie senkrechte Seitenfl., also A_1AC mit f_y und endlich A_1Ab mit f_z. Da diese von A auslaufenden Kanten AA_1, Ab und AC sich rechtwinklig schneiden, so können diese 3 Seitenfl. mit Vernachlässigung unendl. kl. Größen höherer Ordnung einfach gleich gesetzt werden d. Producte ihrer von A auslaufenden Kanten, also:

$$f_s = dy\,dz \qquad f_y = ds.dz \qquad f_z = ds.dy.$$

Die Seitenfl., welche d. Seitenfl. f_s gegenüberliegt also $b_1A_1C_1$ wird unendl. wenig von f_s verschieden sein und sei deshalb bezeichnet mit $f_s + df_s$; die Seitenfl., welche f_y gegenüberliegt sei bezeichnet mit $f_y + df_y$ und d. Seitenfl., welche f_z gegenüberliegt sei bezeichnet mit $f_z + df_z$. Mit demselben Recht, mit welchem man f_s = d. Product d. von A auslaufenden Seiten dy dz gesetzt hat, kann man auch $f_s + df_s$ also $b_1d_1C_1$ = d. Product d. von A_1 auslaufenden Seiten setzen $= A_1b_1 \cdot A_1C_1$, weil d. Winkel $b_1A_1C_1$ sich von einem R nur um eine unendl. kl. Größe d. 1ten Ordnung unterscheidet, es ist nämlich $b_1A_1C_1$ eine Ebene, welche mit d. Ebene bAC nur einen unendl. kl. Winkel bildet. — Ebenso schließt man, daß auch für d. Seitenebenen $f_y + df_y$ d. Winkel b_1bd nur unendl. wenig d. 1ten Ordnung von einem R verschieden ist, so daß auch: $f_y + df_y = bb_1 \cdot bd$ ist und ebenso $f_z + df_z = CC_1 \cdot Cd$. Es kommt also nur darauf an, diese Seitenlängen, um welche es sich hier handelt, auszudrücken. Zu dem Zweck verschafft man sich folgende Werte:



Es sei d. Krümmungshalbmesser d. Linie AA_1 für d. Punkt A bezeichnet mit ρ und zwar soll dieser Krümmungsradius + gesetzt werden für d. Fall, daß d. Linie [illegible] im Sinne d. + y Richtung also $A.b$ concav gekrümmt ist. Ferner denke man sich für d. Punkt A diejenigen beiden Normalschnitte d. Oberfläche S, welche resp. d. Krümmungslinien bA und d. Normallinie cA berühren, es sei ρ' d. Krümmungsradius d. erstgenannten Normalschnitts Ab d. Oberfläche und ρ'' d. Krümmungsradius d. andern Normalschnitts Ac, diese beiden sollen + gesetzt werden sind soll immer im Sinne AA_1 concave Krümmung, wie Figur zeigt. Es sei angenommen daß alle 3 Krümmungsradien + seien wie in d. Figur, so werden also d. beiden Linienelemente Ab und A_1b von A aus gerechnet gegen einander convergieren unter d. unendl. kl. Winkel $\frac{ds}{\rho}$, daraus folgt: $\underline{bb_1 = ds(1-\frac{dy}{\rho})}$. Da ferner d. Krümmungsradius ρ' d. Normalschnitts Ab d. Fl. S + ist, so convergieren AA_1 und bb_1 von A aus gerechnet unter d. unendl. kl. Winkel $\frac{dy}{\rho'}$, so daß $\underline{A_1b_1 = dy(1-\frac{ds}{\rho'})}$ ist; ferner ebenso mit Bezug auf d. Fall, daß auch d. Normalschnitt Ac d. Fl. S concav gekrümmt gegen AA_1 ist, also ρ'' + ist, so convergieren AA_1 und cc_1 unter d. unendl. kl. Winkel $\frac{dz}{\rho''}$ und es ist also: $\underline{A_1c_1 = dz(1-\frac{ds}{\rho''})}$.

Es bleibt nun noch übrig, d. Längen bd und cd zu bestimmen. Die beiden Linien Ac und bd sind im Allgemeinen nicht parallel anzunehmen, sie divergieren von Ab aus unter d. unendl. kl. Winkel $\frac{dy}{r'}$, wo ein negativer Werth von r' d. Fall entsprechen würde, daß bd und Ac nicht divergieren sondern convergieren; dann ist: $\underline{cd = dy(1+\frac{dz}{r'})}$; endlich sei noch angenommen, daß auch Ab und cd von Ac aus gerechnet divergieren unter d. unendl. kl. Winkel $\frac{dz}{r''}$, wo ein negativer Werth von r'' d. entgegengesetzten Fall entspricht, [illegible], so ist: $\underline{bd = dz(1+\frac{dy}{r''})}$. Nun kann man d. d. Punkte A gegenüberliegenden Flächen ausdrücken und es ist mit Vernachlässigung unendl. kl. Größen 2ter Ordnung:

$$f_s + df_s = b_1A_1c_1d_1 = A_1b_1 \cdot A_1c_1 = dy\,dz\left(1-\frac{ds}{\rho'}\right)\left(1-\frac{ds}{\rho''}\right) = f_s\left(1-\frac{ds}{\rho'}-\frac{ds}{\rho''}\right).$$

$$f_y + df_y = b_1bdd_1 = bb_1 \cdot bd = ds\,dz\left(1-\frac{dy}{\rho}\right)\left(1+\frac{dy}{r''}\right) = f_y\left(1-\frac{dy}{\rho}+\frac{dy}{r''}\right).$$

$$f_z + df_z = c_1cdd_1 = cc_1 \cdot cd = \cancel{AA_1}\,dy\left(1+\frac{dz}{r'}\right) = f_z\left(1+\frac{dz}{r'}\right).$$

Daß $cc_1 = AA_1$ ist, sehen wir folgendermaßen ein: $b_1A_1c_1$ ist nach d. Annahme senkrecht zur Tangente in A_1, d. Linie dieser Tangente liegt in d. [illegible]ebene für d. Punkt A, also in $A.Ab$, also ist $b_1A_1c_1$ senkrecht zu $A.Ab$, andererseits auch zu $C.A.A_1$, weil sie zusammenfällt mit $A.AC$ senkrecht zu $A.Ab$. Man hätte also 2 Ebenen, d. gleichzeitig auf $A.Ab$ senkrecht stehen und d. sich in AC schneiden, folglich A_1C_1 senkrecht zu [illegible]ebene und parallel zu AC, also $AA_1 = cc_1$. —

Das Volumen dieses parallelepipedischen Raumelements sei bezeichnet mit dV, welches bei Vernachlässigung unendl. kl. Größen höherer Ordnung gesetzt werden kann: $dV = f_s\,ds = f_y\,dy = f_z\,dz$. Daraus folgt mit obigen Gln.:

$$df_s = -\left(\frac{1}{\rho'}+\frac{1}{\rho''}\right)dV; \quad df_y = \left(\frac{1}{r''}-\frac{1}{\rho}\right)dV \text{ und } df_z = \frac{1}{r'}\,dV.$$

Gehen wir nun über zur Elementarbetr. d. Beweg. für diejenige Flüssigkeitsmenge, welche sich augenblicklich in diesem parallelepipedischen Raumelement befindet, so müssen wir besonders zunächst darauf achten, d. innere Reibung mit [illegible], womit die, dieses parallelepipedische Element umgebende Flüssigkeitsmenge, [illegible] auf d. Richtungen AA_1, Ab und Ac, was diese innere Reibung betrifft, so sei zunächst d. Gesetz in Erinnerung gebracht, welches in d. mechanischen Wärmetheorie entwickelt wurde. Es sei A ein beliebiger Punkt im Innern einer in Beweg. befindlichen Flüssigkeit, AX AY und AZ 3 zu einander senkrechte Richtungen, u v w d. Comp. d. Geschw., welche augenblicklich in A stattfindet nach AX AY und AZ. Es findet dann in demselben Augenblick in A d. Ebene YAZ eine gewisse innere Reibung statt, welche sich im Allgemeinen in 3 Componenten zerlegen läßt nach AX AY u. AZ gerichtet, wie d. Geschwindigkeiten sich in 3 Comp. zerlegen lassen, wie dies, [illegible] d. [illegible] abhängig sind von

von d. Ausdehnungen und Verschiebungen, die inneren Reibungen abhängig sind von d. relativen Geschw. von Punkt zu Punkt im Raume. Wenn man sich d. innere Reibung pr. Flächeneinheit, welche im Punkt A d. Ebene yAz stattfindet in 3 Comp. zerlegt denkt, so sei d. erste bezeichnet mit σ_x und d. anderen mit τ_{xy} und τ_{xz}. So haben dann diese 3 Comp. d. spec. inneren Reibung in A d. Ebene yAz folgende Ausdrück:

$$\sigma_x = 2R\frac{du}{dx} \qquad \tau_{xy} = R\left(\frac{du}{dy}+\frac{dv}{dx}\right) \text{ und } \tau_{xz} = R\left(\frac{du}{dz}+\frac{dw}{dx}\right).$$

R bedeutet hierbei eine Constante, welche nur versuchsmäßig bestimmt werden kann, und für verschiedene Flüssigkeiten und verschiedene Zustände derselben Flüssigkeit verschieden ist. – Wendet man dies nun an, um im vorliegenden Fall für d. 6 Begrenzungsfl. d. [illegible] Flüssigkeitselements d. inneren Reibungen zu erhalten. Was d. Vorzeichen betrifft, so ist hinzuzufügen, daß d. inneren Reibungscomp. vorausgesetzt sind als d. Resultat d. Einwirkung d. im Sinne d. positiven Axen gelegenen Flüssigkeitselemente auf [illegible] d. Ebene xyz gelegenen. Wenden wir dies nun an, so erhalten wir:

1) d. Fl. $bAc = f_s$ betreffend. Hier ist an Stelle von Ax, AA_1 zu setzen, ferner an Stelle d. x Axe hier d. S Axe tritt. Unter dieser Voraussetzung ist hier u, was dort d. Geschw.-Comp. im Sinne d. x Axe bedeutete, hier d. resultierende Geschw. d. Achse S, wogegen d. anderen Geschw.-Comp. $= 0$ sind. Damit ergibt sich d. innere Reibung, welche in d. Fl. bAc stattfindet $= f_s$: 1) im Sinne $AA_1 = 2R\frac{du}{ds}f_s$,
nach d. Richtung Ab [illegible] Comp. d. inneren Reibung in dieser Richtung: $= R\frac{du}{dy}f_s$ und
nach Ac . . . . $= R\frac{du}{dz}f_s$, wobei aber berücksichtigt werden muß, daß d. hier in Betracht genommenen Flüssigkeitstheilchen von d. Seitenfl. f_s nicht im Sinne d. positiven S Layers gelegen sind, sondern umgekehrt, sodaß d. Zeichen $\div$ hinzuzufügen sind:
Also nach $AA_1 = \div 2R\frac{du}{ds}f_s$ nach Ab: $\div R\frac{du}{dy}f_s$ nach Ac: $\div R\frac{du}{dz}f_s$

2) Was d. Seitenebene $AAc = f_y$ betrifft, so gelten hier ganz analoge Ausdrücke für d. betreffenden Comp. d. inneren Reibung. σ_y d. Normalcomp. d. inneren Reibung ist $= 0$, weil $v = 0$ ist, d. Comp. τ_{yz}, welche d. Factor $\frac{dv}{dz}+\frac{dw}{dy}$ enthält, ist auch $= 0$, weil $v = w = 0$ ist, es bleibt nur d. Reibung übrig, welche d. Richtung AA_1 hat und welche ist $= \div R\frac{du}{dy}f_y$, weil d. angrenzenden Flüssigkeitstheile im Sinne d. negativen y Axe gelegen sind, demnach d. Componenten nach d. 3 aufgezeichneten Richtungen:
nach AA_1: $- R\frac{du}{dy}f_z$ nach Ab: 0 nach Ac: 0.

3) Was d. dritte um A herumliegende Seitenfl. $f_z = A, Ab$ betrifft, so sind d. betreffenden Comp. d. spec. inneren Reibung hier zu bezeichnen mit $\sigma_z\ \tau_{zs}$ und τ_{zy}; σ_z ist $= 0$ weil d. Geschw.-Comp. $w = 0$ ist, τ_{zy} ist $= 0$ weil auch d. Geschw. $v = 0$ ist, es bleibt also nur τ_{zs} übrig, eine innere Reibung nach d. Richtung AA_1, welche im Allgemeinen $= R\left(\frac{du}{dz}+\frac{dw}{ds}\right)$ ist, also mit $w = 0$:
nach AA_1: $- R\frac{du}{dz}f_z$ nach Ab: 0 nach Ac: 0

4) Gehen wir nun zur Seitenfl. $b, A, c_1 = f_s + df_s$ über, um diejenige innere Reibung zu erhalten, welche in dieser Seitenfl. und zwar nach d. Richtung d. Tangenten an d. Achse im Punkte A_1 stattfindet, so haben wir nur nöthig an Stelle von f_s zu setzen $f_s + df_s$ und zu $\frac{du}{ds}$ d. partielle Differential von $\frac{du}{ds}$ nach S hinzuzufügen und außerdem d. Vorzeichen umzukehren, weil hier d. angrenzenden Flüssigkeitstheile demnach im Sinne d. positiven S gelegen sind, also d. innere Reibung $= + 2R\left(\frac{du}{ds}+\frac{d^2u}{ds^2}ds\right)(f_s + df_s)$, ebenso erhält man d. Comp. d. inneren Reibung in dieser Seitenfl. nach d. Richtungen A_1b_1 und A_1c_1, wenn man d. Vorzeichen umkehrt, zu $\frac{du}{dy}$ resp. $\frac{du}{dz}$ ihre partiellen Differentiale bezüglich S hinzufügt und an d. Stelle von f_s immer $f_s + df_s$ setzt. Demnach hat man d. folgenden Componenten:
nach AA_1: $2R\left(\frac{du}{ds}+\frac{d^2u}{ds^2}ds\right)(f_s + df_s)$ – nach A_1b_1: $R\left(\frac{du}{dy}+\frac{d^2u}{dy\,ds}ds\right)(f_s + df_s)$; nach A_1c_1: $R\left(\frac{du}{dz}+\frac{d^2u}{dz\,ds}ds\right)f_s$

5) Was d. Seitenfl. $f_y + df_y = b, b_1 d$ betrifft, so erhält man für diese d. darin stattfindende innere Reibung und zwar nach d. Richtung bb_1, wenn man d. Ausdruck unter Berücksichtigung [illegible] nimmt, zu $\frac{du}{dy}$ d. partielle Differential nach y hinzufügt und für f_y setzt $f_y + df_y$. Also d. Componenten:
nach bb_1: $R\left(\frac{du}{dy}+\frac{d^2u}{dy^2}dy\right)(f_y + df_y)$ — — —

6) Ebenso behandelt man d. Reibung in d. Seitenfl. $f_z + df_z$, sie ist: nach CC_1: $\mathfrak{R}\left(\frac{du}{dz} + \frac{d^2u}{dz^2}dz\right)(f_z + df_z)$. — —

Dabei ist zu bemerken, daß während d. Kräfte unter 1) 2) u. 3) d. Richtungen AA_1, Ab und AC haben, d. Kräfte unter 4 5 u. 6 streng genommen nicht diese Richtungen haben, sondern etwas abweichende z.B. zunächst d. unter 4) stehenden. Die erste Kraft welche in $f_s + df_s$ nach d. Richtung d. Tangente an d. Curve im Punkte A_1 angreift, läßt sich zerlegen in 2 Comp. nach d. Richtungen AA_1 und Ab. Da d. Tangente d. Curve im Punkte A_1 mit d. Tangente d. Curve im Punkte A nur einen unendl. kl. Winkel bildet dessen cos. also nur um eine unendl. kl. Größe 2ter Ordnung von d. Einheit verschieden ist, so kann d. Comp. dieser Kraft genommen nach d. Richtung AA_1 d. unter 4 stehenden Kraft gleich gesetzt werden. Es kommt jedoch noch eine unendl. kl. Comp. nach d. Richtung Ab hinzu, welche erhalten wird, wenn d. Größe dieser Kraft für den Punkt A_1 multiplicirt wird mit d. cos. d. Winkels, den ihre Richtung mit Ab bildet. Offenbar ist aber d. cos dieses Winkels $= 1R +$ dem Contingenzwinkel d. Curve AA_1; Ab ist d. Richtung d. Krümmungshalbmessers d. Curve für d. Punkt A und d. Winkel, welchen d. Tangente d. Curve für d. Punkt A_1 mit d. Tangente im Punkte A an Ab bildet ist $= R \div$ dem Winkel, den d. Tangente d. Curve in A_1 mit d. Tangente d. Curve in A bildet; dieser ist aber = d. sin desselben und da d. Contingenzwinkel unendl. kl. ist so genügt es, mit Vernachlässigung unendl. kleiner Größen höherer Ordnung zu berücksichtigen, so ist d. sin = d. Winkel selbst also $= \frac{ds}{\varrho}$; da dieser Multiplicator $\frac{ds}{\varrho}$ unendl. kl. ist, so genügt es nur d. hauptsächlichsten Bestandtheile zu benutzen, also Glieder höherer Ordnung vernachlässigen. Demnach ist: $2\mathfrak{R}\frac{du}{ds} f_s \frac{ds}{\varrho}$ d. Comp. d. ersten Kraft unt. 4) nach d. Richtung Ab. — Was ferner in derselben Seitenfl. d. 2te Kraftcomp. nach d. Richtung Ab_1 betrifft, so ist d. Comp. dieser nach Ab gerichteten Kraft, genommen im Sinne Ab, dieser Kraft wieder gleich zu setzen; aber diese Kraft nach d. Richtung Ab liefert noch eine unendl. kl. Comp. nach d. Richtung AA_1, welche erhalten wird, wenn man jene Kraftgröße multiplicirt mit d. cos d. Winkels, ~~dessen~~ den d. Richtung Ab mit AA_1 bildet. Dieser Winkel ist $= 1R +$ d. Contingenzwinkel d. Curve AA_1; dessen cos ist aber $= \div \sin\frac{ds}{\varrho} = \div\frac{ds}{\varrho}$, es liefert also d. 2te Kraft unt. 4) noch eine Comp. nach d. Richtung AA_1, welche erhalten wird, wenn man diese Kraft mit $-\frac{ds}{\varrho}$ multiplicirt, wobei es wieder genügt nur d. Hauptbestandtheil zu berücksichtigen, diese Kraftcomponente nach d. Richtung AA_1 ist demnach: $-\mathfrak{R}\frac{du}{dy} f_s \frac{ds}{\varrho}$. Die 3te Kraft in d. Seitenfl. $f_s + df_s$ hat d. Richtung AC_1; diese Richtung ist aber parallel AC, wie früher bewiesen. Diese Kraft ist also ohne Weiteres = d. nach d. Richtung AC.

Was ferner d. Kraft 5) betrifft, die in d. Seitenfl. $f_y + df_y$ nach d. Richtung bb_1 wirkt, so liefert diese Kraft zunächst nach AA_1 eine ihr gleich zu setzende Kraft, sowie eine unendl. kl. Comp. nach d. Richtung Ab, welche erhalten wird, wenn man d. Kraft nach d. Richtung bb_1 multiplicirt mit d. cos d. Winkels, den d. Richtung bb_1 mit Ab bildet. Dieser ist $= 1R +$ d. Contingenzwinkel d. Normalschnitts Ab d. Querschnittsfl. F also $= 90° + \frac{dy}{\varrho'}$; d. cos dieses ist aber $= \div\sin\frac{dy}{\varrho'} = \frac{dy}{\varrho'}$ und demnach d. Componente nach d. Richtung Ab: $= -\mathfrak{R}\frac{du}{dy} f_y \frac{dy}{\varrho'}$.

Endlich bleibt noch d. Kraft 5) übrig; sie zerfällt in eine ihr selbst gleich zu setzende Kraft nach d. Richtung AA_1 und eine nach d. Richtung AC, welche erhalten wird mittelst d. früheren Winkel $ACC_1 = 1R + \frac{dz}{\varrho''}$ also $\cos ACC_1 = \div\sin\frac{dz}{\varrho''} = \div\frac{dz}{\varrho''}$ und folglich d. Componente nach d. Richtung AC: $= \div\mathfrak{R}\frac{du}{dz} f_z \frac{dz}{\varrho''}$.

Wenn nun d. sämmtlichen Reibungskräfte nach d. Richtung AA_1 sowie d. nach d. Richtung Ab und nach AC für sich addirt werden, sodann jede dieser Summen durch d. Volumenelement dV dividirt wird, so erhält man d. innere Reibung nach d. Richtungen AA_1, Ab und AC pr. Volumeneinheit Flüssigkeit. Diese inneren Reibungen seien entsprechend ihren Richtungen bezeichnet mit $\mathfrak{R}_s$, $\mathfrak{R}_y$, $\mathfrak{R}_z$; dieselben sind dann noch mit Vernachlässigung unendl. kl. Größen höherer Ordnung:

$$R_s = R\left[2\frac{d^2u}{ds^2} + 2\frac{df_s}{dV}\frac{du}{ds} + \frac{d^2u}{dy^2} + \frac{df_y}{dV}\frac{du}{dy} + \frac{d^2u}{dz^2} + \frac{df_z}{dV}\frac{du}{dz} - \frac{1}{\rho}\frac{du}{dy}\right]$$

$$R_y = R\left[\frac{d^2u}{ds\,dy} + \frac{df_s}{dV}\frac{du}{dy} + \frac{2}{\rho}\frac{du}{ds} - \frac{1}{\rho'}\frac{du}{dy}\right]$$

$$R_z = R\left[\frac{d^2u}{ds\,dz} + \frac{df_s}{dV}\frac{du}{dz} - \frac{1}{\rho''}\frac{du}{dz}\right].$$

Setzt man nun in diesen Glgn. für d. Verhältnisse $\frac{df_s}{dV}$ $\frac{df_y}{dV}$ und $\frac{df_z}{dV}$ ihre Werthe, so folgt:

$$R_s = R\left[2\frac{d^2u}{ds^2} + \frac{d^2u}{dy^2} + \frac{d^2u}{dz^2} - 2\left(\frac{1}{\rho'} + \frac{1}{\rho''}\right)\frac{du}{ds} + \left(\frac{1}{r''} - \frac{2}{\rho}\right)\frac{du}{dy} + \frac{1}{r'}\frac{du}{dz}\right]$$

$$R_y = R\left[\frac{d^2u}{ds\,dy} + \frac{2}{\rho}\frac{du}{ds} - \left(\frac{2}{\rho'} + \frac{1}{\rho''}\right)\frac{du}{dy}\right]$$

$$R_z = R\left[\frac{d^2u}{ds\,dz} - \left(\frac{1}{\rho'} + \frac{2}{\rho''}\right)\frac{du}{dz}\right].$$

Die Kräfte, welche überhaupt auf dieses gekrümmte Raumelement wirken, sind zunächst 2erlei: theils äussere Massenkräfte, welche auf d. Masse d. Flüssigkeit wirken, theils Oberfl.-Kräfte, welche von d. umgrenzenden Flüssigkeit herrühren; letztere sind theils normal [illegible] theils [illegible] [illegible] d. Richtungen [illegible] [illegible] d. Druck [illegible] pr. Volumeneinheit nach denselben Richtungen, womit d. umgebende Flüssigkeit auf dieses gekrümmte Flüssigkeitselement pr. Volumeneinheit wirkt. [illegible] [illegible] [illegible] d. Flüssigkeitselement gekrümmt abzugrenzen, [illegible] [illegible] d. Flüssigkeitselement [illegible] [illegible] Element zu denken, [illegible] [illegible] d. Flüssigkeitselement abgegrenzt wird. [illegible] d. Pr. d. äusserlich umgrenzenden Flüssigkeit auf d. Seitenfl. $bAC = p f_s$, wenn p d. spec. Pr. im Punkte A d. Flüssigkeit bedeutet. [illegible] d. gegenüberliegende Seitenfl., [illegible] $= f_s$ ist, ist d. spec. Pr. um p [illegible] und zwar $= p + \frac{dp}{ds}ds$, also d. Pr. für d. ganze Seitenfl.: $= \left(p + \frac{dp}{ds}ds\right) f_s$. [illegible] [illegible] [illegible] d. Seitenfl. b, A, C, d. umgrenzende Flüssigkeit in d. positiven s Richtung [illegible] [illegible] d. Pr., welche d. umgrenzende Flüssigkeit auf d. Element ausübt, d. Richtung A, A [illegible] [illegible] resultirende Zusammenfassung d. umgrenzenden Flüssigkeit auf d. [illegible] Element nach d. Richtung d. [illegible]: $= p f_s - \left(p + \frac{dp}{ds}ds\right) f_s$ und wenn man [illegible] d. spec. Pr. durch Division mit dV, so ergibt sich diese spec. Pr.: $= \frac{-\frac{dp}{ds}ds\,f_s}{dV} = -\frac{\frac{dp}{ds}ds\,f_s}{f_s\,ds} = -\frac{dp}{ds}$. [illegible] d. [illegible],

[illegible] d. äusseren umgrenzenden Flüssigkeit im Sinne d. [illegible] bezogen auf d. Volumeneinheit $=$ d. partiellen Ableitung von p nach s; ebenso ergibt sich für d. nach d. Richtung d. [illegible] [illegible] [illegible] d. umgrenzenden Flüssigkeit pr. Volumeneinheit $= -\frac{dp}{dy}$ und nach $AC = -\frac{dp}{dz}$. [illegible] also d. gesammte Oberfl.-Kraft, welche von d. umgebenden Flüssigkeit auf d. Oberfl. ausgeübt wird, bezogen auf d. Volumeneinheit [illegible] nach d. Richtung $A A_1$: $= R_s - \frac{dp}{ds}$ nach d. Richtung Ab: $= R_y - \frac{dp}{dy}$ und im Sinne d. [illegible] AC: $= R_z - \frac{dp}{dz}$. Multiplicirt man [illegible] Kraft-Comp., welche sich auf d. Volumeneinheit beziehen, mit d. Volumen d. Masseneinheit, so erhält man d. betreffende Kraft-Comp. pr. Masseneinheit. [illegible] d. [illegible] Masse d. Flüssigkeit im Punkte A [illegible] = Masse pr. Volumeneinheit, so ist $\frac{1}{\mu}$ offenbar d. Volumen pr. Masseneinheit. [illegible] also d. betreffenden Kräfte-Comp., welche sich auf d. Volumeneinheit beziehen, mit $\frac{1}{\mu}$ multiplicirt, so erhält man d. betreffenden [illegible]-Kräfte im Punkte A pr. Masseneinheit. [illegible] [illegible] pr. Masseneinheit sind d. äusseren Massenkräfte pr. Masseneinheit hinzuzufügen. Die Componenten derselben sollen mit K_s K_y K_z bezeichnet werden, also K_s d. spec. äussere Massenkraft im Sinne d. [illegible] etc. Fügt man diese hinzu, so folgt:

$K_s + \frac{1}{\mu}\left(R_s - \frac{dp}{ds}\right)$ als d. resultierende Gesamtkraft, welche pr. Masseneinheit nach d. Richtung d. Linie im Punkte A wirksam ist. Ebenso ist

$K_y + \frac{1}{\mu}\left(R_y - \frac{dp}{dy}\right)$ d. Gesamtkraft im Sinne d. Krümmungsradius pr. Masseneinheit im Punkte A.

$K_z + \frac{1}{\mu}\left(R_z - \frac{dp}{dz}\right)$ d. Gesamtkraft pr. Masseneinheit im Sinne d. Normalebene Ac für den Punkt A.

Diese 3 resultierenden Kraft-Comp. nach d. Richtungen AA_1, Ab und Ac müssen nun natürlich gleich sein d. Beschl.-Comp., welche nach AA_1, Ab und Ac stattfinden, denn diese Beschlen., welche im Punkte A nach diesen Richtungen stattfinden, rühren her von den auf d. Masseneinheit bezogenen äusseren und inneren Kräften, welche in A auf d. Flüssigkeit wirken. Nun lässt sich aber d. Beschl. eines Flüssigkeitselementes bei A, da dieses sich in d. Linie AA_1 bewegt, bekanntlich zerlegen in eine Linear- und eine Normalcomponente. d. Beschl. irgend eines materiellen Punktes lässt sich an jeder Stelle zerlegen in eine Comp. nach d. Tangente d. Linie und in eine Centripetalbeschl. Die Linearbeschl. nach d. Richtung d. Tangente ist $=$ dem Differentialquotienten d. Geschw. nach d. Zeit t also hier $= \frac{du}{dt}$, wo dies d. vollständige Differential ist mit Rücksicht darauf, dass u eine Function d. 4 Veränderlichen t s y u. z ist. d. Centripetalbeschl. nach d. Richtung Ab und zwar im Sinne gegen d. Krümmungsmittelpunkt hin ist $= \frac{u^2}{\varrho}$ und d. Beschl. Comp. nach d. Richtung Ac also im Sinne d. Binormale d. Linie ist $= 0$ folgl.:

$$K_s = \frac{1}{\mu}\left(R_s - \frac{dp}{ds}\right) = \frac{du}{dt}\,;\quad K_y = \frac{1}{\mu}\left(R_y - \frac{dp}{dy}\right) = \frac{u^2}{\varrho} \text{ und } K_z + \frac{1}{\mu}\left(R_z - \frac{dp}{dz}\right) = 0.$$

Diese Tangential. od. Linearbeschl. ist d. vollständige Ableitung von u nach d. Zeit t, welche auch folgendermassen geschrieben werden kann: $\frac{du}{dt} = \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial s}\frac{ds}{dt} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{dy}{dt} + \frac{\partial u}{\partial z}\frac{dz}{dt}$, weil u theils eine unmittelbare, theils eine mittelbare Function d. Zeit t, also auch u eine Function von s y u. z ist und diese Coord. selbst Functionen d. Zeit sind. In d. Ausdruck für $\frac{du}{dt}$ sind $\frac{ds}{dt}$ $\frac{dy}{dt}$ und $\frac{dz}{dt}$ nichts Anderes als d. Geschw.-Comp., welche in A nach AA_1, Ab und Ac stattfinden. Da aber AA_1 d. Richtung d. Linie ist, so sind d. Geschw. Comp. nach Ab und Ac $= 0$ und nach AA_1 $=$ d. Geschw. selbst, es ist also: $\frac{dy}{dt}$ und $\frac{dz}{dt} = 0$ und $\frac{ds}{dt} = u$, so dass:

$\frac{du}{dt} = \frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial s}$ ist; d. 3 genannten Fundamentalgleichgn. sind demnach:

$$K_s + \frac{1}{\mu}\left(R_s - \frac{dp}{ds}\right) = \frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial s}$$

$$K_y + \frac{1}{\mu}\left(R_y - \frac{dp}{dy}\right) = \frac{u^2}{\varrho}$$

$$K_z + \frac{1}{\mu}\left(R_z - \frac{dp}{dz}\right) = 0$$

Zu diesen 3 Fundamentalgleichgn. kommt d. sogenannte Continuitätsbedingung, die hier noch eine etwas andere Form als früher erhalten wird, wo ein rechtwinkliges parallelepipedisches Massenelement zu Grunde gelegt wurde. Was diese Continuitätsbedingung betrifft, so ist d. Flüssigkeitsmasse, welche zur Zeit t in diesem parallelepipedischen Raumelement befindet $= \mu\,dV$ unter μ d. spec. Masse verstanden, welche zur Zeit t im Punkte A stattfindet. Während d. nächst folgenden Zeitelementes dt ändert sich im Allgemeinen diese im selben Raumelement enthaltene spec. Masse und zwar um d. partielle Differential bezüglich d. Zeit, also um $\frac{\partial\mu}{\partial t}\,dt\,dV$. Diesen selben Zuwachs an Masse innerhalb d. Raumelements dV kann man auch anders ausdrücken. Mit Rücksicht auf d. Art und Weise, wie hier dieses Raumelement abgegrenzt wurde, fliesst während d. Zeitelements dt Flüssigkeit nur ab und nur durch d. Flä. Abc und $A_1b_1c_1$, an d. angrenzenden Fl. fliesst nur Flüssigkeit vorbei, es muss also dieser Zuwachs an Masse auch gleich sein d. Unterschied derjenigen Flüssigkeitsmasse, welche während d. Zeitelements dt durch d. Fl. bAc einfliesst über die, welche durch $b_1A_1c_1$ herausfliesst.

Was nun d. Flüssigkeit betrifft, d. während d. Zeitelements dt durch bAC hineinfließt, so ist d. Volumen dieser Flüssigkeit = d. Product aus d. Größe f_s d. Ausschnitt bAC und $u.dt$, also:
$= f_s\, u.dt$, denn $u.dt$ ist d. Factor, welcher anzeigt, daß irgend ein Flüssigkeitstheilchen während d. Zeitelements dt vermöge d. Geschw. u durch d. Fl. f_s fließt. Das Flüssigkeitsvolumen, welches während d. Zeit dt in d. fraglichen Raum hineinfließt ist also $f_s\, u\, dt$, also d. entsprechende Flüssigkeitsmenge, welche während d. Zeit dt hineinfließt $= f_s\, \mu . u\, dt$. –

Man erhält andererseits diejenige Flüssigkeitsmenge, welche in derselben Zeit aus d. Raume dV herausfließt, wenn man einfach in diesem Ausdruck $f_s + df_s$ für f_s setzt und wenn man ferner $\mu . u$ um ihr partielles Differential nach s vermehrt, also ist dieselbe:

$$=(f_s + df_s)\left(\mu . u + \frac{d\mu u}{ds} ds\right) dt.$$

Nimmt man dieses von d. hineinfließenden Menge abzieht, so erhält man diejenige Menge, welche während d. Zeitelements dt in d. Raume mehr hinein als herausfließt; dieser Zuwachs ist: $= \frac{d\mu}{dt} dt . dV$, also:

$$\frac{d\mu}{dt} dt\, dV = f_s\, \mu\, u\, dt - (f_s + df_s)\left(\mu u + \frac{d\mu u}{ds} ds\right) dt$$

Oder: $$\frac{d\mu}{dt} dV = -\frac{d\mu u}{ds} f_s\, ds - \mu\, u\, f_s$$ da d. letzte Product unendl. kl. höherer Ordnung ist.

Dividirt man durch dV, so folgt: $$\frac{d\mu}{dt} = -\frac{d\mu u}{ds} + \mu u\left(\frac{1}{\rho'} + \frac{1}{\rho''}\right)$$

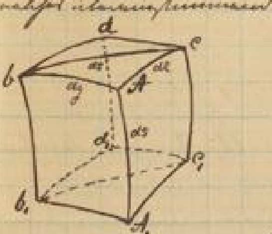
oder: $$\frac{d\mu}{dt} + \frac{d\mu u}{ds} = \mu u\left(\frac{1}{\rho'} + \frac{1}{\rho''}\right).$$ Dies ist d. sogenannte Continuitätsgleichung.

Diese Gl. vereinfacht sich wesentlich, wenn d. spec. Masse d. Flüssigkeit constant ist, wie dies namentlich mit bedeutender Annäherung bei d. Strömung einer tropfbaren Flüssigkeit vorausgesetzt werden kann, vorausgesetzt, daß d. Temperatur eine unwesentlich veränderliche ist, wie dies auch diesen allgemeinen Entwicklungen zu Grunde gelegt wurde. Ist dies d. Fall so ist d. spec. Volumen v auch ungefähr als constant zu setzen, also $\mu = const.$ folglich:

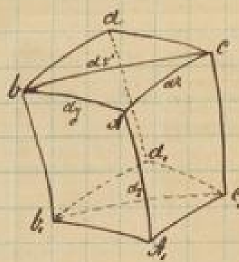
$$\frac{d\mu}{dt} = 0 \quad \text{ferner: } \frac{d\mu u}{ds} = \mu \frac{du}{ds} \quad \text{und daraus:}$$

$$\frac{1}{u}\frac{d\mu}{ds} = \frac{1}{\rho'} + \frac{1}{\rho''}.$$ = Continuitätsgleichung einer tropfbaren Flüssigkeit bei constanter spec. Masse. –

Was d. Grenzbedingungen betrifft, so sind diese besonders abhängig von d. äußeren Reibungen, welche zwischen d. Oberfl. d. strömenden Flüssigkeit und d. festen Leitfl. stattfindet. Diese äußere Reibung, auf d. Flächeneinheit bezogen mit R' bezeichnet, ist entschieden immer d. relativen Bewegung d. Flüssigkeit längs d. Leitfl. gerade entgegengesetzt gerichtet. Sie ist übrigens eine (nur empirisch zu bestimmende) Function d. Geschw., ferner abhängig von d. Oberfl.-Beschaffenheit d. Wand ferner von d. Art und dem Zustand d. Flüssigkeit. Es sei nun mit ds' ein Bogenelement d. Curve bezeichnet, in welcher eine solche feste Leitfl. von einem Querschnitt geschnitten wird, unter Querschnitt d. zu allen Stromlinien senkrecht stehenden Fläche verstanden. In d. nebenstehenden Figur, darstellend ein Flüssigkeitselement, welches ebenso begrenzt wird, wie unser Coordinatensystem begrenzt wird, sei bc ein solches Element ds'. Es werde dann eine unendl. dünne Flüssigkeitsschicht betrachtet, welche längs d.



Leitfl. bcc_1b_1 hinfließt. Diese Flüssigkeitsschicht hat einen rechtwinklig dreieckigen Querschnitt bAC, dessen Hypotenuse $= ds' = bc$ ist und dessen Katheten unendl. kl. Element d. durch d. Punkt A gehenden Krümmungs- und Normalebenen sind $= Ab = dy$ und $Ac = dz$. Betrachtet man nun d. Gleichgew. d. Kräfte an einem unendl. kl. Stück eines solchen Prismas, welches herausgeschnitten wird durch 2 unendl. nahe benachbarte Querschnitte gehend durch d. beiden unendl. nahen Punkte A u. A_1 d. Linie, so muß sich d. betreffende



Die algebraische Summe aller auf d. Element wirkenden Kräfte im Sinne d. Verschiebung $AA_1 = 0$ sein. Was d. Fl. betrifft, welche auf d. Flä. $A_1 b_1 C_1$ und $A b C$ wirksam werden, so reduciren sich diese offenbar auf unendl. kl. Größen 3ter Ordnung, wenn auf d. Richtung AA_1 bezogen. Ebenso verhalten sich d. Massenkräfte. Es müssen demnach d. Kräfte von unendl. kl. Größe 2ter Ordnung für sich = 0 sein. Diese übrig bleibenden Kräfte sind aber d. äußere Reibung längs d. Fl. $b c b_1 c_1$, und d. inneren Reibungen längs d. Flä. $A A_1 C_1 C$ und $A A_1 b_1 b$.

D. Größe d. Fl. $b b_1 c c_1$ ist nun mit Vernachlässigung unendl. kl. Größen höherer Ordnung $= ds . ds'$ und demnach d. äußere Reibung an d. Seitenfl. $b b_1 c c_1 = R' ds . ds'$; da diese aber immer d. entgegengesetzte Richtung d. Bewegung d. Elements gegen d. Leitfl. hat, ist sie $= \div R' ds . ds'$ im Sinne d. Richtung AA_1.

Für d. Seitenfl. $AA_1 b_1 b$ ist d. innere spez. Reibung $= R \frac{du}{dz}$ und also d. Gesamtreibung gemessen nach d. Richtung $AA_1 = \div R \frac{du}{dz} ds . dy$.

Endlich ist d. spez. Reibung d. Seitenfl. $A A_1 C_1 C = R \frac{du}{dy}$ und also d. Gesamtflächenreibung nach d. Richtung $AA_1 = \div R \frac{du}{dy} ds . dz$.

Die algebraische Summe aller dieser Kräfte muß nun = 0 sein, man hat also d. Bedingung:

$$\div R' ds . ds' - R \frac{du}{dz} ds . dy - R \frac{du}{dy} ds . dz = 0$$

od. wenn man mit $\div R\, ds . ds'$ dividirt:

$$\frac{R'}{R} + \frac{du}{dz} \cdot \frac{dy}{ds'} + \frac{du}{dy} \cdot \frac{dz}{ds'} = 0 .$$

Diese allgemeine Oberfl.-Bedingung muß also stattfinden für alle diejenigen Punkte, in welchen d. [illegible] Flüssigkeit in Berührung ist mit d. festen Leitfl. also dort, wo äußere Reibung stattfindet. Diese Gl. kann in besonderen Fällen dienen um d. Constanten zu bestimmen, welche sich bei d. Integration d. vorher erhaltenen Differentialgleichungen ergeben. —

Es lässt sich nun leicht begreifen, daß d. Lösung d. vorhin gefundenen allgemeinen Glen. sich erspart wird für besondere [illegible] Fälle durch d. vereinfachten Ausdruck, namentlich durch diejenigen, welche sich für d. Reibungscomponenten R.. ergeben. Indessen vereinfachen sich diese in manchen Fällen nicht wesentlich, wo besondere Annahmen gemacht werden können.

Ist insbesondere $u = const.$ für jeden Punkt und alle Querschnitte als Ebenen anzunehmen, so wird offenbar:
$\frac{1}{\rho'} = \frac{1}{\rho''} = 0$, denn ρ' und ρ'' bedeuten d. Krümmungsradien d. Normalschnitte d. Querschnitts durch A, welche d. Krümmungslinien und Normalen berühren, da diese Schnitte aber unter d. Voraussetzung ebener Querschnitte auch eben sind, so sind ihre Krümmungsradien $= \infty$ also $\rho' = \rho'' = \infty$. Demnach ergibt sich dann auch d. Reibungscomponenten im Sinne senkrecht zur Achse $= 0$, also $R_z = R_y = 0$. weil mit $u = const$ d. Ableitungen von $\frac{u}{\rho}$ $= 0$ werden. Ebenso würde sich auch auch d. Reibungscomponente im Sinne d. Achse vereinfachen. Wenn d. vereinfachende Voraussetzung auch nicht genau stattfindet, so kann man doch in vielen Fällen mit großer Annäherung [illegible] und demnach d. Reibungscomponenten senkrecht zur Achse vernachlässigen und zwar entsprechend [illegible], je weniger veränderlich d. Größe u ist und je mehr d. Querschnitte sich ebenen Flächen nähern d.h. je mehr sich ρ' und ρ'' d. Unendlichkeit nähern. —

genau

In einem solchen Fall, in welchem d. Querschnitte Ebenen sind, sind alle Fasern offenbar geradlinige Curven. Bemerkenswerth ist dabei insbesondere d. Fall, daß alle Querschnittslinien einer Geraden parallel sind. Z.B. wenn es sich handelt um d. Bewegung von Wasser in einem [illegible] Kanal, dessen Querschnitte unveränderlich sind. Man kann dann

d. Querschnitte als vertikale Ebenen ansehen, parallel d. Richtung d. Strömung und ebenso d. Flächen als horizontalschnittkurven Curven. Als Normalkurven und Krümmungskurven kann dann ein System von sich rechtwinklig schneidenden geraden Linien angenommen werden, welche in obigem Beispiel aber so anzunehmen wären, daß d. Krümmungskurve eine horizontale Gerade und d. Normalkurve eine vertikale Gerade sei. In diesem Falle wird d. Reibungsfl. d. Elements $= ACbd$ ein Rechteck und demnach $r' = r'' = \infty$, weil die Richtungen von AC u. bd sowie Ab u. Cd, welche d. unendl. kl. Winkel $\frac{dy}{r'}$ und $\frac{dz}{r''}$ miteinander bilden, nun parallel sind. Unter dieser Annahme vereinfacht sich d. betreffende Ausdruck noch mehr, denn mit $\rho' = \rho'' = \infty$, $\frac{du}{ds} = 0$ und $r' = r'' = \infty$ wird d. erste Reibungskomponente im Sinne d. Achse:

$$R_s = R\left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} - \frac{2}{\rho}\frac{du}{dy}\right)$$ und natürlich wie vorhin $R_y = R_z = 0$.

Wenn endlich d. ebenen Querschnitte nicht nur in einem Punkte parallel sind, sondern alle untereinander parallel sind, demnach alle Achsen parallele horizontale ~~[illegible]~~ Geraden sind, wie dies bei d. Beweg. von Wasser in Röhren und Kanälen d. Fall ist, so wird:

$$R_s = R\left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right)$$ denn dann ist offenbar auch $\rho = \infty$ d. h. d. Krümmungsradius d. Achse in d. fraglichen Punkte $= \infty$.

In einem solchen Fall wird es nur zuweilen vorteilhafter sein, statt d. Systems sich rechtwinklig schneidender gerader Linien ein anderes System von sich rechtwinklig schneidenden Linien als Coord.-System einzuführen. Z. B. kann man in nachstehendem Fall als Krümmungskurven ein System von geraden Linien annehmen, welche sich in einem Punkte schneiden und als Normalkurven concentrische Kreise um d. gemeinschaftlichen Schnittpunkt als Centrum

betrachten. Dieses Coord.-System wird insbesondere von vorteilhaftestem sein, wenn es sich handelt um d. Bewegung von Wasser in einer geraden cylindrischen Röhre, wo dann d. Röhrencentrum zugleich d. Mittelpunkt d. Querschnitts ist. Für diesen Fall hat man dann in d. allgemeinen Formel zu setzen: $\rho = \infty$ weil alle Achsen gerade Linien sind,

ferner: $\rho' = \rho'' = \infty$ weil d. Normalschnitte d. Querschnitts gerade Linien werden. Was r' betrifft, so muß man offenbar wieder $r' = \infty$ setzen, denn betrachtet man d. Querschnitt eines sektorförmigen Elements $= Abcd$, so ist hier $bd \parallel Ac$ also ihr Neigungswinkel $= \frac{dy}{r'} = 0$ demnach $r' = \infty$ etc. Andererseits ist aber $r'' = r$ zu setzen, unter r d. Radius eines solchen concentrischen Kreises verstanden, denn es bedeutet bekanntlich $\frac{dz}{r''}$ den Neigungswinkel von Ab mit Cd, dieser ist aber nun $= \frac{dz}{r}$ und also $r'' = r$; endlich ist natürlich für dy — dr in d. Formel einzuführen. Setzt man diese Werte ein, so erhält man:

$$\breve{R}_s = \breve{R}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + \frac{1}{r}\cdot\frac{\partial u}{\partial r}\right)$$

während d. Reibungskomponenten senkrecht zur Achse $= 0$ werden wie vorhin gezeigt.

Gewöhnlich wird man indessen in solchen Fällen noch weitere vereinfachende Voraussetzungen zu Grunde legen dürfen, z. B. die, daß in allen Punkten eines Normalkreises d. Geschw. gleich groß ist und daß dieselbe nur von Normalkreis zu Normalkreis veränderlich ist. In diesem Falle ist also auch $\frac{du}{dz}$ d. h. d. Ableitung von Geschw. u nach z $= 0$ zu setzen, und demgemäß auch u nur als Funktion von r zu betrachten, so daß im Falle d. partiellen Differentialquotienten (∂) nur d. vollständigen Differentiale (d) von u treten. Man hat dann:

$$R_s = R\left(\frac{d^2 u}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{du}{dr}\right) - \frac{R}{r}\left(r\frac{d^2 u}{dr^2} + \frac{du}{dr}\right) = \frac{\breve{R}}{r}\frac{d}{dr}\left(r\cdot\frac{du}{dr}\right).$$

Ist jedoch d. Geschw. u auch abhängig von d. Zeit t, so müssen natürlich d. partiellen Differentiale (∂) stehen bleiben. Von dieser Formel wird später Gebrauch gemacht bei d. Lösung d. Widerstandes d. Bewegung von Flüssigkeiten in geraden cylindrischen Röhren.

Bis dahin wurde immer vorausgesetzt, daß d. Geschw. u nicht nur eine Function d. Coord. sondern auch eine Function d. Zeit t sei. Von großem technischen Interesse ist nun aber d. Fall, daß die Geschw. nicht abhängig von d. Zeit t ist, also eine sogenannte permanente Bewegung stattfindet. Man nennt nämlich eine permanente Bewegung eine solche, bei welcher sich d. Geschw. nur von Punkt zu Punkt, nicht aber im Verlaufe d. Zeit in demselben Punkte ändert. Wenn dies d. Fall ist, und besonders vorausgesetzt, daß d. äußerl. Kräfte und d. Grenzbedingungen unabhängig von d. Zeit gegeben sind, so werden d. Ableitungen nach d. Zeit $t = 0$, also:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = 0 \qquad \frac{\partial p}{\partial t} = 0 \quad \text{und} \quad \frac{\partial \mu}{\partial t} = 0 .$$

Wenn dabei nun weiter vorausgesetzt wird, daß d. spec. Masse μ als Function d. Dr. p gegeben ist, so kommt es nur darauf an d. Dr. p und d. Geschw. u als Function d. Coord. zu bestimmen. Hierzu dienen d. sogenannten 3 Fundamentalgleichungen und d. Continuitätsgl., welche sich aber im vorliegenden Falle noch vereinfachen indem mit $\frac{\partial \mu}{\partial t}$ d. Continuitätsgl. heißt nach Seite 23:

$$\frac{d(\mu u)}{ds} = \mu u \left(\frac{1}{\rho_1} + \frac{1}{\rho_2}\right).$$

Übrigens läßt sich diese noch einfacher schreiben, und ~~[illegible]~~ so daß sie für d. Gebrauch noch bequemer und angenehmer wird.

Es sei nämlich A ein Punkt d. Querschnitts σ und A_0 d. Durchschnittpunkt d. durch A gehenden Linie mit d. in entgegengesetzter Richtung d. Bewegung unendl. nahe benachbarten Querschnitt σ_0, so sei ein unendl. kl. Flächenelement in σ_0, welches d. Punkt A_0 in sich schließt. Durch alle Punkte d. Umfanges d. Flächenelements f_0 werden d. betreffenden Curven gelegt. Diese Curven bestimmen d. Mantelfl. eines fadenförmigen Raumes, welcher d. Querschnitt σ in d. Element f schneidet, das natürlich d. Punkt A in sich enthält. Das Querschnittsverhältniß d. Flüssigkeitsfadens, welcher durch 2 unendl. nahe benachbarte Querschnitte σ_0 und σ geschnitten wird, ist demnach $= \frac{f}{f_0} = \alpha$. Denken aber d. Bewegung d. Querschnitts gegeben ist, so ist auch dieses Querschnittsverhältniß fest als Function d. Coord. gegeben. Nun besagt bekanntlich d. Continuitätsgl. darauf, daß in irgend einer Zeit durch d. Querschnitt f ebensoviel Flüssigkeitsmasse hindurchströmen muß wie durch f_0, eine continuierliche Raumerfüllung durch Massenelemente vorausgesetzt. Ist nun u d. spec. Geschw. und μ d. spec. Masse d. durch d. Element f hindurchfließenden Flüssigkeit, so ist d. Masse dieser Flüssigkeit in Zeiteinheit: $= \mu f u$; ist ebenso μ_0 d. spec. Masse und u_0 d. Geschw. d. durch f_0 hindurchfließenden Flüssigkeit, so ist deren Masse $= \mu_0 f_0 u_0$; beide Theile müssen aber gleich groß sein daß es muß:

$$\mu f u = \mu_0 f_0 u_0$$

also $\alpha \mu u = \mu_0 u_0$ sein. Diese Gl. kann nun an Stelle d. Continuitätsgl. gesetzt werden, wobei d. Querschnittsverhältniß α als Function d. Coord. als gegeben zu betrachten ist. Dieses Verhältniß ist offenbar abhängig von d. Krümmungen d. Querschnitte an denjenigen Punkten, in welchen d. Querschnitte σ und σ_0 von d. Linie geschnitten werden. Diese Beziehung ist auch leicht aus den oben gefundenen Gl. abzuleiten, indem man sie nach s zu differentiieren braucht; man erhält dann nach einigen Umformungen:

$$\frac{1}{\mu u} \cdot \frac{d(\mu u)}{ds} + \frac{1}{\alpha} \frac{d\alpha}{ds} = 0$$

Setzt man nach oben:

$\frac{d(\mu u)}{ds} = \mu u \left(\frac{1}{\rho_1} + \frac{1}{\rho_2}\right)$ ist, gilt also nur: $\frac{1}{\alpha} \frac{d\alpha}{ds} + \frac{1}{\rho_1} + \frac{1}{\rho_2} = 0.$

Statt d. Summe d. Krümmungsradien d. Normalschnitte, welche d. Krümmungscurven und Normalcurven für d. betreffenden Punkt berühren, kann man auch d. Summe d. Krümmungsradien zweier beliebiger zu einander senkrechter Normalschnitte d. Querschnitts setzen, indem diese bekanntlich immer einander gleich sind. —

Von d. 3 Fundamentalgl. ist insbesondere d. erstere wichtig, und mit Rücksicht auf spätere Benützung erscheint es zweckmäßig, derselben eine andere Form zu geben in welcher sie später mit Vorteil angewendet werden kann. Nach Seite … hieß d. erste Fundamentalgl.:

$$K_s + \frac{1}{\mu}\left(R_s - \frac{dp}{ds}\right) = \frac{du}{dt} + u\frac{du}{ds}.$$

Diese Gl., bezogen auf d. Masseneinheit, soll nun mit $\frac{1}{g}$ (g = Beschl. d. Schwere) d. h. mit d. Masse d. Gewichtseinheit multipliziert werden, so ist dann d. Gl. dann auf d. Gewichtseinheit bezogen bekommt. Außerdem soll auch d. Gl. mit d. Längenelement ds d. Linie multipliziert werden, wobei d. erhaltenen Differentiale auf s d. Einfachheit wegen mit d bezeichnet werden sollen, also es ist zu setzen:

$$\frac{dp}{ds}ds = dp \quad \text{und} \quad \frac{du}{ds}ds = du$$

Ferner sei d. Produkt $\mu . g$ = spez. Gew. mit γ bezeichnet = Gew. d. Volumeneinheit. Setzt man dies alles ein und berücksichtigt daß $\frac{du}{dt} = 0$ ist, so folgt:

$$\frac{dp}{\gamma} + \frac{u\,du}{g} = \left(\frac{K_s}{g} + \frac{R_s}{\gamma}\right) ds.$$

Nun ist aber offenbar:

$$\frac{dp}{\gamma} = d\left(\frac{p}{\gamma}\right) - p\,d\left(\frac{1}{\gamma}\right) \quad \text{und ferner} \quad \frac{u\,du}{g} = d\left(\frac{u^2}{2g}\right)$$

so daß d. Gl. dann heißt:

$$d\left(\frac{p}{\gamma} + \frac{u^2}{2g}\right) = p\,d\frac{1}{\gamma} + \left(\frac{K_s}{g} + \frac{R_s}{\gamma}\right) ds.$$

Hierin bedeutet bekanntlich nun $\frac{p}{\gamma}$ die spez. Druckhöhe im Punkte A d. h. d. Höhe einer Flüssigkeitssäule vom Querschnitt $= 1$, deren Gew. $= p$ ist und deren spez. Gew. = d. spez. Gew. an d. betreffenden Punkt A d. Flüssigkeit ist.
Ferner ist $\frac{u^2}{2g}$ d. sogenannte Geschw.-Höhe im Punkte A.
Die oben gefundene Gl. drückt also d. Gesetz aus, nach welchem sich d. Summe d. Druckhöhe und Geschw.-Höhe von Punkt zu Punkt ändert. Integriert man diese Gl. längs d. Bogen $A_0 A$ d. Linie, so erhält man:

$$\frac{p}{\gamma} + \frac{u^2}{2g} - \left(\frac{p_0}{\gamma_0} + \frac{u_0^2}{2g}\right) = \mathcal{E} + \mathcal{M} + \int_0^s \frac{R_s}{\gamma}\,ds$$

unter p_0, γ_0 u. u_0 d. betreffenden Größen für d. Punkt A_0 verstanden und unter s d. Entfernung $A_0 A$, gemessen auf d. Linie, verstanden. Ferner bedeutet hierin $\mathcal{E}$ d. auf d. Weg von A_0 bis A verrichtete Expansionsarbeit, denn es ist gesetzt worden: $\mathcal{E} = \int_0^s p\,d\left(\frac{1}{\gamma}\right)$, welcher Ausdruck aber bekanntlich d. Ausdruck für d. Expansionsarbeit pr. 1 kgr bedeutet.
Ferner bezeichnet $\mathcal{M}$ d. Ausdruck: $\int_0^s \frac{K_s}{g}\,ds$; dies ist aber offenbar d. Arbeit d. äußeren Massenkräfte pr. 1 kgr. Flüssigkeit, denn es wurde mit K_s d. spez. äußere Massenkraft pr. Masseneinheit im Sinne d. Linie bezeichnet, so ist also $\frac{K_s}{g}$ d. äußere Massenkraft pr. Gewichtseinheit im Sinne d. Linie bezeichnet. Endlich bezeichnet d. Integral d. Arbeit d. inneren Reibung auf d. Weg von A_0 bis A, verursacht d. Arbeit d. auf d. Linie $A_0 A$ gerichteten Reibungskomponente R_s. Wenn also $A_0 A$ irgend ein Stück einer im Sinne $A_0 A$ durchlaufenen Linie ist, so ist d. Summe aus Druckhöhe und Geschw.-Höhe in d. Punkte A = d. entsprechenden Summe aus Druck- und Geschw.-Höhe ~~+ d. [illegible]~~ d. [illegible] in d. Punkte A_0 + d. während d. Wegs $A_0 A$ ~~pr.~~ 1 kgr verrichteten Expansionsarbeit + d. Arbeit d. äußeren Massenkräfte pr. 1 kgr + d. pr. 1 kgr Flüssigkeit verrichteten Arbeit d. inneren Reibung im Sinne d. Linie, od. auch man kann sagen: die Summe d. Druck- und Geschw.-Höhe in 2 verschiedenen Punkten A und A_0 unterscheiden sich durch die von A_0 bis A pr. 1 kgr verrichteten Expansionsarbeit + d. Arbeit d. äußeren Massenkraft + d. Arbeit d. inneren Reibung im Sinne d. Linienrichtung, alles bezogen auf d. Gewichtseinheit. In dieser Form soll nun d. erste Fundamentalgl. immer zur Anwendung kommen.

Die Geschwindigkeit läßt sich dabei als Function von p und p_0 mit Rücksicht auf d. als gegeben vorausgesetzte Beziehungsgleichung zwischen μ u. p bestimmen. Ebenso auch d. Durchflußmenge. Die Arbeit d. inneren Reibung läßt sich in d. meisten Fällen hingegen nur angenähert bestimmen und zwar als Function d. von A_0 bis A durchlaufenen Strecke. Angenommen dies sei aber geschehen, alsdann stellt d. oben gefundene Gl. eine Beziehung zwischen d. entsprechenden Größen $p\,p_0$ u. $\mu - \mu_0$ in d. beiden Punkten A u. A_0 dar, d.h. in 2 Punkten einer und derselben Linie. Eine 2te Beziehung zwischen denselben Größen wird durch d. vorhin gefundene Continuitätsgl.

$$\lambda \mu u = \mu_0 u_0$$

dargestellt, so daß man nun 2 Beziehungen zwischen 4 Größen hat, ~~sodaß~~ und demgemäß wenn 2 Größen gegeben sind, die beiden anderen bestimmt werden können. —

Die beiden anderen Fundamentalgl. Seite 32 stellen d. Gesetz dar, nach welchem sich d. Dr. p im Sinne d. y u. z Axe, also im Sinne d. Querschnitts, von Punkt zu Punkt ändert. ~~und~~ Was dieses Gesetz betrifft, nach welchem sich d. Dr. p von Punkt zu Punkt im Querschnitt ändert, so läßt sich Folgendes bemerken: Je weniger d. Querschnitte gekrümmt sind (also je mehr ρ' und $\rho'' = \infty$ werden), je weniger verschieden d. Geschw. u von Punkt zu Punkt sich ändert und je weniger d. Linien gekrümmt sind durch welche d. Querschnitt durchgehen (also um so mehr $\rho = \infty$ wird) um so desto genauer kann man annehmen, daß d. Dr. p sich nur nach hydrostatischen Gesetzen ändert. Denn wie schon früher gesehen, würde mit vollkommen ebenen Querschnitten ($\rho' = \rho'' = \infty$) und mit $\frac{dy}{ds} = 0$
$R_y = R_z = 0$. Wenn ferner d. Linien sehr wenig gekrümmt sind, so kann mit $\rho = \infty$
$\frac{u^2}{\rho} = 0$ gesetzt werden, so daß d. beiden letzten Fundamentalgl. übergehen in:

$$\frac{dp}{dy} = \mu X_y \quad \text{und} \quad \frac{dp}{dz} = \mu X_z$$

also in Gleichungen, welche nur von d. äußeren Massenkräften beeinflußt werden, entsprechend d. Eigenschaft d. hydrostatischen Gesetze, so daß p also dann nur nach d. hydrostatischen Gesetzen von Punkt zu Punkt veränderlich ist in ein und demselben Querschnitt.

Wichtig ist es, dies noch vorweg festzuhalten, indem man sich öfters nach solchen vereinfachenden Bedingungen umsehen muß.

Was d. äußeren Massenkräfte betrifft, so ist zur Erzielung einer permanenten Bewegung offenbar erforderlich, daß für jeden Punkt d. Geschw.-Bew. als bloße Functionen d. Coord. gegeben sein müssen. Die Bewegung d. Flüssigkeit kann also nur eine permanente sein, wenn d. resultierende Massenkraft K für jeden Punkt $x\,y\,z$ eine unveränderliche Größe und Richtung gegen d. Coord.-Richtungen habe, daß also d. Massenkraft K in Bezug auf Größe und Richtung constant sei. Wenn dieses Coord. System selbst in Bewegung begriffen ist, so muß, wenn man d. Schwerkraft als d. wichtigste Massenkraft betrachtet, die Resultante K d. äußeren Massenkräfte = d. beschleunigenden Schwerkraft + d. beiden Ergänzungskräften d. relativen Bewegung sein. In diesem Fall kann sich jedenfalls nur eine permanente Bewegung ausbilden, wenn d. Schwerkraft und d. Ergänzungskräfte d. relativen Beweg. gegen d. Coord.-Axen eine bestimmte Richtung haben. Wenn also z.B. d. festen Leitflächen und mit ihnen das an ihnen befestigte Coord.-System in Rotation begriffen ist, so muß diese Rotation immer um eine vertikale Axe mit constanter Winkelgeschw. stattfinden, denn nur dann bildet d. Richtung d. Schwerkraft immer denselben Winkel mit d. Axen, ferner muß d. Winkelgeschw. ω constant sein, weil sonst d. Ergänzungskräfte als Functionen d. Zeit erscheinen und also d. Definition einer permanenten Beweg. widersprechen würde. Außerdem kann aber auch unabhängig d. permanenten Beweg. das an d. feste Axe relativ System eine [illegible] Bewegung im Sinne d. festen Rotationsaxe mit constanter Geschw. besitzen. Es fragt sich nun wie sich also d. Arbeit d. äußeren Massenkräfte ausdrücken läßt?

Es sei also vorausgesetzt, daß mit d. Leitfl. fest verbundene Coord.-System habe eine eigene Bewg. und zwar eine Rotation um eine feste Axe mit d. constanten Winkelgeschw. ω und ferner eine Translationsbewegung im Sinne d. festen Rotationsachse mit d. constanten Beschl. f welche letztere zuerst von oben nach unten und nachher von unten nach oben gerichtet werden soll. Ferner sei h die Höhe d. Punktes A_0 über A und r_0 und r d. resp. Abstände d. Punkte A_0 und A von d. festen Rotationsachse. Die Arbeit M d. äußeren Massenkräfte besteht dann aus mehreren Theilen. d. Schwerkraft nämlich verrichtet während d. Beweg. d. Flüssigkeit von A_0 nach A d. Arbeit $= 1 \cdot h$. pr. Gewichtseinheit, was ferner d. Schwungkräfte d. relativen Beweg. betrifft, so kommt d. Erste gar nicht weiter in Betracht, indem dieselbe immer bekanntlich normal zur relativen Bahn d. Massenelements und demnach ihre Arbeit $= 0$ ist. Die erste Schwungkraft, welche bekanntlich d. System eine Beschl. ertheilt, welche gleich groß aber entgegengesetzt gerichtet ist d. Beschl. d. betreffenden Punktes, die dieser erhalten würde wenn er mit d. sich bewegenden Coord.-System fest verbunden wäre, kann man als aus 2 Theilen bestehend gedacht werden, nämlich herrührend von d. Rotation und Translation. Die Arbeit d. 1sten Schwungkraft im Sinne d. Translation ist nun offenbar $= \div \frac{f}{g} h$ pr. Gewichtseinheit indem ja ihre Beschl. im Sinne d. Translation $= \div f$ ist. Ferner wird d. System von d. 2ten Schwungkraft im Sinne d. Rotation eine Beschl. $= \frac{\omega^2}{g} r$ erhält, die Arbeit pr. Element d. Abstandes von d. Rotationsachse also $= \frac{\omega^2}{g} r\,dr$, und folglich d. Arbeit während d. Beweg. d. Flüssigkeit von A_0 nach A $= \int_{r_0}^{r} \frac{\omega^2}{g} r\,dr = \frac{\omega^2}{g} \int_{r_0}^{r} r\,dr = \frac{\omega^2}{2g}(r^2 - r_0^2)$

Demnach ist d. resultierende Arbeit M d. äußeren Massenkräfte:
$$M = \left(1 - \frac{f}{g}\right) h + \frac{\omega^2}{2g}(r^2 - r_0^2).$$

Wenn d. System nur eine Translationsbeweg. hat, dann kann diese offenbar derart beschaffen sein, daß ihre Beschl. f eine constante Größe ~~von~~ zugleich aber eine ganz beliebige Richtung habe, ohne daß d. gesammte relative Beweg. d. Flüssigkeit durch diesen Wechsel verändert würde. Dann ist d. Arbeit d. äußeren Massenkräfte:
$$M = h - \frac{f}{g} s'$$
unter s' jetzt d. Projection d. Bogens $A_0 A$ d. Schaufelcurve auf d. Richtung d. Beschl. f. —

Wenn aber d. Flüssigkeit verhältnißmäßig leicht ist (Gase, Dämpfe) und man demgemäß von d. Einwirkung d. Schwere abstrahiren kann, so daß nur d. Schwungkraft d. relativen Beweg. in Betracht kommt als äußere Massenkraft, so kann d. relative Beweg. d. Beschl. wieder in einer Rotation ω um eine gewisse Axe bestehen und in einer Translation im Sinne dieser Axe, und braucht diese Axe dann nicht mehr vertical gerichtet zu sein. In einem solchen Falle ist:
$$M = -\frac{f}{g} s' + \frac{\omega^2}{2g}(r^2 - r_0^2)$$
wo r und r_0 dieselbe Bedeutung haben wie im ersten Fall und s' d. Bedeutung wie im 2ten Fall. —

Die bisherigen Betrachtungen bezogen sich immer allgemein auf d. stationäre Beweg. von Flüssigkeit in irgend welchen Kanälen. Wir wollen nun zu den speciellen Fällen übergehen nämlich zu den Strömungen in Gefäßen und Canälen d. h. in Kanälen, welche d. Flüssigkeit ganz einschließen. Der Ausfluß von Flüssigkeiten aus Öffnungen kann dabei offenbar als Specialfall d. Strömung in Canälen angesehen werden. —

Strömende Bewegungen von Flüssigkeiten in Canälen.

In d. meisten d. hier vorkommenden Fälle kann mit ziemlicher Genauigkeit d. Richtung d. Achsen angenommen werden, namentlich um so genauer, je enger d. Canal od. d. Röhre ist. Wenn aber vorhin angenommen wurde, daß d. Neigung zwischen Vr. p und ihre Wurzel sei à priori gegeben sein, so kann diese Annahme doch nicht immer als zulässig betrachtet werden, namentlich dann nicht, wenn

Dadurch sind schon d. Schwierigkeiten gesteigert zur Bestimmung d. Änderungsgesetzes betreffend d. Änderung d. Bewegungszustands von Punkt zu Punkt. Aus diesem Grund macht man noch weitere vereinfachende Annahmen, indem man d. Änderungsgesetz d. inneren und äußeren Zustandes als einen mittleren Zustand in d. Richtung ansieht, d.h. den Zustand in allen Punkten jedes Querschnitts als gleich voraussetzt. Was d. Vr. p betrifft, so ist diese Annahme um so weniger fehlerhaft, je weniger d. Querschnitt gekrümmt ist und je weniger d. Achsen gekrümmt sind in d. Punkten, wo sie d. Querschnitte durchsetzen, vorausgesetzt, daß auch nach hydrostatischen Gesetzen keine anderen Kräfte vorhanden sind, indem dann von Punkt zu Punkt im Querschnitt d. Vr. p mit wesentl. nach hydrostatischen Gesetzen sich ändert und zwar um so mehr je dichter d. strömende Flüssigkeit ist, denn natürlich wird d. Schwerkraft in dieser Hinsicht den bedeutendsten Einfluß haben. Diese Voraussetzung eines in allen Querschnittspunkten gleichen Vr. hat nur wenig Bedenkliches an sich. — Anders verhält es sich aber mit d. Voraussetzung, daß d. Geschw. auch in allen Querschnittspunkten gleich sei, denn diese ändert sich bekanntlich bedeutend mit Rücksicht auf d. inneren und äußeren Reibungen, indem d. Geschw. in d. Mitte einen Wert immer größer ist als an d. Rändern. Vorläufig soll indessen von diesem Umstande abgesehen werden, indem vorausgesetzt wird, daß d. äußere und innere Zustand immer als mittlerer Zustand d. Querschnitts in Rechnung gestellt wird. Diese Annahme bezeichnet man d. Schichten genauer noch als d. Schichtenannahme, indem durch dieselbe d. Flüssigkeit in Schichten geteilt wird, in welchen d. äußere und innere Zustand gleich ist. —

Für einen solchen Querschnitt sei nun bezeichnet mit p d. spec. Pressung, v = spec. Volumen, T = absolute Temperatur, U = spec. inneres Arbeitsvermögen und u = Geschw. in allen Punkten d. Querschnitts F, welche angenähert senkrecht zu einer Mittellinie sind. Unter Mittellinie soll d. geometrische Ort aller Schwerpunkte S d. Querschnitte d. in Röhren strömenden Wassers verstanden werden. s bezeichne einen Bogen d. Mittellinie S, gemessen von einem Anfangspunkt S_0 aus, welcher d. Schwerpunkt eines als Anfangsquerschnitt gewählten Querschnitts F_0 ist. Alle angenommenen Größen p v T U u sind demnach zu betrachten als Funktionen von s und d. Zeit t, wenigstens in d. Fällen wo nicht permanente strömende Bewegungen stattfinden, und es besteht unsere Aufgabe also darin, diese Größen p v T U u als Funktionen von s u. t auszudrücken. Ist aber d. Beweg. nicht permanent, so ist sie doch in d. meisten technisch wichtigsten Fällen so beschaffen vorauszusetzen, daß man ohne bedenkliche Fehler d. augenblicklichen Zustand gleich setzen kann dem Zustand, welcher dann bei einer permanenten Beweg. stattfinden würde. Demgemäß wird d. nicht permanente Beweg. auf d. permanente Beweg. zurückgeführt und deshalb ist es auch angemessen, zunächst d. permanente strömende Beweg. näher zu untersuchen. Wenn man also nun zunächst permanente strömende Beweg. voraussetzt, so sind d. fraglichen Größen p v T U u nur noch Funktionen von s und nicht mehr Funktionen d. Zeit t. Wird ferner mit gleichfalls mit G d. Gew. d. Flüssigkeit bezeichnet, welche in d. Zeiteinheit durch jeden Querschnitt hindurchströmt, so kann d. allgemeine Aufgabe, aus welcher durch Verknüpfung von gegebenen und gesuchten Größen sowie durch Specialisierung eine große Zahl wunderbarer und besonderer Aufgaben abgeleitet werden kann, folgendermaßen ausgesprochen werden:

Es sollen d. Größen $p\ v\ T\ U\ u$ als Funktionen von s in jedem Querschnitt bestimmt werden, wenn sie für einen bestimmten Querschnitt gegeben sind, wenn ferner d. Art d. Flüssigkeit, die Konstante G = Dichte d. Strömung, d. Gestalt d. Röhre, die auf d. Flüssigkeit einwirkenden Massenkräfte, ferner d. Widerstand d. Leitung und d. Wärmemitteilung durch d. Außenwand hindurch gegeben sind.

Um nun diese Aufgabe zu lösen, müssen 5 Beziehungen zwischen diesen 5 unbekannten Größen $p\ v\ T\ U\ u$ und d. Veränderlichen s [aufgestellt werden].

Eine erste solche Gl. erhält man einfach dadurch, daß man nun das durch den Querschnitt F pro Zeiteinheit hindurchfließende Flüssigkeitsvolumen 2 mal ausdrückt. Dieses ist nämlich einmal $= F u$ und andererseits auch = d. pro Zeiteinheit durchfließenden Flüssigkeitsgew. mal d. Volumen pro Gewichtseinheit also $= G.v$

Demzufolge hätte man als erste Beziehung:

$$G.v = F u.$$

Diese Gl. enthält offenbar d. Continuitätsbed., welche hier auch deshalb auch Continuitätsgl. genannt werden soll. —

2 andere Beziehungen bekommt man aus d. von d. mechanischen Wärmetheorie her bekannten sogenannten Gln. d. lebendigen Kraft, aus d. Wärmegl. und aus d. Gl. d. Arbeitsvermögens, von welchen jedoch nur d. beiden ersten unabhängig von einander sind, während d. 3te d. Folge d. beiden ersten ist. Bekanntlich heißen diese Gln.:

Gleichung d. lebendigen Kraft: $dL = dM + dP - dR - dS + dE$

Die allgemeine Wärmegl.: $dU = W d\theta + dR + dS - dE$ und aus diesen beiden durch Addition d. Gl. d. Arbeitsvermögens d. h. d. Summe d. äußeren und inneren Arbeitsvermögens: $d(L + U) = dM + dP + W d\theta$.

Hierin bedeuten:
- dL = Zuwachs d. lebendigen Kraft in irgend einem Zeitelement
- dU = Zuwachs d. inneren Arbeitsvermögens " " "
- dM = Arbeitssumme d. Massenkräfte " " "
- dP = Arbeit d. auf d. Oberfl. wirkenden Drucks " " "
- dR = Arbeit verloren gehend durch äußere Reibung " " "
- dS = " " " " inneren Widerstand " "
- dE = Expansionsarbeit
- $W d\theta$ = Arbeitswerth d. von außen mitgeteilten Wärme $d\theta$ " " "

Diese 3 Gl. sind nun nur noch etwas anders einzustellen um 2 von einander unabhängige Beziehungen zwischen d. 5 Größen $u\ p\ T\ U\ u$ zu bekommen. Die Gl. sind bezogen auf d. Zustandsänderungen, welche d. in Zeitelement dt durch Querschnitt F hindurchfließende Flüssigkeitsschicht erleidet, während d. Schwerpunkt S d. Querschnitts d. Element ds d. Mittellinie durchläuft.

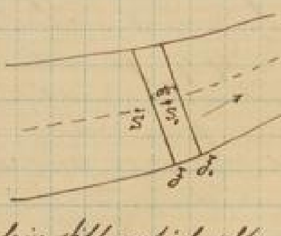
Das in Zeitelement dt durch Querschnitt F hindurchfließende Gew. d. Flüssigkeitsmenge ist offenbar $= G.dt$ und da d. Geschw. $= u$ ist, so folgt als Änderung d. lebendigen Kraft:

$$dL = G\,\frac{dt}{g}\,d\left(\frac{u^2}{2}\right) = G.dt.\frac{u\,du}{g}.$$

Was ferner d. in Zeitelement dt verrichtete Expansionsarbeit betrifft, so ist diese offenbar:

$$dE = G.dt\ p\ dv. \text{ —}$$

Was d. Arbeit d. äusseren Drucks betrifft, so sei δ ein Querschnitt und δ_1 ein unendl. nahe benachbarter Querschnitt, deren Schwerpunkte S resp. S_1 nicht gerade in den Ebenen dieser Querschnitte zu liegen brauchen, indem dieselben bekanntlich krumme Fl. sein können. Offenbar ist nun:



$\delta p u\, dt$ = Arbeit d. Drucks, welchen d. nachfolgende Flüssigkeit auf d. Hinterfl. δ d. Schicht pr. Zeitelement dt ausübt und analog d. auf d. Vorderseite δ_1 d. Schicht entgegengestellte Druck, also im negativen Sinne d. Beweg., = d. vorigen, vergrössert um sein Differential, also = $\div\left[\delta p u + d(\delta p u)\right] dt$.

Ausserdem wirkt aber noch ein äusserer Druck auf d. Wände d. Flüssigkeitsschicht, indem aber dieser Druck senkrecht gegen d. Richtung d. Beweg. gerichtet ist, so ist ihre Arbeit im Sinne d. Beweg. $= 0$. Demnach ist zu setzen:

$$dP = \delta p u\, dt \div \left[\delta p u + d(\delta p u)\right] dt = \div\, d(\delta p u) . dt$$

Nach d. bereits gefundenen Continuitätsgesetz ist aber: $u = g\frac{v}{\delta}$ und demgemäss:

$$dP = \div\, g . dt\; d(p v) . —$$

Setzt man diese Ausdrücke dP, dL und dL in d. allgemeinen Gl. ein und dividirt diese dann durch $g . dt$, so bezieht man dieselben dadurch offenbar auf d. Gewichtseinheit und Zeiteinheit, während sie vorher auf d. Gew. d. Flüssigkeitsschicht und Zeitelement dt bezogen waren. d. Grössen dR, dS, dM und WdQ sollen aber so gesetzt bleiben, so dass sie dann auch auf Gewichtseinheit und Zeiteinheit bezogen sind. Aus d. Gl. d. lebendigen Kraft bekommt man nun:

$$\frac{u\,du}{g} = dM - d(pv) - dR - dS + p\,dv$$

α . . . oder: $\frac{u\,du}{g} + d(pv) - p\,dv = dM - dB$ wenn unter dB d.

$\div\ \frac{u\,du}{g} + v . dp = dM - dB$. Summe d. Arbeiten d. inneren und äusseren Leistungswiderstände verstanden wird $= dR + dS$.

Andrerseits liefert d. Wärmegl.:

β . . . . $dU + p\,dv = WdQ + dB$

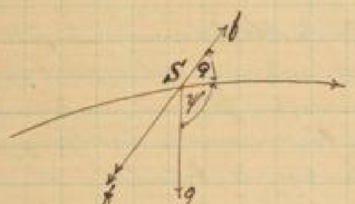
Und aus diesen beiden durch Addition:

γ . . . . $\frac{u\,du}{g} + dU + d(pv) = dM + WdQ$.

Von diesen 3 Gl. $d(pv)$ ist wie schon ersichtlich eine immer d. Folge d. beiden anderen, so dass man in diesen 3 Gl. demnach nur 2 unabhängige Beziehungen zwischen d. Grössen $u\ p\ v\ \delta\ U$ hat. Im Ganzen haben wir also nun mit d. Continuitätsgl. 3 unabhängige Beziehungen. Es fehlen also noch 2. Die bisher gefundenen Beziehungen waren allgemein gültig für jede Flüssigkeit in mittleren Theile, die beiden noch fehlenden Beziehungen können dagegen nicht so allgemein aufgestellt werden, indem dieselben von d. Art und Aggregatform d. betreffenden Flüssigkeit abhängen. Diese beiden Beziehungen sind nämlich d. aus d. Wärmetheorie her bekannte Zustandsgleichung und Gleichung d. inneren Arbeitsvermögens. Die Zustandsgl. drückt eine Beziehung zwischen d. Grössen $p\ v\ t$ aus und d. Gl. d. inneren Arbeitsvermögens ist eine Gl. zwischen d. Grössen $v\ p\ t\ U$, welche Beziehungen aber bekanntlich im Allgemeinen für jede verschiedene Flüssigkeit und jede verschiedene Aggregatform verschieden sein können. — Handelt es sich um eine nicht homogene Flüssigkeit, sondern um ein Gemisch gleichartiger Flüssigkeit in verschiedenen Aggregatformen, so kommt noch eine 6te unabhängige Veränderliche hinzu nämlich d. Mischungsverhältniss y. In diesem Fall ist aber auch noch eine 6te Beziehung vorhanden, indem bekanntlich für den in einem solchen Gemisch entsprechenden Grenzzustand d. Übergangs von einer Gleichgewichtsform in d. andere, zwischen d. Pressung p und d. Tangentialkr. t, sowie d. Wasserstandsverhältniss y eine besondere Beziehung stattfindet. Wenn man also in einem solchen Falle mit d. Zustandsgl. und d. Gl. d. inneren Arbeitsvermögens mit Hilfe dieser besonderen Beziehung zwischen p t y, y ~~aus~~ eliminiren, so ist man dann noch außer d. 3 schon vorher genannten allgemein giltigen noch 2 für besonderen Fall speciell aufgestellte unabhängige Beziehungen zwischen d. 5 Größen $p\ v\ T\ U\ u$ hat, um zur Bestimmung d. erforderlichen 5 Beziehungen zu Gebote stehen. Diese 5 Bestimmungsgl. sind freilich theilweise noch Differentialgl., deren Integration aber mit Rücksicht auf d. weiter gegebenen Bedingungen möglich ist. —

Wenn nun hiermit auch d. Lösbarkeit d. allgemeinen Aufgabe dargethan und ihre Elemente nachgewiesen ist, so müssen doch noch einige Bemerkungen über einige Größen gemacht werden, nämlich über dM, dQ, dW und dB.

Wenn, wie gewöhnlich, Massentriebkräfte nur mit d. Schwerkraft und d. eigenen Beweg. d. Leitfläche herrühren, so gelten für d. Größe dW d.h. für d. Arbeitssumme d. Massentriebkr. pr. Gewichtseinheit Flüssigkeit auf einem beliebigen endlichen Wege d. ~~früher~~ aufgestellten Ausdr., wenn man anstatt d. Elements ds d. Bahn nur d. frühere endliche Theil $s\ s_0$ setzt. Indessen soll dW noch etwas ausgedrückt werden mit Rücksicht auf d. Annahme eines gleichen Mittelzustandes in allen Querschnittspunkten.



S = Schwerpunkt d. Querschnitts F sei ein Punkt d. Mittellinie, dessen Beweg. mit d. Geschw. u im Sinne d. Schnitts gegen d. Leitfläche (Rohr, Canal etc.) vor sich geht. Diese Leitfl. habe nun eine eigene Beweg. so, dass, wenn d. Punkt S fest mit d. Leitfl. verbunden wäre, dieser Punkt S eine Beschl. f erführe, deren Richtung mit d. Mittellinie d. Winkel φ bildet. Die Arbeit dW ist nun, weil d. eigene Beweg. d. Leitfl. entsteht, nur von d. äußeren Ergänzungskraft abhängig, indem d. W immer normal zur relativen Bahn gerichtet ist, also deren Arbeit im Sinne d. Beweg. = 0 ist. Nun ist aber d. von d. äußeren Ergänzungskraft herrührende Beschl. immer gerade ebenso groß, aber entgegengesetzt gerichtet d. Beschl. d. Punktes, welche dieser haben würde wenn er mit d. Leitfl. fest verbunden wäre d.h. diese Beschl. ist nach ~~f~~ gerichtet. Die Beschl. d. resultierenden Massenkraft ist demnach d. Resultante aus f und aus g d.h. aus d. Beschleunigungen d. äußeren Ergänzungskraft d. relativen Beweg. und d. Schwerkraft.

Pro Masseneinheit ist nun d. Beschl. d. Schwerkraft offenbar $= \frac{g}{g} = 1$

. . . . d. äußeren Ergänzungskraft $= \frac{f}{g}$

und demnach d. resultierende Beschl.: $= \left(1 \cdot \cos\psi - \frac{f}{g}\cos\varphi\right)$

folgl.: $$dW = \left(\cos\psi - \frac{f}{g}\cos\varphi\right) ds.$$

Für d. Möglichkeit einer gemeinsamen Beweg. müssen nun bekanntlich d. Größen ψ f und φ unabhängige Functionen von d. Zeit t sein. Hiervon ausgenommen ist aber d. Fall, wenn d. Leitfl. um eine feste Axe rotirt mit constanter Winkelgeschw. und auch noch, wenn außerdem eine Translationsbeschl. f im Sinne d. festen Rotationsaxe stattfindet. Dabei kann, wenn d. Winkelgeschw. = 0 d.h. d. Leitfl. keine Rotation besitzen, die Translationsbeschl. eine beliebige Richtung haben und wenn man ganz von d. Schwere, wie bei Gasen und Dämpfen, abstrahiren darf, so können d. Richtungen d. Rotationsaxe und d. Translationsbeweg. beliebig sein. Ferner kann man d. allgemeinen Ausdruck auch anwenden, wenn d. Größen ψ f u. φ periodische Functionen d. Zeit t sind, dann sind aber diese Größen nur als Mittelwerthe zu begreifen, welche sich mit d. Beobachtungen während einer größeren Anzahl Zeitperioden ergeben.

Was d. Glied $d\Theta$ in d. allgemeinen Gl. betrifft, d.h. d. Wärmemittheilung durch d. Rohrwand, so kann diese zunächst positiv od. negativ sein, positiv gemeint d. Richtung d. Wärmemittheilung von Außen nach Innen. Diese Wärmeleitung ist namentlich wichtig, wenn dieselbe herrührt von einer Flüssigkeit, welche sich außerhalb d. Rohrwand befindet und ebenfalls in Beweg. ist. Es sei dann T_1 d. absolute Temperatur d. äußeren Flüssigkeit an demjenigen Theil d. Querschnitts, in welchem im Innern d. Rohr in d. Flüssigkeit d. absolute Temperatur T herrscht. Es sei ferner dF_1 ein Element d. Rohrwandfläche, herausgeschnitten ~~werden~~ von 2 unendl. nahe benachbarten Querschnitten, welche d. Element ds d. Mittellinie begrenzen, ferner sei k d. sogenannte Wärmedurchlässigkeitscoefficient d.h. diejenige Wärmemenge, welche durch 1 □m Wandfläche in 1 Sek. und für jeden Grad Temperaturdifferenz d. beiderseits angrenzenden Flüssigkeiten übertragen wird in d. Richtung von Außen nach Innen. Dies vorausgesetzt ist offenbar:

$k(T_1 - T)\,dF_1$ = die pr. 1 Sek. durch dF_1 hindurch von Außen mitgetheilte Wärmemenge. Diese ist aber offenbar auch $= G.d\Theta$ unter $d\Theta$ d. pr. Gewichtseinheit mitgetheilte Wärmemenge verstanden, denn diese Wärmemenge wird demjenigen Flüssigkeitselement vom Gew. G mitgetheilt, welches gerade in derselben Zeit an dem Flächenelement dF_1 vorbeiströmt. Folglich:

$$k(T_1 - T)\,dF_1 = G.d\Theta.$$

Die Größe $d\Theta$ können wir später mit Rücksicht auf diese Gl. zu bestimmen, vorausgesetzt wenn d. Wärmedurchlässigkeitscoefficienten k im gegebenen specifischen Falle kennt. Damit ein permanenter Zustand möglich wird, müssen natürlich d. specifischen in Betracht kommenden Größen wieder unabhängig von d. Zeit t sein. — Was d. Wärmedurchlässigkeitscoefficienten k betrifft so sei erwähnt, dass derselbe abhängig ist von d. Wärmeübergangscoefficienten an d. inneren und äußeren Rohrwandfl., welche wiederum abhängig sind von d. Oberfl.-beschaffenheit d. Rohrwand, ferner von d. Wärmeleitungscoefficienten d. Materials d. Rohrwand, von d. Dicke und Krümmung d. Rohrwand und endlich auch noch von d. Temperaturdifferenz $T_1 - T$. — Außerdem kann hierbei d. Fall vorkommen, dass d. äußere Flüssigkeit d. Rohr nicht ringsum gleichmäßig umspült, sondern dass nur an einem Theile d. Rohrwand eine solche Wärmedurchlässigkeit stattfindet. z.B. wenn man d. Heizkanal eines Dampfkessels durch d. zu erwärmende Wasser hindurchführt, so ist d. Flüssigkeit ringsum d. Kanal gleichförmig, wenn aber d. Heizkanal außerhalb am Kessel vorbeiführt, so findet nur an einem Theile d. Kessels eine Wärmedurchlässigkeit statt, während an d. anderen Stellen nur wenig Wärme durchgelassen wird. —

Für unsere Betrachtung erfordert nun d. Glied dB, welches sich auf d. sogenannten Widerstände bezieht, dieselben schlagen in d. Hydraulik ein, Richtung gehört zu werden durch Verbindung mit d. Erfahrung als sogenannte Widerstandshöhen. Unter d. Bewegungshöhe für d. Beweg. d. Flüssigkeit vom Querschnitt F_0 bis zum Querschnitt F versteht man diejenige Höhe, um welche 1 Kgr. Flüssigkeit niedersinken müsste, um vermöge seiner Schwere eine Arbeit — diejenige Arbeit zu verrichten, welche auf d. Weg vom Querschnitt F_0 bis F pr. 1 Kgr. durch d. Bewegungs-Widerstände verbraucht werden. Die Arbeit, welche 1 Kgr. beim Niedersinken um eine gewisse Höhe vermöge d. Schwere verrichtet ist dann zahlenmäßig auch gleich dieser Höhe selbst, und es bedeutet also d. Größe B in d. allgemeinen Gl. nichts anderes, als diese Widerstandshöhe für eine gewisse Strecke d. Rohres von endlicher Länge, als für ein Längenelement ds d. Rohres. Gewöhnlich wird nun aber diese Widerstandshöhe wiederum auf einen anderen Begriff, auf d. sogenannten Widerstandscoefficienten zurückgeführt. Setzt man nämlich $B = \zeta \frac{u^2}{2g}$ unter u d. mittlere Geschw. verstanden, mit welcher d. Flüssigkeit durch d. Endquerschnitt F d. fraglichen Theil F_0F hindurchfließt, so nennt man ζ d. Widerstandscoefficienten für F_0F. Derselbe für eine gewisse Rohrstrecke bedeutet also d. Verhältniss d. Widerstandshöhe für diese Rohrstrecke zu derjenigen Geschw.-höhe $\frac{u^2}{2g}$, die d. Mittelgeschw. u entspricht, vermöge welcher d. Flüssigkeit von d. fraglichen Rohrstrecke durch den

Endquerschnitt d. abfließt. Zuweilen wird auch noch d. Widerstandscoeff. auf d. mittlere Geschw. in irgend einem andern Querschnitt bezogen in d. Weise, daß wenn aber u d. mittlere Geschw. in einem beliebigen andern Querschnitt bedeutet, dann d. betreffende hierauf bezogene Widerstandscoeff. ζ' durch d. Gl. bestimmt ist: $B = \zeta' \frac{u^2}{2g}$; indessen wird, wenn in dieser Weise d. Widerstandscoeff. aufgestellt wird, immer ausdrücklich hinzugefügt werden, daß d. Widerstandscoeff. bezogen werden soll auf einen gewissen Querschnitt; wird aber schlechtweg von d. Widerstandscoeff. für eine gewisse Rohrstrecke gesprochen, so soll er immer stillschweigend bezogen werden auf d. Endquerschnitt d. fraglichen Strecke, also auf d. mittlere Geschw. in demselben. —

Diejenigen Widerstände insbesondere, welche auf d. ganzen jeweils in Betracht gezogenen Weg einer Flüssigkeit hemmend wirken und welche verursachen, daß d. Endgeschw. auf diesem ganzen in Betracht gezogenen Weg kleiner ist als sie sein würde, wenn keine Bewegungswiderstände vorhanden wären, diese Widerstand wird häufig auch auf andere Weise, nämlich durch d. <u>Geschwindigkeitscoeffizienten</u> in Rechnung gebracht, welche mit φ bezeichnet werden soll. Zwischen ζ und φ besteht dann aber eine ganz bestimmte einfache Beziehung. Ist nämlich u' diejenige Endgeschw., welche unter sonst übrigens gleichen Umständen stattfinden würde, wenn keine Bewegung vorhanden wäre, so zerfällt d. Geschw.-Höhe $\frac{u'^2}{2g}$ in 2 Bestandtheile, nämlich d. effective Geschw.-Höhe und d. Widerstandshöhe, d.h. es ist: $\frac{u'^2}{2g} = (1+\zeta)\frac{u^2}{2g}$. Nun wird unter d. Geschwcoeff. φ d. Verhältniß $\frac{u}{u'}$ verstanden,

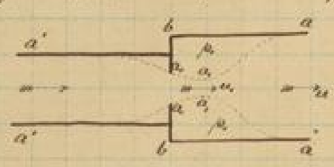
welches aber nach letzter Gl.: $= \frac{u}{u'} = \sqrt{\frac{1}{1+\zeta}}$

also umgekehrt: $\zeta = \frac{1}{\varphi^2} - 1$. —

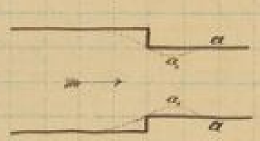
In Beziehung auf diese bedingenden Umstände können d. gebräuchlichen Bewegungswiderstände unterschieden werden in solche, d. längs d. ganzen Leitung stetig einwirken und in solche die nur unter gewissen Umständen an gewissen Stellen vorkommen. D. ersteren sollen zusammengefaßt werden unter d. Bezeichnung d. allgemeinen Leitungswiderstandes; sie rühren von d. äußeren und inneren Reibung her. Die diesem allgemeinen Leitungswiderstand entsprechende Widerstandshöhe, wird später unter gewissen Voraussetzungen näher untersucht werden. Was aber d. eventuell an gewissen Stellen vorkommenden besonderen Widerstände betrifft, so werden diese verursacht durch etwaige Änderung d. Querschnitts od. d. Änderung d. Richtung d. Mittellinie d. Röhre. Aber kann es d. Fall sein, daß solche plötzlichen Richtungsänderungen d. Leitröhre zunächst plötzliche Änderungen d. Querschnitts verursachen. Es sei aber untenstehend eine Leitröhre,

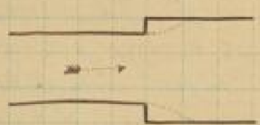
welche an einer gewissen Stelle eine plötzliche Richtungsänderung erleidet. An d. Stelle wo diese gewaltsame Richtungsänderung stattfindet, werden d. Bahnen d. Wassertheilchen gewaltsam gekrümmt und zwar namentlich an d. inneren Seite mit einem sehr kleinen Krümmungshalbmesser. Dieser Umstand muß nothwendig zur Folge haben, daß d. Pressung in d. betreffenden Querschnitt in d. Richtung von innen nach außen beträchtlich zunimmt. Erinnern wir uns an d. allgemeinen Gl. $Ky + \frac{1}{\mu}(Ky \pm \frac{dp}{dy}) = \frac{u^2}{\varrho}$, die bezogen war auf d. Gesetz d. Pressungsänderung in irgend einem Querschnitt im Sinne d. Krümmungsradius: wenn nun in d. Gl. d. Krümmungshalbmesser ϱ d. betreffenden Bahn sehr klein wird, also $\frac{u^2}{\varrho}$ sehr groß wird, so wird d. Änderung von p im Sinne von y, also gegen d. Krümmungsmittelpunkt hin vorzugsweise durch $\frac{u^2}{\varrho}$ bedingt sein, so daß man hat: $\frac{dp}{dy} = -\mu \frac{u^2}{\varrho}$; also je kleiner ϱ ist und je größer u ist, in desto höherem Grade muß d. Pr. im Querschnitt im Sinne gegen d. Krümmungsmittelpunkt hin bedeutend abnehmen, so daß sich an d. schärfsten Stelle gar keine strömende Flüssigk. befindet. Es findet also eine örtliche Änderung d. Flüssigkeitsstromes statt. Es handelt sich nun darum für d. besonderen Widerstand in allen solchen Fällen wenn möglich einen durch d. Erfahrung bestätigten allgemeinen einfachen Ausdruck zu gewinnen. Für d. Widerstandshöhe, durch welche ein solcher besonderer Widerstand gemessen wird, läßt sich ein solcher allgemeiner einfacher Ausdruck in d. That gewinnen für alle diejenigen Fälle, wo eine derartige plötzliche Querschnittsänderung d. Flüssigkeitsstromes verbunden mit einer Trennung d.

d. Flüssigkeitsdrucks an d. Rohrwand stattfindet. Dabei ist es vollkommen gleichgültig für d. Gültigkeit d. Formel, ob diese Änderung unmittelbar durch eine plötzliche Änderung d. Röhrenquerschnitts selbst hervorgerufen werde, oder ob durch eine plötzliche Richtungsänderung d. Rohrmittellinie. Von besonderem Werth ist d. Formel indessen nur in d. ersten Fall, während in solchen Fällen, wie d. eben erwähnten, nur ganz besondere Versuche zu einer einigermassen Bestimmung führen. Es soll also ein solcher Fall vorausgesetzt werden, in welchem d. plötzliche Querschnittsänderung d. Flüssigkeitsstroms verursacht wird durch eine plötzliche Änderung d. Röhrenquerschnitts, während jedoch d. einzelnen Rohrstücken eine gemeinsame Axe haben. D. Querschnitt $a'a'$ zieht sich zunächst plötzlich zusammen bis zu a^0a^0 und dehnt sich dann



plötzlich wieder aus bis zu $bb = aa$. Die Folge davon wird sein, daß unmittelbar beim Eintritt in d. Röhre, in der d. Flüssigkeit ankommt, eine Ablösung derselben von d. Rohrwand stattfindet, und nach dem Durchgang durch a_0a_0 kann eine fortgesetzte Zusammenziehung d. Flüssigkeitsstroms stattfinden etwa bis zu a_1a_1, und erst dann dehnt er sich aus, so daß d. Räume $a'a_0\ a_1a$ d. Wirbelung darstellen. Der hier in d. Figur angenommene Fall ist nun ein allgemeiner Fall, derselbe kann verschiedene Modificationen erleiden. Wesentlich für den zu bestimmenden Widerstand ist nur d. plötzliche Erweiterung d. Querschnitts d. Flüssigkeitsstroms von a_1a_1 bis aa, dieselbe ist aber nicht vollständig an d. Voraussetzung obiger Figur gebunden, es könnte auch eine weitere Röhre plötzlich in eine engere übergehen und umgekehrt. D. kleinste





Querschnitt a_1a_1 sei bezeichnet mit F_1, d. volle Querschnitt aa mit F, so ist es im Wesentlichen diese plötzliche Querschnittsänderung von F_1 bis F, welche d. in Rede stehenden Widerstand verursacht; es fragt sich, wie d. allgemeine Ausdruck für d. entsprechende Widerstandshöhe gewonnen wird. Was d. Querschnitte F_1 und F betrifft, so können sie als eben vorausgesetzt werden, da an d. Stelle d. kleinsten Querschnitts d. Fasern parallel geworden sind, ebenso bei aa. In einem solchen Falle, wo ebene Querschnitte von parallelen und normalen geradlinigen Fasern geschnitten werden, ist d. Änderungsgesetz d. Pr. von Punkt zu Punkt d. Querschnitts nur von äusseren Massenkräften abhängig. Wird nun hier von d. Wirkung d. Schwere abgesehen, so darf in d. ganzen Querschnitt F_1 eine gleichförmige Pressung $= p_1$ stattfindend vorausgesetzt werden, und ebenso im Querschnitt F eine gleichförmige Pr. $= p$. D. mittlere Geschw. im Querschnitt F_1 sei bezeichnet mit u_1 und die in F mit u. D. spec. Volumen d. Flüssigkeit in d. Zustande, in welchem sie F_1 durchströmt, sei bezeichnet mit v_1 und in F mit v. In d. ganzen Raume $a_0a_1\ ab$ ist sich d. Flüssigkeitsstrom von d. Rohrwand getrennt, da d. hier befindliche Flüssigkeit nicht an d. Beweg. Theil nimmt. Ist dies d. Fall, so wird innerhalb dieses Raumes auch keine Ursache für eine erheblich veränderte Pr. stattfinden, man kann also annehmen, daß hier eine überall gleiche Pr. herrscht, da kein Grund zu einer anderen Annahme vorhanden wäre. Diese Pr. kann aber keine andere sein als diejenige Pr. p_1, die im ganzen Querschnitt F_1 stattfindet, widrigenfalls hier eine Ausgleichung stattfinden würde. In d. übrigen Querschnitten zwischen F und F_1, welche aber nicht ebene Querschnitte sind, wird zwar an d. äusseren Fl. d. Flüssigkeitsmasse gleichfalls d. Pr. p_1 stattfinden, aber es wird von Punkt zu Punkt in diesen gekrümmten Querschnitten eine ganz bedeutende Pr.-Änderung stattfinden. Offenbar ist nun $P = (p_1 - p)\,F$, d. Druck auf d. ganzen Oberfl., deren Längsschnitt $aa_1\ a_1a$ ist, herrscht, denn d. nämliche auf d. Flächeneinheit bezogene äussere Druck P. d. dem hinzukommende resultirende Druck im Sinne d. Beweg. ist also $p_1 F$; andererseits herrscht in d. ganzen Oberfl. F die nämliche Pr. $= p$ und zwar im entgegengesetzten Sinne, so daß d. resultirende Druck $P = (p_1 - p)\,F$ ist. Wesentlich anders würden d. Verhältnisse sein, wenn mit d. Querschnittsänderung d. Flüssigkeitsstroms von F_1 bis F nicht äussere Berührung mit d. Rohrwand, sondern mit Berührung derselben stattfinden lassen, wenn also d. Röhre eine stetige Querschnittsänderung erfährt; denn wenn es d. Fall sein, daß d. Querschnittsänderung d. Stromes d. Querschnittsänderung d. Röhre vollständig folgt ohne sich von d. Rohrwand zu trennen, muß für einen F_o und F also als eben zu betrachten und daher p_o und p als constant anzunehmen, aber d. gegenseitige Normaldruck, d. sich hier an d. krummen Fläche d. Flüssigkeit stattfindet würde jetzt nicht mehr $= p_o$ sein. d. genauere Bestimmung dieser Pr. würde ganz wesentlich abhängig sein von d. Gesetz nach welchem sich d. Querschnitt d. Röhre ändert. Soviel ist gewiß, daß d. Mittelwerth dieser Pr. zwischen F_o u. F welche $= p_x$ sei, jetzt größer als p_o sein muß, denn durch d. Rohrwand wird d. Flüssigkeitsstrom verhindert sich auszudehnen bis zu einer in wirbelförmiger Bewegung befindlichen Masse. Diese Bewegung kann nur dadurch aufgehoben werden, daß d. Pr. p_x im Mittel größer ist, als sie sein würde, wenn diese Erweiterung d. Stromes unbehindert stattfinden könnte, um wieviel $p_x > p_o$ ist, hängt ab von d. Gesetz d. Querschnittsänderung d. Röhre. Von vorn herein läßt sich begreifen, daß d. Unterschied zwischen p_x und p_o um so größer sein wird, je schneller diese Querschnittsänderung erfolgt bis $p_x = p_o$ wird, wenn diese Änderung so schnell vor sich geht, daß eine Trennung von d. Rohrwand stattfindet. In einem solchen Fall ist also d. Pr. F auf d. dazwischen befindliche Flüssigkeitsmasse $\mathfrak{D} = p_o F_o - p_x (F - F_o) - pF = -(p' - p_o) F$, also stets $\mathfrak{D}$ jedenfalls größer als p_o. Wenn auch in diesem zuletzt genannten Fall sich d. Bestimmung d. Widerstandshöhe d. Rechnung entzieht, so ist es doch immerhin d. allgemeinere Fall und d. ursprünglich vorausgesetzte ist nur ein gewisser Grenzfall. Es soll deshalb d. allgemeine Ausdruck vorausgesetzt werden, um dann zur Grenze überzugehen.

Zunächst handelt es sich nun darum, eine Beziehung zu gewinnen zwischen p_o u. p und u_o u. u. Dazu muß uns d. bekannte Prinzip d. Antriebes od. Impulses und d. Bewegungsgröße behülflich sein. Danach ist bekanntlich für ein ganz beliebiges Massensystem d. Zuwachs an Bewegungsgröße nach einer gewissen Richtung in irgend einem Zeitmoment = d. sogenannten Antrieb d. resultirenden äußeren Kraft nach dieser Richtung. Unter d. Bewegungsgröße irgend eines Massensystems nach einer gewissen Richtung versteht man d. Summe d. Producte aus d. einzelnen Massenelementen in d. Geschw. Comp. nach d. fraglichen Richtung. Wenn also d. X Axe d. fragliche Richtung darstellt, und u_x d. Geschw. Comp. eines Massenelements m nach dieser Richtung ist, so ist d. Bewegungsgröße dieses Systems nach d. X Axe $= \Sigma m u_x$ und d. Zuwachs an Bewegungsgröße d. Systems im Sinne d. X Axe während d. Zeitelements $dt = d\,\Sigma m u_x$. Dieser Zuwachs an Bewegungsgröße d. beliebigen Massensystems im Zeitelement dt ist nach d. fraglichen Gesetz d. Antriebes d. resultirenden äußeren Kraft nach derselben Richtung. d. resultirende äußere Kraft nach d. Richtung d. X Axe ist = d. Summe d. nach d. X Axe genommenen Comp. aller einzelnen äußeren Kräfte, die eben auf d. Massensystem wirken $= \Sigma X\,dt$. Die inneren Kräfte womit d. einzelnen Massenelemente gegenseitig auf einander wirken kommen nicht in Betracht, indem sie paarweise gleich groß und entgegengesetzt gerichtet sind, also sich gegenseitig aufheben. Man hat demnach:

$$d\,\Sigma m . u_x = \Sigma X\,dt.$$

Dieses Prinzip mag nun angewendet werden auf diejenige strömende Flüssigkeitsmasse, die sich augenblicklich zwischen F und F_o befindet und auf ein unendl. kl. Zeitelement dt. Es handelt sich also um d. Zuwachs an Bewegungsgröße, den diese Flüssigkeitsmasse zwischen F_o und F während d. Zeitelements dt erfährt. Derselbe ist mit Rücksicht auf d. vorausgesetzten Beharrungszustand d. Bewegung = d. Unterschied derjenigen Bewegungsgröße, womit eine unendl. dünne Flüssigkeitsschicht im Zeitelement dt durch d. Querschnitt F geht über diejenige Bewegungsgröße, womit eine ebensolche Schicht durch F_o geht. d. Masse d. Flüssigkeitsschicht, d. im Zeitelement dt durch irgend einen Querschnitt hindurch geht ist $= Q\frac{dt}{g}$. Diese Flüssigkeitsmasse geht nun durch d. Querschnitt F mit d. Geschw. u, sie geht dagegen durch d. Querschnitt F_o mit d. Geschw. u_o, also d. Unterschied d. einen über d. andern: $= Q\frac{dt}{g}(u - u_o)$. Dies ist nun auch d. Zuwachs d. Bewegungsgröße d. zwischen d. Querschnitten F_o u. F befindlichen Flüssigkeit im Zeitelement dt. Dieser muß nun gleich sein d. Antriebe d. resultirenden äußeren Kraft, welche im Sinne d. strömenden Bewegung auf diese Flüssigkeitsmasse wirkt.

So kann möglicher Weise auf diese Flüssigkeitsmasse eine äußere Massenkraft als Schwerkraft wirken, indessen kann man d. Einfluß derselben auf diesem kurzen Wege vernachlässigen, so daß nur d. Überdruck übrig bleibt. Dieser ist aber bezeichnet mit P und sein Antrieb im Zeitelement dt ist $= P\cdot dt$, für d. allgemeinen Fall ist $P = (p'-p)F$ also erhält man:

$$G\frac{dt}{g}(u-u_1) = P\cdot dt = (p'-p)F\,dt \quad \text{woraus folgt:} \quad p-p' = \frac{G}{gF}(u_1-u)$$

und mit Rücksicht auf d. Continuitätsgl. $G = F\frac{u}{v}$ auch:

$$p-p' = \frac{u(u_1-u)}{gv}.$$

Siehe 33. d)

Nun ist aber nach d. Gl. d. lebendigen Kraft (X) wenn sie integriert wird vom Querschnitt F_1 bis zum Querschnitt F, die betreffende Widerstandshöhe B, die sich auf diesen besonderen Vorgang bezieht:

$$B = \int_u^{u_1}\frac{u\,du}{g} - \int_{p_1}^{p} v\,dp.$$

die äußeren Massenkräfte waren außer Acht gelassen, deren Integral ist $= \frac{u_1^2-u^2}{2g}$ und d. 2te $= vp - \int p\,dv$ also:

$$B = \frac{u_1^2-u^2}{2g} - (pv - p_1v_1) + \int_{v_1}^{v} p\,dv.$$

In diesem folgenden Falle bedeutet nun aber p nicht d. besonders bestimmte Pr. im Querschnitt F, sondern eine veränderliche Pr., d. sich auf d. Änderung von v_1 bis v bezieht; während dieser Änderung ist d. Pr. d. Flüssigkeit jedenfalls stetig; also:

$$B = \frac{u_1^2-u^2}{2g} - (p-p')v - p'v + p_1v_1 + \int_{v_1}^{v} p\,dv.$$

Setzen wir nun für $p-p'$ seinen Wert, so ist wenn man außerdem noch bedenkt, daß d. Integral d. Expansionsarbeit pr 1 kg von F_1 bis F ist: f.

$$B = \frac{u_1^2-u^2}{2g} - \frac{2u(u_1-u)}{2g} - p'v + p_1v_1 + \int_{v_1}^{v} p\,dv$$

$$= \frac{(u_1-u)^2}{2g} - p'v + p_1v_1 + \int_{v_1}^{v} p\,dv.$$

Diese Gl. gilt allgemein für eine plötzliche Querschnittsänderung, also auch für d. Fall einer plötzlich stattfindenden Querschnittserweiterung, nur läßt sich in diesem letzten Fall d. Wert von p' nicht vorhanden bestimmen. Von wesentlichem Nutzen ist diese Formel nur in d. Grenzfall, daß eine so plötzliche Querschnittsänderung stattfindet, daß eine Trennung d. Flüssigkeitsstrahls von d. Wandung damit verbunden ist, dann ist $p' = p_1$ und zwar ist p_1 ein min. von p' und somit d. Wert von B ein max. Für diesen Grenzfall ergibt sich dann:

$$B = \frac{(u_1-u)^2}{2g} + p_1(v_1-v) + \int_{v_1}^{v} p\,dv$$

d. Ermittlung dieses Integrals ist noch abhängig von besonderen Umständen; wenn diese Formel nun nur für solche Fälle in Anwendung gebracht werden soll, wo d. spez. Volumen so zu sagen als constant anzunehmen ist, so verschwindet für diesen Fall d. 2te und 3te Glied d. Gl.; für d. Bewegung einer tropfbaren Flüssigkeit ergibt sich demnach d. Widerstandshöhe:

$$B = \frac{(u_1-u)^2}{2g}. —$$

Handelt es sich um d. sogenannte Bewegung. eines Gases od. überhaupt d. Gasströmung, so kommen d. beiden letzten Glieder natürlich noch hinzu. Für d. wichtigsten besonderen Fall, ist $v_1 = v$ und also d. Widerstandshöhe $B = \frac{(u_1-u)^2}{2g}$

gesetzt werden kann, ist nun d. entsprechende Widerstandscoeff. ζ = d. Widerstandshöhe dividirt durch d. Geschw.-Höhe, d. d. Geschw. u entspricht, also:

$$\zeta = \left(\frac{u_1}{u} - 1\right)^2$$

od. da in diesem Fall d. mittleren Geschw. umgekehrt proportional d. Querschnitten sind, ist auch:

$$\zeta = \left(\frac{\delta}{\delta_1} - 1\right)^2 . —$$

Vereinigung verschiedner Flüssigkeitsströme zu einem einfachen Strom.

Practische Anwendungen dieser Theorie sind d. Wasserstrahlpumpe, Wasserstrahlgebläse, Dampfstrahlapparate etc., welche betreffenden Vorrichtungen zur Kategorie d. Strahlapparate für Flüssigkeiten gehören. —

Es soll nun d. allgemeine Fall vorausgesetzt werden, daß an einer bestimmten Stelle verschiedene Ströme zusammenfließen und zwar unter folgenden Voraussetzungen:

1) die einzelnen Ströme fließen alle in derselben Richtung in d. Vereinigungskammer ein, in welcher sie nachher vereinigt d. Raume entlang fließen $= A \cdot x$.

2) In d. kleinsten Querschnitten d. ankommenden Strahlen herrsche d. Pressung p' und ebenso gestalte sich $= p'$ für d. Druck, d. auf d. Oberfl. d. gesammten strömenden Flüssigk. in d. Vereinigungskammer ausgeübt wird bis zum Querschnitt, durch welchen d. resultirende Strom abfließt, wogegen im Querschnitt δ d. Druck $= p$ sei. Diese Voraussetzung d. constanten Werthes von p' in d. kleinsten Querschnitten ist offenbar an d. Umstand gebunden, daß d. Vereinigungskammer hinreichend groß genug ist, um zu verhindern, daß d. strömende Flüssigkeit sich bis zur Wand ausbreitet.

3) Sei vorausgesetzt, daß während d. Vereinigung d. einzelnen Ströme zu einem resultirenden Strome von d. Wirkung etwaiger Massenkräfte od. einer etwaigen Strömungsrichtung durch d. Wand d. Raumes abgesehen werden darf. —

Es sei nun G d. Gew. d. resultirenden Flüssigkeit, welche pr. Sek. durch d. Querschnitt δ hindurch aus d. Vereinigungskammer abfließt. Im Querschnitt δ sei d. Geschw. $= u$, d. resultirende Flüssigkeit habe hier d. spec. Volumen v u. d. Arbeitsvermögen U; es sei ferner G_m d. Gew., welches durch irgend einen d. beliebig vielen Ströme pr. Sek. d. Vereinigungskammer zugeführt wird, d. kleinste Querschnitt d. ankommenden Strahls, aus welchem diese Flüssigkeit sich in d. Vereinigungskammer ergießt sei δ_m, d. Geschw. $= u_m$, d. spec. Volumen $= v_m$ und d. spec. innere Arbeitsvermögen $= U_m$, dann hat man mit Rücksicht auf d. Beharrungszustand:

$$1)\quad G = \Sigma G_m \qquad G = \frac{\delta u}{v} \quad \text{und} \quad G_m = \frac{\delta_m u_m}{v_m}.$$

Ferner ist, wenn man diejenige Flüssigkeitsmenge ins Auge faßt, d. sich von d. sämmtlichen Querschnitten δ_m d. in d. Vereinigungskammer eintretenden ankommenden Strahlen erstreckt bis zum Querschnitt δ, d. resultirende äußere Druck, welcher im Sinne d. Bewegung nach d. Richtung auf d. Oberfl. wirkt $= (p'-p)\delta$, da von einer äußeren Massenkraft abgesehen wird. Dieselbe Kr. kann auch betrachtet werden als d. Antheil dieser äußeren Kr. pr. Sek. Dieser Antheil ist nun gleich d. Zuwachs an Bewegungs-Größe d. fraglichen Masse nach d. Richtung Ax pr. Sek., indem aber pr. Sek. d. Flüssigkeit durch d. Endquerschnitt δ hindurch fließt mit d. Bewegungs-Größe $\frac{G}{g}u$, wogegen d. einzelnen beliebig vielen Flüssigkeitsströme durch d. kl. Querschnitte δ_m zufließen mit d. Bewegungs-Größe $\Sigma \frac{G_m}{g} u_m$. So ist d. Zuwachs an Bewegungs-Größe pr. Sek.:

$$\frac{G}{g}u - \Sigma \frac{G_m}{g} u_m = (p'-p)\delta = \frac{1}{g}\Sigma G_m (u - u_m)$$

da offenbar $\Sigma G_m u = u \Sigma G_m = uG$ ist.

Also

2) $$p - p' = \frac{1}{g\mathfrak{F}}\,\Sigma\, G_m (u_m - u)$$

Eine 3te Gl. ergibt sich mit d. Gl. d. Arbeitsvermögens (Seite 32, γ'), wenn man diese Gl. bezieht auf 1 kgr Flüssigkeit eines einzigen Flüssigkeitsstromes, sie dann multiplicirt mit G_m und integrirt von $\mathfrak{F}_m$ bis $\mathfrak{F}$, sodann sie für alle Ströme zusammen genommen summirt und dabei beachtet, daß [illegible] durch d. Wand als auch von äußeren [illegible] abgesehen werden soll, daß also d. rechte Seite d. letzteren Gl. dann $= 0$ wird:

$$\Sigma\left[G_m\left(\frac{u^2 - u_m^2}{2g} + U - U_m + pv - p'v_m\right)\right] = 0$$

oder durch Multiplication mit -1:

$$\Sigma\left[G_m\left(\frac{u_m^2 - u^2}{2g} + U_m - U + p'v_m - pv\right)\right] = 0$$

Nun ist aber: $\frac{u_m^2 - u^2}{2g} = \frac{(u_m - u)^2}{2g} + \frac{u(u_m - u)}{g}$; ferner ist: $p'v_m - pv = p'(v_m - v) + (p' - p)v$

od. nach Gl. 2): $p'v_m - pv = p'(v_m - v) - \frac{v}{g\mathfrak{F}}\,\Sigma\, G_m(u_m - u)$

od. da: $\frac{v}{\mathfrak{F}} = \frac{u}{G}$ ist:

$$p'v_m - pv = p'(v_m - v) - \frac{u}{g}\left(\frac{\Sigma G_m u_m}{G} - u\right);$$ demnach folgt:

$$\Sigma\left\{G_m\left[\frac{(u_m - u)^2}{2g} + p'(v_m - v) + U_m - U + \frac{u}{g}\left(u - \frac{\Sigma G_m u_m}{G}\right)\right]\right\} = 0$$

Nun ist aber: $\Sigma\, G_m\left[\frac{u}{g}\left(u - \frac{\Sigma G_m u_m}{G}\right)\right] = 0$, denn dies ist $= \frac{u}{g}\left[\Sigma\, G_m(u_m - u)\right] = 0$

Also folgt nun:

3) $$\Sigma\left\{G_m\left[\frac{(u_m - u)^2}{2g} + p'(v_m - v) + U_m - U\right]\right\} = 0.$$

Diese Gl. 1) 2) 3) in Verbindung mit d. Zustandsgl. und d. Gl. d. inneren Arbeitsvermögens erlauben nun d. Lösungen aller Aufgaben, die mit solchen zusammenfließenden verschiedenen Flüssigkeitsströmen zusammenhängen, sofern d. für sie zu Grunde liegenden Voraussetzungen genügend erfüllt sind, und solche, die [illegible] werden [illegible] von d. hier [illegible] Umständen, die dann je nach Umständen [illegible] berücksichtigt werden müssen. Anstatt d. Gl. d. Arbeitsvermögens aus d. mit d. Princip d. Arbeit berechnete Gl. zu Hilfe genommen sind, sind d. Gln. Seite 32, d. i. β, [illegible] werden und ist damit auch d. Größe $\mathfrak{B}$ [illegible] werden. [illegible] kann nun [illegible] mit Hilfe d. einen od. anderen dieser beiden Gln. nachträglich ein Ausdruck festgestellt werden für diejenige Arbeit, die bei einem solchen Mischungsvorgang zu [illegible] verloren, nämlich in Wärme verwandelt wird, wofern daß [illegible] ein wesentlich neues Verhältnis genommen wird zur Beurtheilung dieses Vorganges [illegible] d. Wärmegl. [illegible] werden als Gl. β Seite 32, welche für einen einzelnen Strom berechnet wird. Wenn man diese Gl. mit G_m multiplicirt, sie dann integrirt über d. ganzen Mischungsvorgang hinweg und endlich summirt für d. einzelnen Flüssigkeitsströme zusammen genommen, so erhält man $\mathfrak{B}$, also d. zu [illegible] stattfindenden Arbeitsverlust, indem d. dem [illegible] entsprechende Wärmeaustausch $= 0$ vorausgesetzt wird:

$$\mathfrak{B} = \Sigma\left\{G_m\left[U - U_m + \int_{v_m}^{v} p\,dv\right]\right\}$$

od. nach Gl. 3):

$$\mathfrak{B} = \Sigma\left\{G_m\left[\frac{(u_m - u)^2}{2g} + p'(v_m - v) + \int_{v_m}^{v} p\,dv\right]\right\}$$

worin aber d. [illegible] d. Integral nicht d. bestimmte Pr. im Querschnitt $\mathfrak{F}$ bedeutet, sondern d. veränderliche Pr., welche d. augenblicklichen Werth d. spec. Volumens beim Übergange von v_m bis v entspricht. Offenbar ist dieses Integral d. [illegible]. Natürlich muß [illegible] für d. Arbeitsverlust auch d. Fall d. [illegible] in sich begreifen. [illegible] nicht mit d. Strömen [illegible] Ströme zu thun, sondern mit einem einzigen Strom, so ist an Stelle von u_1 d. Zeiger 1 zu setzen und d. Summenzeichen ist zu streichen; man erhält dann, wenn man denselben noch durch G. dividirt, d. Ausdruck: $$B = \frac{(u_1-u)^2}{2g} + p_1(v_1-v) + \int_{v_1}^{v} p\,dv$$, welche Formel übereinstimmt mit d. schon früher Seite 32 gefundenen nur mit d. Unterschied, daß p_1 hier mit p_1 bezeichnet worden ist. —

Untersuchung d. permanenten strömenden Bewegung d. Wassers.

Das Wasser ist zu betrachten als Repräsentant irgend einer tropfbaren Flüssigkeit. Hierbei ist d. spec. Volumen v in ganz geringem Grade von d. Pr. abhängig; wenn dann also außerdem vorausgesetzt wird, daß d. Temperatur nur in sehr geringem Grade veränderlich sei, also $T = const$ gesetzt wird, so darf auch $v = const$ gesetzt werden. Da innere Arbeit U ist eine Function von v und T, sind also v u. T constant, so ist auch $U = const$. Von d. 5 Größen p, v, T, U, u also im Allgemeinen als Functionen von s zu bestimmen sind, sind also 3 von vornherein gegebene Constante, und es reducirt sich d. Aufgabe darauf, nur d. übrigen beiden Größen zu bestimmen für jeden Querschnitt F. Dazu sind erforderlich 2 Gl., genügend und es können dazu d. Continuitätsgl. und d. Gl. d. lebendigen Kr. dienen. Die Continuitätsgl. besteht in diesem Falle einfach darin, daß $F u = const$ ist, also: $$F u = F_0 u_0$$ und zwar ist d. Bedeutung dieses Products als nichts anderes als d. jenige Wasservolumen, welches pr. Sec. durch einen Querschnitt hindurchfließt, ist $const = V$. —

Was d. Gl. d. lebendigen Kraft betrifft, so ergibt sich aus d. allgemeinen Form derselben (Gl. a Seite 32), wenn man sie integrirt vom Querschnitt F_0 bis F und wenn man ferner statt d. spec. Volumens aus d. spec. Gew. d. Wassers in d. Rechnung einführt $= \frac{1}{v} = \gamma$, so folgt: $$\frac{u^2}{2g} + \frac{p}{\gamma} = \frac{u_0^2}{2g} + \frac{p_0}{\gamma} + M - B,$$ wenn mit M d. Arbeit d. Massenkräfte und mit B d. Arbeit d. Beweg.-Widerstände pr. 1 Kgr. Flüssigkeit auf d. Wege von F_0 bis F bezeichnet wird.

Was d. Glied M betrifft, so kommen in Betracht als äußere Massenkräfte nur d. Schwerkraft und d. etwaigen Trägheitskräfte d. rel. Beweg. mit Rücksicht auf d. eigene Beweg. d. Gefäßes, in Betracht. Bezeichnet h d. Höhe d. Punktes S_0 über S, wenn S_0 d. Schwerpunkt d. Querschnitts F_0 und unter S d. von F entsprechenden, so ist d. Arbeit d. Schwerkraft pr. 1 Kgr. Flüssigkeit auf d. Wege von F_0 bis F $= h$; hat d. Röhre eine eigene Beweg., so kommt von d. beiden Trägheitskräften nur d. erste in Betracht, da d. andere normal gegen d. relative Bahn gerichtet ist. Bezeichnet also K d. Arbeit d. ersten Trägheitskraft, so ist: $M = h + K$. D. Größe K ergibt sich als d. Integral d. 2ten Bestandtheils von Abt (Seite 33) $$K = -\frac{1}{g}\int_0^s f\cos\varphi\,ds$$ worin f d. Beschl. d. Röhre selbst wegen ihrer eigenen Bew. an d. Stelle eines beliebigen Punktes d. Mittellinie, φ d. Richtung derselben gegen d. Richtung d. Beweg. und s bedeutet d. ganze Länge $S_0 S$ d. Mittellinie. Setzt man für M d. Ausdruck ein, so ergibt sich als Fundamentalgl.: $$\frac{u^2}{2g} + \frac{p}{\gamma} = \frac{u_0^2}{2g} + \frac{p_0}{\gamma} + h + K - B.$$ Dieselbe soll jedoch in eine etwas einfachere Form gebracht werden. Wäre unter übrigens gleichen Umständen d. Wasser in d. Röhre in relativer Ruhe, also $u = 0$ und $u_0 = 0$, so wäre auch $B = 0$, es wäre dann also d. Unterschied d. Druckhöhe im Querschnitt F über d. Druckhöhe im Querschnitt F_0, also d. Größe $\frac{p-p_0}{\gamma} = h + K$. Diese Größe soll bezeichnet werden als d. „hydrostatische Unterdruckhöhe" d. Querschnitt $F_0 F$ d. Röhre. Im Gegensatz dazu soll unter d. „hydraulischen Unterdruckhöhe" verstanden werden, d. Unterschied d. Druckhöhe im Querschnitt F über die im Querschnitt F_0 für d. Zustand d. strömenden Beweg. d. Wassers in d. Röhre. Um diese letztere von d. hydrostatischen Unterdruckhöhe zu unterscheiden sei d. hydrostatische Unterdruckhöhe bezeichnet mit $\left(\frac{p-p_0}{\gamma}\right)$. Wenn man d. hydraulische von d. hydrostatischen Unterdruckhöhe abzieht, also $(p_0-p_0) \div \frac{p-p_0}{\gamma}$ bleibt, od. was dasselbe ist, wenn man d. algebraische Summe bildet $h+k-\frac{p-p_0}{\gamma}$, so soll diese Größe mit d. Buchstaben H bezeichnet werden und dieselbe d. ~~wirksame~~ Druckhöhe für d. Wasserfaden $\partial_0\partial$ genannt werden. Sie ist nämlich derjenige Theil d. hydrostatischen Unterdruckhöhe, welcher auf d. Erhaltung d. strömenden Bewegung verwendet wird. Mit Hilfe dieser Bezeichnung kann nun d. 2te Fundamentalgl. geschrieben werden:

$$\frac{u^2-u_0^2}{2g} = H - \mathfrak{B}.$$

Ein Theil dieser wirksamen Druckhöhe setzt sich in Geschw. um, ein anderer Theil wird dazu gebraucht um d. hydraulischen Bew.-Widerstände von ∂_0 bis ∂ zu bewältigen. —

Ist nun ζ d. Widerstandscoeff. für d. Wasserfaden $\partial_0\partial$, dann kann mit Rücksicht auf d. früher festgestellten Entwicklungen eine solche Widerstandscoeff. $\mathfrak{B} = \zeta\frac{u^2}{2g}$ geschrieben werden und man hat demnach: $\frac{u^2-u_0^2}{2g} = H - \zeta\frac{u^2}{2g}$. Hieraus folgt:

$$u = \sqrt{\frac{u_0^2+2gH}{1+\zeta}}$$

Ist φ d. entsprechende Geschw.-coeff. d. zu letzterem ζ in d. Beziehung steht: $\varphi = \sqrt{\frac{1}{1+\zeta}}$, so ist auch:

$$u = \varphi\sqrt{u_0^2+2gH}$$

Die Continuitätsgl. $\partial u = \partial_0 u_0 = V$ in Verbindung mit d. Gl. d. lebendigen Kraft $\frac{u^2-u_0^2}{2g} = H - \mathfrak{B}$ od. was auf dasselbe hinauskommt, d. Continuitätsgl. in Verbindung mit d. Gl. d. Geschw. $u = \sqrt{\frac{u_0^2+2gH}{1+\zeta}} = \varphi\sqrt{u_0^2+2gH}$ sind als d. Fundamente zu betrachten zur Beantwortung aller Fragen, die sich auf d. permanente Bewegung d. Wassers beziehen, wobei zu berücksichtigen ist: $H = h+k+\frac{p_0-p}{\gamma}$ ist.

Diese verschiedenen Aufgaben nun, für deren Behandlung diese Gln. als d. Fundamentalgln. zu betrachten sind, beziehen sich theils auf d. Ausfluß d. Wassers aus Gefäßen, theils auf d. Bewegung d. Wassers in längeren Röhren. Es ist also:

1) $\partial u = \partial_0 u_0 = V$ — d. Continuitätsgl.

2) $\frac{u^2-u_0^2}{2g} = H - \mathfrak{B}$ — d. Gl. d. lebendigen Kraft.

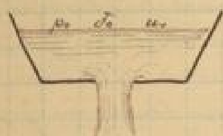
3) $u = \sqrt{\frac{u_0^2+2gH}{1+\zeta}} = \varphi\sqrt{u_0^2+2gH}$ — d. Geschw.-Gl.

wobei $H = h+k+\frac{p_0-p}{\gamma}$ und $k = -\frac{1}{g}\int_0^s f\cos\rho\, ds$ ist. —

Ausfluß d. Wassers aus Gefäßen. —

Denken wir uns in einem beliebig gestalteten Gefäß, Wasser enthalten und d. in diesem Gefäß befindliche Wassermenge durch entsprechenden äußeren Zufluß constant erhalten, während d. Wasser gleichzeitig durch eine Öffnung im Boden d. Gefäßes ausfließt, dann hat man es zu thun mit einer Bew., welche unter fast gleichbleibenden Umständen in gleichbleibender Weise stattfindet. Die Ausflußöffnung befindet sich in einem solchen Fall entweder als einfache Wandöffnung unmittelbar in d. Gefäßwand, od. sie befindet sich am Ende eines [illegible] Mundstücks, welches aber hier als so kurz vorausgesetzt werden soll, daß d. Reibungswiderstände in demselben vernachlässigt werden können. Es [illegible] sollen hier d. Flächeninhalt d. Mündung bezeichnet mit A. Diese Mündung $= A$ wird dabei angesehen als eine ebene Fl., begrenzt von d. inneren Wandfl. d. Gefäßes od. resp. d. Mundstücks. Diese ebene Mündung $= A$ ist also im Allgemeinen nicht ein Querschnitt d. strömenden Flüssigkeit in dem hier dieser Begriff ~~entwickelten~~ Sinne d. h. d. Laufen d. Flüssigkeitstheilchen brauchen durchaus nicht diese Mündung A normal zu durchschneiden, im Gegentheil, es wird im Allgemeinen dies nicht d. Fall sein. Denken wir uns

Z. B. in einem ebenen Boden eines Gefäßes befinde sich d. Mündung A, so fließt von jenem d. Gefäßes umschlossenen Teilen d. Wasser dieser Mündung A zu. diese Schichten werden gegen d. Mitte hin d. Mündung A senkrecht zu schneiden kommen, gegen d. Wand hin werden d. Schichten mehr od. weniger schief gerichtet sein können. Mit dieser schiefen Richtung d. Schichten gegen d. Mündungsebene hin nimmt auch d. Krümmung d. Schichten von d. Mitte nach d. Wand hin entsprechend zu.



[illegible] zunehmende Krümmung d. Schichten wird auch eine nach d. Wand hin abnehmende Geschw. in d. Mündung A entsprechen und wird demnach nicht d. Geschw. in allen Punkten d. Mündung A gleich groß sein, sondern sie wird in d. Mitte am größten sein. [illegible] wird d. Folge dieses Umstandes sein, daß d. Wasserstrahl, nachdem er d. Mündung A passiert hat, eine weitere Contraction seines Querschnittes erfährt, aber in d. Weise, daß d. kleinste Querschnitt dieses contrahierten Strahls erst in einer gewissen Entfernung von d. Mündungsebene erreicht sein wird. An d. Stelle dieser stärksten Zusammenziehung kann man d. Querschnitt d. Flüssigkeitsstrahls wieder als eben voraussetzen und somit kann auch in diesem kleinsten Querschnitt wieder eine gleichförmige Geschw. vorausgesetzt werden und zwar wird diese gleichförmige Geschw. gleich ~~sein derjenigen~~ zu setzen sein derjenigen Geschw., welche in d. äußeren Raume an d. Mündung herrscht und die = φ sei. Was d. Wasserstrahl betrifft, d. sich von diesem kleinsten Querschnitt bis zur Mündung A erstreckt, so wird an deren Oberfl. nach d. Geschw. sich [illegible], nach d. Mitte hin aber eine größere. D. kleinste Querschnitt dieses contrahierten Strahls sei mit S bezeichnet und d. Verhältnis dieses kleinsten Querschnitts zur Mündung A sei mit α bezeichnet also $\alpha = \frac{S}{A}$, man nennt dieses Verhältnis d. Contractionscoefficienten. D. mittlere Geschw. u, welche im Querschnitte S stattfindet, soll kurzweg d. Ausflußgeschw. genannt werden. Unter p_0 werde wie früher d. Pr. verstanden, welche in d. freien Oberfl. d. Wassers im Gefäß stattfindet. S_0 sei d. Größe dieser Oberfl. und u_0 d. mittlere Geschw., womit an dieser freien Oberfl. d. Wasserteilchen sich bewegen. Es ist nun d. Wasservolumen V, welches per Sek. ausfließt

$V = S \cdot u$ od. mit Rücksicht auf d. Contractionscoeff.: $V = \alpha A u$, wenn nun wieder $u = \varphi\sqrt{u_0^2 + 2gH}$ ist, also:

$$V = \alpha\varphi A\sqrt{u_0^2 + 2gH}$$

wenn $H = h + k + \frac{p_0 - p}{\gamma}$ ist

unter h d. Höhe d. [illegible] freien Oberfl. d. Wassers über d. Schwerpunkt d. Querschnitts S verstanden. D. Produkt aus d. Contractionscoeff. α und d. Geschw. Coeff. φ pflegt häufig mit einem besonderen Buchstaben zu bezeichnen, als sog. Ausflußcoefficient in d. Folge in Rechnung eingeführt zu werden.

Es ist dann also auch: $V = \mu A\sqrt{u_0^2 + 2gH}$. Die Geschw. u_0 an d. freien Oberfl. ist nun im Allgemeinen nicht gegeben, sie bestimmt sich auch durch V, denn es ist $u_0 = \frac{V}{S_0}$; setzt man diesen Wert für u_0 ein, so folgt aus dieser Gl. wenn durch μA dividiert, dann d. Gl. quadriert und u_0^2 auf d. linke Seite gebracht wird:

$$V^2\left(\frac{1}{(\mu A)^2} - \frac{1}{S_0^2}\right) = 2gH \text{ also } V = \mu A\sqrt{\frac{2gH}{1 - \left(\frac{\mu A}{S_0}\right)^2}}$$

nun ist aber $u = \frac{V}{\alpha A} = \frac{V}{S}$, also:

$$u = \varphi\sqrt{\frac{2gH}{1 - \left(\frac{\mu A}{S_0}\right)^2}}.$$

Dies sind d. allgemeinen Formeln für d. Ausflußmenge und Ausflußgeschw. d. Wassers aus einem Gefäß. In d. meisten Fällen ist nun A im Vergleich zu S_0 klein genug, um hiefür einfach schreiben zu können:

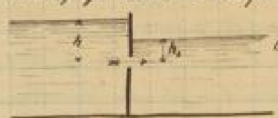
$$V = \mu A\sqrt{2gH} \quad \text{und} \quad u = \varphi\sqrt{2gH} \qquad *$$

und zwar darf man diese einfachen Formeln immer dann unbedenklich anwenden, wenn $\frac{A}{S_0} < \frac{1}{10}$ ist, indem man dann nur einen Fehler begeht, d. weniger beträgt als $\frac{1}{2}\%$ d. wahren Wertes und weil man nur bis zu einer solchen Genauigkeit im Stande ist, höchstens d. Werte von μ und φ anzugeben.

(daß man keinen größeren Fehler begeht, ist leicht ersichtlich: schreiben wir ferner $\sqrt{\frac{1}{1-x^2}}$ wenn x ein kl. Bruch ist, so bleibt bei Vernachlässigung unendlich kl. Größen höherer Ordnung $= \sqrt{1+x^2} = 1 + \frac{1}{2}x^2$ und wenn man diese ganze Größe $= 1$ setzt, so begeht man einen Fehler $= \frac{1}{2}x^2$ für jede Einheit, ist nun $x < \frac{1}{10}$ so ist dieser Fehler für jede Einheit $= \frac{1}{200}$ also $= \frac{1}{2}\%$.) —

Was d. wirksame Druckhöhe H betrifft, so soll, sofern nicht d. Gegentheil ausdrücklich bemerkt wird, vorausgesetzt werden, daß sich d. Gefäß selbst in Ruhe od. höchstens in einer gleichförmigen ... befindet, daß somit dann d. Wasser eine horizontale freie Oberfl. im Gefäß bildet und somit d. Erzeugungsschicht d. relativen Bew. nicht in Betracht kommen. Es hat dann H d. Bedeutung $H = h + \frac{p_0 - p}{\gamma}$. h bedeutet d. Höhe d. horizontalen freien Oberfl. im Gefäß über d. Schwerpunkt d. Querschnitts F, während p_0 d. Druck d. äußeren Mediums an d. freien Oberfl. und p d. Druck an d. Mündung bedeutet. Wenn d. Gefäß ringsum von d. freien atmosph. Luft umgeben ist, dann ist, nachdem spez. Gew. d. Luft von d. Mitte d. Gefäßes $= \lambda$ bezeichnet wird, $p - p_0$ d. Unterschied d. äußeren Luftdrucks an d. Stelle d. Mündung über d. äußeren Luftdruck in d. Höhe d. freien Oberfl. im Gefäße = d. Gew. einer Luftsäule von d. Grundfl. $= 1$ und d. Höhe h also $p - p_0 = h\lambda$ und folgl. $H = h + \frac{p_0 - p}{\gamma} = h\left(1 - \frac{\lambda}{\gamma}\right)$. In d. Regel ist nun aber $\frac{\lambda}{\gamma}$ so klein, daß man diesen Bruch wieder gegen 1 vernachlässigen darf, jedenfalls mit Rücksicht auf d. beschränkten Grad d. Genauigkeit, womit man μ u. φ anzugeben vermag. Es ist dann:

* $$V = \mu A\sqrt{2gh} \quad \text{und} \quad u = \varphi\sqrt{2gh}$$

Wenn d. Wasser unter gleichen Voraussetzungen wie oben, durch eine Öffnung in d. Seitenwand ausfließt in ein anderes Gefäß, in welchem gleichfalls ein constanter Wasserstand erhalten wird, so kann d. auf d. freie Oberfl. wirkende spez. Druck in beiden Gefäßen ohne großen Fehler gleich und zwar $= p_0$ gesetzt werden.

Ist dann h d. Höhe d. Wasserspiegels im ersten und h_1 d. im 2ten über d. Schwerpunkt d. Querschnitts d. unterhalb Wasserfl., so ist offenbar $p = p_0 + \gamma h_1$ also $H = h + \frac{p_0 - p}{\gamma} = h - h_1$.

Nun müßte man eigentlich in jedem besonderen Fall d. Höhe dieses Schwerpunktes genau kennen, da dies aber nicht d. Fall ist, so pflegt man vorgezogen zu werden um Unsicherheiten zu vermeiden, unter h d. Höhe d. freien Wasseroberfl. im Ausflußgefäß über d. Schwerpunkt d. Mündung A selbst zu verstehen; allerdings erhalten dann φ u. μ andere Bedeutungen. Diese modificirten Bedeutungen haben aber nichts auf sich, da dieselben doch empirisch bestimmt werden müssen. Am meisten ändern sich φ u. μ wenn d. Wasser aus einer großen Seitenöffnung ausfließt. Eine andere Correction d. Formel kann in solchen Fällen wünschenswerth erscheinen, wo d. Mündungsebene nicht horizontal ist und d. größte Vertikaldimension nicht sehr klein im Vergleich mit h ist.

Denken wir uns z. B.: eine ebene Seitenwand eines Gefäßes, welche dann unter d. Winkel ψ gegen d. Horizont geneigt sein mag. In derselben befinde sich eine große Öffnung, so können in einem solchen Fall d. Geschw. in verschiedenen Punkten d. Mündung A bedeutend verschieden sein und wenn es auch sehr ziemlich ... sein, d. mittlere Geschw. = derjenigen zu setzen, welche im Schwerpunkt stattfindet.

Es fragt sich nun, ob unter ~~diesen~~ Umständen diese Ergänzung sich vermeiden läßt. Zu dem Ende sollen H, H_1 und H_2 d. Werthe von $h + \frac{p_0 - p}{\gamma}$ für d. Schwerpunkt, d. tiefsten und d. höchsten Punkt d. Mündung bezeichnen, für einen beliebigen Punkt d. Mündung sei d. Größe $H = h + \frac{p_0 - p}{\gamma}$ mit z bezeichnet. Nun denke ich mir d. ganze Mündungsebene durch horizontale Linien in unendl. schmale Flächenstreifen zerlegt. D. Entfernung eines solchen Streifens von d. durch d. Schwerpunkt d. Mündung gezogenen Horizontale sei bezeichnet mit x, wobei x positiv od. negativ gesetzt werden soll, jenachdem d. Streifen höher od. tiefer liegt als d. Schwerpunkt d. Mündung. D. Länge dieses Streifens sei bezeichnet mit y, d. unendl. kl. Breite desselben ist $= dx$ also $y\,dx$ d. Inhalt eines solchen Flächenstreifens. Auf diesen beliebigen Flächenstreifen bezieht sich nun d. beliebige z. An Stelle d. Formel $V = \mu A\sqrt{2gH}$ wird man streng genommen setzen

Formel zu [illegible] haben: $V = \mu \int y\,dx\sqrt{2gz}$, indem z d. Wert dieser Größe H für d. beliebigen Flüssigkeitsfaden bedeutet. D. Ggl. kann auch geschrieben werden: $V = \mu\sqrt{2g}\int y\sqrt{z}\,dx$. Nun ist: $z = H + x.\sin\psi$ also $dx = \frac{dz}{\sin\psi}$ und $V = \frac{\mu\sqrt{2g}}{\sin\psi}\int y\sqrt{z}\,dz$.

Hat man hiernach ja auch d. Form d. Mündung V bestimmt, so findet man d. Ausflußgeschw.:

$$u = \frac{V}{\alpha A}.$$

Ist z. B.: d. Ausflußöffnung ein Rechteck und zwar so gelegen, daß 2 Seiten derselben horizontal sind, dieselben seien = b und d. beiden anderen = a. In diesem Falle ist also y = const = b und somit $V = \frac{\mu b\sqrt{2g}}{\sin\psi}\frac{2}{3}\left(H_1^{\frac{3}{2}} - H_2^{\frac{3}{2}}\right)$. Die mittlere Ausflußgeschw. u ergibt sich hieraus durch Division mit αA; es ist aber $A = ba$ und auch $a = \frac{H_1 - H_2}{\sin\psi}$ und somit:

$$u = \frac{2}{3}\varphi\sqrt{g}\,\frac{H_1^{\frac{3}{2}} - H_2^{\frac{3}{2}}}{H_1 - H_2}.$$

Übrigens läßt sich auch leicht eine für alle Fälle ausreichende Näherungsformel für d. folgend finden. Es ist nämlich:

$$\sqrt{z} = \sqrt{H + x.\sin\psi} = \sqrt{H}\sqrt{1 + \frac{x\sin\psi}{H}}.$$

D. Größe $\frac{x\sin\psi}{H}$ ist ein echter Bruch und man kann daher d. binomischen Lehrsatz anwenden u. d. Glieder schreiben: $\sqrt{z} = \sqrt{H}\left(1 + \frac{1}{2}\frac{x\sin\psi}{H} - \frac{1}{8}\left(\frac{x.\sin\psi}{H}\right)^2\right)$. Wird dann nächstdem d. Faktor $\frac{1}{\sin\psi}$ unter d. Integral und für $\frac{dz}{\sin\psi}$ wieder dx geschrieben, so ist wieder y dx nichts anderes als d. Inhalt eines Flüssigkeitsstreifens, welcher auch mit dA bezeichnet werden kann; dann ist: $V = \mu\sqrt{2gH}\int dA\left(1 + \frac{1}{2}\frac{x\sin\psi}{H} - \frac{1}{8}\frac{x^2}{H^2}\sin^2\psi\right)$. Nun ist $\int dA = A$, ferner $\int x\,dA = 0$, da d. Inhalt dieser Flüssigkeitsstreifen multipliziert mit ihrer Entfernung vom Schwerpunkt = 0 sein muß; d. dritte Glied enthält auch $\int x^2\,dA$. Diese Summe d. Produkte aus d. Inhalt d. Flüssigkeitsstreifen in d. Quadrat ihrer Abstände von d. Schwerpunktsachse, also d. Trägheitsmoment d. Mündungsfläche A in Bezug auf d. Schwerpunktsachse sei bezeichnet mit Ak^2. Dann wird:

$$V = \mu A\sqrt{2gH}\left(1 - \frac{1}{8}\frac{k^2}{H^2}\sin^2\psi\right) \text{ und } u = \frac{V}{\alpha A}$$

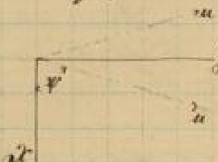
Wie man sieht unterscheidet sich diese verbesserte Formel für V u. u nur dadurch, daß dazu ein gewisser Korrektionsfaktor hinzugekommen ist und es fragt sich, unter welchen Umständen man bei Vernachlässigung dieses Faktors nur einen Fehler von ½ % begeht. Beispielsweise soll dies durchgeführt werden für ein Rechteck und eine Ellipse:

Ist d. Mündung A ein Rechteck mit d. Seiten b u. a, wo b horizontal ist, so ist bekanntlich: $Ak^2 = \frac{a^3 b}{12}$ also $k^2 = \frac{a^2}{12}$. Bezeichnet man d. Korrektionsgröße mit 1−f, so ist also für diesen Fall: $f = \frac{1}{96}\left(\frac{a.\sin\psi}{H}\right)^2$ und durch d. Vernachlässigung dieses Koeffizienten begeht man einen Fehler, d. weniger beträgt als ½ %, wenn $f < \frac{1}{200}$ ist; man überzeugt sich leicht, daß dies d. Fall ist wenn $\frac{a.\sin\psi}{H} < 0,7$ ist. —

Für d. Fall einer Ellipse seien a u. b d. beiden Hauptachsen, wo b horizontal, dann ist: $Ak^2 = \frac{\pi ab}{4}k^2 = \frac{\pi}{4}\left(\frac{a}{2}\right)^3\frac{b}{2}$ also $k^2 = \frac{a^2}{16}$ und somit: $f = \frac{1}{128}\left(\frac{a.\sin\psi}{H}\right)^2$. Diese Größe ist nun $< \frac{1}{200}$ wenn $\frac{a\sin\psi}{H} < \frac{8}{10}$ ist. Dies ist in d. meisten Fällen wirklich so; ist aber $\frac{a\sin\psi}{H} >$ als diese Zahlen, so schlägt man doch zweckmäßig d. alte Formel zu wählen, da, wenn man auch diese verbesserte Formel anwendet, sie so doch auch abhängig sind von H u. d. Dimensionen d. Mündung, die nur durch ungewisse Versuche bestimmt werden können. Es wird also in d. Weise wie sie je d. Werte hineingelegt werden müssen, daß d. Schwerpunkt d. entsprechenden Rechtecks unterhalb liegen kann und dann erhalten diese auch d. Einfluß dieser vernachlässigten Korrektionsfaktoren 1−f. —

[illegible] α [illegible] α [illegible] $= \frac{\pi}{2}$ [illegible] $\alpha = \frac{\pi}{2}$ [illegible]

[illegible] X [illegible] Y [illegible]



X Axe [illegible] $= \psi$. — [illegible] X und Y Axe [illegible] dt [illegible] $= \gamma \frac{V}{g}(u\cos\psi - u_0)\,dt$ im Sinne d. X Axe und $\gamma \frac{V}{g} u \sin\psi\, dt$ im Sinne d. Y Axe, wenn u_0 [illegible] dt [illegible] σ [illegible] σ [illegible] V [illegible] γV [illegible] $\gamma \frac{V}{g}$ [illegible] X Axe [illegible] $= u\cos\psi - u_0$ und im Y Sinne: $u \sin\psi$. [illegible] dt [illegible] $= X\,dt$ [illegible] $= Y\,dt$ [illegible] X u. Y [illegible]

$$X = \gamma \frac{V}{g}(u\cos\psi - u_0) \qquad Y = \gamma \frac{V}{g} u \sin\psi.$$

[illegible] X u. Y [illegible] X u. Y [illegible] X u. Y Axe [illegible] u_0 [illegible] $u\cos\psi$ [illegible] $u_0 = 0$, so ist d. [illegible]

$$R = \sqrt{X^2 + Y^2} = \gamma \frac{V}{g} u.$$

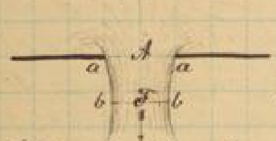
[illegible] u_0 [illegible] X u. Y [illegible] R [illegible] u.

Setzt man $V = \sigma u$, so [illegible]

$$R = 2\gamma \frac{\sigma u^2}{2g}.$$ [illegible]

$= \sigma$ [illegible] Setzt man ferner $\sigma = \alpha A$ und $u = \varphi\sqrt{2gh}$

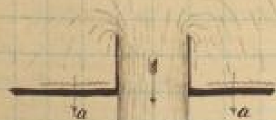
hervorgerufen [illegible] für d. Reactionsdruck $R = 2\alpha\varphi^2\gamma A H.$
Dieser letzte Ausdruck kann nun dazu dienen, d. [illegible] Grenzwerth d. Contractionscoeff. α $= \frac{1}{2}$ festzustellen, wenn in allen denjenigen Fällen, wo d. Wasser nicht mit einer verschwindend kl. Geschw. vorbeistreicht, d. Normale einen spitzen od. höchstens rechten Winkel mit [illegible] bildet.
Zu dem [illegible] muss man bemerken, dass d. [illegible] Wasser in [illegible] Weise auf d. Gefässwand wirkt, [illegible] durch d. Normaldruck [illegible] durch d. Reibung an d. Wand. Jener Druck R, womit d. ausfliessende Wasser entgegengesetzt im Sinne von u auf d. Ausflussgefäss zurückwirkt, ist zu betrachten als d. Unterschied eines im entgegengesetzten Sinne von u genommenen auf d. Gefässwand ausgeübten Normaldrucks über eine im Sinne von u wirkende Reibung d. an d. Gefässwand entlang fliessenden Wassers. Es ist also R zu betrachten als $P - R'$, wenn P bedeutet d. entgegengesetzt im Sinne von u genommenen Normaldruck, den d. Wasser normal auf d. Gefässwand ausübt, und R' d. Druck, womit umgekehrt d. Wasser auf d. Gefässwand im Sinne von u wirkt. Also $R = P - R'$.
Was diesen Normaldruck P betrifft, so denken wir uns zunächst einen einfachen Normalfall, dass d. Ausflussöffnung sich in einer ebenen Gefässwand befinde z. B. im Boden. Das Wasser



fliesst hier von d. verschiedenen Seiten d. Mündung zu und es würde d. Ausfluss [illegible] zu einem gewissen Grade verhindert werden bis zum Querschnitt P. Wenn d. Mündung A geschlossen wäre und d. Wasser im Gefäss in Ruhe, so würde am Theile A d. Oberfl. d. Wassers ein Normaldruck stattfinden $= A(\gamma h + p_0)$ unter p_0 d. äusseren Druck auf d. Oberfl. d. Wassers im Gefäss verstanden. D. entsprechende Theil d. Oberfl. d. im Gefäss enthaltenen Wassers im Zustande d. Ruhe ist d. Fl. $abba$. An dieser ganzen Oberfl. herrscht d. wirkliche Druck p = d. Druck in d. Raume, in welchen d. Ausfluss stattfindet, so dass d. resultierende Normaldruck, d. mit Ausnahme d. [illegible] an d. Oberfl. herrscht von A u. P und zwar im Sinne von u nicht mehr $= A(\gamma h - p_0)$ sondern $= A p$ ist. Folglich ist an diesem Theile d. Wasseroberfl. d. Unterschied d. hydrostatischen Drucks über d. hydraulischen Druck = dieser Differenz, also =:

$$A(\gamma h + p_0) - A p = \gamma A\left(h + \frac{p_0 - p}{\gamma}\right) = \gamma A H$$

Um diesen Betrag wird also jedenfalls d. Druck, den d. Wasser im Sinne von u auf d. Gefäss ausübt, vermindert od. umgekehrt d. Druck, den d. Wasser auf d. Gefäss entgegengesetzt im Sinne von u ausübt. Aber dieses ist nicht d. einzige Grund, um welchen dieser Druck P d. ausfliessenden Wassers auf d. Gefäss entgegengesetzt im Sinne von u grösser wird im Zustand d. Beweg. als im Zustand d. Ruhe, nämlich an denjenigen Theilen d. Gefässwand, welche d. Mündung unmittelbar umgeben, strömt d. Wasser zum Theil längs d. Gefässwand hin d. Mündung zu. In grösserer Entfernung von d. Mündung wird diese Geschw. so klein sein, dass man davon absehen kann, aber unmittelbar an d. Mündung wird es [illegible] nicht sein. Ist dies d. Fall, so wird an diesen Stellen d. innere Druck kleiner sein als d. hydrostatische um einen Betrag, d. der Geschw.-Höhe entspricht. Es ist also an diesen Stellen d. Normaldruck, den d. Wasser auf d. Gefässwand ausübt, während d. Ausflusses kleiner als er bei geschlossener Mündung ist und deshalb ist aus [illegible] d. Grösse P nicht nur $= \gamma A H$ sondern mehr od. weniger viel grösser als $\gamma A H$. d. h. $P = R + R' > \gamma A H$.
Um wieviel dieser grösser sein wird als $\gamma A H$ hängt ab von d. Gestaltung d. Gefässes in d. Umgebung d. Mündung A. In d. Fällen, wo d. Normaldruck d. Wassers auf d. Gefässwand an dem d. Mündung unmittelbar umgebenden Theil wirkt, muss P erheblich grösser sein als $\gamma A H$ und zwar wird dies immer d. Fall sein, an dem Theile d. Gefässwand, welcher d. Mündung unmittelbar umgiebt. D. Grenzfall, in welchem $P = \gamma A H$ wird, ist d. Fall eines hervorragenden inneren cylindrischen Ansatzrohres von verschwindend kl. Dicke. Es wird allerdings auch diese cylindrische Wand d. Normaldruck



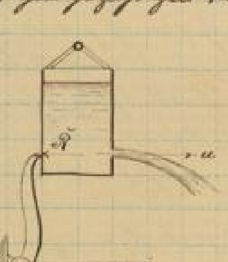
kleiner sein im Zustand d. Beweg. als im Zustand d. Ruhe, dies hat aber auf d. Druck im Sinne von u keinen Einfluss, weil d. Normale rechtwinklig gegen u gerichtet ist. Wirkt d. Wasser in a senkrecht gegen d. Fläche mit einer gewissen Geschw. fliessen, so wird $P > \gamma A H$; ist aber d. Ansatzrohr genügend lang, so wird man annehmen können, dass in einer Entfernung von [illegible] d. Rohres gleich d. Länge desselben d. Wasser aus einer [illegible] Gefäß fallen. Dann würde P nur wenig größer sein als $\gamma A H$, [illegible], daß d. Wand d. [illegible] nur sehr dünn ist, also an d. Oberfl. nur einen [illegible] Rand hat. Wären gar keine Widerstände vorhanden, so wäre d. [illegible] $\varphi = 1$. Es wäre dann d. Reactionsdruck R, welcher zu bezeichnen sei mit R_0.

$$R_0 = 2\alpha\gamma A H.$$

[illegible] R_0 oder d. [illegible] d. Reactionsdrucks R' ist d. Größe d. äußeren Wirkung zwischen d. Wasser und d. Gefäßwand im Innern normal gegen d. Mündung: $R_0 - R' = R'$. [illegible] $R + R' = R_0 = 2\alpha\gamma A H$. [illegible] ($R + R' = P$ und $P > \gamma A H$) so folgt: $2\alpha > 1$ also $\alpha > \frac{1}{2}$; d. kleinste Werth, den d. [illegible] $\frac{1}{2}$ [illegible] d. Gefäßwand bei d. Mündung d. [illegible] mit d. Richtung von u bildet. [illegible]

mit derselben, wenn d. innere Wasser sich nach außen hin [illegible], so würde $P < \gamma A H$ sein also $\alpha < \frac{1}{2}$; [illegible]

Es handelt sich nun noch um d. Lage und Richtung von R. [illegible] $R = P - R'$ unter P d. [illegible] Druck gegen d. Gefäßwand [illegible] R' d. Wirkung, welche d. fließende Wasser an d. Gefäßwand ausübt. [illegible] d. Unterschied d. hydrostatischen und hydraulischen Druck auf d. Mündungsebene A [illegible] P [illegible] $= \gamma A H$, [illegible] d. Schwerpunkt d. Mündungsebene A [illegible] P und d. Wirkung R' [illegible] d. Schwerpunkt d. Mündungsebene [illegible] d. Richtungslinie von R [illegible] d. Wasser ringsum d. Mündung in gleicher Weise zufließt. [illegible]



[illegible] Ewart [illegible] cylindrisches Gefäß, welches unten mit einer Öffnung versehen war, vermittelst eines [illegible] an einer horizontalen Axe [illegible], welche Axe rechtwinklig und [illegible] gegen d. horizontale Ausflußstrahl [illegible]. d. Wasserspiegel wurde immer in gleicher Höhe erhalten. [illegible] d. Gefäß [illegible]. [illegible] d. Größe d. Drucks R [illegible] d. Schwerpunkts d. Mündung d. Wand [illegible] d. Größe dieser Kraft R [illegible] d. Richtungslinie d. Reactionsdrucks [illegible] d. Schwerpunkt [illegible] = d. Reactionsdruck, [illegible] d. Richtungslinie d. Reactionsdrucks [illegible] d. Schwerpunkt d. Mündung A. [illegible] $R = 2\alpha\varphi^2 \gamma A H$ [illegible] γ, A, H bekannte Größen sind, so ergeben sich [illegible] Werthe von $\alpha\varphi^2$, [illegible] d. [illegible] $\alpha\varphi^2$. [illegible] d. Richtungslinie d. Reactionsdrucks [illegible] Schwerpunkt d. Mündungsebene A [illegible].

Wenn man d. Versuche so einrichtet, daß man weiß, ob kommen d. Richtungslinien [illegible] von d. Richtung von R vorbei gehen, so erkennt man, daß man bedeutend dazu gelangen kann, d. Werthe von α [illegible] zu bestimmen, so daß man jedenfalls den d. einen Werth finden kann, wenn man d. anderen kennt.

Bei d. zuletzt entwickelten Gleichungen ist vorausgesetzt worden, daß d. Ausflußgefäß sich nicht in Rot. befindet od. höchstens eine gleichförmige Translationsbew. hatte, so daß d. freie Oberfl. eine Horizontalebene bildete. Jetzt soll nun endlich vorausgesetzt werden, daß sich d. Gefäß, aus welchem das Wasser ausfließt, in eigener Rot. begriffen, so daß d. Wasseroberfl. eine Krümmung haben kann. In einem solchen Fall scheinen d. Arbeiten d. Kräfte, welche d. Rot. d. Wassertheilchen von verschiedenen Stellen d. Oberfl. aus gegen d. Mündung hin bestimmen, so von einander verschieden, daß man gleich bei d. Berechnung d. mittleren Ausflußgeschw. kaum eine mittlere Bew. zu Grunde legen zu dürfen. Es kann von vornherein möglich erscheinen, daß ein Wassertheilchen in d. Mündung A verschiedene Geschwindigkeit annimmt, je nachdem es von verschiedenen Stellen d. Oberfl. herkommt. Dieses ist jedoch nicht d. Fall.

Ist nämlich $A_0 A$ irgend ein Stück einer beliebigen von einem Wassertheilchen durchlaufenen Bahn und zwar von A_0 gegen A hin, so findet d. früheren zufolge bekanntlich folgende allgemeine Gl. statt:

$$\frac{u^2}{2g} + \frac{p}{\gamma} = \frac{u_0^2}{2g} + \frac{p_0}{\gamma_0} + M + E + \int R_0\, ds$$

d. h. d. Summe aus d. Geschw.- und Druckhöhe d. Punktes A ist = d. analogen Summe für d. Punkt A_0 + d. Arbeit d. Massenkräfte, d. Expansionsarbeit und d. Arbeit d. inneren Reibungen pr. 1 kgr von A_0 bis A.
Im vorliegenden Falle, wo es sich um d. Bew. einer tropfbaren Flüssigkeit handelt, kann von vornherein $\gamma = \gamma_0$ gesetzt werden und ferner kann auch d. Expansionsarbeit $= E = 0$ gesetzt werden, weil d. spec. Volumen gleich bleibt. Wenn man ferner von d. inneren Reibung vorläufig absieht, so kann im vorliegenden Fall d. Gl. geschrieben werden: $\frac{u^2}{2g} + \frac{p-p_0}{\gamma} = M$ wo nun aber jetzt durch Massenkraft nicht nur d. Schwerkraft sondern auch d. erste Schwungkraft (?) d. relativen Bew. in sich schließt, entsprechend d. eigenen Rot. d. Gefäßes. Es könnte nun von vornherein möglich erscheinen, daß dieses M einen verschiedenen Werth hat, je nachdem A_0 einen verschiedenen Punkt in d. freien Oberfl. d. Flüssigkeit im Gefäß bedeutet und, daß somit sich für u verschiedene Werthe ergeben, je nachdem ein Punkt von d. verschiedenen Stellen d. Oberfl. kommt. Schließlich ist dies nicht d. Fall. Die Rot. d. Gefäßes kann nur bestehen in einer Rotation mit constanter Winkelgeschw. ω um eine vertikale Axe verbunden mit einer gleichzeitig stattfindenden Translation mit constanter Geschw. im Sinne dieser vertikalen Rotationsaxe od. es kann d. eigene Rot. d. Gefäßes bestehen in einer bloßen Translationsbew. mit d. constanten Geschw. f, die aber eine beliebige Richtung haben kann, denn nur unter diesen Bedingungen kann eine permanente Bew. d. Wassers im Gefäße möglich sein. Es handelt sich also nun darum, für diese beiden Fälle zu constatieren, daß auch diese Ausflußgeschw. u dieselbe ist, von welcher Stelle d. freien Oberfl. auch d. Wassertheilchen herkommen möge.

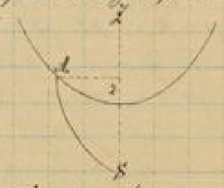
Alle von d. verschiedenen Punkten A_0 d. Oberfl. beginnenden Bahnen werden alle durch d. Schwerpunkt d. kleinsten Querschnitts d. contrahirten Strahles hindurch gehend gedacht werden können. Wie nun auch diese Bahnen gestaltet werden können, so ist doch immer d. Geschw. u dieselbe, womit ein Wassertheilchen in S anlangt, welcher Satz nun bewiesen werden soll.

1) d. Gefäß rotire mit const. Winkelgeschw. ω um eine vertikale Axe und habe außerdem eine Translation mit const. Geschw. f im Sinne d. Rotationsaxe, und zwar soll d. Geschw. f positiv gerechnet werden, wenn vertikal nach unten gerichtet.

Wenn d. Wasser sich in relativer Ruhe gegen d. selbst rotirende Gefäß befindet, so bildet d. freie Oberfl. d. Wassers im Gefäß bekanntlich ein Rotationsparaboloid. Wenn man d. Scheitel dieses Rotations-Paraboloids als Ursprung eines Coord.-systems annimmt, d. Z Axe vertikal und positiv nach oben, dann ist bekanntlich d. Gl. dieses Rotations-Paraboloids: $x^2 + y^2 = 2\frac{g-f}{\omega^2} z$

In diesem Fall ist d. früheren zufolge d. Arbeit M d. Massenkräfte pr. 1 kgr: $M = (1 - \frac{f}{g})h + \frac{\omega^2}{2g}(r^2 - r_0^2)$.

Für d. entsprechenden möglichen Fälle d. eigenen Bew. d. Gefäßes, während d. Wasser im Beharrungszustande ausfließt, werden d. Ausdrücke für h festgestellt. Für d. Fall, daß das Gefäß um eine verticale Axe rotirt und zugleich eine translatorische Beschl. hat, gilt für h d. letztere Ausdruck, dabei ist h d. Höhe d. Punktes A_0 also d. beliebigen Punktes d. freien Oberfl. über d. Fußpunkt d. betreffenden Linie, ebenso S. r und r_0



sind d. Perpendikellängen von S und A_0 auf d. Z Axe. Dabei ist, wenn entsprechend d. Höhe d. Scheitelpunktes über S mit h_0 bezeichnet sei:

$$h = h_0 + z$$

wo z d. Höhe d. Punktes A_0 über d. Coord.-Anfang bedeutet. Setzt man diesen Werth von h in d. Gl. für u ein und setzt dann $h = \frac{u^2}{2g} + \frac{p-p_0}{\gamma}$, so folgt:

$$\frac{u^2}{2g} = \left(1-\frac{f}{g}\right)h_0 + \frac{p_0-p}{\gamma} + \left(1-\frac{f}{g}\right)z + \frac{\omega^2}{2g}\left(r^2-r_0^2\right);$$ setzt man: $\left(1-\frac{f}{g}\right)h_0 + \frac{p_0-p}{\gamma} = H_0$, so wird:

$$\frac{u^2}{2g} = H_0 + \frac{(r\omega)^2}{2g} + \frac{\omega^2}{2g}\left(2\frac{g-f}{\omega^2}z - r_0^2\right)$$

Hierin ist nun r_0 d. Perpendikel von A_0 auf d. Axe Z, also $r_0^2 = x^2 + y^2$, wenn x und y d. Coord. von A_0 sind. Nun wird man mit derselben Annäherung, womit man von d. Oberfl.-Geschw. abstrahiren durfte, auch annehmen dürfen, daß d. freie Oberfl. dieselbe Form hat, welche sie haben würde, wenn d. Wasser ganz und gar in relativer Ruhe gegen d. Gefäß sich befände, denn in d. oberen Partien ist ja d. Theil d. Wassers fast ganz genau in relativer Ruhe gegen d. Gefäß. Es wird also d. Gestalt d. freien Oberfl. fast ganz genau so sein, als wenn gar kein Wasser ausflösse, somit ist also: $r_0^2 = 2\frac{g-f}{\omega^2}z$

und folglich d. Geschw. $u = \sqrt{2gH_0 + (r\omega)^2}$ od. behufs empirischer Correction wegen d. Ausflußcoefficienten:

$$u = \varphi\sqrt{2gH_0 + (r\omega)^2}.$$

Dieser Ausdruck ist ganz unabhängig von d. Lage d. Punktes A_0 in d. freien Oberfl., r bedeutet d. Entfernung d. Schwerpunktes S d. kleinsten Querschnitts d. austretenden Strahls von d. Rotationsaxe d. Gefäßes, also $r\omega$ d. absolute Geschw. dieses Gefäßpunktes, welcher mit d. Schwerpunkt von A zusammenfällt. Wenn d. Gefäß ringsum von atmosph. Luft umgeben ist, so daß man ohne großen Fehler $p = p_0$ setzen kann, so ist:

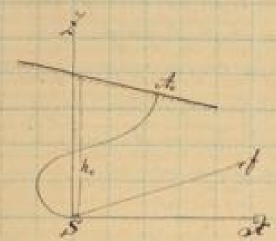
$$u = \varphi\sqrt{2(g-f)h_0 + (r\omega)^2}$$

Wäre d. Gefäß nicht in Rotation begriffen, sondern hätte dasselbe nur eine translatorische Bew. mit einer vertical gerichteten Beschl., also $\omega = 0$, so ist: $u = \varphi\sqrt{2(g-f)}$ da $h_0 = const = h$ ist.

Wenn z. B. d. Gefäß durch seine eigene Schwere frei herunterfiele und man wollte man für diesen Fall d. relative Geschw. angeben, mit welcher d. Wasser aus einer Öffnung in d. Öffnung d. Gefäßwand ausflösse, so wäre $f = g$ und also $u = 0$ d. h. es würde gar kein Wasser ausfließen. —

2) d. Gefäß sei in einer translatorischen Bew. begriffen mit d. Beschl. f, d. constante Richtung dieser Beschl. f bilde d. Winkel ψ mit d. Horizont, gleichviel ob schräg aufwärts und abwärts. In diesem Fall kann wieder, wenn d. Gefäß hinlänglich groß ist d. freie Oberfl. als identisch betrachtet werden mit derjenigen, welche stattfinden würde, wenn d. Wasser ganz in relativer Ruhe gegen d. Gefäß sich befände, wenn also kein Ausfluß vorhanden wäre. Für diesen Fall bildet aber d. freie Wasseroberfl. nach d. Hydrostatik eine geneigte Ebene. Mit d. Gefäß fest verbunden sei ein rechtwinkliges Axensystem angenommen, so daß d. Z Axe vertical und gleichviel nach oben sei. Ist d. Horizontalebene durch d. Ursprung nach d. X Axe so angenommen, daß d. constante Richtung d. Beschl. f d. Gefäßes parallel d. XZ Ebene ist, so bilde (nämlich sie) mit d. X Axe d. Winkel ψ, die Y Axe zeigt sich dann in S senkrecht zur Ebene d. Figur. Für den Fall, daß d. Wasser in relativer Ruhe gegen d. Gefäß ist, bildet nur d. freie Oberfl. eine geneigte Ebene, welche parallel d. Y Axe ist; d. Gl. ist d. hiervon gemäß:

$$z = -\frac{f\cos\psi}{g + f\sin\psi}x + h_0$$



Darin bedeutet h_0 denjenigen Wert, welcher von d. Z-Axe durch d. freie Oberfl. abgeschnitten wird. h_0 ist natürlich auch von d. Wert d. Beschleunigung abhängig. Wenn nun aber aus einem so bewegten Gefäß aus einer kleinen Stelle Wasser ausfließt, während durch entsprechenden Zufluß d. Wassermenge constant erhalten wird, so ist:

$$\frac{u^2}{2g} + \frac{p-p_0}{\gamma} = M$$

d. Beziehung ist angenommen im Schwerpunkt S d. kleinsten Querschnitts d. contrahierten Strahls, in welchem also d. Geschw. = d. mittleren Ausflußgeschw. u zu setzen ist. Nun können d. verschiedenen in S ausfließenden Wasserteilchen von ganz verschiedenen Stellen d. Oberfl. herkommen z. B. von A_0, d. d. Weg, den d. Wasserteilchen einschlägt, ist ganz von d. Gestalt d. Gefäßes abhängig. Es kann daher von vornherein möglich erscheinen, daß d. Geschw. u verschieden ist, je nachdem von welchem Punkt A_0 d. Wasserteilchen herkommt. Für diesen Fall ist d. früheren zu setzen M = d. Höhe d. Punktes über S $+ \frac{f}{g} S'$ also:

$$M = z - \frac{f}{g} S'$$ wenn $-S'$ d. Projektion d. Strecke $A_0 S$ auf d. Richtung von f vorstellt. Die Projektion $-S'$ d. Richtung $S A_0$ auf f ist offenbar auch = d. Projektion d. gebrochenen Linie xyz auf f, wenn xyz d. Coord. von A_0 vorstellen, also: $-S' = x\cos\psi + z\sin\psi$.

Also $M = \frac{f}{g}(x\cos\psi + z\sin\psi) + z$. Aus d. obigen Gl. für z ergibt sich, wenn man sie mit $g + f\sin\psi$ multipliziert: $f(x\cos\psi + z\sin\psi) = (g + f\sin\psi)h_0 - gz$. Dieses in M eingesetzt gibt: $M = (1 + \frac{f}{g}\sin\psi)h_0$

Hieraus sind nun d. Coord. von A verschwunden, M hat also denselben Wert, wo auch d. Punkt A_0 in d. freien Oberfl. liegen mag. Setzt man diesen Ausdruck in d. Gl. für $\frac{u^2}{2g}$ …, so ergibt sich, wenn durch Hinzufügung eines Geschw.-Coeff. auf d. Contr.-Widerstand Rücksicht genommen wird:

$$u = \varphi\sqrt{2gH_0} \quad \text{wo} \quad H_0 = \left(1 + \frac{f}{g}\sin\psi\right)h_0 + \frac{p_0 - p}{\gamma} \text{ ist.}$$

Hat man hiernach u gefunden, so ist schließlich d. pr. Sek. ausfließende Wasservolumen: $V = \delta u = \alpha A u$. —

Nun kommt es noch darauf an, die in diesen Formeln empirisch zu bestimmenden Erfahrungscoeff. näher zu besprechen. Dieselben sind: d. Contractionscoeff. α, d. Geschw.-Coeff. φ, d. Ausflußcoeff. μ und d. Widerstandscoeff. ζ. Diese 4 stehen bekanntlich in 2 Beziehungen zu einander:

$$\mu = \alpha\varphi \qquad \text{und} \qquad \varphi^2(1 + \zeta) = 1.$$

Folglich braucht man nur 2 wirklich bestimmt zu haben, so kennt man auch d. beiden andern. Allerdings können nicht beliebig 2 bestimmt werden, sondern es muß einer d. Coeff. μ u. α in Verbindung mit einem von φ u. ζ bestimmt werden. Man wird natürlich d. dafür zu führenden Versuche so einfach wie irgend möglich einrichten. Zunächst wird man sich hierbei beschränken auf d. Fall, daß d. Gefäß sich in Ruhe befindet, daß also d. Wasser eine horizontale freie Oberfl. bildet. Ferner wird man d. Ausflußgefäß so wählen, daß d. Oberfl. d. Wassers im Gefäß sehr groß ist im Vergleich mit d. Mündungsfläche, so daß man dann u_0 im Vergleich zu u vernachlässigen kann. Drittens wird man d. Versuche so einrichten, daß d. ganze Versuchsapparat ringsum von d. atm. Luft umgeben ist, so daß $p_0 = p$ gesetzt werden kann. Somit kann dann auch für d. mittlere Ausflußgeschw. u und für d. pr. Sek. ausfließende Wasservolumen V d. folgenden Formeln zu Grunde gelegt werden:

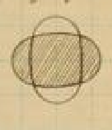
$$u = \varphi\sqrt{2gh} \qquad \text{und} \qquad V = \mu A\sqrt{2gh}.$$

wobei h im Falle d. Ausflusses in d. freie Luft d. Höhe d. horizontalen freien Oberfl. d. Wassers im Gefäß über d. Schwerpunkt d. Mündungsfläche vorstellen. — Im Falle d. Ausflusses in ein anderes Gefäß ist h die Höhendifferenz d. beiden Wasserspiegel in d. beiden Gefäßen. Ferner sind φ und μ davon abhängig, daß möglicherweise d. Schwerpunkt d. Mündung A nicht in gleicher Höhe mit d. Schwerpunkt d. kleinsten Querschnitts d. contrahierten Strahls liegt, ferner sind sie davon abhängig, daß d. Geschw. im kleinsten Querschnitt d. contrahierten Strahls nicht identisch ist mit d. mittleren Geschw. d. Querschnitts δ. Geschieht d. Ausfluß unter Wasser, so

ist d. Differenz d. Höhen d. obern u. untern Wasserspiegels über jeden Punkt von F gleich groß, also nur wenn es sich um d. Ausfließen i. d. freie Luft handelt, findet in F und μ nicht diese Höhe statt.
Am einfachsten ist nun dieser Coefficient d. Ausflußcoeff. μ zu bestimmen. Dazu ist weiter nichts erforderlich, als daß man d. in einer gewissen Zeit ausgeflossene Wassermenge zu messen; indem dividiert durch d. verflossene Sekundenanzahl erhält man V und dann mit Hilfe d. Formel $V = \mu A \sqrt{2gh}$
od. $\mu = \frac{V}{A\sqrt{2gh}}$ d. Ausflußcoeff. μ, da d. andern Größen A, g, h bekannt sind. —

Ungleich schwieriger ist schon d. Bestimmung d. Contractionscoeff. α. Diesen hat man für verschiedene Fälle gefunden durch direkte Messungen. Es geschah dies auf d. Weise, daß man d. Strahl durch einen Ring hindurchfließen ließ, welcher mit möglichst vielen feinen Schrauben versehen war, die alle radial gerichtet waren, also von verschiedenen Seiten durch d. Ring hindurch d. Strahl entgegen schrauben

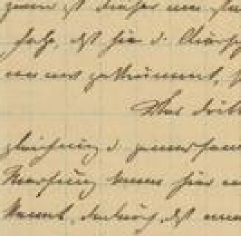
konnte. Man schraubte nun alle Schrauben so lange vor, bis sie gerade d. Strahl rührten und konnte so dann d. Strahlenquerschnitt sehr genau bestimmen. Indem man diesen Ring verschob und weiter führte, fand man allmälig d. Größe und Gestalt und Ort d. kleinsten Querschnitts d. contrahierten Strahls. Es wurden übrigens diese Versuche erschwert, wenn d. Mündung nicht kreisförmig ist durch d. Umstand, daß d. Querschnittsänderung d. Strahls nicht nur eine Änderung d. Größe sondern auch d. Gestalt mit in sich schließt. Der allgemeine Charakter dieser Gestaltänderung besteht in einer periodisch wiederkehrenden solchen Umänderung, wobei an d. Stelle d. stärksten Krümmung d. Querschnittsumfangs d. Stelle d. schwächsten Krümmung tritt und umgekehrt. Also z. B.: wenn d. Querschnitt d. Form einer gestreckten Ellipse hat, so findet man, daß in einiger Entfernung von d. Mündung dieser Querschnitt sich gerade um 90°



gedreht hat u. s. f. Wenn d. Querschnitt d. Quadratform hat, so findet man, daß d. Stellen, wo d. Ecken liegen in einiger Entfernung von d. Mündungsebene abgestumpft erscheinen durch gebogene Seiten u. in noch größerer Entfernung von d. Mündungsebene hat sich d. Gestalt umgedreht. Diesen periodischen Gestaltsänderungen entsprechen auch periodische Zustandsänderungen bis schließlich d. ganze Wasserstrahl zerstäubt. Diese Erscheinungen lassen erkennen,

daß d. gemeinschaftliche Lauf d. Wasserteilchen bestimmt wird von einer [illegible] Last. Dieselbe wirkt zunächst ohne Zweifel so von d. seitlichen Zufluß d. Wassers innerhalb d. Gefäßes zur Mündung u. d. dadurch bedingten Geschwindigkeit d. Punkte im Querschnitt. Jedenfalls spielen hierbei d. Molekularkräfte auch eine große Rolle. Bekanntlich ist d. Molekularbeschaffenheit d. Wassers im Innern eine wesentlich andere als an d. Oberfl. und zwar lassen sich d. betreffenden Molekularerscheinungen erkennen, wenn man annimmt, daß in d. Oberfl. nach allen Richtungen eine gewisse Sp. stattfindet; wenn dieselbe d. Fall ist, so wird an einer solchen Stelle, wo d. Oberfl. d. Wassers nach außen convex gekrümmt ist durch diese Sp. eine einwärts gerichtete Capillardruck erzeugt und zwar ist dieser am stärksten dort, wo d. Oberfl. am stärksten gekrümmt ist, und dieser hat wesentlich zur Folge, daß sich d. Querschnitt sich zusammen ziehen will. Ist an irgend einer Stelle d. Oberfl. nach außen concav gekrümmt, so ist d. Capillardruck auch nach außen gerichtet. —

Was drittens d. Bestimmung d. Geschw.-Coeff. φ betrifft, so kann dieselbe geschehen durch Vergleichung d. gemessenen Ausflußgeschw. mit d. theoretischen. Bei einer direkten unmittelbaren Messung kann sie nicht d. Rede sein. Dieselbe kann nur gemessen werden, wenn man d. Richtung von u kennt, deshalb, daß man irgend eine Reihe zusammengehöriger Coord. d. Mittellinie d. Wasserstrahls misst od. besser, wenn man d. Richtung nicht kennt, so findet man d. Größe und Richtung von u zugleich, indem man d. Coord. für 2 Punkte d. Wasserstrahls beobachtet. Wie aus solchen Messungen d. Geschw.-Coeff. gefunden werden kann ist leicht ersichtlich. Angenommen es sei S ein Punkt d. Schwerpunkt d. kleinsten Querschnitts d. contrahierten Strahls, durch diesen Punkt S seien 2



d. rechtwinklige Axen gelegt und zwar in derjenigen Verticalebene, in welcher d. Richtungslinie d. Ausflußgeschw. u liegt. d. X Axe sei horizontal, d. Y Axe sei vertical und d. Ausflußgeschw. $= u$, welche mit d. X Axe d. Winkel φ bilde. Vorausgesetzt ist nun, daß weder u noch φ bekannt sind, dieselben sollen vielmehr für einen bestimmten Fall gefunden werden.

Die Mittellinie d. ausfließenden Wasserstrahls bildet eine Curve, welche in d. Nähe von S' mit genügender Annäherung als Parabel betrachtet werden kann. Angenommen es seien x u. y d. zusammengehörigen Coord. irgend eines beliebigen Punktes dieser Mittellinie und t d. Zeit in Sek., welche ein Wassertheilchen ~~braucht~~ um von S' hierher zu gelangen, dann ist:

$$y = u \sin\psi\, t + g\frac{t^2}{2}$$ wo $u \sin\psi$ d. Verticalcomp. d. Anfangsgeschw. in S' ist, ferner ist

$$x = u \cos\psi\, t$$ also $$t = \frac{x}{u\cos\psi}$$ und daraus $$y = x\,\mathrm{tg}\,\psi + \frac{g}{2u^2}\,\frac{x^2}{\cos^2\psi}.$$

Vermittelst dieser Gl. kann man, wenn man 2 Paar zusammengehörige Werthe von Coord. nebst $x_1\,y_1$ u. $x_2\,y_2$ hat, so 2 Gl. bilden um u und ψ zu bestimmen. Entwickelt man aus dieser Gl. u, so erhält man:

$$u = x\sqrt{\frac{g}{2}\,\frac{1+\mathrm{tg}^2\psi}{y - x\,\mathrm{tg}\,\psi}}$$

Es seien nun $x_1\,y_1$ und $x_2\,y_2$ d. zusammengehörigen Coord. irgend 2er Punkte d. Mittellinie, d. durch Versuche bestimmt sind, so ist weiters:

$$\frac{y_1 - x_1\,\mathrm{tg}\,\psi}{y_2 - x_2\,\mathrm{tg}\,\psi} = \frac{x_1^2}{x_2^2}$$ also $$\mathrm{tg}\,\psi = \frac{x_2^2 y_1 - x_1^2 y_2}{x_1 x_2 (x_2 - x_1)}$$

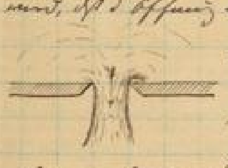
Hat man nun so d. Winkel ψ gefunden, so kann man auch nach obiger Gl. u berechnen. Vergleicht man diesen Werth mit d. Gl.: $u = \varphi\sqrt{2gh}$, so findet man d. Geschw.-Coeff. φ. — Richtet man sich nun noch so ein, daß $\psi = 0$ ist, so ist einfach:

$$u = x\sqrt{\frac{g}{2y}}$$

dann braucht man nur x u. y irgend eines Punktes d. Mittellinie zu messen, indessen ist es vorzuziehen, sich nicht auf diesen Werth von ψ willkürlich zu verlassen, sondern lieber 2 Punkte zu messen und daraus ψ berechnen und daraus u bestimmen und somit φ. —

Alle daraus angepaßten Werthe gelten, wenn d. Gegentheil nicht ausdrücklich bemerkt ist, für d. Fall d. Ausflußes d. Wassers in d. freie Luft. —

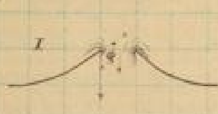
Bei denjenigen Coeff. die sich auf d. Ausfluß aus Mündungen unmittelbar beziehen, also aus Öffnungen in d. Gefäßwand, ist ferner eine sogenannte Mündung vorausgesetzt, welche dadurch hergestellt wird, daß d. Öffnung der Gefäßwand nach außen hin konisch abgeschrägt ist z.B. wenn d. Boden eine ansehnliche Dicke hat, so wird d. Rand d. Mündung wie nebenstehend abgeschrägt, so daß d. Wasserstrahl nur an d. scharfen ~~Kanten~~ vorbeifließt. d. Ausflußcoeff. $\mu = \alpha\varphi$ ist, wenn es sich um d. Ausfluß aus Mündungen in ebenen Wand handelt, bei welchen vorwiegend bedingt durch d. Contractionscoeff. α indem d. Geschw.-Coeff. φ sehr wenig d. Einheit sich nähert.



Handelt es sich dagegen um d. Ausfluß aus Mundstücken, so kann d. Ausflußcoeff. μ vorwiegend durch d. Geschw.-Coeff. φ bestimmt sein, denn kann sogar $\alpha = 1$ und $\mu = \varphi$ sein, besonders im Falle eines zylindrischen Ansatzrohres. Wenn indessen in solchen Fällen d. Ausflußcoeff. merklich kleiner als 1 ist, so wird er merklich bedingt durch eine innere Contraction. Ist ein solches Mundstück ziemlich scharfkantig, so erfährt d. Wasser im Innern eine Contraction, und dadurch ist dann d. früheren zufolge ein Geschw.-Verlust d. Folge, d. Ausflußcoeff. ist dann also durch eine innere Contraction bedingt. In allen Fällen ist es also ein Wesentliches d. äußere und innere Contraction welche d. Ausflußcoeff. so bestimmt und man gewisse Fälle zu unterscheiden.

Es ist von vornherein klar, daß d. Contraction um so bedeutender ist, also α um so kleiner, je größer d. Winkel δ ist, um welchen d. vom Rand d. Mündung zufließenden Wassertheilchen von ihrer Bew.-Richtung abgelenkt werden müssen, um d. kleinsten Querschnitt zu durchströmen. Ist z.B. d. Boden d. Gefäßes wie in Fig. I gestaltet, so wird d. Winkel, um welchen d. in d. Nähe d. Randes ankommenden Wassertheilchen abgelenkt werden müssen ein spitzer Winkel und in Fig. II ein stumpfer Winkel. Im ersten Fall wird offenbar eine beträchtlichere Contraction stattfinden als im 2ten Fall. —

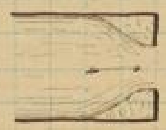
I



II

In dieser Beziehung ist derjenige Fall als ein mittlerer Normal zu betrachten, wo dieser Ablenkungswinkel $\delta = 90°$ beträgt. Für diesen Fall gilt d. Contraction als

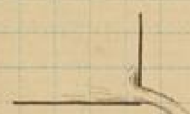
~~normale Contraction d.~~ normale Contraction bezeichnet werden. Ist aber β kleiner od. größer als 90° ist, soll d. Contraction eine geschwächte od. verstärkte Contraction genannt werden. Eine Änderung d. Contraction kann auch dann stattfinden, wenn d. Mündung sich in einer ebenen Wand befindet, welche nicht sehr groß ist im Vergleich mit d. Mündung selbst. Ist z. B.



eine weite cylindrische Röhre eines Ausflussgefäßes an ihrem Ende durch eine ebene Wand abgeschlossen, in welcher sich eine Öffnung befindet, die nicht sehr klein ist im Vergleich mit d. Größe d. Schlusswand. Dann entsteht um diese Mündung herum ein gewisser ringförmiger Raum, in welchem d. Wasser nicht Theil nimmt an d. strömenden Bew., es [illegible] sich dann [illegible] zwischen d. strömenden und an Winkel begrenzten Wasserfäden d. Grenze d. Gefäßes an; also ist β kleiner als 90°. Die Contraction nennt man in diesem Falle eine ~~unvollkommene~~ unvollkommene Contraction. D. Fall d. Normalcontraction, wobei d. Mündung sich in einer verhältnißmäßig großen Wand befindet, wird als vollkommene Contraction bezeichnet. —

Bei diesen Begriffsbestimmungen bezüglich d. Charakters d. Contractionen ist vorausgesetzt, daß d. Winkel β, um den d. am Rand zufließenden Wasserfäden abgelenkt werden müssen, ringsum gleich groß sei, also nicht wesentlich verschieden sei, und welcher β d. Mittelwerth aller dieser Wasserfäden ist. Es kann aber auch d. Fall sein, daß dieser Winkel β an verschiedenen Stellen d. Mündungsumfangs bedeutend verschieden ist. Es kann unter Umständen an einem Theile d. Mündungsumfangs eine normale, an einem anderen Theile eine merklich geschwächte od. verstärkte Contraction stattfinden, namentlich dann, wenn d. Mündung d. Rande d. betreffenden Wand, in d. sie sich befindet, sehr nahe liegt. Wenn z. B. in d. verticalen Seitenwand eines Ausflussreservoirs eine rechteckige

Mündung nahe über d. Boden sich befindet, während d. Wasser hoch über d. oberen Rand d. Mündung steht, so ist am oberen Rand d. Mündung d. Contraction als eine vollkommene normale zu bezeichnen, am unteren Rand findet jedoch eine geschwächte Contraction statt, da in d. Höhe d. Wasser sich in winkelförmiger Lage befindet. Hierbei ist namentlich d. Fall bemerkenswerth, daß an einem Theile d. Mündungsumfangs d. Contraction ganz aufgehoben



ist, also $\beta = 0$ ist. Dies findet dann statt, wenn d. rechteckige Mündung sich unten ganz bis zum Boden erstreckt, d. unteren Wasserfäden fließen dann gerade normal d. Mündung zu. In einem solchen Falle, wo an einem Theile d. Mündung d. Contraction gänzlich aufgehoben ist, pflegt man d. Gesammtcontraction als eine partielle zu bezeichnen. —

Bevor wir nun zur Besprechung d. einzelnen Fälle übergehen, wollen wir vorher ein Paar allgemeine Gesetze betrachten, d. sich aus d. verschiedenen Versuchen ergeben haben. Es hat sich zunächst als ein ganz allgemein gültiges Gesetz gezeigt, daß wenn je vorwiegend durch d. äußere od. innere Contraction bedingt ist, daß dann je um so größer wird, je kleiner d. Mündung und ~~[illegible]~~ je kleiner d. wirksame Druckhöhe ist. — Ferner hat sich sehr allgemein herausgestellt, daß bei Mündungen in ebenen Wänden, (die sich also unmittelbar in d. Gefäßwand befinden, wenn sie eine längliche Form haben, d. Ausflusscoeff. größer ist als unter übrigens gleichen Umständen d. h. für gleiche Werthe von A u. H für d. Fall solcher Mündungsformen, d. sich d. Kreisform nähern. Bei solchen länglichen Mündungen ist es gewissermaßen nur d. kleine Dimension, die den Ausflusscoeff. bedingt, denn mit dieser kleineren ~~Dimension~~ Dimension nimmt zu d. Ausflusscoeff. zu. Endlich hat sich aus d. allerdings verhältnißmäßig wenig zahlreichen Versuchen, d. namentlich von Weisbach für d. Ausfluss unter Wasser angestellt sind, ergeben, daß d. Ausflusscoeff. durch eine Mündung zwischen 2 Wasserreservoiren um etwas mehr als 1% größer ist, als beim Ausfluss in d. freie Luft. —

Ausfluss d. Wassers aus Mündungen im engeren Sinn.

1) **Kreisförmige Mündung.** Offenbar läßt d. Ausfluß d. Wassers aus einer solchen kreisförmigen Mündung [illegible] d. einfachste und deutlichste Gesetzmäßigkeit erkennen und es haben sich daher auch mit Recht diesem Fall hauptsächlich d. Versuche zugewandt.

Es sei nun zunächst d. Contraction normal, also Mündung in einer ebenen Wand und [illegible] in einem mittleren Theile [illegible] d. Wand viel größer als d. Mündung ist. Für diesen Fall ist wiederholt und übereinstimmend constatirt worden, daß d. Ausflußcoeff. um so größer ist, je kleiner d. Durchmesser d. Mündung und je kleiner d. wirksame Druckhöhe ist, entsprechend d. vorhin entwickelten allgemeinen Gesetz. Insbesondere fand Weisbach für:

	d =	0,01	0,02	0,03	0,04 metr
und $H = 0{,}25\,m$	μ =	0,637	0,629	0,622	0,614
u. $H = 0{,}6\,m$	μ =	0,628	0,621	0,614	0,607

ferner für $d = 0{,}01$ metr ergab sich:

für H =	0,02	0,101	0,909	13,57	103,58 metr.
μ =	0,711	0,665	0,641	0,632	0,600

Alle diese Weisbach'schen Versuchswerte lassen sich annähernd in d. folgenden empirischen Formel zusammenfassen, welche freilich d. letzte Versuchswert [illegible] nicht mit d. ersten übereinstimmend. d. Formel lautet:

$$\mu = 0{,}6 + \frac{0{,}06}{0{,}5 + \sqrt{H}} - 0{,}7\,d \qquad (d \text{ u. } H \text{ in metre.})$$

Diese Versuche beziehen sich nun auf d. Ausflußcoeff. μ, welcher aber bekanntlich aus d. beiden andern Coeff. α u. φ entsteht. Was nun d. Contraction des aus einer solchen kreisförmigen Öffnung ausfließenden Strahls betrifft, so haben wiederholte Strahlmessungen ergeben, daß derselbe seinen kleinsten Querschnitt in einer Entfernung von d. Mündungsebene = d. Halbmesser d. Mündung und es ergibt sich bereits im Durchschnitt dieser kleinste Durchmesser = 0,8 d. Mündungsdurchmessers d, so daß somit d. entsprechende Contractionscoeff. ist:

$$\alpha = 0{,}64.$$

Was d. Geschw.-Coeff. φ betrifft, so zeigt derselbe sich weniger differirend für verschiedene Fälle, namentlich für mittlere Druckhöhen und Mündungsweiten ist:

$$\varphi = 0{,}97 \text{ bis } 0{,}98$$

Widerstandscoeff.:

$$\zeta = \frac{1}{\varphi^2} - 1 = 0{,}063 \text{ bis } 0{,}041.$$

und demgemäß d. [illegible] gehen also 4 bis 6 % d. lebendigen Kraft, womit d. Wasser ausfließt, durch d. gewöhnlichen Widerstände verloren. Was d. Art d. [illegible] Veränderlichkeit dieses Coeff. φ betrifft, so hat sich diese in so ferne [illegible] ergeben, als d. Geschw.-Coeff. μ um so größer wird, je größer H ist. [illegible] d. Ausflußcoeff. μ mit wachsender Druckhöhe abnimmt, so muß man annehmen, daß d. Contractionscoeff. α mit wachsender Druckhöhe in noch stärkerem Grade abnimmt als d. Ausflußcoeff. μ. Was in diesem Fall einer kreisförmigen Mündung d. [illegible] od. verstärkte Contraction betrifft, so sind darüber namentlich auch von Weisbach eingehende Versuche angestellt worden, bei denen d. Winkel ϑ zwischen 0° und 180° variirt wurde; indem d. innere Wand [illegible] mit [illegible] Ansätzen versehen wurde, welche jedoch nicht scharfkantig, sondern mit allmähligen Abrundungen in d. Gefäßwand übergeführt wurden, [illegible] ausgeführt wurden. Es wurde gefunden für $d = 0{,}02\,m$, ferner für $H = 0{,}2$ bis $3\,m$ und für $\vartheta = 0°$, 90° u. 180° entsprechend $\mu = 0{,}966$, 0,632 u. 0,541.

d. Werth von μ für $\delta = 90°$ entspricht sehr nahe d. oben angeführten empirischen Formel, wenn man $\alpha = 0{,}02$ setzt, man bekommt dann genau $\mu = 0{,}632$ für $H = 0{,}9$ m. [illegible] auf d. Mittelwerth zwischen 0,3 u. 3 m, d. [illegible] Versuchen [illegible]. Ist d. Winkel $\delta = 0$, so findet eine Contraction nicht statt, dann ist d. Ausflusscoeff. ein blosser Geschw.-Coeff. Nimmt man an, d. Coeff. sei in d. letzten 3 Fällen immer derselbe gewesen und zwar $= \mu = 0{,}966$, so würde für d. Fall einer inneren cylindrischen Ansatzröhre d. Contractionscoeff.

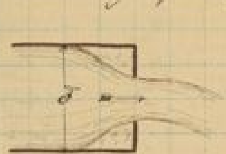
$$\alpha = \frac{0{,}541}{0{,}966} = 0{,}56.$$

Nach einer früheren Untersuchung hatte sich ergeben, dass [illegible] d. Contractionscoeff. $\alpha = \frac{1}{2}$ [illegible] in einem solchen Fall d. [illegible]. Dieses Resultat ist also mit d. Theoretischen in ganz guter Übereinstimmung, da d. [illegible] nicht unendl. klein ist und es lässt sich erwarten, dass wenn d. Grenze $\alpha = \frac{1}{2}$ nahezu erreicht werden wird, wenn d. [illegible] grösser und d. Druckhöhe grösser ist. Es fand z. B. Borda für diesen Fall $\mu = 0{,}515$ und dementsprechend $\alpha = 0{,}53$. d. Geschw.-Coeff. zeigt sich übrigens abhängig von d. Druckhöhe und zwar in d. Weise, dass derselbe mit zunehmender Druckhöhe wächst. [illegible] Versuchen bez. d. Druckhöhe zwischen mässigen Grenzen, zwischen welchen μ im Falle $\delta = 0$, μ von 0,96 bis 0,98 variirt wurde; bei sehr bedeutenden Druckhöhen kann [illegible] d. Geschw.-Coeff. wachsen bis zu 0,99.

[illegible] μ_0 d. Werth $\delta = 90°$, so ist nach Zeuner zu setzen:

$$\frac{\mu}{\mu_0} = 1 + 0{,}33214 \cos^2\delta + 0{,}16672 \cos^4\delta.$$

Was endlich für d. Fall einer kreisförmigen Mündung d. unvollkommenen Contraction betrifft, also für d. Fall, dass d. Mündung A sich in einer nicht sehr grossen ebenen Wand im Gefäss [illegible] befindet, so ist auch darüber eine [illegible] Versuche angestellt worden. Es befand sich dabei d. Mündung in einer ebenen Wand von [illegible] cylindrisch gestalteten Gefässes, sei $\frac{A}{F}$ d. Verhältniss d. Mündungsgrösse zur Grösse d. ebenen Wand $= v$, also: $\frac{A}{F} = v$, so lassen sich d. [illegible] Werthe zusammenfassen in d. Formel:



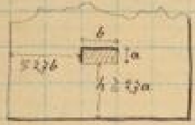
$$\mu = \mu_0\left(1 + 0{,}04564\left(14{,}821^{v} - 1\right)\right).$$

Bei diesen Versuchen war d. Wand, in d. sich d. kreisförmige Mündung befand, [illegible] kreisförmig und zwar befand sich d. Mündung genau in d. Mitte. [illegible] d. Mündung [illegible] mit d. Mitte [illegible], od. wenn d. Wand, in der d. Mündung sich befindet, nicht ganz kreisförmig ist, so werden d. Werthe von μ sich nicht bedeutend ändern, sobald nicht d. Mündung ganz dicht an d. Rand rückt. Über diesen besonderen Fall d. partiellen Contraction liegen auch einige Versuche vor, da dieselben aber keine [illegible] haben, so soll hier auch davon abgesehen werden. —

2) Rechteckige Mündung.

Was zunächst d. Ausfluss d. Wassers aus rechteckigen Mündungen in einer ebenen verticalen Wand eines Gefässes betrifft, so [illegible] d. Mündungsseiten horizontal und vertical sind, so sind darüber d. umfassendsten Versuche in Metz angestellt worden in d. Jahren 1828 – 29 von [illegible] und Lesbros und später von 1829 – 34 von Lesbros allein. d. [illegible] Versuche bezogen sich auf d. Fundamentalfall, nämlich auf d. vollständige und [illegible] Contraction in d. freien Luft. Es befand sich d. rechteckige Mündung in einer verticalen rechteckigen Seitenwand und zwar in einer mittleren Stelle, so dass also d. Fall einer vollständigen Contraction vorlag. d. Wände schlossen alle Seiten d. Mündung zu, um d. Mündungsebene normal zu [illegible]. d. rechteckigen Mündungen hatten durchweg eine gleiche Breite von 20 ctm und d. Höhen wurden variirt zwischen 1 bis 20 ctm. d. Überfallhöhen betrugen bis 1,8 m und zwar unter d. ebenen Wand d. rechteckigen Mündung gemessen. d. später von Lesbros allein angestellten Versuche waren noch sehr viel umfangreicher und bezogen sich auch [illegible] Fälle.

Was zunächst d. Fall d. Contractionsverhältnisse mit einer rechteckigen Mündung betrifft, so wurde angedeutet, daß d. Contraction nicht normal beeinflußt werden kann, wenn nur d. Entfernung d. unteren Kante d. rechteckigen Mündung mehr beträgt als 2,7 a wobei a d. Höhe d. Mündung vorstellt, und wenn nur d. Entfernung d. beiden Seitenwände d. Mündung von d. Rändern d. Wand mehr beträgt als 2,7 b wobei b d. Breite d. Mündung vorstellt.

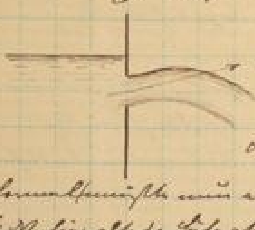


Wird diese Grenze erreicht, so hat eine weitere Vergrößerung dieser Entfernungen keinen weiteren Einfluß auf d. Ausflußcoeff. zur Folge. Die Tabellen über μ befinden sich in „Grashof's theoretische Maschinenlehre". Dieselbe ist geordnet in d. einen Richtung nach d. verschiedenen Werthen von a und zwar für a = 0,01, 0,02, 0,03, 0,05, 0,1 und 0,2 metr., nach d. anderen Richtung ist sie geordnet nach d. Werthen von h_2, wo h_2 d. Höhe d. oberen Wasserspiegels über d. Oberkante d. Mündung ist. Dabei ist noch auf einen Umstand aufmerksam zu machen: Wenn d. Höhe h_2 nicht sehr groß ist, so erfährt d. Wasserspiegel gegen d. betreffende Ausflußkante d. Gefäßes hin eine merkliche Senkung, es ist deshalb nicht gleichgültig, an welcher Stelle h_2 gemessen wird. In d. Tabelle ist vorausgesetzt, daß h_2 dort gemessen ist, wo d. freie Oberfl. noch nicht eine merkliche Senkung erlitten hat. Würde diese Höhe h_2 bei d. Anwendungen direkt an d. Kante gemessen und dadurch entsprechend kleiner gefunden, so müßte d. Ausflußcoeff. entsprechend vergrößert werden, denn d. Werthe von μ, um die es sich handelt, beziehen sich alle auf d. Formel: $V = \mu A \sqrt{2gh}$ wobei h d. Höhe d. Wasseroberfl. über d. Schwerpunkt d. Mündung vorstellen, also $h = h_2 + \frac{a}{2}$. Würde man dieses h direkt bei d. Mündung gemessen, so müßte μ entsprechend größer sein. Dieser Umstand macht sich bemerklich in d. Tabellenwerthen von μ, so lange h_2 nicht größer als 0,2 m geworden ist; ist h > 0,2 so ist dies nicht mehr wesentlich. —

Wenn man d. fragliche Tabelle näher betrachtet, so findet man im Allgemeinen bestätigt d. frühere Gesetz, daß d. Ausflußcoeff. um so größer wird, je kleiner d. Mündung und Druckhöhe ist. Es sind in d. Tabelle in d. Horizontalreihe d. Werthe von a von links nach rechts wachsend angeordnet, h_2 von oben nach unten wachsend, d. Werthe von h_2 gehen von 0,01 m bis zu 3 m., wobei d. Werthe von 0,0 1,5 bis 3 m nicht gemessen sondern geschätzt sind. Es stehen also d. größten Werthe von μ links oben und d. kleinsten rechts unten stehen, welches auch in d. That im Allgemeinen d. Fall ist. Nur wenn man für d. größeren Werthe von a d. Verticalreihe heruntergeht, so findet man keine stetige Abnahme von μ, sondern zunächst nimmt μ zu bis zu einem max. und erst nachher nimmt es stetig ab. Die Ursache liegt jedenfalls darin, daß in d. Formel $V = \mu A \sqrt{2gh}$ d. Coeff. μ eine zusammengesetzte Bedeutung hat, da in μ auch d. Einfluß d. früher besprochenen Correctionsfactors 1 – f enthalten ist, welche bekanntlich für eine rechteckige Mündung in einer verticalen Wand d. Bedeutung hatte:

$$1 - f = 1 - \frac{1}{96}\left(\frac{a}{h}\right)^2 \text{ also hier: } = 1 - \frac{1}{96}\left(\frac{a}{h_2 + \frac{a}{2}}\right)^2.$$

Dieser Correctionsfactor ist in μ mit hineingezogen worden und daher rühren dann auch d. obigen Abweichungen, denn es ist dieser Correctionsfactor um so mehr von d. Einheit verschieden, d. h. um so kleiner je größer a und je kleiner h ist, es muß also namentlich bei d. großen Werthen von a und d. kleinen von h_2, dieser Correctionsfactor mitwirken, daß sich ein entsprechend kleinerer Werth von μ ergibt, als es d. Fall wäre, wenn dieser Correctionsfactor nicht mit eingerechnet würde. — Es kann auch noch ein anderer Umstand dabei in Betracht kommen; wenn nämlich h_2 sehr klein ist, so fließt d. Wasser d. rechteckigen Mündung im höheren Grade von unteren Rande als vom oberen zu, es findet also am unteren Rande eine geringere Ablenkung d. seitlichen Wasserfäden als am oberen statt, d. Folge ist, daß d. ganze Wasserstrahl etwas nach oben abgelenkt wird; es kann also d. Fall sein, daß d. Schwerpunkt d. kleinsten Querschnitts d. contrahirten Strahls etwas höher liegt, als d. Schwerpunkt d. Mündung A.



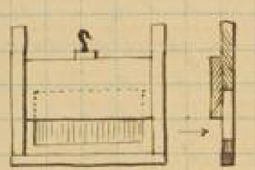
In d. Ausflußformel müßte man eigentlich h gleich gesetzt werden d. Höhe d. Oberfl. über d. Schwerpunkt von δ, so daß hier also d. Höhe etwas zu groß gesetzt worden ist und μ etwas zu klein gefunden werden mußte.

Nach d. Versuchen von Lesbros ist d. Ausflußcoeff. vorwiegend abhängig von d. kleineren Dimension d. rechteckigen Mündung, einerlei ob dies d. Breite od. d. Höhe ist, und zwar in d. Weise, daß bei gleichen Werthen von h und bei gleicher Grösse dieser kleinen Dimension d. Mündung, d. Ausflusscoeff. sich nicht wesentlich ändert, wenn d. Verhältniss von Höhe u. Breite zwischen 1 u. 20 variirt. Mit Rücksicht auf diesen Umstand können also auch d. Zahlen d. vorstehenden Tabelle, obgleich sie sich alle nur auf d. nämliche Breite d. Mündung beziehen, doch auch angewandt werden für andere Fälle, wo diese Breite erheblich grösser ist, so ferne sie nur nicht mehr als d. 20fache d. Höhe beträgt. —

Was d. Geschw.-Coeff. betrifft, so ist auch dieser von Lesbros bei verschiedenen Versuchen ermittelt worden, und es hat sich ergeben, dass derselbe wenig verschieden ist von d. Geschw.-Coeff. φ betreffend d. Ausflüsse aus kreisförmigen Mündungen, es ergab sich nämlich:

$$\varphi = 0{,}97.$$

Bei diesen Fundamentalversuchen war immer sorgfältig d. Ausfluss in einer sogenannten dünnen Wand hergestellt, so dass d. innere Rand eine scharfe Kante bildete. Bei d. technischen Ausführungen findet man im Allgemeinen ein solchen idealen Fall nicht statt, sondern es pflegen d. betreffenden rechteckigen Mündungen unmittelbar in d. Gefäss eingeschnitten zu sein. Unter diesen Umständen findet d. Wasserstrahl Gelegenheit, sich an diese Umfassungsfläche d. Öffnung mehr od. weniger anzuschliessen. Im Allgemeinen wird dadurch d. Widerstand zwar etwas vergrössert, also d. Geschw.-Coeff. etwas verkleinert, dagegen wird d. Contraction vermindert, also d. Contractionscoeff. vergrössert und zwar wird erfahrungsmässig d. Contractions-Coeff. mehr vergrössert als d. Geschw.-Coeff. verkleinert, so dass d. Product aus beiden eine Vergrösserung aufweist. Ist dies namentlich d. Fall beim Ausfluss d. Wassers durch rechteckige Schützenöffnungen. Es pflegt ein Schützbrett mehr od. weniger aufgezogen zu sein, so dass d. Wasser nur durch d. rechteckige Öffnung unter d. Schützbrett fliesst. Ein solches Brett muss nun sicher geführt werden durch Führungsleisten, welche eine gewisse Einfassung für diese rechteckige Mündung bilden. Stehen diese Führungsleisten etwas vorwärts, wird an d. beiden Seiten d. Contraction gehemmt; ebenso kann sich auch unten eine Leiste befinden, um d. Schützbrett beim Zuschliessen Widerlager eine Stütze zu gewähren, so dass auch am unteren Rand d. Mündung eine solche Hemmung d. Contraction stattfindet. d. verschiedenen Modificationen wie sie für diese Fälle sind, wurden von Lesbros speciell geprüft werden, deren Resultate im Grashof zusammengestellt sind. —



Gehen wir nun über zu d. Fall einer unvollkommenen Contraction, wobei also $n = \frac{A}{F}$ nicht sehr klein ist. Für diesen Fall hat Weisbach Versuche angestellt und folgende Formel gefunden:

$$\mu = \mu_0 \left[1 + 0{,}076 (9^n - 1)\right]$$

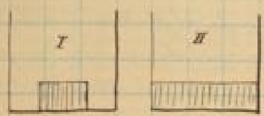
wenn μ_0 d. Ausflusscoeff. unter übrigens gleichen Umständen im Falle einer vollkommenen Contraction bedeutet.

Ferner ist bei d. Ausfluss d. Wassers aus rechteckigen Mündungen d. partielle Contraction beachtenswerth. Solche Versuche wurden von Bidone mit quadratischen Mündungen und von Weisbach mit Mündungen, d. 0,1 m Höhe und 0,2 m Breite hatten, angestellt. Nach Weisbach ist:

$$\mu = \mu_0 (1 + 0{,}155 p)$$

unter p d. verhältnissmässige Grösse desjenigen Theils d. Mündungsumfangs verstanden, an welchem keine Contraction stattfindet, zum ganzen Mündungsumfang. —

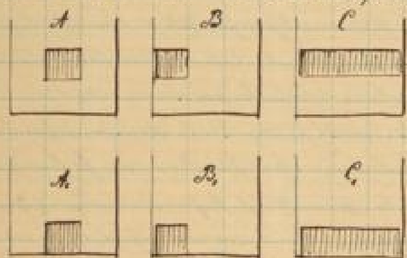
Meistens kommt d. unvollkommene Contraction so vor, dass d. rechteckige Mündung nur mit d. unteren Rand am Boden d. Gefässes liegt, od. dass sie sich auch bis zu den Seitenwänden erstreckt. Im ersten Fall ist d. Contraction nur am unteren Rand aufgehoben, im 2ten Fall auch



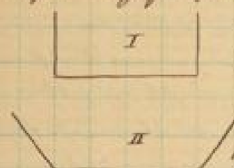
an d. Seitenwänden. Ist also a d. Höhe und b d. Breite d. Mündung, so ist im ersten Fall: $p = \frac{b}{2(a+b)}$

im 2ten Fall $p = \frac{2a+b}{2(a+b)}$.

Es sind über diesen Fall auch Versuche von Lesbros angestellt worden, und zwar mit solchen Mündungen, welche ausserhalb d. in d. Praxis vorkommenden Einzelheiten Rechnung tragen sollen; dabei ist zwar auch an einem Theil d. Contraction vollständig aufgehoben, an d. Seitenwänden jedoch gewöhnlich nicht ganz und gar, indem gewöhnlich d. Seitenwände d. Mündung sich nicht ganz bis zur Wand erstrecken, welche freilich auch durch Schutzbretter eingenommen werden können. Von Lesbros sind Versuche angestellt worden erstens für d. Fall d. vollständigen Contraction, dann für d. Fall, daß d. Mündung auf d. einen Seite bis nahe an d. Rand d. betreffenden verticalen ebenen Wand nicht bis zur Aufhebung von 2 Ctm., dann für d. Fall, daß d. Mündung auf beiden Seiten bis auf 2 Ctm. an d. Seitenwänden d. Wand entfernt liegt; zu allen diesen Fällen A B C wurde nach d. Anordnung vorgenommen, daß d. Mündung bis auf d. Boden herabgerückt wurde, so daß sich A' B' C' ergab. In diesen Fällen waren d. Seitenwände d. Ausflußgefäßes rechtwinklig gerichtet gegen diese Ausflußwand hin, so daß man aber gegeben d. Gefäß eine entsprechend ...



Es wurden aber auch, und zwar im Falle C u. C', Versuche angestellt mit d. Abänderung, daß d. beiden Seitenwände d. Gefäßes schräg gegen d. Mündungswand convergirten und zwar unter 45°, so daß sie gegen einander rechtwinklig gerichtet waren.



Es zeigte sich, daß in einem solchen Fall d. Ausfluß-Coeff. sich gleich war dem in d. Fällen B u. B'. In allen diesen Fällen sollte nun d. Aufhebung d. Contraction an einem Theil einen ebenso unteren Einfluß auf d. Vergrößerung von μ als d. Aufhebung d. Contraction an d. Seitenwänden, wie sich auch als d. Contraction an d. Seitenwänden nicht vollkommen aufgehoben wird. Wenn man also d. Formel für alle diese Fälle dafür anzeigen, so muss setzen:

$$\mu = \mu_0(1 + x\,p_a + y\,p_b)$$

unter p_a d. Verhältniss von p verstanden, welche sich auf d. partielle Contraction an d. Seitenwänden bezieht, p_b an d. anderen Theilen; es ist also im Falle A: $p_a = 0$ u. $p_b = 0$; im Falle A': $p_a = 0$ u. $p_b = \frac{b}{2(a+b)}$;

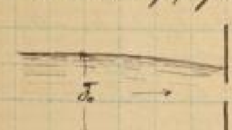
im Falle B: $p_a = \frac{a}{2(a+b)}$ u. $p_b = 0$; im Falle B': $p_a = \frac{a}{2(a+b)}$ u. $p_b = \frac{b}{2(a+b)}$

im Falle C: $p_a = \frac{a}{a+b}$ u. $p_b = 0$; im Falle C': $p_a = \frac{a}{a+b}$ u. $p_b = \frac{b}{2(a+b)}$

Die Coeff. x u. y muss man natürlich etwas verschieden, da d. Contraction an d. Seitenwänden nicht so vollkommen wie an dem unteren Theil. d. Resultate von Lesbros liefern d. Formel:

$$\mu = \mu_0(1 + 0{,}12\,p_a + 0{,}16\,p_b) \text{ –}$$

Endlich ist noch d. Fall besonders, daß d. Wand mit d. Ausflußöffnung sich am Ende eines Gerinnes befindet, in d. Wasser schon mit einer merklichen Geschw. d. Mündung zufließt. Also in einem solchen horizontalen Gerinne fließe d. Wasser einer verticalen Wand zu, in welcher sich d. rechtseitige Ausflußmündung befindet.



Es sei d. Mündung A nicht sehr klein im Vergleich mit d. Querschnitt F_0 d. zufließenden Wassers. d. mittlere Geschw. d. fließenden Wassers sei im Gerinne u_0 und es ist diese zu rechnen:

$$u_0 = \frac{V}{F_0} \text{ wobei man setzen kann d. Ausflußmenge:}$$

$$V = \mu A \sqrt{\frac{2gh}{1-\left(\frac{\mu A}{F_0}\right)^2}}$$ indem man

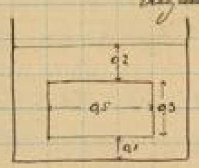
unterstellt d. mittleren Druckhöhe H – h setzt, d. i. d. Höhe d. Wasserstandes im Gerinne über d. Schwerpunkt d. Mündung A. Bezeichnet man nun $\frac{A}{F_0} = n$, so ist: $V = \mu A \sqrt{\frac{2gh}{1-(\mu n)^2}}$. Allerdings bedeutet für d. Coeff. μ nicht einen ganz neuen Ausflusscoeff.; er enthält vielmehr noch einen anderen Einfluss in sich. Es ist ebenfalls auch schon vorausgesetzt, dass d. Höhe h gemessen werde in einer solchen Entfernung von d. Ausflusswand, wo d. Wasserspiegel noch nicht merklich sich gegen d. Wand abwärts geneigt hatte, also etwa 1 m von d. Wand. Bei d. vorhergehenden Gesetz. erleidet d. Wasser auf d. Strecke von 1 m Länge schon immer einen, nicht ganz zu vernachlässigenden Widerstand, so dass d. Höhe h auch d. Widerstandshöhe im Gerinne von dieser Strecke bis zur Wand in sich enthält, und insofern kann es d. Fall sein, dass wenn man für μ d. Werth setzt, denselben Fall für d. Ausfluss d. Versuchs mit einem Gefäss, dass man V nur zu gross findet. Es sind deshalb von Weisbach besondere Versuche angestellt worden über diesen Fall, wobei er folgende Formel aufstellte:

$$V = \mu' A \sqrt{2gh}$$

wobei nun d. Coeff. μ' mit d. Versuchsergebnissen stimmt. Dieser begreift dann verschiedene Einflüsse in sich: 1) d. der Contraction 2) d. d. Geschw.-Coeff. φ 3) d. d. Umstandes, dass d. Geschw. im Schwerpunkt d. kleinsten Querschnitts d. contrahirten Strahls nicht genau gleich d. mittleren Geschw. ist. 4) d. d. Umstandes, dass d. Schwerpunkt d. kleinsten Querschnitts d. contrahirten Strahls in anderer Höhe liegen kann als d. Schwerpunkt d. Mündung. 5) d. d. Zuflussgeschw. u. 6) d. d. Widerstandshöhe, die d. Wasser schon bei d. Lauf im Gerinne erleidet von d. Stelle an, wo h gemessen wird, bis zur Ausflusswand. Er fand, dass d. Coeff. μ' mit genügender Annäherung berechnet werden könne vermittelst folgender empirischen Formel:

$$\mu' = \mu_0 (1 + 0{,}641\, n^2)$$

, vorausgesetzt, dass d. Verhältniss $n < \frac{1}{2}$ ist u. ferner, dass d. Höhe h d. Wasserspiegels im Gerinne über d. Mittelpunkt d. Mündung A gemessen wird in d. Entfernung von 1 m von d. Wand. Würde d. Höhe h gemessen in grösserer Entfernung, so würde diese eine noch grössere Widerstandshöhe in sich schliessen. Aus demselben Umstand ist es zu erklären, dass d. mit diesen Versuchen aufgestellten Werthe von μ' kleiner sind als diejenigen Werthe, welche μ nach d. Formel für V haben müsste; es sollte μ' d. Ableitung haben $\mu' = \frac{\mu}{\sqrt{1-(\mu n)^2}}$, man findet aber im Allgemeinen μ' kleiner als dieser Werth und dies ist d. Einfluss d. Widerstandshöhe zuzuschreiben. Als Beispiel sei Folgendes zu berechnen:



Angenommen es fliesse d. Wasser in einem Gerinne von 0,8 m Breite, welches 2 vertikale ebene Seitenwände hat. Angenommen man wolle d. Wassermenge messen, die in diesem Kanal im Beharrungszustande fliesst. Zu d. Ende wird d. Gerinne abgeschlossen durch eine verticale Wand, in welche eine Mündung eingeschnitten wird von 0,m5 breit und 0,m3 hoch und zwar sei diese Mündung an einer solchen Stelle in d. Wand, dass d. untere Rand in einer Höhe 0,m1 über d. Boden liegt, ferner d. beiden Seitenwände gleich weit, also um 0,m15 von d. Seitenwänden d. Gerinnes abliegen. Nachdem dies geschehen ist, wird sich zunächst d. Wasserstand im Gerinne ändern und zwar zeigte sich derselbe im Beharrungszustande 0,2 m über d. oberen Rand d. Mündung und zwar gemessen in einer Entfernung = 1 m von d. Wand. Hiernach soll V berechnet werden.

Zu dem Ende ist zunächst d. Coeff. μ_0 zu bestimmen, welcher Ausflusscoeff. unter übrigens gleichen Umständen bei vollkommener Contraction gelten würde für d. Ausfluss aus einer rechteckigen Mündung in einer ebenen grossen Wand. In d. früheren Tabelle sind d. Werthe von μ, d. hier mit μ_0 bezeichnet werden, nach Werthen von a und h_1 geordnet. $a = 0{,}3$ kommt nun in jener Tabelle nicht vor; man wird also zunächst d. Werthe μ_0 aufsuchen für d. demnächst kommenden Fall, also für $h_1 = 0{,}2$ und $a = 0{,}2$, wofür man findet $\mu_0 = 0{,}598$. Man weiss nun aber, dass d. Ausflusscoeff. um so kleiner ist, je grösser d. kleinere Dimension ist. Es muss also für $a = 0{,}3$ d. Coeff. μ_0 etwas kleiner sein als für $a = 0{,}2$. Es mag nach Schätzung durch d. Tabelle $\mu_0 = 0{,}595$ sein. Ferner ist nun:

$n = \frac{0{,}5 \cdot 0{,}3}{0{,}8 \cdot 0{,}6} = \frac{5}{16}$ also kleiner als $\frac{1}{2}$, so dass d. Weisbach'sche Formel angewandt werden kann. Mit Hülfe derselben ist: $\mu' = 0{,}595\left(1 + 0{,}641\left(\frac{5}{16}\right)^2\right) = 0{,}632$ und demnach d. Ausflussmenge:

$$V = \mu' A \sqrt{2gh} = 0{,}632 \cdot 0{,}3 \cdot 0{,}5 \sqrt{2 \cdot 9{,}81 \cdot 0{,}35} = 0{,}2484 \text{ cubm.}$$

[illegible] hier für bei vermindert gesetzt, entsprechend d. Umständen, unter denen Weisbach diese empirische Formel abgeleitet hat, daß d. Contraction eine unvollkommene oder [illegible] ist. Hier ist eine rechteckige Mündung vorausgesetzt, die irgendwo d. Gefäßwand [illegible] ist. Wenn nun aber d. Contraction [illegible] partiell indem z. B. d. Mündung [illegible] eingerichtet würde, daß sie sich mit d. unteren Rand bis zum Gerinneboden erstreckt, so würde sie jedenfalls größer [illegible], aber daß [illegible] Versuche hierüber vorliegen. In einem solchen Fall kann man sich folgendermaßen helfen:

Es sei für diesen Fall d. Ausflußcoeff. mit μ'' bezeichnet, so wird derselbe größer sein als μ' unter übrigens gleichen Umständen, weil überhaupt bei d. partiellen Contraction d. Coeff. größer ist. Man wird daher [illegible]: $\mu'' = (1+y)\,\mu'$. Diesen Vergrößerungscoeff. ~~könnte~~ kennt man für d. vorliegenden Fall durch directe Versuche nicht, sondern nur für d. Fall vollkommener Contraction und es sei für diesen Fall bezeichnet mit $1+x$. Dann ist, wenn d. Contraction zum partiell übrigens aber vollkommen wäre: $\mu'' = (1+x)\,\mu_0$, wo μ_0 für vollkommene Contraction gilt. Dieses x kennt man u. ist: $x = 0{,}12\,p_a + 0{,}16\,p_b$ nach Lesbros. D. Vergrößerungscoeff. $1+y$ wird jedenfalls kleiner sein als $1+x$, da d. Contractionscoeff. äußersten Falls bis zur Einheit wachsen kann; es wäre also möglich, daß $\mu' > 1$ würde, was nicht sein kann; wäre $\mu' = \mu_0$, so wäre $y = x$. Die einfachste Formel, welche diesen Anforderungen entspricht wäre $\mu'' = \left(1 + \frac{1-\mu'}{1-\mu_0}\,x\right)\mu'$. Für $\mu' = \mu_0$ würde d. Vergrößerungscoeff. $= 1 + x$, wäre aber μ' schon $= 1$, dann müßte μ'' ebenfalls $= 1$ sein; in d. [illegible] verschwindet d. ganze [illegible], also $\mu'' = \mu'$. Es kann also μ'' nie über d. Einheit wachsen. [illegible] wird man nur d. entsprechenden Werth von μ'' direct bestimmen können, wenn bei diesen Versuchen [illegible] d. Wasserspannung V d. rechteckige Mündung so angebracht wird, daß sie bis an d. Gerinneboden sich erstreckt.

[illegible] d. Gerinnes seien unter diesen Umständen dieselben wie vorher, jetzt wird sich freilich ein anderer Wasserstand herausstellen, als sie oben vorausgesetzt, es stelle sich eine andere Wasserspannung in d. Gerinne, so daß auch in diesem Falle d. Wasserstand im Gerinne 1 m und d. Wandabstand $= 0{,}6^m$ sei. Dann kann derselbe Werth μ_0 hier zu Grunde gelegt werden, wie vorher; es ist nur jetzt h_2 nicht $= 0{,}2$ sondern $= 0{,}3$ m. Wenn man aber d. Fundamentaltabelle von Poncelet-Lesbros ansieht, so bemerkt man, daß für diese kl. Änderung von h sich kein Unterschied ergibt, so daß $\mu_0 = 0{,}595$ gesetzt werden kann. μ' würde dann wie vorher bestimmt $= 0{,}632$. Dieses wäre d. Ausfluß-Coeff. abgesehen davon, daß am unteren Rand d. Contraction aufgehoben ist. Man hat also nun μ'' nach d. Formel zu bestimmen. In derselben hat x auf Grund d. früher erwähnten Lesbros'schen Versuche d. Werth $x = 0{,}16\,\frac{0{,}5}{2{,}08} = 0{,}03$, und somit ergiebt sich:

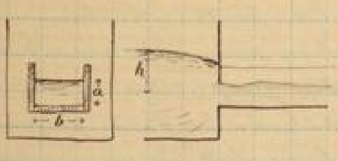
$$\mu'' = \left(1 + \frac{0{,}368}{0{,}405}\,0{,}03\right)0{,}632 = 0{,}661$$

und somit d. pr. Sec. durchfließende Wasserquantum:

$$V = \mu'' A \sqrt{2gh} = 0{,}661 \cdot 0{,}3 \cdot 0{,}5 \sqrt{2 \cdot 9{,}81 \cdot 0{,}45} = 0{,}2946 \text{ cubm.}$$

S.

Bei diesen Fällen d. Ausfließens d. Wassers aus rechteckigen Mündungen ist immer vorausgesetzt worden, daß d. Ausfluß in d. freien Luft erfolge, daß also d. ausfließende Wasserstrahl frei niederfalle. Es kommt nun häufig d. Fall vor, daß dies nicht so ist, sondern daß sich an d. rechteckige Mündung unmittelbar ein Schußgerinne anschließt, so zwar, daß d. Boden desselben genau d. unteren Rand d. Mündung entspricht und die beiden verticalen Seitenwände d. Gerinnes d. beiden Seitenwänden d. Mündung entsprechen. Das Wasser, welches durch diese Mündung abfließt, kann zunächst eine gewisse Contraction erfahren, indem es sich dann aber wieder mit dieser [illegible] durch d. Gerinnewänden in Berührung; dadurch wird ein gewisser Widerstand verursacht, theils in Folge d. Reibung d. Wassers an d. Gerinnewänden, theils weil dieses Gerinne d. Wasserstrahl verhindert als eine parabolische Curve niederzufallen. Wenn man also auch für diesen Fall d. pr. Sec. ausfließende Wasserquantum V berechnet nach d. Formel: $V = \mu A \sqrt{2gh} = \mu a b \sqrt{2gh}$ unter h d. Höhe d. Wasserober[fl]. im Gefäß über d. Mittelpunkt d. Mündung verstanden, so wird d. Coeff. μ

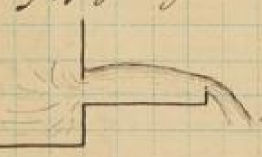


kleiner sein, als unter übrigens gleichen Umständen d. Fall wäre, wenn d. Wasserstrahl frei niedersinkt. [illegible]

[illegible] $h - \frac{a}{2}$ [illegible] $\sqrt{1-\frac{a}{2h}}$. [illegible]

[illegible] $\sqrt{1-\frac{a}{2h}}$. [illegible]

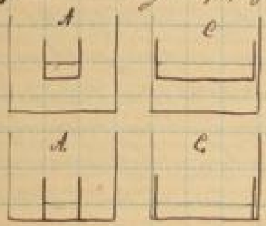
[illegible]



[illegible] In einem solchen Fall ist es angemessen nicht nach d. Formel $V = \mu A \sqrt{2gh}$ V zu berechnen, sondern nach d. Formel

$$V = \mu a b \sqrt{2g(h-h')}$$

[illegible] h' [illegible] $\frac{a}{2}$ [illegible] 1%. [illegible] h' [illegible] $\frac{a}{2}$ [illegible] betreffenden Versuche von Lesbros zu erwähnen, die sich beziehen auf d. Ausfluss d. Wassers aus [illegible] einer rechteckigen Mündung in einer verticalen ebenen Wand und zwar in einem Ansatzgerinne, welches unterhalb horizontal, d. Fußboden bis auf $\frac{1}{10}$ abwärts geneigt ist, [illegible] Widerstände in diesem Gerinne nicht vorkommen; d. Gerinne sollte eine Länge von $2^m,50 - 3^m,00$. [illegible] d. Formel $V = \mu\, a\, b \sqrt{2gh}$ zu Grunde. Die Versuche beziehen sich namentlich auf folgende Specialfälle: A) d. Mündung befindet sich an einer mittleren Stelle in d. verticalen Wand d. Gefäßes; A') d. Mündung befindet sich an einer mittleren Stelle d. Bodens d. Gefäßes; C) und C') wie Seite 59, nur mit Ansatzgerinne. Für diese Fälle sind d. Resultate in [illegible] zusammengestellt. Es ist nun zu bemerken, daß d. Zahlen dieser Tabelle durchweg kleiner sind als d. Zahlenwerthe von μ bei d. früher besprochenen Lesbros'schen Versuchen, wo sich kein Ansatzgerinne an diese Mündungen anschloss. Daß aber diese Verkleinerung von μ durch d. Ansatzgerinne



um so [illegible] ist, je [illegible] d. [illegible] ist, [illegible] Fall A zeigt [illegible] bei d. [illegible] Wasserständen h d. Coeff. μ für d. Fall d. Ausflußgerinnes [illegible] ist, als für d. Fall d. Ausfließens in d. freien Luft. [illegible] A d. Ausflußcoeff. [illegible] Contraction [illegible] Wasser [illegible] d. Mündung zufließt. [illegible] Contraction wird aber durch d. Ansatzgerinne vermindert [illegible] d. Ausflußcoeff. [illegible] Fall [illegible] durch [illegible] α d. Verkleinerung von μ [illegible]. Unter anderen [illegible], als diejenigen, [illegible] Lesbros'schen Versuche angestellt worden [illegible], können d. Werthe d. Lesbros'schen Tabelle [illegible] als Verhältnißzahlen benützt werden, wie [illegible] folgenden Beispiel ersichtlich sein mag:

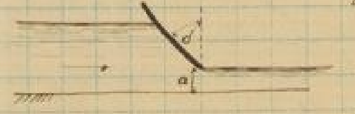
D. Gerinne habe $0^m,8$ Breite, welches am Ende durch eine verticale Wand abgeschlossen wird. In derselben befindet sich eine rechteckige Öffnung von 0,5 m Breite und 0,3 m Höhe, welche sich bis auf d. Boden d. Gerinnes erstrecken soll, also wie in Seite 60–61. [illegible] d. Beharrungszustand [illegible] sei für d. Wasserstand, 1 m von d. Wand gemessen, $h = 0,3$ m über d. oberen Wand. Für diesen Fall nun, wenn d. Wasser als ein freier Strahl ausfließt, d. Ausflußcoeff. [illegible] $\mu = 0,661$. [illegible] d. Wasser fließe nicht als ein freier Strahl aus dieser Mündung aus, sondern es schließe sich an diese Mündung ein Ansatzgerinne, [illegible] d. Wasser abfließt und [illegible] Versuche [illegible] solchen Fall von Lesbros nicht angestellt worden. D. Fall, welcher hier vorliegt, [illegible] zwischen A' u. C'; nun ist auf d. Lesbros'schen Tabelle in diesen beiden Fällen A' u. C' für d. Fall d. freien Ausflusses d. Ausflußcoeff. $= 0,621$ resp. $0,699$ [illegible] für d. hier vorliegenden Werth von h und a. Für dieselben Fälle [illegible] d. Ausfluß durch ein Ansatzgerinne [illegible] d. Ausflußcoeff. nach Lesbros resp. $0,575$ u. $0,599$. [illegible] d. hier vorliegende Fall als zwischen A' und C' liegend angenommen werden kann, so [illegible] d. Ausflußcoeff. durch d. Ansatzgerinne [illegible] um

$$\frac{0,575 + 0,599}{0,621 + 0,699} = 0,9,$$

[illegible] d. Ausflußcoeff. wird: $\mu = 0,661 \cdot 0,9 = 0,595$.

Hieraus sieht man wie d. [illegible] Zahlenwerthe [illegible] als Verhältnißzahlen angewendet werden können.

Von praktischem Interesse ist ferner d. Fall, daß d. rechteckige Mündung sich in einer [illegible] ebenen Wand befindet, welche mit einem in gleicher Breite fortlaufenden Gerinne unter einem [illegible] Winkel gegen d. Verticale geneigt [illegible] ist; dieser Winkel sei $= \delta$. Unten dieser schiefen ebenen Wand befinde sich d. rechteckige Durchflußöffnung, die sich mit d. unteren Rande bis zum Boden erstreckt. [illegible] d. Contraction [illegible] am oberen Rande statt und auch [illegible] in einem [illegible] Maße. Dieser Fall ist namentlich von Interesse für d. Fall d. Wasserzuführung zu Wasserrädern, [illegible] schiefe Wand d. [illegible], d. Durchflußöffnung [illegible] an d. Rad [illegible]. Für diesen Fall



sind von Poncelet Versuche angestellt worden und dabei hat sich d. Ausflußcoeff. $\mu = 0{,}7 \quad 0{,}74 \quad 0{,}8$, ergeben, je nachdem $tg\,\delta = 0 \quad \frac{1}{2} \quad 1$ war. Diese Werthe von μ beziehen sich auf d. Formel μ: $V = \mu\, a\, b \sqrt{2gh}$, wo a d. Höhe d. Ausflußöffnung bedeutet, die aber senkrecht gemessen ist zum Boden d. Wand, b d. Breite d. Mündung und h d. Höhe d. Wasserspiegels über d. Mittelpunkt d. Mündung. D. Fall $tg\,\delta = 0$ würde dem einer verticalen Wand entsprechen, welchen Fall wir schon durchgenommen haben. Für diesen Fall ergeben sich freilich aus d. Lesbros'schen Versuchen merklich kleinere Werthe von μ als 0,7 nämlich 0,63 bis 0,65. Diese Differenz kann daher rühren, daß d. Poncelet'schen Mündungen erheblich breiter als d. Lesbros'schen waren. Ferner d. Unterschied an d. Seiten wurde nur sehr schwach ..., welche sich dort ... sein als bei d. Lesbros'schen Versuchen; außerdem stieß bei d. Poncelet'schen Versuchen d. Wasser d. Mündung mit einem ... Geschw. zu. bei d. Poncelet'schen Versuchen war h gemessen dort, wo d. Wasser schon eine bedeutende Geschw. hatte, bei d. Lesbros'schen dort, wo es in Ruhe war. In solchen Fällen, wo unter übrigens gleichen Umständen μ nicht $= 0{,}7$ wäre, können diese Poncelet'schen Zahlen entsprechend als Verhältnißzahlen benutzt werden. D. Ausflußcoeff. ~~kann man~~ ferner wird vergrößert um $\frac{0{,}75}{0{,}7}$, wenn d. Winkel δ vermindert wird, daß $tg\,\delta$ nicht $= 0$ sondern $= \frac{1}{2}$ ist. Für d. Fall, daß $tg\,\delta$ weniger groß als 1 ist, kann man d. Vergrößerungscoeff. allgemein gleich setzen:

$$1 + \frac{6\,tg\,\delta + 4\,tg^2\delta}{70}$$

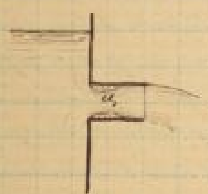
Für $tg\,\delta = \frac{1}{2}$ geht dieser Ausdruck über in $\frac{74}{70}$ und für $tg\,\delta = 1$ in $\frac{8}{7}$. — Wenn man also d. Ausflußcoeff. für einen gewissen Fall besitzt, so wird eine Neigung d. Wand um δ denselben um diese Größe vergrößern. Für diese Schützen hat Poncelet außerdem einen Geschw.-Coeff. φ ermittelt, d. durchschnittlich $= 0{,}93$ war. Diese Versuche beziehen sich alle auf d. Fall, daß d. Abflußgerinne horizontal od. doch nur wenig abhängig gewesen war. Was nun aber d. anderen Fall betrifft, in welchem d. Gerinne, welches sich an d. rechteckige Mündung anschließt, in d. Höhe gerichtet ist, od. wenn ein ... ist, so daß dann d. Oberfl. d. im Gerinne abfließenden Wassers höher als d. Rand d. Mündung steht, so sind über diesen Fall in d. Jahren 1866 u. 67 bedeutende Versuche von Bornemann angestellt worden. Bei diesen Versuchen handelte es sich auch um ein ein Gefälle besitzendes Gerinne, welches d. Gerinne [Ausfluß] während d. Fortsetzung d. Zuflußgerinnes war. D. rechteckige Mündung befand sich in einer senkrechten Wand und zwar unten d. Wand, so daß d. untere Rand d. Mündung bis an d. Boden d. Gerinnebreite und d. Seitenwände d. Mündung bis an d. Seiten d. Gerinnes reichten.

D. Gerinne hatte eine Breite von 1,135 m. An einer Stelle waren 2 Pfosten eingesetzt, welche zwischen sich eine Ausflußöffnung frei ließen von 0,006 m Breite. Diese Pfosten dienten als Widerlager für ein Schutzbrett, welches eine Dicke von 4 cm hatte. D. Versuche und zwar im Ganzen 15 bezogen sich auf verschiedene Werthe d. Öffnungshöhe a und zwar für $a = 0{,}034$ m bis $0{,}174$ m. Bezeichnet h d. Höhe d. Oberwasserspiegels bis zur Mündungsmitte, h_1 d. Höhe d. Unterwasserspiegels über denselben Punkt, wobei ... zu beachten ist, daß d. Höhe h_1 gemessen werden muß an d. Stelle, wo d. Unterwasseroberfl. seine größte Höhe hat und vollständig in Ruhe ist. So umfaßten dann d. Versuche solche Werthe von $\frac{a}{h_1}$, welche zwischen d. Grenzen 0,17 — 0,85 lagen; d. Werthe von h_2 d. h.: d. Höhe d. Oberwasseroberfl. über d. oberen Rand d. Mündung, lagen zwischen d. Werthen 0,09 — 0,42 m. Natürlich ist in diesem Fall eine entsprechende Formel zu Grunde zu legen: $V = \mu\, a\, b \sqrt{2g(h - h_1)}$. Bornemann versuchte nun d. erhaltenen Werthe von μ, welche sich aus d. sämtlichen Versuchsergebnissen berechnen, durch eine empirische Formel auszudrücken, die folgende war: $\mu = \alpha + \beta \frac{a}{h_1}$, wenn d. Coeff. α u. β bestimmt wurden mit Hülfe d. Methode d. kleinsten Quadrate: $\alpha = 0{,}63775$ und $\beta = 0{,}29995$. D. dieser Rechnung entsprechende wahrscheinliche größte Fehler ist: 0,0109. —

Ausfluß d. Wassers durch Mundstücke.

Betrachten wir zunächst d. Ausfluß aus cylindrischen Ansatzröhren.

Hierbei braucht d. Querschnitt d. cylindrischen Röhre nicht gerade ein Kreis zu sein, es ist dazu nur nothwendig, daß d. Querschn. derselbe sein soll wie d. Mündung d. Gefäßes; auch immer kann jedoch d. Mündung eine abgerundete Form haben. Unter diesen Umständen fließt d. Wasser aus d. Mündung genau als ein vollkommener cylindrischer Strahl, eine äußere Contraction findet nicht statt, es ist also $\alpha = 1$ und $\mu = \varphi$.
Wenn diese Röhre so kurz ist, daß von ihrem Leitungswiderstand abgesehen werden kann u. wenn d. innere Mundst. mit einer abgerundeten ... in d. innere Gefäßwandfl. übergeht, dann ist erfahrungsgemäß d. Ausflußcoeff. μ kaum verschieden von d. Geschw.-Coeff., welcher unter übrigens gleichen Umständen einer Mündung in d. dünnen Wand entsprechen würde; es liegt also dann eben d. Ausflußcoeff. μ zwischen d. Grenzen 0,96 u. 0,99 und zwar wachsend mit d. Druckhöhe.
Ist hingegen d. cylindrische Ansatzröhre scharfkantig an d. Gefäßwand angesetzt, so kann das H_2O aus dem Gefäß in diese Ansatzröhre hineinfließt, erfährt es zunächst im Innern d. Röhre eine Contraction, dann es schneidet zum vollen Querschnitt d. Ansatzröhre und dabei.



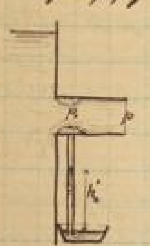
Dadurch wird ein nach früheren Betrachtungen zu beurtheilender Widerstand verursacht und es muß dadurch d. Ausflußcoeff. μ merklich kleiner werden als wenn d. cylindrische Röhre mit merklicher Abrundung in d. Gefäßwand übergeht. Bezeichnet man in einem solchen Fall d. Geschw., womit d. Wasser in diesem kleinsten Querschnitt unmittelbar nach d. Eintritt in d. Ansatzröhre mit u_1, mit u dagegen d. Geschw., womit es im vollen Querschnitt d. Ansatzröhre fließt, dann wird durch diesen plötzlichen Übergang d. größeren Geschw. u_1 in u d. kleineren zufolge ein Widerstand verursacht, dessen entsprechende Widerstandshöhe od. Arbeit pr. 1 kgr. Wasser durch d. Formel ausgedrückt ist: $\frac{(u_1-u)^2}{2g}$. Wird aber eine beliebig lange Ansatzröhre vorausgesetzt, so kommt noch ein Leitungswiderstand d. Röhre hinzu, der ist $= \zeta \frac{u^2}{2g}$ unter ζ d. betreffenden Widerstandscoeff. verstanden. Demnach wird d. gesammte Widerstandshöhe vom kleinsten Querschnitt bis zur Mündung sein:

$$B = \frac{(u_1-u)^2}{2g} + \zeta \frac{u^2}{2g}.$$

Nun verhalten sich aber u_1 und u umgekehrt wie d. Querschnitte, also $\frac{u_1}{u} = \frac{1}{\alpha}$ und mithin:

$$B = \left[\left(\frac{1}{\alpha}-1\right)^2 - \zeta\right]\frac{u^2}{2g}.$$

Von d. Vorhandensein d. hier vorausgesetzten inneren Contraction kann man sich leicht direkt überzeugen durch einen Versuch, den zuerst Venturi in einiger Hinsicht anstellte. Wenn man an dieser cylindrischen Ansatzröhre nahe bei d. Einmündung in dieselbe ein kleines Seitenröhrchen anbringt u. dieses nach unten weiter leitet in ein wassergefülltes Gefäß, so bemerkt man, daß d. Wasser in diese Röhre emporgesaugt wird bis zu einer gewissen Höhe h'; wenn nun an d. Mündung d. eigentlichen cylindrischen Ansatzröhre und in diesem kleinen Gefäß d. nämliche Druck (atm. Druck) herrscht, so folgt aus diesem Aufsteigen d. Wassers, daß d. Dr. in d. cylindrischen Ansatzröhre da wo dieses Röhrchen angebracht wurde, also p_1 kleiner als p sein wird und zwar ist h' ein Maaß für d. Unterschied d. äußeren Dr. p über d. Dr. p_1; es ist:



$$h' = \frac{p-p_1}{\gamma}$$

, vorausgesetzt, daß d. Flüssigkeiten gleiches spez. Gew. haben. Wenn man einen solchen Versuch anstellen, vorausgesetzt man d. Ansatzröhre kurz ist um d. Contractionscoeff. zu bestimmen. Zunächst soll unter d. Voraussetzung, daß d. Contractionscoeff. α bekannt ist, ein Ausdruck für h' abgeleitet werden. Bekanntlich ist für irgend einen Querschnitt einer Leitung d. Summe aus Geschw.-Höhe und Druckhöhe = d. verbrauchten Summe für einen anderen Querschnitt + d. Arbeit d. Nutzwiderstände und d. Arbeit d. Leitungs-Widerstände; also z. B.: auf d. Wege von d. kleinsten bis zur Mündung pro 1 Kgr. Flüssigkeit. Für d. Mündungsquerschnitt ist d. Summe aus Geschw.-höhe und Druckhöhe $= \frac{u^2}{2g} + \frac{p}{\gamma}$ und für d. kleinsten Querschnitt $= \frac{u_1^2}{2g} + \frac{p_1}{\gamma}$. Angenommen nun d. Ansatzröhre sei horizontal, dann kommt eine Arbeit von Wassergewichten gar nicht in Betracht, die Arbeit d. Lat.-Widerstände ist nichts anderes als d. Widerstandshöhe und zwar ist dieselbe vom kleinsten Querschnitt bis zur Mündung [illegible] mit gedeckt worden, so ist hergekommen: $-\left[(\frac{1}{\alpha}-1)^2+\zeta\right]\frac{u^2}{2g}$.

Folg. hat man d. Gl.:

$$\frac{u^2}{2g} + \frac{p}{\gamma} = \frac{u_1^2}{2g} + \frac{p_1}{\gamma} - \left[(\tfrac{1}{\alpha}-1)^2+\zeta\right]\frac{u^2}{2g}$$

Nun ist d. Saughöhe h' nichts anderes als d. Maß für d. Unterschied d. obern Druckhöhe $\frac{p}{\gamma}$ und $\frac{p_1}{\gamma}$. [illegible] braucht sich nicht dort ganz genau drauf zu befinden, wo d. größte Contraction stattfindet, weil in d. ganzen Raum, [illegible] d. Lat. stattfindet, d. gleiche Dr. herrscht. Es ist also

$$h' = \frac{p}{\gamma} - \frac{p_1}{\gamma}.$$

Dieses läßt sich aber mit d. obigen Gl. bestimmen, es wird, da $u_1 = \frac{u}{\alpha}$:

$$h' = \frac{p-p_1}{\gamma} = \left[\frac{1}{\alpha^2} - 1 - (\tfrac{1}{\alpha}-1)^2 - \zeta\right]\frac{u^2}{2g}$$

Ist nun μ d. Ausflusscoeff. für diese Röhre, hat man also $u = \mu\sqrt{2gh}$, da $\mu = \varphi$ war, so folgt: $\frac{u^2}{2g} = \mu^2 h$ und folgt:

$$h' = \left[2(\tfrac{1}{\alpha}-1) - \zeta\right]\mu^2 h.$$

Hiermit kann man nun h' bestimmen, wenn man μ, α u. ζ kennt, insbesondere für eine kurze zylindrische Ansatzröhre, für welche $\zeta = 0$ gesetzt werden kann. Mißt man h', so kann man umgekehrt auch α finden. Wenn diese Höhe h' sich größer ergeben sollte, als d. Höhe h'' d. Ansatzröhrenend über d. Gefäß, so würde folgen, daß d. Wasser in d. kleinen Gefäß vollständig aufgesaugt würde, [illegible] d. zusammen fließenden [illegible] Flüssigkeitsteilchen zu einem [illegible] Strahl. Will man letzte [illegible] dazu brauchen, um α zu ermitteln mit Hilfe von durch Versuche bestimmte Werte von μ u. h', so wird man sich unabhängig machen müssen von d. Leitungswiderstand ζ, also d. Mündung so kurz machen, daß man $\zeta = 0$ setzen kann. Thut man dies, indem man d. Röhre höchstens 3mal so lang als weit macht, so ergibt sich aus obiger Gl.:

$$\frac{1}{\alpha} = 1 + \frac{h'}{2\mu^2 h}.$$

Damit übrigens [illegible] ein stetiger voller Ausfluss stattfindet, also d. Strahl von d. Mündung ganz ausfülle, müssen gewisse Bedingungen erfüllt sein: es darf zu dem Ende d. Ansatzröhre nicht übermäßig kurz sein u. d. Druckhöhe nicht übermäßig groß sein. Es frägt sich nun, welches sind d. Bedingungen hierfür? Jedenfalls ist dieses nur so lange möglich, als [illegible] dort, wo d. Dr. am kleinsten ist, [illegible] größer als 0 ist. [illegible] d. Dr. d. Wassers sich auf 0 vermindern, so fehlte [illegible] für d. ununterbrochene Zusammenhang d. Wassers; eine Bedingung für d. Ausfluss ist also $p_1 > 0$ oder $\frac{p_1}{\gamma} > 0$. Dieses ergibt sich aber aus d. Gl. für h', wo ja $h' = \frac{p-p_1}{\gamma}$ ist, also $h' = b - \frac{p_1}{\gamma}$, wenn $\frac{p}{\gamma} = b$ gesetzt wird. Ist d. ausfließende Flüssigkeit Wasser und erfolgt d. Ausfluss in d. freie Luft, so ist das b d. sogenannte Wasserbarometerhöhe $= 10{,}3$ m und es ist also:

$$\frac{p_1}{\gamma} = b - \left[2(\tfrac{1}{\alpha}-1) - \zeta\right]\mu^2 h.$$

Dieser Ausdruck muß nun > 0 sein, um einen vollen Ausfluss zu erzeugen. Daraus ergibt sich eine Grenze für d. höchstens zulässige Höhe h d. Oberwasserspiegels über d. Mitte d. Mündung, es muß nämlich:

$$h < \frac{b}{\left[2(\frac{1}{\alpha}-1) - \zeta\right]\mu^2}.$$

Hiernach folgt nun [illegible]: es wird d. volle Ausfluss umso [illegible] möglich, je kleiner d. äußere Druck und je kürzer d. Röhre ist, je kleiner also b und ζ sind, desto kleiner wird auch dieser Grenzwert h. Insbesondere für eine sogenannte kurze zylindrische Ansatzröhre, für welche man $\zeta = 0$ setzen kann, ergibt sich d. Bedingung d. vollen Ausflusses:

$$h < \frac{b}{2(\frac{1}{\alpha}-1)\mu^2};$$

dies ist ein Grenzwert, den besonders Weisbach durch Versuche bestätigt hat. — Für ganz [illegible] Bestimmung dieses Grenzwertes ist allerdings sehr schwierig, da d. Ausfluss [illegible]

[illegible]

$$\text{[illegible]} = [(\tfrac{1}{\alpha}-1)^2+\zeta]\frac{u^2}{2g} \text{ [illegible]}$$

$$\frac{u^2}{2g} = h - \left(\frac{1}{\varphi^2}-1\right)\frac{u_1^2}{2g} - \left[\left(\frac{1}{\alpha}-1\right)^2+\zeta\right]\frac{u^2}{2g} \quad \text{[illegible]} \quad \frac{u_1^2}{2g} = \frac{1}{\alpha} \text{ ist.}$$

$$\frac{u^2}{2g} = h - \left[\left(\frac{1}{\varphi^2}-1\right)\frac{1}{\alpha^2} + \left[\left(\frac{1}{\alpha}-1\right)^2+\zeta\right]\right]\frac{u^2}{2g}$$

[illegible] $u = \mu\sqrt{2gh}$ [illegible] $\frac{2gh}{u^2} = \frac{1}{\mu^2}$ [illegible]

$$1 = \frac{1}{\mu^2} - \left(\frac{1}{\alpha\varphi}\right)^2 + \frac{2}{\alpha} - 1 - \zeta \quad \text{[illegible]}$$

$$\left(\frac{1}{\alpha\varphi}\right)^2 - 2\varphi\frac{1}{\alpha\varphi} - \frac{1}{\mu^2} + 2 + \zeta = 0 \quad \text{[illegible]}$$

$$\frac{1}{\alpha\varphi} = \varphi + \sqrt{\varphi^2 + \frac{1}{\mu^2} - 2 - \zeta}$$

[illegible] $\zeta = 0$ [illegible] $p_0 = p$ [illegible] $h = \frac{p_0 - p}{\gamma}$ [illegible] α [illegible] $h = 0{,}23$ [illegible] $0{,}6$ m [illegible]

$\alpha = 0{,}01 \quad 0{,}02 \quad 0{,}03 \quad 0{,}04$ m, [illegible]

[illegible] $\mu = 0{,}843 \quad 0{,}832 \quad 0{,}821 \quad 0{,}810$ [illegible]

$$\mu = 0{,}854 - 1{,}1\alpha.$$

[illegible]

[illegible] α [illegible] $\zeta = 0$ [illegible] $\varphi = 0{,}97$ [illegible]

[illegible]:
$\alpha = 0{,}661 \quad 0{,}648 \quad 0{,}636 \quad 0{,}624$

also $\alpha = 0{,}672 - 1{,}2\,d.$

[illegible] $\alpha = 0{,}64$ [illegible]

$\zeta = 0{,}5$ [illegible] $= \frac{1}{\mu^2} - 1$ [illegible] $\zeta = 0{,}5$

[illegible] $\mu = 0{,}8615$. [illegible]

[illegible] h': $\zeta = 0$ [illegible] $\mu^2 = \frac{1}{1+\zeta} = \frac{2}{3}$, [illegible] $\alpha = 0{,}64$ [illegible]

([illegible] $= 0$) : $h' = \frac{3}{4} h$; [illegible]

$\mu^2 = \frac{1}{1+\zeta}$ [illegible] ζ [illegible]

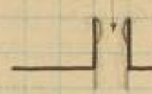
[illegible] $h < \frac{b}{2(\frac{1}{\alpha} - 1)^2 \mu^2}$. [illegible] $2(\frac{1}{\alpha} - 1)^2 \mu^2 = \frac{3}{4}$

also $h < \frac{4}{3} b$; [illegible] $b = 10{,}2$ cm [illegible] $h < 13{,}6$ cm [illegible] h

[illegible]

[illegible] Weisbach [illegible]

[illegible]



[illegible] Bidone und Weisbach, [illegible]

[illegible] $\mu = 0{,}71$ [illegible]

[illegible] $\mu = 0{,}82$ [illegible] $\varphi = 0{,}97$ [illegible]

[illegible] Formel $\frac{1}{\alpha\varphi} = \varphi + \sqrt{\varphi^2 + \frac{1}{\mu^2} - 2 - \zeta}$ [illegible] $\zeta = 0$ [illegible]

$\alpha = 0{,}584$, [illegible]

[illegible] $\alpha = \frac{1}{2}$. [illegible]

[illegible] $\frac{1}{5}$ [illegible]

[illegible] $h < \frac{b}{2(\frac{1}{\alpha} - 1)^2 \mu^2}$; [illegible] $\mu = 0{,}71$ [illegible] $\alpha = 0{,}534$ [illegible]

[illegible] $h < 1{,}146$ [illegible] $h < 1{,}336$ [illegible]

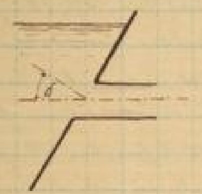
[illegible] —

Auch in Bezug auf d. innere Contraction, welche beim Ausfluß stattfindet, kann d. früher genannten unvollkommenen Contraction entnommen, wenn aber d. cylindrische Ansatzröhre an eine [illegible] Wand angesetzt, die aber nicht viel größer ist als d. Querschnitt d. Ansatzröhre; so findet eine gleichmäßige Contraction statt, es ist also in solchen Fällen d. Contractionscoeff. größer als bei d. genannten vorhandenen inneren Contraction und in Folge dessen ist auch d. Ausflußcoeff. größer. Nach Versuchen von Weisbach über diesen Fall kann man, wenn A d. Querschnitt d. Ansatzröhre, F d. [illegible] d. Wand, in welcher d. Ansatzröhre eingesetzt ist und wenn man $n = \frac{A}{F}$ setzt, setzen:

$$\mu = \mu_0 (1 + 0{,}102\, n + 0{,}067\, n^2 + 0{,}046\, n^3)$$

wobei μ_0 d. Ausflußcoeff. unter übrigens gleichen Umständen bei vollkommener innerer Contraction für $n = 0$ bedeutet, also F bedeutend größer als A ist. —

Bezüglich auf d. besondere Anordnung solcher cylindrischen Ansatzröhren ist noch ein Fall bemerkenswerth, d. bei d. Ausfluß mit einer eigentlichen Mündung seine Analogie nicht hat, nämlich, ist d. cylindrische Ansatzröhre an einer ebenen Gefäßwand so angesetzt, daß d. Axe d. Röhre einen gewissen Winkel δ mit d. Normalen d. Gefäßwand bildet. In diesem Fall ist d. Ausflußcoeff. μ kleiner als



unter sonst gleichen Umständen für $\delta = 0$. Ist aber μ kleiner, so ist d. Widerstandscoeff. $\zeta = \frac{1}{\mu^2} - 1$ größer als für $\delta = 0$. Von Weisbach ist d. Werth von ζ ermittelt worden bei verschiedenen Werthen δ. Die Werthe, d. sich ergaben, lassen sich durch folgende empirische Formel wiedergeben:

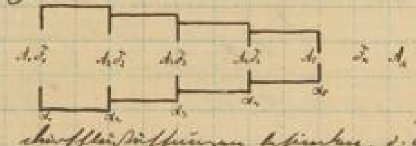
$$\zeta = \zeta_0 + 0{,}303 \sin\delta + 0{,}226 \sin^2\delta,$$

wobei ζ_0 d. Widerstandscoeff. für $\delta = 0$ bedeutet. Übrigens mußte, um in solchem Fall einen vollen Ausfluß zu erzielen, bei d. größeren Werthen von δ d. Länge d. Röhre beträchtlich größer als 3mal d. Weite gemacht werden. Es wurden deßhalb von Weisbach d. betreffenden Versuche mit beträchtlich längeren, schräg angesetzten Röhren ausgeführt. Von d. so gefundenen vollständigen Widerstandscoeff. ζ wurde dann d. Widerstand abgezogen, d. sich auf den Reibungswiderstand d. Röhre bezogen, u. d. Rest ergibt dann den Widerstandscoeff., d. sich rein auf d. Eintritt in d. Röhre bezog. — Übrigens ist es bei d. betreffenden Anwendungen meist d. Fall, daß d. Röhren, welche angesetzt sind, nicht sehr kurz sind, sondern eine größere Länge haben. D. hier angegebenen Werthe von ζ beziehen sich dann immer nur auf d. Widerstand, d. durch d. Einfließen d. Wassers in d. Röhre verursacht wird, oder nur auf d. Strecke, deren Länge = 3 fache Röhrweite ist. Zu diesem Widerstand müssen dann d. Widerstände hinzugefügt werden, d. sich auf d. weiteren Verlauf d. Wassers in d. Röhre beziehen. —

Außer solchen cylindrischen Ansatzröhren sind auch noch conisch geformte Ansatzröhren von Interesse. Dabei können 2 Fälle unterschieden werden, solche, d. nach außen convergent sind und solche, d. nach außen divergent sind. Wenn man in allen Fällen unter A d. Inhalt d. äußersten Querschnitts d. conischen Ansatzröhre versteht und somit d. Ausflußcoeff.

bezieht auf d. Formel: $V = \mu A \sqrt{2gh}$, dann ist im ersten Fall für eine convergente Ansatzröhre d. Ausflußcoeff. μ unter allen Umständen kleiner als unter sonst gleichen Umständen für eine cylindrische Ansatzröhre; für d. 2. Fall einer nach außen divergenten Röhre aber ist bis zu einer gewissen Grenze d. Divergenzwinkels β d. Ausflußcoeff. μ größer als für d. Ausfluß einer cylindrischen Ansatzröhre und nur wenn d. Winkel über diese Grenze wächst, wird μ kleiner als für eine cylindrische Ansatzröhre. Dabei ist vorausgesetzt, daß in allen Fällen d. Röhre sich symmetrisch an d. Gefäßwand ansetzt und daß d. Röhrenaxe normal gegen d. ebene Gefäßwand sei. Wenn man freilich ein und d. nämliche Röhre einmal als convergente und einmal als divergente Röhre benutzt, so fließt durch diese nämliche Röhre, wenn sie nach außen divergent wirkt, eine größere Wassermenge als umgekehrt, aber bei weitem nicht im d. Verhältniß d. äußeren Querschnitte. Solche nach außen divergente Röhren haben indessen kein weiteres praktisches Interesse [illegible] nur d. [illegible]. Ueber d. Ausfluß aus solchen convergenten conischen Ansatzröhren sind ausführliche Versuche gemacht von d'Aubuisson u. Castel. Die ausführlichste dieser Versuchsreihen bezieht sich auf Röhren im folgenden Dimensionen: Flanschenweite d. Mündung in allen Fällen = 0,0155 m; d. Länge d. Rohre betrug 0,04 m und d. Druckhöhe $H = h = 3^m$. d. Winkel β wurde variirt und zwar zwischen 0 u. 45°. Für verschiedene Werthe von β wurden dann durch Versuche ermittelt sowohl d. Ausflußcoeff. als auch d. Geschw. Coeff. φ, ersterer durch Messung d. Wasserquantums, welches in einer gegebenen Zeit ausfließt, letzterer durch Messung d. Gestalt d. Mittellinie d. ausfließenden parabolischen Strahls. Wenn man sich auf Grund dieser Versuche eine Tabelle herstellt, in welcher durch Interpolation d. Werthe von μ u. φ für regelmäßige Intervalle enthalten sind, so erkennt man deutlich, daß μ zunächst wächst bis zu einem max. Nach d. Versuchen war für $\beta = 0$: $\mu = 0{,}829$. Läßt man β wachsen, so wächst μ zu und erhält sein max für $\beta = 13°$. Dieses max beträgt $\mu = 0{,}945$. Weiter nimmt dann d. Ausflußcoeff. wieder ab und war bei $\beta = 45°$ wieder heruntergegangen bis auf $\mu = 0{,}857$. Wären d. Versuche noch weiter ausgedehnt, so wäre zu erwarten, daß für $\beta = 55°$ wieder derselbe Werth erhalten wie für $\beta = 0$ und schließlich für $\beta = 180°$ müßte werden $\mu = 0{,}62$ werden. Dieses Verhalten d. Ausflußcoeff. μ läßt sich leicht erklären. Derselbe ist zu betrachten als d. Product eines Contractions- und eines Geschw. Coeff. d. Contractionscoeff. ist für einen cylindrischen Rohrstück also $\beta = 0$: $\alpha = 1$, je mehr aber β wächst, desto mehr nimmt α ab und für $\beta = 180°$ hat α angenommen höchstens 0,64. d. Coeff. φ verhält sich aber gerade umgekehrt. Wenn d. Winkel β von 0 anfangend wächst, so wird offenbar d. innere Contraction ~~kein~~ hinfällt, welche beim Einfließen in d. Rohr stattfindet, immer geringer und geringer. Diese innere Contraction kein [illegible] in d. Ausflußgeschw. aber erzeugt eine, welche d. Geschw. Coeff. φ bedingt. Dieses besondere Verhalten d. Products $\alpha\varphi$ läßt erkennen, daß anfangs d. Geschw. Coeff. in stärkerem Grade wächst als α abnimmt, daß d. Product wachsen muß in geringerem Grade jedoch als φ; später jedoch nimmt d. Contractionscoeff. α schneller ab, als φ zunimmt, so daß d. Product abnehmen muß, wenn auch in geringerem Grade als α. —

Es erfolge d. Ausfluß durch ein System von n unmittelbar aufeinander folgenden kurzen cylindrischen Röhren. d. Querschnitte dieser aufeinanderfolgenden Rohrstücke seien $F_1, F_2 \ldots F_n$



wobei es gerade nicht nöthig ist, daß d. Querschnitte abnehmen. An d. Übergangsstellen von einem solchen Rohrstück zum anderen und ebenso zu Anfang d. ersten und am Ende d. letzten können sich im Allgemeinen auch Scheidewände befinden, in denen sich Ausflußöffnungen befinden, d. Größe derselben seien $A_1\ A_2 \ldots\ A_n\ A$. Fließt d. Wasser durch d. Öffnung A_1 und sich dann zum Querschnitt F_1 ausbreitet, kann wegen einer Zusammenziehung d. Flüssigkeitsstrahls stattfinden, so daß später A_1 ein kleinerer Querschnitt entstehen kann. d. Contractionscoeff. hierfür sei α_1, also $A_1\alpha_1$ d. kleinste Querschnittgröße $A_1 A_2$; d. folgenden übrigen Contractionscoeff. seien $\alpha_2\ \alpha_3 \ldots \alpha_n\ \alpha$. Fließt d. Wasser nun aus d. Querschnitt A_1 über in d. Querschnitt F_1, und bezeichnet man V d. pro Sek. abfließende Wasserquantum, so wird d. Geschw. d. Wassers plötzlich übergehen von $\frac{V}{\alpha_1 A_1}$ in $\frac{V}{F_1}$, ferner dadurch ein Widerstand verursacht, welcher pro 1 kg. Wasser d. früheren zufolge gleich gesetzt werden kann: $= \frac{1}{2g}\left(\frac{V}{\alpha_1 A_1} - \frac{V}{F_1}\right)^2$; indem ferner d. Wasser nun von Querschnitt $\alpha_2 A_2$ in d. Querschnitt F_2 übergeht, also d. Geschw. von $\frac{V}{\alpha_2 A_2}$ in $\frac{V}{F_2}$ übergeht wird dadurch ein Widerstand $= \frac{1}{2g}\left(\frac{V}{\alpha_2 A_2} - \frac{V}{F_2}\right)^2$ verursacht u. s. w. d. Gesammtwiderstand $\mathfrak{B}$ ist demnach:

$$\mathfrak{B} = \frac{1}{2g}\left(\frac{V}{\alpha_1 A_1} - \frac{V}{F_1}\right)^2 + \frac{1}{2g}\left(\frac{V}{\alpha_2 A_2} - \frac{V}{F_2}\right)^2 + \cdots \frac{1}{2g}\left(\frac{V}{\alpha_n A_n} - \frac{V}{F_n}\right)^2$$

$$\mathfrak{B} = \frac{V^2}{2g}\sum_{n=1}^{n=n}\left(\frac{1}{\alpha_n A_n} - \frac{1}{F_n}\right)^2$$

Wenn man im Anschluß mit diesem Gesammtwiderstand d. unbeschränkten Widerstand außer Acht läßt, so kann man nun passenderweise diesen Ausdruck als d. Widerstandsarbeit pro 1 kg. Flüssigkeit im Ganzen betrachten; dies ist dann d. Widerstandshöhe und es ergibt sich d. Widerstands-Coeff. ζ = diese Widerstandshöhe dividirt durch d.

Ausflußgeschw.-Höhe. Diese Ausflußgeschw. ist d. Geschw. im kleinsten Querschnitt d. ausfließenden Strahles: $= \frac{V}{\alpha A}$, da αA d. letzte Querschnitt ist, also d. Ausflußgeschw.-Höhe $= \frac{1}{2g}\left(\frac{V}{\alpha A}\right)^2$ und demnach:

$$\zeta = \frac{B}{\frac{1}{2g}\left(\frac{V}{\alpha A}\right)^2} = \sum_{m=1}^{m=n}\left(\frac{\alpha A}{\alpha_m A_m} - \frac{\alpha A}{F_m}\right)^2.$$

Aus diesem Ausdruck für d. Widerstandscoeff. ζ ergeben sich d. Ausflußcoeff. μ und d. Geschw.-Coeff. φ mit d. Gl.:

$$u = \mu\sqrt{2gH} \quad \text{und} \quad V = \mu A\sqrt{2gH}:$$

$$\varphi = \sqrt{\frac{1}{1+\zeta}} \quad \text{und} \quad \mu = \alpha\varphi.$$

Diese Formel mag nun zunächst auf folgenden Specialfall angewendet werden: Es seien beispielsweise d. sämmtlichen Wandquerschnitte untereinander gleich und zwar $= F$, also

$$F_1 = F_2 = F_3 = \ldots\ldots F_n = F.$$

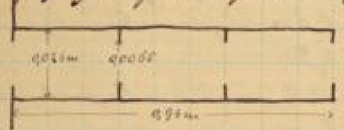
Ebenso sei auch:

$$A_1 = A_2 = A_3 = \ldots\ldots A_n = A$$

und

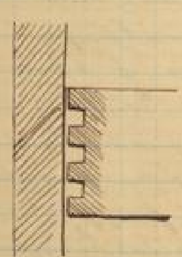
$$\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = \ldots\ldots \alpha_n = \alpha$$

In diesem Falle ist $\zeta = n\left(1 - \frac{\alpha A}{F}\right)^2$. Zur Prüfung dieser Formel, wie überhaupt zur Prüfung d. Anschauungsweise dieser Formel ist ein bemerkenswerther Versuch von Eytelwein zu benützen: Er benutzte eine cylindrische Ansatzröhre von 0,94 m Länge, welche durch Wände an d.



Enden und in d. Mitte in 3 Abtheilungen abgetheilt war. D. Weite d. Röhre selbst betrug 0,026 m und d. d. kreisförmigen Öffnungen 0,0065 m; er hat gefunden d. resultirende Ausflußcoeff. $\mu = 0{,}331$ und es fragt sich, ob dieses Resultat in Übereinstimmung ist mit d. Formel für ζ: für diesen Fall ist $n = 3$ und ferner $\frac{A}{F} = \frac{1}{16}$. Hierbei kann man d. Contraction mit genügender Annäherung als eine normale betrachten, man kann also α d. bisherigen Erfahrungen entsprechend $= 0{,}64$ setzen. Diese Werthe in obige Formel für ζ eingesetzt giebt: $\zeta = 3\left(1 - \frac{0{,}64}{16}\right)^2 = 2{,}7648$ also $\varphi = \sqrt{\frac{1}{1+\zeta}} = 0{,}5155$ und schließlich $\mu = \alpha\varphi = 0{,}64 \cdot 0{,}5155 = 0{,}330$, also ist vollkommene Übereinstimmung mit d. Versuch. Es kann dieser Versuch namentlich dazu dienen d. hier zu Grunde liegende Anschauungsweise zu bestätigen. — Wenn man diese einzelnen Scheidewände nun auch näher aneinander rücken ließe, also d. ganze Länge d. Röhre kleiner werden ließe, so zeigt sich anfangs kein wesentlicher Unterschied von μ, wenn aber diese Verkürzung eine gewisse Grenze überschreitet, so fängt μ an zu wachsen. Dies ist leicht erklärlich, denn es hat hierbei d. Wasserstrahl nicht genügend Zeit, sich wieder bis zum vollen Querschnitt d. Röhre auszubreiten bevor er durch d. folgende Öffnung tritt. Ähnlich wird derselbe wirken als wenn $\frac{A}{F}$ größer wäre. —

Von dieser Vergrößerung d. Widerstandes durch wiederholte Querschnittsänderung läßt sich unter Andern bei Kolbenliderungen ein nützlicher Gebrauch machen. Es kann nämlich manche Fälle geben, wie z. B. dann bei Kolbenliderungen, daß man dann entweder, d. Durchfluß einer auf d. einen Seite d. Kolbens befindlichen Flüssigkeit nach d. anderen Seite hin möglichst zu verhindern, wo es anderseits dann unerwünscht erkennt, d. Kolben eine große Reibung hin und her bewegen zu lassen. Dieser Zweck kann man bis zu einem gewissen Grade damit erreichen, daß man d. Kolben mit einer Anzahl umlaufender Nuthen versieht, wie nebenstehende Skizze zeigt. D. Kolben habe also n solcher



umlaufenden Nuthen, dann ist d. Spielraum nun d. einen Seite d. Kolbens gegenüber d. anderen Seite durch eine solche Abflußröhre, die hier nur eine Ringform hat. Zunächst wird ein solcher Ringquerschnitt passirt, dann erweitert sich plötzlich d. Querschnitt um ein Bedeutendes und zieht sich dann darauf plötzlich wieder zusammen u. s. w. Man wird man es also mit einer solchen zusammengesetzten Ausflußröhre von ringförmigem Querschnitt zu thun haben. Es seien nun in d. Kolben n solcher Nuthen vorhanden, dann kommen für d. Ganzen $2n+1$ verschiedene Querschnitte vor; d. Querschnitte $F_1 = F_3 = F_5 = \ldots\ldots F_{2n+1}$ sind alle gleich und sehr klein. Sind d. Nuthen nun alle gleich tief so sind auch $F_2 = F_4 = \ldots\ldots F_{2n}$. D. entsprechenden ersten $n+1$ Querschnitte seien mit F_1 bezeichnet, d. anderen mit F_2; besondere Scheidewände können wir [illegible]

Es sind also alle d. in obiger Formel mit A bezeichneten Größen = $\mathfrak{F}_1$ und d. mit $\mathfrak{F}$ bezeichneten = $\mathfrak{F}_2$. Was d. Contractionscoeff. betrifft, so sind sie beim Eintritt = 1, Austritt von 1 verschieden. Eine Contraction findet nur statt da, wo d. Flüssigkeit in d. engeren Querschnitt einfließt, es ist also $\alpha_1 = \alpha_3 = \ldots\ldots \alpha_{2n+1}$, wir dieselben alle mit α_1 bezeichnet werden, im übrigen dagegen ist: $\alpha_2 = \alpha_4 = \ldots \alpha_{2n} = 1$ und ebenso d. Coeff. α d. äußersten Contraction. In d. allgemeinen Formel besteht nun ζ aus $2n+1$ Summanden. Von diesen sind $n+1$ unter sich gleich und d. übrigen n auch. D. ersteren erhält man, wenn man d. Zeiger d. Reihe nach d. Werthe $1, 3, 5 \ldots 2n+1$ beilegt, von denen jeder $= \frac{1}{\alpha_1} - 1$ sein wird, also $(n+1)(\frac{1}{\alpha_1}-1)^2$. D. übrigen n Summanden sind auch untereinander gleich und zwar da $\alpha_m = 1$, $A_m = \mathfrak{F}$, $\mathfrak{F}_m = \mathfrak{F}_2$ ist, $= 1 - \frac{\mathfrak{F}_1}{\mathfrak{F}_2}$, also erhält man: $n(1-\frac{\mathfrak{F}_1}{\mathfrak{F}_2})^2$ und folgt:

$$\zeta = (n+1)(\frac{1}{\alpha_1}-1)^2 + n(1-\frac{\mathfrak{F}_1}{\mathfrak{F}_2})^2.$$

Was d. Coeff. α_1 betrifft, so muß man berücksichtigen, daß d. Contraction überall da, wo d. Flüssigkeit in einen engeren Querschnitt eintritt, nur eine partielle Contraction ist, dagegen ist d. weitere Flüssigkeit [illegible], es ist für d. Partialität d. Contraction ungefähr $= \frac{1}{2}$. Man kann also d. Contractionscoeff. α_1 = demjenigen setzen, welcher unter sonst gleichen Umständen bei vollständiger Contraction stattfindet, multiplicirt mit $(1+0{,}155\cdot\frac{1}{2})$. D. Contractionscoeff., welcher unter sonst gleichen Umständen bei vollständiger Contraction stattfindet, kann auch hier wieder $= 0{,}64$ gesetzt werden, also:

$$\alpha_1 = 0{,}64(1+0{,}155\cdot\tfrac{1}{2}) = 0{,}6896.$$

Mit diesem Werth wird $(\frac{1}{\alpha}-1)^2 = 0{,}2025$ also annähernd $= 0{,}2$, und somit ergibt sich:

$$\zeta = \left[0{,}2 + (1-\frac{\mathfrak{F}_1}{\mathfrak{F}_2})^2\right]n + 0{,}2$$

D. Verhältniß $\frac{\mathfrak{F}_1}{\mathfrak{F}_2}$ ist meist sehr klein, so daß es gegen 1 vernachlässigt werden kann; dann ist: $\zeta = 1{,}2n + 0{,}2$ und zwar

für $n =$	2	4	6	8
ist $\zeta =$	2,6	5	7,4	9,8
$\mu = \varphi =$	0,527	0,408	0,345	0,304

und somit nach d. Formel $\mu = \varphi = \sqrt{\frac{1}{1+\zeta}}$

und endlich: $V = \mu A \sqrt{2gH}$ wenn A nur sehr klein ist. —

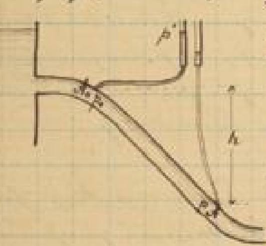
Bewegung des Wassers in längeren Röhren.

Es fließe jetzt d. Wasser in einer geraden od. nur schwach gekrümmten längeren cylindrischen Röhre; d. Länge derselben, $= l$, sei so groß, daß d. Leitungswiderstand derselben einen wesentlichen und in manchen Fällen d. hauptsächlichsten Bestandtheil d. Gesammtwiderstandes ausmacht. Dieser Leitungswiderstand, welcher von d. innern und äußeren Reibungen abhängt, ist erfahrungsmäßig von d. Dr. ganz unabhängig und unterscheidet sich dadurch wesentlich von d. Reibung 2 fester Körper. Es ist dadurch nachgewiesen, daß man d. äußeren Druck in d. Oberfl. d. Wassers und an d. Mündung d. Röhre um Beliebiges vergrößerte und zwar um mehr als 1 Atm.; es fand sich dadurch nicht im Geringsten eine Änderung im Leit.-Widerstand. Es unterscheidet sich aber d. Zustand d. Wassers in verschiedenen Querschnitten d. Röhre durch weiter nichts als durch d. dort herrschenden verschiedenen Dr. u. da dieselbe keinen Einfluß hat auf d. Leitungswiderstand d. Röhre, so ist d. Leitungswiderstand einfach proportional d. Länge, also d. Leitungswiderstand pr. Längeneinheit in allen Stellen d. Röhre gleich; es kann also derselbe $= l\,\mathfrak{B}_1$ gesetzt werden, wo $\mathfrak{B}_1$ d. Leitungswiderstand pr. Mtr Länge bedeutet, wobei es ganz gleichgültig ist, ob in d. ersten Längeneinheit ein grösserer Druck herrscht, als in d. letzteren. Außer diesem Leitungswiderstand können auch noch besondere Widerstände vorkommen, wie früher besprochen z.B. ein besonderer Eintrittswiderstand; ist dieser eben $\zeta \frac{u^2}{2g}$ d. übrigen gesamte Widerstandshöhe, dann ist: $B = \zeta \frac{u^2}{2g} + B_1 l$. — Gesamtwiderstandshöhe für d. Last. in d. Röhre, wo u d. mittlere Wassergeschw. bedeutet. —

Es handelt sich nun zunächst darum, durch Versuche d. Grösse B_1 zu ermitteln, also d. Leitungs... von B_1 = spez. Leitungswiderstandshöhe. Es kann dies auf verschiedene Weise geschehen. Erinnern wir uns d. Grundformel: $\frac{u^2 - u_0^2}{2g} = H - B$, welche Formel sich bezieht auf d. Last. von einem beliebigen Querschnitt d. Rohrleitung bis zu einem anderen, u d. mittlere Geschw. im Endquerschnitt und u_0 d. im Anfangsquerschnitt, H d. wirksame Druckhöhe für d. ganze Rohrstrecke und B d. Widerstandshöhe. — Bezieht man nun diese Gl. auf d. Last. von d. Oberfl. d. Wassers im Gefäss bis zur Mündung d. ganzen Röhre, so ist $u_0 = 0$ und $B = \zeta \frac{u^2}{2g} + l B_1$, also:

$$H = (1+\zeta)\frac{u^2}{2g} + l B_1.$$

wo H in diesem Falle $= h + \frac{p_0 - p}{\gamma}$ ist, wobei p_0 d. äusseren Druck an d. freien Oberfl. d. Wassers im Ausflussgefäss und p an d. Mündung, während h d. Höhe d. freien Wasseroberfl. im Ausflussgefäss über d. Schwerpunkt d. Mündung od. dem Unterwasserspiegel bedeutet. Diese Gl. in Verbindung mit $u = \frac{V}{F}$ kann dazu dienen, d. Grösse B_1 zu ermitteln, wenn d. Grössen l, d. wirksame Druckhöhe H und d. Rohrquerschnitt F bekannt sind und wenn man ferner durch Versuche d. p. Sek. ausfliessende Wasservolumen V misst und d. Coeff. ζ kennt. Natürlich wird man d. Versuche so anstellen, dass derartige besondere Widerstände nicht viel vorkommen. Dann kann man B_1 in jedem Fall ermitteln und thut man dies für möglichst viele verschiedene Fälle, so wird sich ein empirisches Gesetz ergeben, wie B_1 von d. verschiedenen Umständen abhängig ist. — Dieses Verfahren ist indessen weniger genau, wie leicht einzusehen, indem man diesen zunächst abhängig ist von d. Fehlern d. d. B_1 und V u. ζ anhaften. D. Versuche sind nun so angestellt worden, dass man von diesen Mängeln möglichst unabhängig war.



Es wird eine beliebig lange Röhre genommen, A_0 u. A seien 2 Querschnitte derselben, und zwar liege A_0 in einer Höhe h über A. Es werden nun mit dieser Leitungsröhre 2 beliebig enge Zweigröhren ~~verbunden~~ mit einem bestimmten Verbindungsstück, verbunden und diese werden nach d. anderen Seiten 2 oben offenen Glasröhren geführt, d. neben einander stehen. Es wird dann d. Wasser in diesen Glasröhren verschieden hoch stehen. Nun besteht eine ganz einfache Beziehung zwischen d. Differenz dieser Wasserhöhen und d. gesammten Widerstandshöhe für d. Rohrstrecke $A_0 A$. Es sei p_0 d. Dr. in A_0 und p d. in A; p' sei d. äussere atm. Druck, an d. Glasröhren sich befindend. Dann ist d. Höhe d. Wasserspiegels in d. ersten Glasröhre über A_0 einfach ein Maass für d. Unterschied d. Drucks p_0 über p' u. zwar ist d. Höhe d. Wassers in d. Glasröhre über $A_0 = \frac{p_0 - p'}{\gamma}$, folglich ist d. Höhe d. Wasserspiegels in d. ersten Glasröhre über d. unteren Querschnitt d. Leitungsröhre um h grösser als $\frac{p_0 - p'}{\gamma}$. Andererseits ist d. Höhe d. Wasserspiegels in d. 2ten Glasröhre über A ein Maass für d. Unterschied d. Drucks p über p' oder $= \frac{p - p'}{\gamma}$. Zieht man d. Höhe d. Wasserspiegels in d. 2ten Glasröhre über A ab von d. ersten über A, so erhält man d. Höhendifferenz: $h + \frac{p_0 - p'}{\gamma} - \frac{p - p'}{\gamma} = h + \frac{p_0 - p}{\gamma} = H$ d.h. = d. wirksamen Druckhöhe für d. Rohrstrecke $A_0 A$; die mittlere Geschw. u_0 ist $= u$, also ist $H = B$. Wählt man d. Stellen A_0 u. A so, dass d. Strecke $A_0 A$ geradlinig ist, also keine besonderen Widerstände vorkommen, so ist $B = l B_1$, also $B_1 = \frac{H}{l}$ und man wird B_1 um so genauer finden, je grösser H ist. —

Diese Versuche zur Bestimmung von B_1 sind hauptsächlich mit gusseisernen Röhren von kreisförmigem Querschnitt angestellt worden, jedoch sind auch Versuche mit gezogenen schmiedeeisernen Röhren, ferner mit Messing-, Zink-, Blei-, Asphalt-, Glas- und Thonröhren angestellt worden, welche Versuche erkennen lassen, dass bei ähnlicher Gestalt und Beschaffenheit d. Röhren d. Material nicht viel auf d. Leitungswiderstand einwirkt; sind jedoch d. Röhren rauher, so ist d. Leitungswiderstand grösser z.B. bei rauhen Gussröhren ist d. Leitungswiderstand $1\frac{3}{4}$ mal so gross wie bei guten Eisenröhren. Sind d. Röhren

ab, also schon mit Luft und Schlamm besetzt, so kann d. Leitungswiderstand nicht doppelt messen.
Um eine Formel für d. Abhängigkeit von B_1 zu finden, müssen alle Fälle von ungewöhnlicher Rauhheit d. Wandf. ausgeschlossen werden von d. Versuchen, denn da diese Abweichung ja nicht bezüglich auf ihren Grad definirt werden können, so hat eine solche Formel gar keinen Werth und mit Rücksicht auf d. Mängel d. in d. Praxis thatsächlich vorgekommenen Leitungsröhren kann man sich dann entschließen, d. Größe B_1 um einen Procentsatz d. Sicherheit wegen zu erhöhen.
Wenn es, wie d. Absicht, für d. Größe B_1 eine empirische Formel aufzustellen, zunächst von d. Vorstellung ausgegangen, daß d. Wasser sich wie ein compakter cylindrischer Körper durch d. Röhre hindurchbewegt, wenn jetzt also d. Geschw. u als eine einheitlich in allen Punkten d. Querschnitts vorhandene Geschw. betrachtet. Geht man nun davon aus, so besteht d. Leitungswiderstand lediglich in d. Reibung dieser Wassermasse an d. inneren Rohrwandfläche. Bezeichnet man dann diese Reibung z. Flächeneinheit d. Rohrwand mit R' u. d. Umfang d. inneren Querschnitts mit U, so ist $R'U$ d. Reibungswiderstand z. Längeneinheit d. Röhre. D. Arbeit dieser Reibung ist dann pro Sek. $= R'Uu$. Setzen aber d. pro Sek. durch jeden Querschnitt d. Leitung fließende Wassergew. $= \gamma F u$ ist, so ist d. Arbeit d. Leitungswiderstandes pr. 1 kg. Wasser: $B_1 = \frac{R'U}{\gamma F}$. Ist insbesondere d. Querschnitt kreisförmig vom Durchmesser d, so ist: $U = \pi d$ und $F = \frac{\pi d^2}{4}$ also $B_1 = \frac{R'}{\gamma} \cdot \frac{4}{d}$.
Man kann sich aber auch derselben Formel bedienen, wenn d. Querschnitt eine andere Gestalt hat, wenn man dann nur unter d d. sog. mittleren Durchmesser versteht, so daß also d = d. ~~4fache~~ 4fache Inhalt dividirt durch d. Umfang d. Querschnittes bedeutet. Setzen nun ferner diesen spec. Leitungswiderstand sich zunächst d. Rohrweite d umgekehrt proportional ist, so ist man nur noch d. Coefficienten $\frac{R'}{\gamma}$ als eine empirische Function d. Geschw. u darzustellen.
Es sind namentlich d. Beobachtungen von Couplet, 26 von Bossut u. 18 von Dubuat, welche zu diesem Zwecke vorzugsweise benutzt werden; dabei ist es immer von Interesse zu wissen, zwischen welchen Grenzen d. maßgebenden Größen sich bei solchen Versuchen bewegt haben. Es sei deßhalb bemerkt, daß bei allen diesen Versuchen d. Rohrweite d zwischen d. Grenzen $d = 0{,}027$ bis $0{,}49$ m lag und daß $u \leqq 2$ m. Auf Grund dieser Versuche sind nun sehr mannigfache empirische Formeln für d. Größe $\frac{R'}{\gamma}$ aufgestellt worden. Die erste solche Formel von einiger Brauchbarkeit rührt her von d. Wasserbaudirector Woltmann aus Hamburg; derselbe legt d. Formel zu Grunde:

$$\frac{R'}{\gamma} = a u^n$$

Fand derselbe ermittelte $n = \frac{7}{4}$; einige Jahre später 1796 ermittelte Eytelwein diese Formel dahin, daß er $n = \frac{35}{18}$ setzte. Noch später wurde dieselbe Formel von St. Venant zu Grunde gelegt und da dieselbe d. am sorgfältigsten bestimmte war, so soll dieselbe vollständig angegeben werden; sie heißt:

$$\frac{R'}{\gamma} = 0{,}0002956\, u^{\frac{12}{7}} \quad \text{(Längeneinheit = m).}$$

Später im Jahre 1802 legte zuerst Prony eine andere Formel zu Grunde u. setzte

$$\frac{R'}{\gamma} = a u^2 + b u$$

worin zu setzen ist: $a = 0{,}000348$ und $b = 0{,}0000173$.
Auch Eytelwein schloß sich später dieser Formel an, er bestimmte aber d. Coeff. auf Grund derselben Versuche wesentlich anders, er setzte: $a = 0{,}000280$ und $b = 0{,}0000224$.
D'Aubuisson unterwarf d. sämtlichen 51 Fundamentalversuche gleichfalls einer neuen Rechnung und bestimmte d. Coeff. wieder anders, nämlich: $a = 0{,}000343$ und $b = 0{,}0000188$.
Weisbach ging von vornherein von einem andern Ausdruck aus, er setzte:

$$B' = \zeta \frac{u^2}{2g}$$

, worin ζ d. Leitungscoeff. z. Längeneinheit Röhre bedeutete. Unter einem solchen wird allgemein diejenige Zahl verstanden, mit welcher d. Geschw.h. d. Wassers multiplicirt werden muß, um d. Gefäll-Höhe zu erhalten. Setzen wir diesen Coeff., entsprechend d. vorhin zu Grunde liegenden Anschauungsweise, d. Durchmesser d umgekehrt proportional gesetzt wird, ergiebt sich:

$$B' = \frac{\lambda}{d} \frac{u^2}{2g}$$

wo λ nun ein empirisch zu bestimmender [illegible] für B [illegible], so folgt:

$$\lambda = \frac{2g}{u^2}\,\frac{4R'}{r} = \frac{8g}{u^2}\,\frac{R'}{r}.$$

Wenn also [illegible]

$\frac{R'}{r} = au^2 + bu$ gesetzt wird, so ist: $\lambda = \alpha + \frac{\beta}{u}$, wo $\alpha = 8ga$ und $\beta = 8gb$ ist. [illegible] Weisbach [illegible] 51 [illegible] 12 [illegible] 11 [illegible] 4,6 cm z. Dm. [illegible] Weisbach [illegible] 63 Versuche [illegible] λ [illegible] $= \alpha + \frac{\beta}{u}$ gesetzt würde, sondern $= \alpha + \frac{\beta}{\sqrt{u}}$; [illegible] α [illegible] β [illegible] 63 Versuche [illegible]:

$$\lambda = 0{,}01439 + \frac{0{,}009471}{\sqrt{u}}.$$

[illegible] Weisbach [illegible] 21 – 22 cm z. Dm. [illegible] λ [illegible] u [illegible] λ [illegible] u. —

[illegible] Darcy [illegible] Chaillot in Paris [illegible] 22 [illegible] 3 [illegible] 100 m lang [illegible] $d = 0{,}012$ bis $d = 0{,}5$ m; [illegible] $u = 0{,}16$ m bis 5 m z. Sek. [illegible] Darcy [illegible] Darcy [illegible]:

$$\frac{R'}{r} = \left(0{,}000507 + \frac{0{,}00001294}{d}\right)u^2.$$

[illegible] $u > 0{,}2$ m sei. [illegible] $\frac{R'}{r}$ [illegible]

Mit Rücksicht auf [illegible] λ und $\frac{R'}{r}$, [illegible] λ [illegible] $\alpha + \frac{\beta}{d}$, [illegible] λ [illegible]

Weisbach'schen Versuchen k mit abnehmendem u u. d wachsen wird, wird nach Darcy k einzig und allein mit abnehmender Rauhheit wachsen, wie auch von Weisbach d. Gesetz d. Abhängigkeit nicht bestimmt. Es sind nun diese Darcy'schen Versuche später von Andern benutzt worden, um es zu versuchen, d. Gesetz d. Widerstandes noch genauer zu bestimmen. Zunächst ist ein solcher Versuch von Gauckler gemacht worden. Er schreibt mit d. Darcy'schen Versuchen, daß sich für B_1 folgende empirische Formel ergibt:

$$B_1 = \left(\frac{u^{\frac{1}{2}} + \frac{\alpha}{4} u^{\frac{1}{4}}}{\alpha\, d^{\frac{1}{4}}}\right)^2.$$

wo u d. mittlere Geschw., d d. Rohrweite bedeutet, während α ein Coeff. ist, welcher für verschiedenartige Röhren und verschiedenen Zuständen derselben verschieden ist, und zwar bestimmt Gauckler für Asphalt- und Bleiröhren $\alpha = 7,0$; für Glas $\alpha = 6,7$; für neue Gußeisenröhren $\alpha = 6,6$; für gezogene Eisenröhren $\alpha = 6,4$; für unreine Gußeisenröhren $\alpha = 5,5$. Hiernach wäre d. ungünstigste Verhältniß d. Widerstandshöhe B_1 für gußeisernes Röhren in unreinem Zustande über d. günstigsten: $=\left(\frac{6,6}{5,5}\right)^2 = 2,07$. Vergleicht man diesen Ausdruck für d. spez. Leitungswiderstandshöhe mit d. Ausdruck für $B_1 = \frac{\lambda}{d}\frac{u^2}{2g}$, dessen wir uns bis jetzt vorzugsweise bedienen wollen, so folgt daraus:

$$\lambda = \frac{2g}{\alpha^2}\frac{\left(1 + \frac{\alpha}{4u^{\frac{1}{4}}}\right)^2}{d^{\frac{1}{2}}}.$$

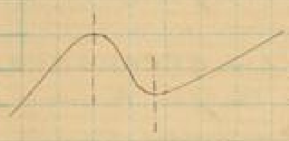
demgemäß d. Coeff. λ in Uebereinstimmung mit d. früher besprochenen Erfahrungen desto größer sein, je kleiner u ist; was aber d. Abhängigkeit von d betrifft, so ist sie eine zusammengesetzte; d. Zähler nimmt d. Nenner wächst mit d, es zeigt sich jedoch, daß es für jede Geschw. einen bestimmten d gibt, für welchen λ ein Min. wird. Wenn man bei gegebenem Werthe von u diesen Ausdruck als eine Function von d betrachtet und untersucht, für welchen Werth von d dieser Ausdruck ein Min. wird, so findet man $d = \frac{4}{11} u^{\frac{1}{4}}$. Es wird also, wie kaum anzunehmen ist, nach dieser Formel für jede mittlere Geschw. ein besonderer Rohrdurchmesser resultiren, für welchen d. Geschw. verhältnißmäßig am größten wäre.

also für:	$d =$	0,346	0,364	0,432	0,514 m
für:	$u =$	0,5	1	2	4

Diese Formel scheint auch kaum empfehlenswerth für d. Gebrauch, wenngleich kann sie als d. richtige Abhängigkeitsgesetz d. Widerstandshöhe betrachtet werden. Auch ist zu bemerken, daß d. Coeff. welche für d. verschiedenen Rohrweiten verschieden sind, nicht nur in sich begreifen d. Einfluß d. verschiedenen Materials und d. verschiedenen Oberfl.-Beschaffenheit, sondern auch d. bei diesen verschiedenen Röhren vorkommenden Abweichungen von d. cylindrischen Form, welche mehr oder weniger zufällig sind. Zur Bestimmung von d sind von Gauckler benutzt nicht d. Versuche mit solchen Röhren, welche von kleinen abnormen Werthen sind, namentlich d. Versuche an Glasröhren sind nicht gut zu brauchen, da dieselben immer nicht gerade waren, so daß d. Durchmesser zwischen 53 u. 44 mm schwankte, womit also unbedingt plötzliche Querschnittsänderungen verbunden sind. Ebenso verhält es sich mit d. Asphaltröhren; diese konnten kaum mit Sicherheit benutzt werden, um d. Abhängigkeitsgesetz von B_1 zu ermitteln, weil d. Asphalt nur anfangs im ursprünglichen Zustande aufgetragen wird und nicht immer auch gleichmäßig wird. Auch d. Versuche mit d. gezogenen Röhren haben kaum verwendet werden dürfen, weil d. Schweißnähte schon einen merklichen Einfluß ausüben konnten. D. Formel ist demnach als schematische nicht gut verwendbar. —

D. Leitungswiderstandshöhe B_1 kann auch von andern Umständen abhängig sein. Daß zunächst d. Abs. Flüssigkeit noch dazu beiträgt, ist klar; jedoch wollen wir uns hier nur auf d. Versuche mit Wasser beziehen. D. Größe B_1 kann auch von d. Wärmezustande abhängen, welcher wiederum von d. Temp. der Temperatur abhängt. Daß d. Temp. keine unerhebliche Aenderung ausübt, ist schon gezeigt, d. Mittel also nur eine Aenderung von B_1 durch d. Temperatur denkbar. Hiermit auf diesen Umstand schon im Jahre 1800 von Gerstner hingewiesen worden, worin angegeben, daß d. Menge d. durch eine enge Röhre abfließenden Wassers unter sonst gleichen Umständen sich verdoppeln kann, wenn d. Temperatur um 30° C. wächst. Dieser merkliche Einfluß d. Temperatur ist später von Oberbaurath Hagen in Berlin beobachtet worden, freilich auch nur mit Röhren von geringen Weiten

Weise für d. Rohrquerschnitt verwendet werden und für mittlere Geschw. Er brauchte bei seinen bekanntlichen Versuchen 3 verschiedene Röhren; sie waren alle aus Messingblech zusammengebogen und über Metalldornen möglichst cylindrisch ausgezogen. Diese 3 sehr cylindrischen, innerlich glatten Röhren hatten einen Durchmesser von ca. 2,8, 4 u. 6 mm, d. engste war 0,5 m lang, d. beiden weiteren über 1 m. d. Geschw. u bewegten sich d. Grenzen 0,07 – 0,88 m und d. Temperatur d. Wassers wurde variirt über 67° R. Es zeigte sich nun ein allgemeines folgendes Verhalten: Wenn unter sonst gleichen Umständen d. Temperatur d. abfließenden Wassers successive höher wurde, so nahm zuerst d. z. B. ausfließende Wassermenge, also u, bis zu einem gewissen max. zu; wurde dann ferner d. Temperatur d. Wassers weiter erhöht, unter sonst gleich bleibenden Umständen, so nahm d. Wassermenge wieder allmälig u. ab und zwar also schnell wie sie früher zunahm, bis zu einem gewissen min. Wurde ferner erhöht, d. Wassermenge wieder zu, weniger schnell als sie vorher zu und abnahm; so hat d. Geschw.-Curve, deren Abscissen d. Temperaturen und deren Ordinaten d. Geschw. u sind, nebenstehende Gestalt. Bei d. beiden



Temperaturen, die d. max. u. min. von u entsprechen, liegen 10° bis 20° auseinander. d. Lage dieser Temperaturen ist aber wesentlich abhängig von d. Röhrenweite und d. mittleren Geschw. Je größer u u. d waren, desto tiefer liegen diese Temperaturen; wachsen u u. d über gewisse Grenzen, so kann es vorkommen, daß diese Temperaturen bis unter d. Gefrierpunkt sinken, so daß dann thatsächlich nur d. zweite Abschnitt dieser Geschw.-Curve zu Tage tritt. Dies ist nun unter solchen Umständen, d. in d. Praxis vorkommen, fast immer d. Fall. es würden diese beiden Temperaturen unter d. Nullpunkt fallen, wenn $ud > 0{,}00375$ ist, und dies wird bei d. Verhältnissen d. technischen Anwendungen fast immer d. Fall sein. Für diesen Secundären 2. Abschnitt d. Geschw.-Curve nennt man diese Stück d. ersten Abschnitt, d. h. d. 1ter Abschnitt. – Es ergibt sich aus d. Hagen'schen Versuchen, wenn sie ausgeführt werden mit d. Formel: $\mathfrak{B}_1 = \frac{k}{d}\frac{u^2}{2g}$:

$$k = \frac{0{,}000496\,(22{,}6-\sqrt{t})}{\sqrt{ud}},$$ wenn t d.

Temperatur d. Wassers in Reaumur'schen Graden bedeutet.
Es wird daraus d. einfache Formel: $k = \frac{0{,}01}{\sqrt{u}}$ entsprechend für $t = 6°$ R. Außerdem ist nach diesen Hagen'schen Versuchen d. Geschw. von u u. d abhängig: für d. ersten Abschnitt d. Geschw.-Curve, also für solche Temperaturen, d. kleiner sind als d. dem max. von u entsprechenden und also d. min. d. Leitungswiderstandes entsprechen, ergibt sich ein anderes Gesetz dieses Widerstandes. Hagen stellt d. Widerstandshöhe für diesen Fall in Grenzen auf verschiedenen Gleichungen her, von denen eine in bedeutend überwiegender Größe ist nur von $\mathfrak{B}_1 = b\frac{u}{d^2}$, unter b einen von d. Temperatur abhängigen Coeff. verstanden, wonach also: $k = \frac{\beta}{ud}$ ist; d. Coeff. b u. β sind daher in anderer Weise von d. Temp. abhängig als d. Ziffer von k für d. 1ter Abschnitt es war, und zwar ergibt sich für d. 2ten Abschnitt:

$$\beta = \beta_0(\sqrt[3]{80} - \sqrt[3]{t}). –$$

Man hat also nur nach d. Versuchen eine vielfach geeignete Grundlage von Widerstandsformeln, und es frägt sich, welche Formel man d. Vorzug geben soll, wenn man d. beiden Ziele: wissenschaftlicher Werth und praktische Brauchbarkeit mit einander verbinden kann, so ist dies natürlich am besten. Dies hat Hagen gethan, nämlich d. Darcy'schen Versuche zu benutzen, um daraus d. Abhängigkeitsgesetz d. Widerstandes in wissenschaftlicher Weise aufzuklären und doch eine Formel zu erlangen, d. für d. praktischen Gebrauch geeignet ist. Hagen ging von d. Ansicht aus, daß d. Zweifel, welche bisher bezüglich auf d. Leitungswiderstand hinsichtlich dessen herrschten, daß man bei d. praktischen Versuchen nicht sorgfältig genug alle d. Umstände aufgezeichnet hatte, d. nicht zum Gebrauch geeignet waren. Hagen hat nun alle diejenigen von d. Darcy'schen Versuchen ausgeschieden, welche nicht d. volle Genauigkeit hatten, es wurden zunächst ausgeschieden d. Glasröhren, d. Asphaltröhren und endlich auch d. gezogenen Röhren samt d. sehr gebräuchlichen Röhren; es bleiben also nur d. Versuche übrig mit d. gewöhnlichen gußeisernen Röhren, ferner mit 3 Bleiröhren und mit einer gezogenen eisernen Röhre von größerem Durchmesser, im Ganzen 8 gußeiserne Leitungsröhren, ein Bleirohr und eine gezogene Röhre. Mit diesen verschiedenen Röhren liegen nun 87 brauchbare Beobachtungen vor, um einen Ausdruck für d. Leitungswiderstandshöhe zu gewinnen. Bei diesen Versuchen lag d. mittlere Geschw. zwischen d. Grenzen

$u = 0{,}16$ bis 5 m p. Sek. und d. Rohrweiten zwischen $d = 0{,}014$ bis 0,5 m. Unter verschiedenen empirischen Formeln zur Darstellung d. Abhängigkeitsgesetzes d. Größe B_1 zeigte sich am brauchbarsten folgende:

$$B_1 = a\frac{u^2}{d} + b\frac{u}{d^2}$$

worin nach d. 87 Versuchen sich ergaben:

$$a = 0{,}0011193 \text{ und } b = 0{,}0000005336.$$

[illegible] Hagen diesen unmittelbar aus d. [illegible] Darcy'schen Untersuchungen abgeleiteten Werth von a u. b [illegible] Correction, um sie mit seinen eigenen Beobachtungen besser in Übereinstimmung zu bringen. [illegible] B_1 [illegible] Hagen [illegible] Hagen [illegible] b:

$$b = 0{,}000005871 - 0{,}0000000267\,t + 0{,}000000000735\,t^2$$

unter t d. Temp. in Reaumur'schen Graden verstanden. [illegible] Hagen'schen Versuchen [illegible] b [illegible] Darcy [illegible] $t = 2{,}11°$ R. [illegible] Darcy'schen Versuche [illegible] b [illegible] d. Monaten October u. Mai [illegible] $2{,}11°$ R. [illegible] Hagen'schen Versuchen $t = 10°$, so ergibt sich d. [illegible] Werth:

$$b = 0{,}000003936.$$

[illegible] b [illegible] Hagen [illegible] B_1 [illegible]: $a = 0{,}0012017$. [illegible] b [illegible] b [illegible] b $= 0{,}0000014$ [illegible] b [illegible]: $- 0{,}0000010$. [illegible]

[illegible] B_1 [illegible], während $a = 0{,}0012017$ ist aber b nur d. Temp. abhängig während für $t = 10°$ R. $b = 0{,}000003936$ ist.

[illegible] d. Formel: $B_1 = \frac{\lambda}{d}\frac{u^2}{2g}$ [illegible], dann ist:

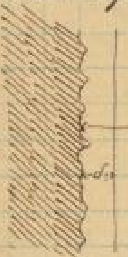
$$\lambda = 2g\left(a + \frac{b}{ud}\right) \text{ oder } = \alpha + \frac{\beta}{ud} \text{ worin:}$$

$$\alpha = 0{,}023577 \text{ und } \beta = 0{,}00011519 - 0{,}0000041912\,t + 0{,}00000009229\,t^2$$

worin nun aber t in Celsius'schen Graden zu verstehen ist; setzt man d. mittlere Temp. [illegible] $= 10°$ C. so wird d. mittlere Werth von β: $\beta = 0{,}0000251$.

[illegible] Darcy'schen u. Hagen'schen Versuchen [illegible] λ [illegible] λ [illegible] 20% [illegible]

[illegible] B_1, also $a\frac{u^2}{d} + b\frac{u}{d^2}$ [illegible] $\lambda = \alpha + \frac{\beta}{ud}$ [illegible] behandelt werden, indem derselbe herrührt theils von d. äußeren Reibung theils von d. inneren Reibung d. Wassers, dementsprechend [illegible] gesetzt werden $E_1 = \mathfrak{E}_1 + \mathfrak{J}_1$, wo $\mathfrak{E}_1$ denjenigen Bestandtheil von E_1 bedeutet, d. von d. äußeren Reibung herrührt und $\mathfrak{J}_1$ d. von d. inneren Reibung herrührenden Bestandtheil von E_1. D. äußere Reibung, welche d. Bestandtheil $\mathfrak{E}_1$ entspricht, ist, insofern sie von d. inneren Reibung unabhängig ist, zurückzuführen auf gewisse [illegible] Hervorragungen und Vertiefungen; [illegible]



d. Rohrwand [illegible]. Wenn nun d. Wasser an d. Rohrwand entlang fließt, so wird durch diese Hervorragungen eine plötzliche Änderung d. Geschw.-Größe also auch d. Geschw.-Richtung stattfinden; fließt d. Wasser gegen eine solche Hervorragung, so wird es [illegible] gegen d. Innere hin. [illegible] Da diese [illegible] Vorgang [illegible] werden kann, so kann man sich dadurch helfen, daß man d. Einfluß dieser äußeren Reibung zunächst als sich [illegible] einer [illegible] Wasserschicht von sehr kleiner Dicke. Denken wir uns um d. Axe d. Röhre herum eine cylindrische Fl. beschrieben mit einem Radius, d. etwas kleiner ist als d. innere Radius d. Röhre, so daß zwischen diesen eine sehr dünne Wasserschicht übrig bleibt. Es fließe hier d. Wasser mit einer mittleren Geschw. w', die Dicke dieser Schicht sei δ. Diese Dicke ist aber nicht constant, sie schwankt zwischen einem min u. max und es sei d. durchschnittliche min $= \delta_1$ d. max $= \delta_2$. An d. Stelle, wo d. Dicke dieser Schicht am kleinsten $= \delta_1$ ist, wird d. Geschw. d. Wassers am größten $= w_1$ sein und dort wo d. Dicke am größten $= \delta_2$ ist, wird d. Geschw. am kleinsten $= w_2$ sein. So oft nun d. max-Geschw. w_1 plötzlich in d. min Geschw. w_2 übergeht wird ein Widerstand entstehen, welcher gemessen wird durch d. Widerstandshöhe $\frac{(w_1 - w_2)^2}{2g}$. Bezeichnet man nun d. Widerstandscoeff. bezogen auf d. mittlere Geschw. w' mit ζ' so kann man setzen:

$$\zeta' \frac{w'^2}{2g} = \frac{(w_1 - w_2)^2}{2g} \text{ so ist also } \zeta' = \left(\frac{w_1}{w'} - \frac{w_2}{w'}\right)^2 \text{ ist.}$$

od. da d. Geschw. sich umgekehrt wie d. Dicken d. Wasserschicht verhalten:

$$\zeta' = \left(\frac{\delta}{\delta_1} - \frac{\delta}{\delta_2}\right)^2.$$

Angenommen es kommen auf d. Längeneinheit für irgend einen Wasserfaden, d. längs d. Röhre hinfließt, eine plötzliche Querschnittsänderung n mal vor, so wird also d. Widerstandshöhe pr. mtr Länge $= n\zeta'\frac{w'^2}{2g}$ sein, wo sich d. Factor n auf eine einmalige plötzliche Geschw.-Änderung bezieht. Dieselbe [illegible] d. durchschnittliche Verlust an Arbeit pr. 1 Kgr. d. an d. Oberfl. fließenden Wassers. Dieser Arbeitsverlust bleibt aber nicht beschränkt auf d. an d. Oberfl. fließende Wasser, sondern es findet ein beständiger Austausch zwischen d. innern und äußern Wasser statt. Um nun diesen Verlust pr. 1 Kgr. d. ganzen in d. Röhre fließenden Wassers zu erhalten, muß dieser Arbeitsverlust multiplicirt werden mit d. Verhältniß desjenigen Wassermenge, welche gleichzeitig in dieser Oberfl.-Schicht und in d. ganzen Röhre sich [illegible]. Es ist aber d. Wasservolumen, welches durch einen Querschnitt mit diese [illegible] Oberfl.-Schicht hinfließt $= 2\pi r\delta w'$, wenn r d. Radius d. Röhre ist. Dagegen ist d. dasjenige Wasservolumen, welches pr. Sek. durch einen Querschnitt d. ganzen Röhre hindurchfließt = d. Product aus πr^2 und d. mittl. Geschw. u; es ist also d. Verlust an lebendiger Kraft pr. 1 Kgr. d. ganzen in d. Röhre [illegible] Wassers $= n\zeta'\frac{w'^2}{2g}\frac{2\pi r\delta w'}{\pi r^2 u}$ insoweit er von d. äußeren Reibung herrührt, also

$$\mathfrak{E}_1 = \frac{n\delta\zeta'}{g}\frac{w'^3}{ru} \quad \text{od. wenn } \frac{w'}{u} = \varepsilon \text{ gesetzt wird und } r = \frac{d}{2}$$

so folgt dieser Verlust:

$$\mathfrak{E}_1 = \frac{2n\delta\varepsilon^3\zeta'}{g}\cdot\frac{u^2}{d}$$

Dieses ist ein Ausdruck von d. Form $a\frac{u^2}{d}$ also übereinstimmend mit d. ersten Ausdruck in d. Hagen'schen Formel, wenn

$$a = \frac{2n\delta\varepsilon^3}{g}\left(\frac{\delta}{\delta_1} - \frac{\delta}{\delta_2}\right)^2 \text{ gesetzt wird.}$$

Aus einer Berechnung von a kann natürlich keine

Null sein, derselbe läßt sich nur durch Versuche ermitteln. – Was d. 2te Summand(?) dieser Größe R. betrifft, so gestattet dieser eine noch einfachere theoretische Deutung. Zu dem Ende erinnern wir uns an d. Fundamentalgl. für d. Untersuchung sämmtlicher Bewegungsvorgänge ... Dieser Fundamentalgl. waren 3, die sich bezogen auf d. Beschl. ... d. Fl. im Sinne d. Achse und im Sinne d. Querschnitts nach d. Richtung d. Krümmung und d. Normalen. D. erste von diesen 3 war, wenn ich sie in ... d. Geschwindigkeit, womit früher eine beliebige Geschw. bezeichnet war, jetzt d. Buchstaben w setzen will, wo w also eine beliebige Geschw. ist:

$$K_s + \frac{1}{\mu}\left(R_s - \frac{dp}{ds}\right) = w\frac{dw}{ds} \qquad \text{(Seite 22)}$$

Hierin bedeutet K_s d. Comp. d. beschleunigenden Massenkraft im Sinne d. Achse, R_s d. Comp. d. inneren Reibung pr. Volumeneinheit in demselben Sinne und ds ein Längenelement d. Achse, p d. Fl. und μ d. spec. Masse. Von d. äußeren Massenkraft wollen wir jedoch absehen, also eine horizontale Achse voraussetzen, dann ist also $K_s = 0$. Hat es sich ferner hier gehandelt um d. Bew. in einer gleichförmigen Röhre, so wird w nur von Punkt zu Punkt eines Querschnittes sich ändern, längs d. Achse aber nicht, so ist $\frac{dw}{ds} = 0$ u. hieraus folgt dann:

$$R_s = \frac{dp}{ds}.$$

Die Ursachen hier für alle gerade parallelen Linien, d. Querschnitte also ‖ Ebenen, es ist also d. Fl. von Punkt zu Punkt eines Querschnittes nur insofern veränderlich, als d. äußere Massenkraft diese Veränderlichkeit bedingt; wenn hier aber von d. Wirkung d. Schwere abgesehen wird, wie namentlich dann, wenn d. Querschnitt verhältnißmäßig klein im Vergleich zur Druckhöhe ist, so wird p eine Größe hier ... von s sein, also:

$$R_s = \frac{dp}{ds}.$$

Für diesen Differentialquotienten kann man auch schreiben $\gamma\frac{d\frac{p}{\gamma}}{ds}$; nun ist $\frac{p}{\gamma}$ d. Druckhöhe in d. betreffenden Querschnitt, also $\frac{d\frac{p}{\gamma}}{ds}$ d. Zunahme d. Druckhöhe pr. Längeneinheit, $\div\frac{d\frac{p}{\gamma}}{ds}$ ein also d. Abnahme d. Druckhöhe in d. Röhre pr. Längeneinheit ... von d. inneren Reibung. Dieser ... d. 2te Summand(?) in B. also J. folglich:

$$R_s = \div\gamma\frac{d\frac{p}{\gamma}}{ds} = \div\gamma J.$$

Nun ist aber für R_s früher ein allgemeiner Ausdruck entwickelt worden, d. eine einfache Form für d. vorliegenden Fall angenommen hatte, nämlich:

$$R_s = \frac{\mathfrak{R}}{y}\frac{d}{dy}\left(y\frac{dw}{dy}\right) \qquad \text{(Seite 25)}$$

wo $\mathfrak{R}$ d. Const. d. inneren Reibung, w d. Geschw. in d. Entfernung y von d. Röhrenachse bedeutet. Hieraus folgt also:

$$\frac{d}{dy}\left(y\frac{dw}{dy}\right) = \div\gamma\frac{J}{\mathfrak{R}}y$$

und durch Integration:

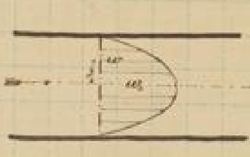
$$y\frac{dw}{dy} = \div\gamma\frac{J}{\mathfrak{R}}\frac{y^2}{2} \quad \text{oder} \quad \frac{dw}{dy} = -\gamma\frac{J}{\mathfrak{R}}\frac{y}{2}$$

d. Integrationsconstante ist hier $= 0$, weil für $y = 0$ auch $\frac{dw}{dy} = 0$ sein muß, da in d. Röhrenachse d. Geschw. ein max ist. Durch nochmalige Integration folgt:

$$w = \div\gamma\frac{J}{4\mathfrak{R}}y^2 + \text{Const.}$$

Die Integrationsconstante ist offenbar nichts anderes als d. Geschw. für $y = 0$, also d. Geschw. in d. Röhrenachse, welche mit w_0 bezeichnet sei. So ist nun endgültig:

$$w = w_0 - \gamma\frac{J}{4\mathfrak{R}}y^2 \quad \text{(tt)}$$



Dementsprechend erkennt man zunächst, daß wenn man sich in allen Punkten eines Querschnittes auf gerade Linien ‖ d. Röhrenachse Strecken aufgetragen denkt, welche d. Geschw. w sind, so daß d. Endpunkte dieser Strecken in einem Umdrehungsparaboloid liegen, entsprechend d. Gl.: $w_0 - w = \gamma\frac{J}{4\mathfrak{R}}y^2$. Denn es ist $(w_0 - w)$ proportional y^2. Die ... mit w' bezeichnete Geschw. am Rande ist:

$$w' = w_0 - \gamma\frac{J}{4\mathfrak{R}}r^2$$

und damit ergiebt sich:

$$w - w' = \gamma\frac{J}{4\mathfrak{R}}(r^2 - y^2). \;—$$

Es kommt nun aber auf eine Beziehung zwischen w und d. mittleren Geschw. u an. Letztere wird gefunden indem man d. Querschnitt in Elemente zerlegt denkt, d. eine ringförmige Gestalt haben, deren jedes mit seiner Geschw. w multiplizirt und d. Summe dieser Produkte durch d. ganzen Querschnitt dividirt, also:

$$u = \frac{1}{\pi r^2}\int_0^r 2\pi y\, dy\, w.$$

Nimmt man d. Constanten heraus und setzt für w seinen Ausdruck, so folgt:

$$u = \frac{2}{r^2}\int_0^r \left[w' + \gamma\frac{J_1}{4R}\left(r^2-y^2\right)\right] y\,dy$$

dieses Integral ausgeführt, liefert:

$$u = \frac{2}{r^2}\left[w'\frac{r^2}{2} + \gamma\frac{J_1}{4R}\left(r^2\frac{r^2}{2} - \frac{r^4}{4}\right)\right] = w' + \gamma\frac{J_1}{8R}r^2 = w' + \frac{\gamma J_1}{32R}d^2$$

$$\text{also}\quad J_1 = \frac{32R}{\gamma}\cdot\frac{u-w'}{d^2} = \frac{32R(1-\varepsilon)}{\gamma}\,\frac{u}{d^2} = b\frac{u}{d^2}$$

wenn man wieder $\frac{w'}{u} = \varepsilon$ setzt und wenn $b = \frac{32R(1-\varepsilon)}{\gamma}$ bedeutet, womit sich wieder d. Übereinstimmung d. früheren Formel ergiebt. Auch kann wieder nicht d. Rede sein von wirklich theoretischer Bestimmung d. Coeff. b, denn sowohl R als auch ε entziehen sich für einen rationellen Bestimmung, so daß b nur durch Versuche bestimmt werden kann. b ist natürlich von d. Temperatur d. Wassers abhängig, da d. spez. Gew. γ von d. Temp. abhängig ist. —

In d. Praxis soll immer d. spez. Leitungswiderstandshöhe unter d. Form:

$$B_1 = \lambda\frac{1}{d}\frac{u^2}{2g}$$

benutzt werden, so ist $\lambda = \alpha + \frac{\beta}{ud}$ und. Man kann hier bemerken, daß wenn u u. d innerhalb d. praktischen Grenzen liegen, d. Wert von λ nur wenig veränderlich ist, praktisch pflegt u zwischen d. Grenzen $0{,}5 - 2$ m zu liegen und d. Rohrweite d zwischen $0{,}05 - 0{,}5$ m, so ist also ud etwa zwischen d. Grenzen $\frac{1}{40} - 1$ liegt. Berechnet man zwischen diesen Grenzen d. Werte von λ, indem man für β diejenigen Werte setzt, d. einer durchschnittlichen Temp. von $10°$ C. entsprechen, so bekommt man:

$$\lambda \text{ zwischen } 0{,}027 - 0{,}024.$$

so ist man berechtigt für viele Anwendungen, damit begnügen darf, einen constanten Mittelwert λ zu benutzen, aber es muß als man doch d. Sicherheit wegen bei d. betreffenden Gebrauch λ um einige Procente größer annehmen muß. Nimmt man aber durchschnittlich λ um 20 % größer als man aus dieser theoretischen Formel, so kann man durchschnittlich $\lambda = 0{,}03$ setzen.

Dies ist bei wirklichen Wasserleitungen, wie sie bei einer d. gewöhnlichen ~~zu~~ zahlreichen Wasser entnommen auch nicht Versuche gelungen. Dieses liegt vielmehr nur d. Abweichung von d. cylindrischen Form Versuche. Um sicheren Resultat Versuche zu liegen ist es angemessen ϑ größer zu setzen, als es in d. ersten Zeit d. Anlage nötig wäre. —

Unter Umständen kommt es vor, daß d. Röhre einen anderen Querschnitt hat. Für diesen Fall liegen spezielle Erfahrungen bezüglich d. Leitungswiderstandes nicht vor und es ist am angemessensten, d. Leitungswiderstand einer solchen prismatischen gleich zu setzen d. einer cylindrischen Röhre, deren Durchmesser = d. mittleren Durchmesser d. prismatischen Röhre ist. ~~Man setzt~~ also: dieser mittlere Durchmesser ist bekanntlich: $d = \frac{4F}{U}$, wenn F = Inhalt d. Querschnitts und U d. Umfang ist. —

Was nun d. Fundamentalformel betrifft, welche bei d. Ausführungen auf d. Best. d. Wasserstands in Röhren bezug angewandt berücksichtigt wird, so war dieselbe:

$$\frac{u^2 - u_0^2}{2g} = H - B.$$

wo u d. Geschw. am Ende, u_0 d. mittlere Geschw. am Anfange irgend einer Rohrstrecke bedeutet, H = wirksame Druckhöhe und B = gesammte Widerstandshöhe für diese Rohrstrecke. Beginnt man d. Gl. vom Wasserspiegel bis zum Ende d. Abflußröhre, so kann $u_0 = 0$ gesetzt werden. Ferner begreift d. Widerstandshöhe B und diejenige Widerstandshöhe, die übrigen, an zwischen Stellen [illegible] vorkommenden besonderen Widerständen entspricht und durch

d. Leitungswiderstandshöhe. Ist ζ d. Widerstandscoeff. für an besonderen Stellen auftretende Widerstände, so ist:

$$B = \zeta\frac{u^2}{2g} + \lambda\frac{l}{d}\frac{u^2}{2g}$$

setzt man dieses ein, so erscheint d. Fundamentalgl. in d. Form:

$$\left(1+\zeta+\lambda\frac{l}{d}\right)\frac{u^2}{2g} = H$$

wenn d. wirksame Druckhöhe d. Leitung ist: $H = h + \frac{p_0 - p}{\gamma}$, wenn wiederum p_0 d. äußerliche Druck an d. freien Oberfl. p d. an d. Mündung ist, während h d. Höhe d. Wasseroberfl. im Ausflußgefäß über d. Mittelpunkt d. Mündung od. über d. Unterwasserspiegel bedeutet. —

Wenn d. ganze Gefäß in [illegible] keinen ein Ansatzrohr K hat, wenn jedoch abgesehen werden soll. In dieser Form ist vorausgesetzt, daß d. Wasser mit d. vollen Querschnitt d. zylindrischen Rohres abfließt. Unter Umständen kann es d. Fall sein, daß d. Wasser nicht mit einem vollen Querschnitt abfließt, sondern daß d. Rohr mit einem Mundstück versehen ist, dessen Größe dann mit A bezeichnet werden soll, während δ d. vollen Querschnitt d. Rohres bedeutet. Ist dies d. Fall so sei α d. Contractions-Coeff., d. sich unter d. vorliegenden Umständen auf d. Ausfluß bezieht, ferner φ d. Geschw.-Coeff. betreffend d. durch diese Mündung selbst angewiesenen Widerstand, also $\mu = \alpha\varphi$ = Ausflußcoeff. und $\frac{1}{\varphi^2} - 1$ = Widerstandscoeff., welcher dieser Mündung an und für sich entspricht, dann ist leicht einzusehen, wie in einem solchen Fall diese Fundamentalgl. zu modificieren ist. d. Gl. drückt aus, daß d. wirksame Druckhöhe aus 2 Theilen besteht nämlich aus $\frac{u^2}{2g}$ als Ausflußgeschw.-Höhe, $\zeta\frac{u^2}{2g}$ Widerstandshöhe, welche d. besonderen Widerständen entspricht und aus $\lambda\frac{l}{d}\frac{u^2}{2g}$ Leitungswiderstandshöhe für d. ganze Rohrlänge l. —

Ist d. Rohr aber jetzt mit einem engen Mundstück versehen, so ist d. wirksame Druckhöhe zu verwenden, um nicht nur d. Geschw. in d. Rohr zu erzeugen, sondern um d. größere Geschw., womit sie durch d. kleinsten Querschnitt d. contrahirten Strahls hindurchfließt; dieser Querschnitt ist αA und es ist also d. Geschw. im d. kleinsten Querschnitt d. contrahirten Strahls im Verhältniß $\frac{\delta}{\alpha A}$ größer als u, d. h. um d. Geschw.-Höhe $\frac{1}{2g}\left(\frac{\delta}{\alpha A}\right)^2 u^2$ zu erzeugen. Außerdem kann durch d. Mundstück ein besonderer Widerstand verursacht werden entsprechend d. Widerstandscoeff. ζ. dieser Widerstandscoeff. ist dann $= \frac{1}{\varphi^2} - 1$, es ist somit dann d. wirksame Druckhöhe H im Ganzen jetzt dazu zu verwenden, um außer diesen Widerstandshöhen auch zu erzeugen diese Ausflußgeschw.-Höhe und d. Widerstandshöhe $\frac{1}{\varphi^2} - 1$, mal d. Ausflußgeschw.-Höhe. dieser Ausdruck tritt an d. Stelle von $1 \cdot \frac{u^2}{2g}$ also:

$$\frac{1}{2g}\left(\frac{\delta}{\alpha A}\right)^2 u^2\left[1+\left(\frac{1}{\varphi^2}-1\right)\right] = \left(\frac{\delta}{\alpha\varphi A}\right)^2\frac{u^2}{2g} = \left(\frac{\delta}{\mu A}\right)^2\frac{u^2}{2g}$$

demnach ist nun d. allgemeine Fundamentalgl.:

$$H = \left[\left(\frac{\delta}{\mu A}\right)^2 + \zeta + \lambda\frac{l}{d}\right]\frac{u^2}{2g}.$$

Wenn $A = \delta$, so wird auch $\mu = 1$ und d. Gl. geht dann wieder in d. frühere Form über. —

Bevor wir diese Fundamentalformel zur Lösung einiger Aufgaben benutzt werden soll, zunächst d. in solchen längeren Röhrenleitungen vorzugsweise auftretenden besonderen Widerstände besprochen werden, auf welche sich d. Summand ζ in d. Fundamentalgl. bezieht. Solche Widerstände werden verursacht durch plötzliche Richtungsänderung und plötzliche Querschnittsänderung.

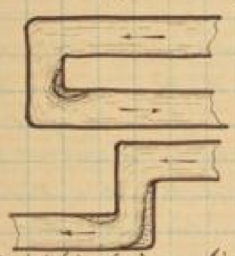
Derartige Richtungsänderungen werden namentlich verursacht durch Kniestücke und Krümmungen. Unter einem Knierohr versteht man solches in einer Röhrenleitung eingeschaltetes Röhrenstück zu verstehen, in welchem d. Wasser eine Ablenkung durch einen scharfen Winkel erleidet. So ist leicht begreiflich, daß dieser Widerstand nur durch Versuche ermittelt werden kann. In Betreff eines solchen Knierohres hat namentlich Weisbach Versuche angestellt wobei d. Winkel α verschiedene Werthe gegeben wurden. d. Resultate lassen sich in folgende Formel zusammenfassen:

$$\zeta = 0{,}9457\sin^2\frac{\alpha}{2} + 2{,}047\sin^4\frac{\alpha}{2}$$

womit z. B. für: α = 20° 40° 60° 80° 90°
sich ergibt: ζ = 0,046 0,139 0,346 0,740 0,984

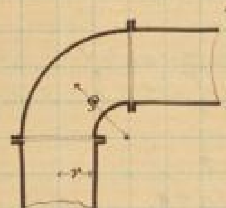
Es ist indessen wesentlich zu bemerken, daß diese Versuche sich bezogen auf $d = 0,03$ m, da d. Weite d. Rohre einen wesentlichen Einfluß ausübt. Bei größeren Weiten liegen indessen Versuche nicht vor, aber mit Röhren von $d = 0,01$ m ergab sich, daß ζ unter gleichen Verhältnissen wie d ungefähr $1\frac{1}{2}$ mal so groß war. Es läßt sich also erwarten, daß mit wachsender Weite d. Widerstandscoeff. kleiner wird als in dieser Form; jedenfalls kann man ziemlich aber sicher sein, daß man d. Widerstand nicht zu klein veranschlagt, wenn man diese Formel für weitere Röhren anwendet.

Bemerkenswerthe Resultate ergaben sich für doppelte Kniee. Ebenfalls stellte Weisbach Versuche an, wenn d. jedesmalige Ablenkung 90° beträgt; dann zeigte sich, daß d. resultierende Widerstandscoeff.



für diese 2 doppelte Kniee nicht merklich größer war, als für ein einfaches Knie; wenn dagegen diese Richtungsänderung im entgegengesetzten Sinne stattfand, dann ergab sich d. resultierende Widerstandscoeff. ungefähr doppelt so groß wie für jedes einzelne Knie für sich. Stehen d. Mittellinien senkrecht zu einander, so ergibt sich d. resultierende Widerstandscoeff. = d. $1\frac{1}{2}$ fachen wie für jedes einzelne Knie. Es ist schon früher hervorgehoben worden, daß dieser Widerstand wahrscheinlich zurückgeführt werden muß auf eine plötzliche Querschnittsänderung. Diese Vermuthung zu Grunde gelegt, läßt sich aus d. beiden erwähnten Versuchen schließen, daß d. Querschnittsverengung durch d. 2t. Knie im ersten Fall nicht merklich vergrößert wird, so daß d. Weite d. Verengerung in beiden Knieen gleich ist, anders wird es sich im 2t. Fall verhalten. Bei diesen Versuchen waren d. Widerstandscoeff. d. einzelnen Kniee einander gleich. Sei aber d. Widerstandscoeff. im ersten Knie $= \zeta_1$, im 2ten $= \zeta_2$, so läßt sich erwarten, daß im ersten Fall $\zeta = \zeta_1$ ist, wenn ζ_1 d. größere d. beiden ist, im 2t. Fall ist $\zeta = \zeta_1 + \zeta_2$ und im Falle d. rechtwinkligen Kniees $\zeta = \zeta_1 + \frac{1}{2}\zeta_2$. Es bleibt noch fest zu stellen, wie lang d. Zwischenstück zwischen diesen beiden Röhren sein muß, da d. Länge desselben eine gewisse Grenze nicht überschreiten darf, denn sonst würden sich d. Kniee ganz unabhängig von einander verhalten. —

Ein kleinerer Widerstand als durch ein solches Knierohr wird verursacht durch sogenannte Kropfröhren, d. h. durch in d. Röhren eingeschaltete Zwischenstücke von stetiger Krümmung, wodurch 2 gerade Rohrstrecken mit einander verbunden werden. Gewöhnlich ist bekanntlich d. Centriwinkel eines solchen Kropfrohrs ein Kreisbogen von 90°. Für solche Krümmer, wobei also d. Mittellinie ein Viertelkreis ist, hat Weisbach mit seinen eigenen Versuchen und mit Versuchen von Dubuat folgende Formel hergeleitet:



$$\zeta = 0,131 + 1,847\left(\frac{r}{\rho}\right)^{\frac{7}{2}}$$

wo r d. Radius d. Querschnitts und ρ d. Krümmungsradius d. Mittellinie d. Krümmers bedeutet. —

Weisbach hat auch Versuche angestellt bei Röhren mit rechteckigem Querschnitt. Wenn dabei mit r d. Breite d. Rechtecks bezeichnet wird, d. mit d. Ebene d. Mittellinie d. Krümmers parallel ist, so wäre für diesen Fall zu setzen:

$$\zeta = 0,124 + 3,104\left(\frac{r}{\rho}\right)^{\frac{7}{2}}.$$

Für den ersten Fall d. Kreisquerschnitts ergibt sich z. B.:

für $\frac{r}{\rho}$ =	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6
ζ =	0,138	0,158	0,206	0,294	0,440.

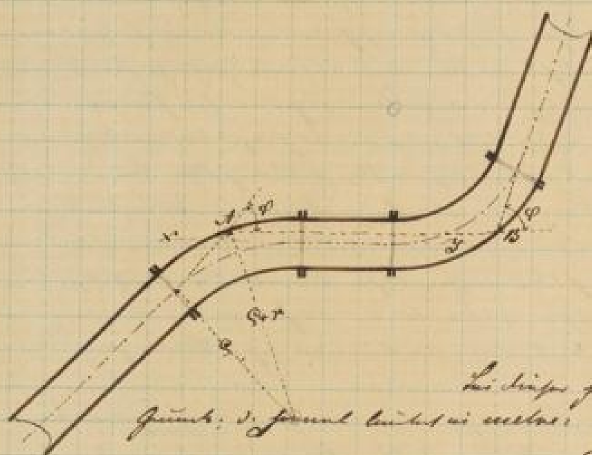
Eine große Genauigkeit ist übrigens diesen Zahlen nicht zuzuschreiben, weil eine Untersuchung d. Versuchsresultate viel zu wünschen übrig läßt. Ist d. Mittellinie d. Krümmers ein kleinerer Bogen als von 90°, so läßt sich wohl annehmen, daß ζ kleiner sein wird; in welchem Verhältniß ist jedoch vorläufig noch unbekannt. Daß wenigstens d. Widerstandscoeff. d. Centriwinkel nicht einfach proportional gesetzt werden kann, erhellt daraus, daß wenn d. Centriwinkel = 180° gemacht wurde, d. Widerstands-Coeff. nicht merklich größer war als für einen Winkel von 90°; dagegen wenn 2 solche Krümmer im entgegengesetzten Sinne sich anschließen, so wird d. Widerstandscoeff. ungefähr doppelt so groß. Bei eingehenden Ausführungen findet man gewöhnlich diese Krümmer mit einem solchen Radius gekrümmt, daß wenn man d. Mittellinie d. beiden geraden Strecken verlängert, dieselben sich in d. Umfg. d. Krümmungskreises schneiden. Wird eine solche Krümmung zu Grunde gelegt, so ist:

$r = \rho(\sqrt{2}-1)$ also $\frac{r}{\rho} = 0,4142$. Setzt man diesen Werth in d. Weisbach'sche Formel ein, so folgt:

$$\zeta = 0,215. -$$

Außer solchen Widerstandsbedingungen einer Röhre, die sich auf kurze Röhrenstrecken concentriren, kommt es auch vor, daß ein Leitungsrohr auf einer größeren Strecke bogenförmig fortgeführt wird, wie z.B. ein spiralförmig gewundenes Rohr eines Thermometer etc. Diese Fälle können nicht mittelst d. Weisbach'schen Formel berechnet werden, denn es würde dann für $\frac{r}{\rho} = 0$ $\zeta = 0,131$ werden; für diesen Fall liegt eine Dubois'sche Formel vor:

Ist so eine Leitungsröhre in irgend einer Weise gekrümmt und an beiden Enden schließen sich gerade Strecken an; denkt man sich d. Mittellinie d. geraden Röhrenstrecke an einem Ende verlängert bis sie d. Röhrenwand trifft, zieht von diesem Punkte eine Tangente an d. Mittellinie bis sie abermals d. Röhrenwand trifft bis d. letzte Punkt wieder in d. andern Röhrenmittellinie fällt, so erhält man eine Reihe von Ablenkungswinkel φ. Kommt man bei dieser Zeichnung an einen Punkt A, wo nicht mehr als gewöhnlich scheint, wie man d. Tangente zieht, so zieht man d. Tangente xy an d. Stelle d. Mittellinie, wo d. Krümmungsradius $= \infty$ ist und zieht dann $AB \parallel xy$. Werden diese Winkel φ bestimmt so wird:



$$B = \frac{\Sigma \sin^2\frac{\varphi}{2}}{3000}\, u^2 \text{ in Fuss}$$

Bei dieser Formel von Dubois liegt indessen d. Pariser Zoll zu Grunde. d. Formel lautet in Metern:

$$B = 0,0123\, u^2\, \Sigma(\sin^2\frac{\varphi}{2}.)$$

Setzt man diese Widerstandshöhe $= \zeta\frac{u^2}{2g}$, so folgt:

$$\zeta = 0,2413\, \Sigma(\sin^2\frac{\varphi}{2}).$$

Ist d. Krümmung stellenweise constant $= \rho$, dann ist $\Sigma \sin^2\frac{\varphi}{2} = \frac{\alpha}{\varphi}\sin^2\frac{\varphi}{2}$, wenn α d. gesammte entsprechende Ablenkungswinkel ist, also $\frac{\alpha}{\varphi}$ d. Zahl d. Ablenkungswinkel. Außerdem ergibt sich $\cos\frac{\varphi}{2} = \frac{\rho}{\rho+r}$ aus d. Zeichnung. Wenn z.B.:

	$\frac{r}{\rho} =$	0,05	0,1	0,15	0,2
so ist	$\zeta =$	0,0632	0,0850	0,0994	0,1099 und $\frac{\alpha}{100}$
und für $\alpha = 90°$:	$\zeta =$	0,057	0,076	0,089	0,099.

für $\alpha = 90°$ kann man diese Werthe vergleichen mit denen, die sich aus d. Weisbach'schen Formel $\zeta = 0,131 + 1,847\left(\frac{r}{\rho}\right)^{\frac{7}{2}}$ ergeben sollten, denn wird für $\frac{r}{\rho} = 0,2$ .. $\zeta = 0,138$. Nun wird man für alle Fälle sicher gehen, wenn man erst von d. Verhältniß $\frac{r}{\rho} = 0,2$ sich d. Weisbach'schen Formel bedient und für kleinere Werthe von $\frac{r}{\rho}$ d. Dubois'schen, nur muß man dann d. Coeff. von ζ so vergrößern, daß er mit d. Weisbach'schen Formel für $\alpha = 90°$, $\frac{r}{\rho} = 0,2$ entspricht; dies ist d. Fall, wenn man setzt:

$$\zeta = 0,337 \sin^2\frac{\varphi}{2}.$$

dann werden d. Coeff. von ζ größer und d. letzte $= 0,138$. Für beliebigen einen entsprechenden Krümmungswinkel ist dann zu schreiben: $\zeta = 0,337\frac{\alpha}{\varphi}\sin^2\frac{\varphi}{2}$ wenn $\cos\frac{\varphi}{2} = \frac{\rho}{\rho+r}$. Hiernach ist z.B. für:

	$\frac{r}{\rho} =$	0,05	0,1	0,15	0,2
	$\zeta =$	0,0882	0,1188	0,1389	0,1534 und $\frac{\alpha}{100}$.
und für $\alpha = 90°$	$\zeta =$	0,079	0,107	0,125	0,138

Ist d. Verhältniß von $\frac{r}{\rho}$ sehr klein, so kann man sich auch eine einfache Formel für ζ entwickeln, namentlich welche d. Krümmungswiderstand ζ unmittelbar als Function dieses Verhältnisses $\frac{r}{\rho}$ entwickelt wird. Setzt man dieses sehr kleine Verhältniß $\frac{r}{\rho} = x$, so ist $\cos\frac{\varphi}{2} = (1+x)^{-1}$

$$\text{also } \sin^2\frac{\varphi}{2} = 1-(1+x)^{-2} = 2x\left(1-\tfrac{3}{2}x+\dots\right) \quad \text{also } \sin\frac{\varphi}{2} = \sqrt{2x}\left(1-\tfrac{3}{4}x+\dots\right)$$

$$\text{und daraus} \quad \frac{\varphi}{2} = \arc\sin\sqrt{2x}\left(1-\tfrac{3}{4}x+\dots\right) = \sqrt{2x}\left(1-\tfrac{5}{12}x+\dots\right)$$

$$\text{demnach} \quad \frac{1}{\varphi}\sin^2\frac{\varphi}{2} = \frac{2x}{2\sqrt{2x}}\cdot\frac{1-\frac{3}{2}x+\dots}{1-\frac{5}{12}x+\dots} = \sqrt{\frac{x}{2}}\left(1-\tfrac{13}{12}x+\dots\right)$$

Wenn man nun d. hier stehenden Glieder einfach deutlich berücksichtigt, daß man statt $-\frac{13}{12}x$ einfach x setzt, so ist:

$$\frac{1}{\varphi}\sin^2\frac{\varphi}{2} = (1-x)\sqrt{\frac{x}{2}}$$

$$\text{also} \quad \zeta = \frac{0{,}337}{\sqrt{2}}\cdot\frac{\pi}{180}\cdot\alpha(1-x)\sqrt{x} = 0{,}00416\,\alpha\left(1-\frac{r}{\rho}\right)\sqrt{\frac{r}{\rho}}.$$

Hierin erscheint α in Graden, aus welchem Grunde auch $\frac{\pi}{180}$ gesetzt wurde. Diese Formel gilt für $\frac{r}{\rho} < \frac{1}{20}$, wenn man also α d. ganze Ablenkungswinkel betrachtet und [illegible] ist d. Ablenkung immer in demselben Sinne so sehr groß [illegible].

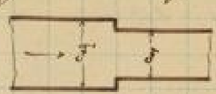
Ist $\frac{r}{\rho}$ sehr klein und α von mäßiger Größe, so wird dieser Widerstand so klein sein, daß man ihn kaum zu berücksichtigen braucht. Es kann aber sein, daß α bei kleinem $\frac{r}{\rho}$ sehr groß ist, wie namentlich bei spiralförmigen Röhren. —

Außer d. vorgenannten Ablenkungswiderständen kommen noch [illegible] Widerstände vor, wie sie bei plötzlicher Änderung d. Rohrquerschnitts ~~und~~ solche Änderungen, d. mit einer örtlichen Trennung d. Wand von d. Wasserstrom verbunden sind, und somit mit einem (auch größeren Unterbrechungen) verbundenen Widerstand behaftet sind, sollten möglichst vermieden werden; indessen gibt es Fälle, wo ein solcher Widerstand sich nicht vermeiden läßt oder wo ein solcher sogar absichtlich herbeigeführt ist, insbesondere zur Regulirung od. zur gänzlichen [illegible] Hemmung d. Wasserströme, wie dies geschieht durch Schieber, Klappen, Drosselklappen und Ventile. Wenn auf solche Weise d. Rohrquerschnitt an einer gewissen Stelle verengt ist, so sei d. kleinste Querschnitt d. Röhre an einer solchen Stelle bezeichnet mit A und F sei d. volle Querschnitt d. Röhre; damit ist dann aber noch nicht gesagt, daß A d. kleinste Querschnitt d. Wasserstroms selbst sei, es kann nämlich sein, daß, nachdem d. Wasser [illegible] Durchgangsöffnung, derselbe noch eine weitere Contraction erfährt bis auf αA. Dieser kleinste Querschnitt αA erweitert sich nun sehr schnell wieder bis zum vollen Querschnitt d. Röhre. Wäre diese plötzliche Querschnittserweiterung d. Wasserstroms von αA bis F d. einzige Widerstand, so wäre: $\zeta = \left(\frac{F}{\alpha A}-1\right)^2$; thatsächlich wird nun zwar diese plötzliche Vergrößerung d. Querschnitts d. Wasserstroms von αA bis F d. Hauptursache d. Widerstands sein. Außerdem wird aber auch schon ein gewisser Widerstand verursacht durch d. [illegible] Verengung d. Querschnitts von F bis αA; ferner kommen namentlich bei diesen Regulirungsvorrichtungen außer d. Querschnittsänderungen, auch [illegible] Ablenkungen d. Wasserstroms, plötzliche Richtungs- und Geschwindigkeitsänderungen ~~vorkommen~~ d. Querschnitts vorkommen. Weil aber d. plötzliche Erweiterung d. Querschnitts immerhin d. Hauptursache bleibt, so kann man auch in allen diesen Fällen diesen Ausdruck von ζ zu Grunde legen, wenn man dann nur α eine entsprechende zusammengesetzte Bedeutung beilegt und diesem Coeff. einen Werth beilegt, der nun so verschieden für verschiedene Fälle zu ändern. —

Es ist indessen wünschenswerth zunächst d. Werthe von α zu kennen für einen Fundamentalfall, bei welchem d. genannten unberücksichtigten Umstände ausgeschlossen sind. Dies ist d. Fall einer concentrischen Röhre, welche an einer gewissen Stelle eine ebene Scheidewand besitzt mit d. concentrischen Durchflußöffnung A; F sei d. volle Querschnitt d. Röhre und $\frac{A}{F} = n$. Es ist dann d. Werth von ζ von Weisbach aus Versuchen bestimmt worden und daraus dann auch d. Werth von α, so ergab sich:

für n =	1	0,9	0,8	0,7	0,6	0,5	0,4	0,3	0,2	0,1
ζ =	0	0,06	0,29	0,80	1,80	3,75	7,80	17,5	47,8	226
α =	1	0,892	0,813	0,755	0,712	0,681	0,659	0,643	0,632	0,624

Je kleiner n, desto vollkommener ist d. innere Contraction, desto kleiner also auch α. Wenn α bezüglich d. Begriff einer inneren Contraction bedeutet, so wäre α für sehr kleine Werthe von n = d. früher bestimmten durchschnittlichen Coeff. 0,64. Thatsächlich sinkt hier α noch mehr nieder, weil dieser Coeff. hier eine innere Contractionsursache bedeutet, einigermaßen aber auch d. Werth α sich enthält, d. durch d. gewaltsame Zusammenziehung d. Querschnitts durch d. kleine Öffnung bedingt ist. Wenn d. contrahirte Durchflußöffnung A nach d. Scheidewand, in welcher sie sich befindet, nicht in einer mit d. ganzen Querschnitt fortlaufenden Röhre eingesetzt ist, sondern wenn an d. Stelle dieser Scheidewand 2 Röhren von verschiedenen Weiten mit gemeinsamer Axe in einander übergehen, so muß man berücksichtigen, daß in dieser Formel für ζ — F d. Querschnitt d. Röhre hinter dieser Durchflußöffnung bedeutet, wofür d. Coeff. α abhängt von d. Verhältniß d. Durchflußöffnung A zum Querschnitt F' der anderen Röhrenstrecke. Man hat also, wenn man d. Werthe von α und dieser Formel anwenden will, $n = \frac{A}{F'}$ zu setzen.

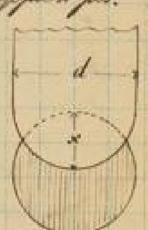


Hierbei sind folgende Fälle besonders merkwürdig:

1) Wenn $F' > F$ und $A = F$ sein; dann ist: $\zeta = \left(\frac{1}{\alpha} - 1\right)^2$ wobei d. Coeff. α gemäß d. Verhältniß $n = \frac{F}{F'}$ mit d. vorhergehenden Tabelle entnommen werden kann.

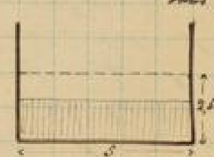
2) $F' < F$ und $A = F'$, d. h. also einfach an einer gewissen Stelle d. Querschnitt sich plötzlich erweitert; dann findet eine innere Contraction nicht statt, also $\alpha = 1$ und demnach: $\zeta = \left(\frac{F}{F'} - 1\right)^2$. —

Was nun d. Durchfluß d. Wassers durch Schieberöffnungen betrifft, so sind von Weisbach Versuche angestellt worden über d. 2 Fälle, daß d. Röhre entweder einen kreisförmigen od. einen rechteckigen Querschnitt hat. Wenn eine solche Röhre von kreisförmigem Querschnitt mit einem inneren



Schieberschieber versehen ist, so bildet sich eine sichelförmige Durchflußöffnung. Wenn d. Schieber um d. Stück x eingeschoben ist, und d. Röhrendurchmesser = d ist, so wird d. Widerstandscoeff. abhängig sein von $\frac{x}{d}$; je größer $\frac{x}{d}$, desto größer ζ. Bei diesen Versuchen hatte d. Röhre einen Durchmesser $d = 4$ Ctm. und es ergab sich hier:

$\frac{x}{d}$ =	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{4}{8}$	$\frac{5}{8}$	$\frac{6}{8}$	$\frac{7}{8}$
ζ =	0,07	0,26	0,81	2,06	5,52	17,00	97,8



Was d. Versuche mit d. rechteckigen Röhren betrifft, so wurde d. Schieber von d. größten Seite eingeschoben; d. Rechteck hatte d. Dimensionen 5 Ctm. und 2,5 Ctm. Auch hier wurde für verschiedene Werthe von $\frac{A}{F}$, welches Verhältniß hier einfach = d. Verhältniß d. Höhe d. Durchflußöffnung zur Höhe d. Öffnung d. Röhre ist, d. Werth von ζ bestimmt, und finden sich in Weisbach's Mechanik. Wenn man diese Werthe von ζ vergleicht mit denjenigen Werthen ζ, wie d. allgemeinen Formel $\zeta = \left(\frac{F}{\alpha A} - 1\right)^2$ für gleiche Werthe von $\frac{A}{F}$, so findet man, daß bei d. größeren Werthen von $\frac{A}{F}$ d. Widerstandscoeff. etwas größer sind, als im kreisförmigen Fall, dagegen für d. kleineren Werthe von $\frac{A}{F}$ etwas kleiner als im kreisförmigen Fall. Dieses läßt sich leicht erklären: es ist nämlich ein doppelter Grund vorhanden, weshalb d. Werthe von α in dieser allgemeinen Formel hier etwas abweichende Werthe von denen von α im kreisförmigen Fall haben: d. Umstand, daß d. verengte Durchflußöffnung A nicht eine centrale Lage und nicht eine ähnliche Gestalt hat. d. Querschnittsänderung bedingt einerseits eine Vergrößerung d. Widerstandes, also eine Verkleinerung von α, denn es ist mit d. Querschnittsänderung zugleich eine Richtungsänderung verbunden. Andererseits aber wird durch diese seitliche Lage d. Durchflußöffnung verursacht, daß d. innere Contraction nicht vollständig, sondern nur partiell ist; sie findet nur an einem Theil statt. Diese Contraction vergrößert α. Es sind also 2 Einflüsse vorhanden: d. eine verkleinert α und d. andere vergrößert α. Dieser letztere Einfluß wird sich namentlich in d. Fällen besonders geltend machen, wo $\frac{A}{F}$ klein ist.

Beispiel: Angenommen eine cylindrische Abflußröhre von $d = 0{,}1\,m$, welche mit einem solchen Regulirungsschieber versehen ist, liefere bei vollständig zurückgezogenem Schieber, also für $x = 0$, bei einer wirksamen Druckhöhe $H = 1{,}15\,m$ eine Wassermenge $V = 0{,}015$ cubm. pr. Sek.

Also $d = 0{,}1\,m$ $\quad H = 1{,}15\,m$ und für $x = 0$: $V = 0{,}015$.

Außer dem besonderen Widerstand, d. durch diesen Regulirungsschieber herbeigeführt werden kann, sei nur außerdem ein Widerstand vorhanden, als für d. Einfluß d. Wassers in d. Röhre $\zeta = \frac{1}{2}$ gesetzt werden kann; d. Röhre sei also scharfkantig angesetzt. Im Uebrigen sei kein besonderer Widerstand vorhanden. Es muß nun für einen anderen Grad d. Regulirungsschieber so weit vorgeschoben werden, daß d. Röhre nur halb so viel Wasser giebt. Wie weit muß d. Schieber vorgeschoben werden oder wie muß man x annehmen, damit $V' = \frac{V}{2}$ Wassermenge abfließt?

Zunächst ist nun: $\sqrt{2gH} = \sqrt{2 \cdot 9{,}81 \cdot 1{,}15} = 4{,}75$

$$F = \frac{\pi d^2}{4} = 0{,}007854$$

Also d. Geschw. u für $x = 0$: $\quad u = \frac{V}{F} = 1{,}91\,m$ pr. Sek.

Bezeichnet man nun mit φ d. entsprechenden Widerstandscoeff., so ist: $u = \varphi\sqrt{2gH}$ also: $\frac{1}{\varphi} = \frac{\sqrt{2gH}}{u} = \frac{4{,}75}{1{,}91} = 2{,}487.$

und demnach d. entsprechende Widerstandscoeff. für $x = 0$:

$$\frac{1}{\varphi^2} - 1 = 5{,}185.$$

Von diesem entsprechenden Widerstandscoeff. ist $\zeta = 0{,}5$ abzuziehen, um denjenigen Bestandtheil zu finden, d. auf Rechnung d. Leitungswiderstandes kommt; also d. Leitungswiderstandscoeff.:

$$\lambda \frac{l}{d} = 4{,}685.$$

Soll nun nur d. halbe Wasser ausfließen, so muß d. entsprechende Geschw. u' nur halb so groß als u sein, es muß also auch φ' nur $\frac{1}{2}$ so groß als φ sein also: $\varphi' = \frac{\varphi}{2}$ sein, und damit:

$$\frac{1}{\varphi'^2} - 1 = \frac{4}{\varphi^2} - 1 = 4 \cdot 6{,}185 - 1 = 23{,}74.$$

Zieht man hiervon ab erstens denjenigen Widerstand, welcher durch d. Einlauf bedingt wird $= 0{,}5$, ferner d. Leitungswiderstand $\lambda' \frac{l}{d}$, so ist d. verbleibende Rest d. Widerstandscoeff. d. durch d. Schieber bedingt wird, also:

$$\zeta = 23{,}24 - \frac{\lambda'}{\lambda}\, 4{,}685$$

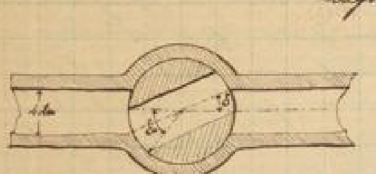
Nun ist aber $\lambda = \alpha + \frac{\beta}{ud}$ und für $x = 0$: $\frac{1}{ud} = 5{,}2$ also: $\lambda = 0{,}0240.$

ferner in unserem Zustand $\frac{1}{u'd} = 2 \cdot \frac{1}{ud} = 10{,}4$ also $\lambda' = 0{,}0244.$ $\Big\}$ also $\frac{\lambda'}{\lambda} = \frac{61}{60}.$

demnach $\zeta = 18{,}48.$

Für $\zeta = 17$ findet sich in d. Tabelle $\frac{x}{d} = \frac{6}{8}$, für $\zeta = 18{,}5$ einen Werth von x entsprechend, d. wenig größer als $0{,}075\,m$ ist. — Eine solche ~~genaue~~ Rechnung wird man sich erleichtern können, wenn man davon absieht daß $\lambda' > \lambda$ ist, ohne dabei wesentliche Fehler zu begehen. ———

Was nun d. Widerstand beim Durchgang durch Schieberhähne betrifft, so ist auch hierfür von Weisbach gesucht worden und zwar so, daß d. Hahn sich in einer cylindrischen od. parallelepipedischen Röhre befand. Für d. ersteren fand er bei d. Weite d. Ausflusses $d = 4$ cm. δ sei d. Winkel, welchen d. Axe d. Hahnbohrung mit d. Axe d. Röhre bildet. Es muß dann zur vollständigen Absperrung d. Hahnes gedreht sein, bei welchem Drehwinkel δ d. Absperrung vollkommen ist, dieser Winkel sei $= \delta'$; bei d. Weisbach'schen Versuchen war $\delta' = 82°$. Offenbar ist dieser Winkel bedingt durch d u. D, wenn D d. Durchmesser d. Hahnkegels ist und zwar ist:



$$\sin\frac{\delta'}{2} = \frac{d}{D}.$$

Unter diesen Umständen ergab sich nun für:

$\delta =$	5°	10°	15°	20°	25°	30°	35°	40°	45°	50°	55°	60°	65°
$\zeta =$	0,05	0,29	0,75	1,56	3,10	5,47	9,68	17,3	31,2	52,6	106	206	486

} Für noch größere Winkel wird ζ schon so groß, daß d. Versuche nicht weiter geführt werden und nicht beobachtet werden.

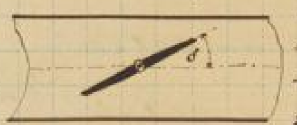
Es fragt sich nun, wie man mit Hilfe dieser Versuche d. Coeff. ζ bestimmen kann für jeden einen anderen Schieber, für welchen d. Absperrungswinkel δ' einen andern Werth hat als d. d. Versuchsschieber.
Zu dem Zweck kann man bemerken, daß hier d. resultirende Widerstand aus 2 Theilen besteht, nämlich einer plötzlichen Querschnittsänderung und einer plötzlichen Richtungsänderung; ersterer wird abhängig sein vom Verhältniß $\frac{\delta}{\delta'}$, letzterer hängt jedoch nicht von d. verhältnißmäßigen Werthe von $\frac{\delta}{\delta'}$ ab, sondern von d. absoluten Werth von δ. [illegible] wird eine ζ nur mit Hilfe dieser Zahlen auch für einen anderen Schieber, für welchen δ' einen andern Werth hat, berechnet werden können. Zu dem Zweck sollen also Tabelle [illegible] Werthe von ζ_0 beigefügt werden, d. h. diejenigen Bestandtheile von ζ, d. nur von d. ersten Umstand herrühren; dieselben können nämlich berechnet werden nach d. Formel $\zeta_0 = \left(\frac{\delta}{\alpha A} - 1\right)^2$, wenn man für d. entsprechenden Stellwinkel d. Versuchsschiebers d. Werth von $\frac{A}{\delta}$ berechnet, mit diesen Werthen d. Werthe von α bestimmt aus dem [illegible] und dann ζ_0 berechnet. Es folgt für:

$\delta =$	5°	10°	15°	20°	25°	30°	35°	40°	45°	50°	55°	60°	65°
$\zeta_0 =$	0,02	0,15	0,39	0,85	1,62	2,89	5,05	8,72	15,4	27,9	53,9	113	276.

Handelt es sich d. Aufgabe nun, für einen Schieber in einem cylindrischen Rohr, dessen Absperrungswinkel δ' = 75° ist, d. Widerstandscoeff. ζ zu bestimmen, welcher d. Winkel δ = 50° entspricht, so kann man folgendermaßen schließen:

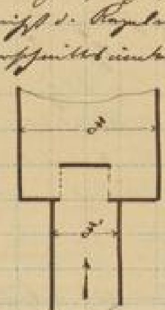
Es ist $\frac{\delta}{\delta'} = \frac{50}{75} = \frac{2}{3}$. Bei d. Weisbach'schen Versuchsschieber würde diesem Verhältniß $\frac{2}{3}$ ein Werth δ entsprechen von $54\frac{2}{3}$° und hierfür ist $\zeta_0 = 52$. D. andere Bestandtheil hängt nun nicht von d. Verhältniß $\frac{\delta}{\delta'}$ ab, sondern von dem absoluten Werthe von δ; für δ = 50° ist aber $\zeta - \zeta_0 = 52{,}6 - 27{,}9 = 25$ und somit kann für d. vorliegenden Schieber, welcher bei δ' = 75° vollkommen absperrt, entsprechend einem Stellwinkel von 50°: $\zeta = 52 + 25 = 77$ gesetzt werden. —

Es sind ferner von Weisbach Versuche angestellt worden über d. Widerstandscoeff. von Drosselklappen und zwar auch für ein cylindrisches und ein parallelepipedisches Rohr. Es wird auch hier d. Widerstand abhängig sein von d. Winkel δ, den d. Richtung d. Drosselklappe mit d. Rohrmittellinie bildet.



Vergleicht man d. hier gefundenen Werthe mit denjenigen, welche d. [illegible] bei gleichen Werthen von $\frac{A}{\delta}$ entsprechen, so zeigt sich, daß für d. kleinen Werthe von α d. Widerstandscoeff. größer sind als d. eines [illegible] entsprechende Ausflußöffnung in einer ebenen Scheidewand, daß dagegen bei größeren Werthen von α d. Werthe kleiner werden als eine [illegible]. Daß bei d. kleineren Werthen von δ d. Widerstandscoeff. größer ist, ist leicht daraus her, daß schon diese Drosselklappe an und für sich einen gewissen Widerstand verursacht, wenn auch δ = 0 ist; wenn dagegen δ wächst, so macht sich d. Umstand geltend, daß hier d. [illegible] nur eine sehr [illegible] ist, daß an keiner Stelle je keine plötzliche Übergangsstelle stattfindet und diese Zuflüsse [illegible] an d. einzelnen Theile nur [illegible]. —

Schließlich sind von Weisbach noch Versuche mit Ventilen angestellt. Betrachten wir zunächst d. Kegelventil: d. Öffnung d. Ventils befindet sich an einer solchen Stelle, wo zugleich eine Querschnittsänderung stattfindet, wie d. Beispiel bei einem Kegelventil. Es sei δ d. Querschnitt d. ankommenden Wassers, also d. Rohres vor d. Ventil und δ' d. Querschnitt d. abfließenden Wassers, also „ „ hinter d. Ventil; dann sind 3 verschiedene Querschnitte zu unterscheiden: 1) der d. Ventilöffnung A_1 2) d. ringförmige Querschnitt um d. Ventil herum = A_2



3) d. cylindrische Ausflußquerschnitt zwischen d. Ventil und seinem Sitze = A_3 also d. eigentliche Öffnung. Bei einem gegebenen Ventil sind nun A_1 und A_2 gegeben, dagegen A_3 von d. Stellung d. Ventils abhängig. D. resultirende Widerstandscoeff. ζ ist nun abhängig von d. Verhältniß zwischen A_1 A_2 A_3

und d. Querschnitt F. Ist d. Hubhöhe h sehr klein, dann wird d. entsprechende Widerstandscoeff. [illegible] A_2 abhängig sein; wird d. Hubhöhe h und damit A_2 vergrößert, so nimmt d. Einfluß d. Hubhöhe h auf ζ mehr und mehr ab, bis zu einer Grenze, wo d. weitere Vergrößerung von h keinen Einfluß mehr auf ζ ausübt. Man wird annehmen dürfen, daß dieser Einfluß d. Durchflußöffnung A_2 auf ζ aufhöre ~~[illegible]~~ merklich zu sein, sobald d. Querschnitt d. Wasserstroms beim Durchgange durch A_2 nicht mehr kleiner als d. Öffnung A_1 im Ventilsitze ist. Wenn d. Hubhöhe h = d. Radius r d. Öffnung A_1 geworden ist, so ist $A_2 = 2\pi r \cdot r = 2\pi r^2 = 2 A_1$, woraus man schließen kann, daß in diesem Zustand d. mittlere Winkel, unter dem d. Wasserfäden d. Fl. A_2 schneiden, ungefähr 30° beträgt, denn dann ist d. Projection von A_2 auf eine Ebene senkrecht zu d. Letzteren = d. Hälfte von A_2; also für h = r fällt d. Einfluß von A_2 heraus und es wird nun ζ hauptsächlich nur abhängig sein von d. Verhältniß d. Querschnitte A_1 A_2 zum Querschnitt F, so daß man setzen kann:

$$\zeta = \left(\frac{F}{\alpha A} - 1\right)^2$$

wenn hier unter A verstanden wird d. kleinere d. beiden Querschnitte A_1 und A_2 und wenn man sich vorbehält, d. Coeff. α durch besondere Versuche zu bestimmen. Dieser Coeff. α bedeutet hier nicht nur einen bloßen Coeff. d. inneren Contraction, sondern er wird mit bestimmt sein durch d. ungleiche Richtungsänderung, d. das Wasser erleidet und zum Theil von d. Ungleichförmigkeit d. Geschwindigkeit u. Wiedervereinigung d. Wasserstroms, ungeachtet von d. Verhältniß $\frac{A_1}{F}$ sowie von allen übrigen Umständen, welche d. Grad d. inneren Contraction beeinflussen; also von d. Construction d. Ventilsitzes etc. —; indessen scheint sich auf d. Einfluß dieser Umstände d. beabsichtigten Versuche nicht erstreckt, da es wahrscheinlich ist, daß diese letzteren Einflüsse auf d. Grad d. Contraction nicht bedeutend sein werden. — Es ist nun vortheilhafter A_2 etwas größer als A_1 zu machen, so daß erst d. contrahirte Querschnitt nach d. Durchgange durch A_1 etwas größer als A_1 wird.

Von Weisbach bezügl. Versuche mit einem Ventil, wo $F' = F$, waren

$$\frac{A_1}{F} = 0{,}356 \quad \text{und} \quad \frac{A_2}{F} = 0{,}406 .$$

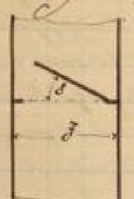
Unter diesen Umständen und während h mindestens = r war, ergab sich: $\zeta = 11$. — Setzt man diesen Werth in d. obige Gl. und außerdem: $\frac{A}{F} = \frac{A_1}{F}$, so findet man: $\frac{1}{\alpha} = 1{,}537$ also $\alpha = 0{,}651$. Letzterer Werth ist fast derselbe, wie für d. Contractionscoeff. einer einfachen kreisförmigen, centralen Öffnung in einer ebenen Wand. Für andere Verhältnisse solcher Teller- od. Kegelventile wird man bis auf Weiteres d. Widerstandscoeff. demnach setzen können:

$$\zeta = \left(1{,}537\,\frac{F}{A} - 1\right)^2,$$

wo unter A d. kleinere d. beiden Querschnitte A_1 u. A_2 zu verstehen ist, wobei am vortheilhaftesten d. Verhältnisse so zu wählen sind, daß A_1 d. kleinere ist. Weisbach selbst stellt eine etwas andere Formel auf; er legt auch diese Formel zu Grunde, verstehend unter A d. arithmetische Mittel von A_1 und A_2 und findet demnach:

Für d. zusammengesetzten Ventilarten liegen besondere Beobachtungen nicht vor, es bleibt also nichts anderes übrig als ζ nach Analogien zu ermessen.

Indessen hat Weisbach Versuche angestellt mit einem Klappenventil; dasselbe war auch in einem mit gleicher Weite fortlaufenden Rohre eingeschaltet und bestand aus einer Lederscheibe. d. Winkel, welchen d. geöffnete Klappe mit d. Ebene d. Ventilsitzes bildet, sei δ, ferner sei A d. Größe d. kreisförmigen Öffnung im Ventilsitz und F d. Querschnitt d. Rohrs. Bei d. Versuchsventil war $\frac{A}{F} = 0{,}535$. Die Größe von ζ ist wesentlich von diesem Verhältniß und von δ abhängig. Für verschiedene Werthe von δ wurden dann d. Widerstandscoeff.



beobachtet. Setzt man auch hier: $\zeta = \left(x \frac{\sigma}{A} - 1\right)^2$, so lassen sich aus den durch d. Versuch zusammengehörigen Werte von x berechnen, also:

für $\sigma =$	15°	20°	25°	30°	35°	40°	45°	50°	55°	60°	65°	70°
$x =$	5,61	4,75	4,00	3,47	2,93	2,54	2,18	1,91	1,68	1,49	1,35	1,23

d. Coeff x ist also in bedeutendem Grade von σ abhängig und zwar nicht nur, weil durch σ d. Grad d. plötzlichen, seitlichen Ablenkung d. Wasserstromes bedingt wird, sondern auch d. kleinste Querschnitt d. Wasserstromes bedingt wird, namentlich bis σ eine gewisse Größe nicht erreicht. Betrachtet man x als eine für diesen Wert von σ, so kann man auch dieser Form nach ζ für ein anderes Rohrgemisch berechnen. Z. B.: es solle ζ bestimmt werden für d. Ausfluss d. Wassers durch ein solches Ventil, während $\frac{A}{\sigma} = 0,64$ ist und $\sigma = 50°$ ist. Aus d. Tabelle ist dann $x = 1,91$ und somit:

$$\zeta = \left(\frac{1,91}{0,64} - 1\right)^2 = 4.$$

Beispiele als Anwendungen d. vorgeführten Gesetze.

Aus einem Behälter, in welchem d. Wasserstand durch entsprechenden Zufluss auf constanter Höhe erhalten wird, werde d. Wasser unter gleich bleibenden Umständen abgeleitet durch eine Röhre von d. Länge l und d. gleichförmigen Weite $= d$, außer ist diese Röhre eben durch Seitenöffnungen oder abgezweigte kleine Seitenröhren einen anderen Zufluss oder Abfluss als am Anfang und Ende selbst. Unter diesen Umständen fließt also durch jeden Querschnitt d. Röhre d. gleiche Wasservolumen V mit d. mittleren Geschw. u entsprechend d. Continuitätsgl.:

$$1) \quad V = \frac{\pi d^2}{4} u$$

Ist ferner ζ d. resultierende Coeff. etwaiger besonderer Widerstände, außer welche den allgemeinen Leitungswiderstand in d. Röhre vorkommen können, so hat man d. früheren zufolge:

$$2) \quad \left(1 + \zeta + \lambda \frac{l}{d}\right) \frac{u^2}{2g} = H \qquad \text{(Seite 82)}$$

wenn $H = h + \frac{p_0 - p}{\gamma}$ ist (Seite …)

worin p_0 d. äußere Druck an d. Oberfl. d. Wassers im Ausflussgefäß und p d. an d. Mündung ist, wenn d. Ausfluss in d. freie Luft, oder p d. Druck auf d. Oberfl. in d. Gefäß, in welches d. Wasser hineinfließt; h bedeutet im ersten Fall d. Höhe über d. Schwerpunkt d. Mündung, im anderen Fall Höhenunterschied beider Gefäßwasserspiegel. Wenn, was meist d. Fall ist, d. Wasser aus einem Gefäß in ein anderes fließt als d. allgemeinsten Fall annehmen. Gewöhnlich ist nun $p_0 = p$ und damit $H = h$; im Allgemeinen gilt jedoch obige Entwicklung. Wenn man zwischen obigen beiden Gl. d. mittlere Geschw. u eliminiert, so erhält man eine Beziehung zwischen l, d, H und V, durch welche Beziehung eine dieser Größen bestimmt werden kann, wenn d. anderen gegeben sind. Wenn es sich für einen solchen Fall nur um d. Ableitung d. Wassers handelt und eben nicht darum, d. lebendige Kraft d. Wassers zu verwerten, so kommt d. mittlere Geschw. nur insofern in Betracht, als von d. mittleren Geschw. und d. Röhrenweite d. Größe λ abhängt, indem:

$$\lambda = m\left(\alpha + \frac{\beta}{ud}\right)$$

ist, wo α und β für verschiedene Werte von u und d bekannt sind und m etc ein Sicherheitscoeff. bedeutet, d. durchschnittlich $= 1,2$ gesetzt werden kann. Durch diesen Umstand, daß λ von u und d abhängt, können d. verschiedenen hier sich darbietenden Aufgaben erschwert werden. Aber es ist jedoch zu bemerken, daß d. Veränderlichkeit von λ mit u und d innerhalb d. Grenzen, zwischen denen u und d gewöhnlich liegen, nur eine mäßige ist, so daß es meistens genügt, entweder endgültig mit einem constanten Mittelwerte von λ d. Rechnung durchzuführen oder mit Hilfe eines vorläufigen Wertes von λ zu rechnen. — Im Allgemeinen können sich 4 verschiedene Aufgaben darbieten indem jede d. 4 Größen gesucht sein kann, wenn d. anderen gegeben sind; jedoch pflegt gewöhnlich l gegeben zu sein, so daß nur noch 3 Aufgaben übrig bleiben, die kurz nachstehend behandelt werden:

1) Gegeben d u. V.

Es wird also gesucht H d.h. d. Höhe, bei welcher eine gegebene Röhre ein gegebenes Wasservolumen p. Sek. liefert. Diese Aufgabe läßt sich direkt ohne Näherung angeben:
Zunächst findet man u mit d. Gl. 1); zu diesem u und d. gegebenen d findet man λ und mit diesem Coeff. λ und d. gegebenen Werthen l, d u. ζ findet man H mit Gl. 2).

2) Gegeben d u. H; es wird also gesucht dasjenige Wasservolumen V, welches eine gegebene Röhre bei gegebener wirksamer Druckhöhe liefert. Hier muß man schon durch successive Näherung zu Werke gehen. Mit einem vorläufigen Näherungswerthe λ etwa $\lambda = 0{,}03$ findet man einen entsprechenden Näherungswerth u aus Gl. 2); zu diesem Näherungswerthe u und d. gegebenen Rohrweite d findet man dann einen corrigirten Werth von λ und mit diesem aus Gl. 2) einen corrigirten Werth von u und daraus V mit Gl. 1).

3) Gegeben V u. H. Es wird gesucht diejenige Rohrweite d, welche einer Röhre gegeben werden muß, damit sie bei gegebener Länge und Druckhöhe ein gegebenes Wasservolumen p. Sek. liefert. Dieses ist die am häufigsten vorkommende Aufgabe. Hier hat man aus beiden zwischen Gl. 1) u. 2) u zu eliminiren; multiplicirt man zu diesem Zweck Gl. 2) mit $2g$ und setzt für u seinen Werth aus Gl. 1, so folgt:

$$\left(1+\zeta+\lambda\frac{l}{d}\right)\left(\frac{4V}{\pi}\right)^2\cdot\frac{1}{d^4} = 2gH,$$

also
$$d=\sqrt[5]{\frac{(1+\zeta)\,d+\lambda l}{2gH}\cdot\left(\frac{4V}{\pi}\right)^2}$$

Indem man nun vorläufig d auf d. rechten Seite d. Gl. $= 0$ setzt und $\lambda = 0{,}03$, so findet man vermittelst dieses Ausdrucks einen Näherungswerth von d, zu diesem Näherungswerthe von d findet man auch einen Näherungswerth $u\,d = \frac{4V}{\pi d}$ und hiezu einen corrigirten Werth von λ und wenn man dann diesen corrigirten Werth von λ und d. Näherungswerth d einsetzt, endlich einen corrigirten Werth von d.

Beispiel: Es sei d. erforderliche Weite einer Röhre zu bestimmen, die bei $l = 50$ m und bei $H = 1{,}5$ m und unter d. Voraussetzung, daß sonst kein besonderer Widerstand in d. Röhre vorkommen als d. Eintrittscoeff. $\zeta = 0{,}5$, p. Sek. $V = 0{,}03$ cubm. Wasser zu liefern hat.

Setzt man zu dem Ende in d. Formel für d auf d. rechten Seite $d = 0$ und $\lambda = 0{,}03$, so folgt:

$$d=\sqrt[5]{\frac{0{,}03\cdot 50}{2\cdot 9{,}81\cdot 1{,}5}\left(\frac{0{,}12}{\pi}\right)^2} = 0{,}149$$

daraus ist
$$\frac{1}{ud} = \frac{0{,}149\,\pi}{0{,}12} = 3{,}9 \quad \text{also} \quad \alpha+\frac{\beta}{ud} = 0{,}0239 \quad (m = 1{,}2 \text{ gesetzt}) \text{ folgt:}$$

$$\lambda = 0{,}0287.$$

Mit diesem corrigirten Werth und d. Näherungswerth von d findet man nun:

$$d=\sqrt[5]{\frac{1{,}5\cdot 0{,}149+0{,}0287\cdot 50}{2\cdot 9{,}81\cdot 1{,}5}\cdot\left(\frac{0{,}12}{\pi}\right)^2} = 0{,}152,$$

~~m~~, welcher Werth genau genug ist um weiter keiner Correction zu bedürfen.

Unter Umständen kann es auch wichtig sein, d. [illegible], d. in gewissen Zeitabschnitten d. Röhre füllt, zu ermitteln. Die [illegible] dieser Fl. ist [illegible] [illegible], indem an derselben d. Wandstärke [illegible] und indem sich in keinem Querschnitt d. Fl. d. Grenze 0 [illegible]. [illegible] ist es [illegible], wenn irgendwo d. Fl. kleiner wird als d. äußeren atm. Druck, indem dann [illegible] [illegible]. [illegible] in d. [illegible] [illegible] oder sich d. innen im Wasser enthaltenen [illegible]. [illegible] [illegible], [illegible] [illegible] werden durch [illegible] [illegible] d. mit [illegible] [illegible] sind, od. mit [illegible] [illegible], wie dieselben [illegible] [illegible] [illegible] entnommen. —

Um d. Druckhöhe in d. Rohrleitung zu bestimmen, will ich für eine Stelle, entsprechend d. Länge s, d. Mittellinie gemessen vom Anfang d. Röhre entfernt, ~~unter~~ d. in d. Höhe z unter d. Oberwasserspiegel d. Pr. mit p_s bezeichnen, wobei z auch negativ sein kann. ζ_s sei d. Coeff. etwaiger besonderer Widerstände für d. ganze Rohrstrecke von d. Länge s und $\mathfrak{z}$ d. wirksame Druckhöhe, also:

$$\mathfrak{z} = z + \frac{p_0 - p_s}{\gamma} \quad \text{also} \quad \frac{p_s}{\gamma} = \frac{p_0}{\gamma} + z - \mathfrak{z}.$$

Für d. wirksame Druckhöhe $\mathfrak{z}$ gilt nun ein ganz analoger Ausdruck wie für $\mathfrak{H}$ (Seite 82)
also:

$$\frac{p_s}{\gamma} = \frac{p_0}{\gamma} + z - \left(1 + \zeta_s + \lambda \frac{s}{d}\right)\frac{u^2}{2g}$$

oder wenn für $\frac{u^2}{2g}$ d. Wert aus Gl. 2 Seite 90 gesetzt wird:

$$\frac{p_s}{\gamma} = \frac{p_0}{\gamma} + z - \frac{(1+\zeta_s)d + \lambda s}{(1+\zeta)d + \lambda l}\left(h + \frac{p_0 - p}{\gamma}\right)$$

Gewöhnlich wird nun d. äußere Druck sowohl am Ober- wie am Unterwasserspiegel = d. atm. Luftdruck sein, also $p_0 = p$, und sei nun $\frac{p_0}{\gamma} = \frac{p}{\gamma} = b$ = Wassersäulenbarometerhöhe, welche ungefähr = 10 m ist, so folgt nun:

$$\frac{p_s}{\gamma} = b + z - \frac{(1+\zeta_s)d + \lambda s}{(1+\zeta)d + \lambda l} h.$$

Diese Druckhöhe soll größer sein als 0, widrigenfalls sich sonst d. Wasser von d. Rohrwand trennt. Demnach ergibt sich d. Bedingung für d. zulässige Erhebung einer Rohrstrecke über d. Oberwasserspiegel, also d. Größe $\div z$, ~~wobei~~ es muß nämlich sein:

$$\div z < b - \frac{(1+\zeta_s)d + \lambda s}{(1+\zeta)d + \lambda l} h.$$

Diese Erhebung über d. Oberwasserspiegel hinaus ist eine Function von s, so daß sich d. Röhrenleitung an verschiedenen Stellen verschieden hoch erheben darf. Ist d. Leitungsröhre sehr lang und sind besondere Widerstände nicht vorhanden, so wird sowohl im Zähler wie im Nenner d. Bruchs d. 2te Glied vorherrschend d. erst., so daß man näherungsweise erhält:

$$\div z < b - \frac{s}{l} h.$$

Daraus ergeben sich d. Umstände, unter denen es möglich ist, durch eine heberartige Röhre d. Wasser über eine Anhöhe zu leiten. Jedenfalls muß diese Erhebung kleiner sein als b also kleiner als 10 meter; ferner erkennt man, daß am Anfang d. Rohrleitung dieselbe sich höher erheben darf als gegen d. Ende hin. Auch ist diese höchstens zulässige Höhe abhängig von h; überschreitet diese Druckhöhe h eine gewisse Grenze, so kann es unter Umständen [illegible] werden, d. Röhre höher als d. Oberwasserspiegel zu legen, sobald nur $h > \frac{l}{s} b$ ist.

Hier ist eine cylindrische Röhre vorausgesetzt, wo auch d. durch 2 Querschnitte hindurchfließende Wassermenge d. gleiche ist. D. allgemeinste Fall würde nun d. sein, daß d. Weite d. Röhre nach irgend einem Gesetz veränderlich ist, und daß dann auch d. Wasservolumen V vom Anfang bis zum Ende d. Röhre sich stetig ändert. Letzteres wird streng genommen kaum jemals d. Fall sein, jedoch näherungsweise wie z. B. bei einer städtischen Wasserleitung, welcher sich oft durch kleinere Zweigleitungen Wasser entzogen wird, so man also annehmen kann, dieselben entnehmen stetig d. Wasser d. Hauptleitungsröhre. Es sei also sowohl d. Weite d. Röhre stetig veränderlich als auch d. Volumen V. In einem solchen Fall wird nun d. Leitungswiderstand pro Längeneinheit für verschiedene Stellen natürlich verschieden sein, d. h.: wenn wir ihn für d. Längenelement ds mit $\mathfrak{B}_1 ds$ bezeichnen, so wird $\mathfrak{B}_1$ eine Function von s sein. D. variable Weite d. Röhre sei = y und d. mittlere Geschw. an dieser Stelle = u. Nun wird man dann gerade so wie bei einer cylindrischen Röhre, auch hier d. allgemeine Formel bezüglich $\mathfrak{B}_1$ zu Grunde legen dürfen, sobald nur d. Veränderlichkeit von V ziemlich langsam vor sich geht.

$$\text{also } \mathfrak{B}_1 = a\frac{u^2}{y} + b\frac{u}{y^2} = \frac{\lambda}{y}\frac{u^2}{2g} \qquad \text{(Seite 78)}$$

$$\text{also } \lambda = \alpha + \frac{\beta}{uy}$$

Nun ist es fraglich ob a u. b usf. d. i. ob dieselben Werthe haben werden wie bei d. Leit. in einer zylindrischen Röhre, da d. Verhältnisse nur z Richtungen zu abweichend sind. Hier wird d. Geschw. nicht in allen Punkten gleich sein, da d. Querschnitte nicht eben sind; ferner enthalten d. Coeff. a u. b d. Verhältniss $\zeta = \frac{w'}{u}$ in sich, wo w' d. Strömung an d. Wand (Seite 78) und u d. mittlere Geschw. ist. Dieses Verhältniss nur durch jene Untersuchungen genug unbestimmt und es fragt sich, ob dieses Verhältniss ebenso groß sein wird für eine weitere Röhre. Da jedoch hierüber keine Versuche vorliegen, so bleibt nichts anderes übrig als für a u. b d. früheren Werthe zu nehmen. — Wird nun mit B d. Leitungswiderstandshöhe für d. ganze Röhre bezeichnet, so ergibt sich:

$$B = \int_0^l B_1\, ds = \frac{1}{2g}\int_0^l \frac{\lambda}{y}\, u^2\, ds.$$

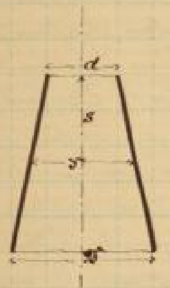
Hier wird es zulässig sein, d. Coeff. λ einen constanten Mittelwerth zu geben, so daß derselbe vor d. Integral herausfällt, also:

$$B = \frac{\lambda}{2g}\int_0^l \frac{u^2}{y}\, ds.$$

In diesem allgemeinsten Ausdruck ist nun $u = \frac{4V}{\pi y^2}$, wo im Allgemeinen sowohl y als auch V Functionen von s sein können. Von besonderem Interesse sind indessen nur 2 einfachste Specialfälle, nämlich:

1) daß V constant und nur y veränderlich ist und zwar gleichförmig veränderlich und 2) daß y constant und V veränderlich ist.

Ist zunächst V constant, so folgt:
$$B = \frac{\lambda}{2g}\left(\frac{4V}{\pi}\right)^2\int_0^l \frac{ds}{y^5}$$



Ist hier nun d d. Durchm. am engeren und D d. am weiteren Ende und y d. an einer beliebigen Stelle in d. Entfernung s vom engeren Ende, dann ist
$$\frac{y-d}{D-d} = \frac{s}{l} \quad \text{also} \quad ds = \frac{l}{D-d}\, dy$$ und demnach:

$$B = \frac{\lambda}{2g}\left(\frac{4V}{\pi}\right)^2\frac{l}{D-d}\,\frac{1}{4}\left(\frac{1}{d^4} - \frac{1}{D^4}\right)$$

oder
$$B = \frac{\lambda}{2g}\left(\frac{4V}{\pi d^2}\right)^2\frac{l}{4}\,\frac{D^4-d^4}{(D-d)D^4} = \frac{\lambda}{2g}\left(\frac{4V}{\pi d^2}\right)^2\frac{1}{4}\,\frac{l}{D}\left(1+\frac{d}{D}\right)\left(1+\frac{d^2}{D^2}\right).$$

Setzt man diese Leitungswiderstandshöhe $= \zeta\left(\frac{4V}{\pi d^2}\right)^2\frac{1}{2g}$, so bedeutet ζ nichts anderes als d. Widerstandscoeff. bezogen auf d. kleinsten Querschnitt, es wird also:
$$\zeta = \frac{\lambda}{4}\,\frac{l}{D}\left(1+\frac{d}{D}\right)\left(1+\frac{d^2}{D^2}\right). \text{ —}$$

D. andere Specialfall, daß d. Rohrweite y constant $= d$ ist, d. Wassermenge V aber stetig veränderlich ist, hat Interesse rücksichtlich d. einzelnen Leitungen einer städtischen Wasserleitung. Thatsächlich findet d. Ableitung d. Wassers nicht stetig längs d. Röhre statt, sondern durch d. Hausleitungen, welcher Umstand jedoch nicht berücksichtigt werden soll. — Setzt man nun in d. allgemeine Formel für d. Leitungswiderstandshöhe $u = \frac{4V}{\pi d^2}$ ein, so folgt:
$$B = \frac{\lambda}{2g}\left(\frac{4}{\pi}\right)^2\frac{1}{d^5}\int_0^l V\, ds.$$

Ist nun V_0 das am Anfang einfließende Wasser und V_1 d. am Ende ausfließende Wasser und V d. durch d. in d. Entfernung s vom Anfang liegenden Querschnitt hindurchfließende Wasser, so ist offenbar:
$$\frac{V_0 - V}{V_0 - V_1} = \frac{s}{l}$$ od. wenn $\frac{V_1}{V_0} = \alpha$ gesetzt wird: $\frac{V}{V_0} = 1 - \frac{1-\alpha}{l}\, s$

und demnach
$$B = \frac{\lambda}{2g}\left(\frac{4V_0}{\pi d^2}\right)^2\frac{1}{d}\int_0^l\left[1 - 2\frac{1-\alpha}{l}s + \frac{(1-\alpha)^2}{l^2}s^2\right]ds.$$

Das Integral ergibt sich nun:
$$\int \dots ds = l - (1-\alpha)l + \frac{1-2\alpha+\alpha^2}{3}\, l = \frac{l}{3}\left(3 - 3 + 3\alpha + 1 - 2\alpha + \alpha^2\right) = \frac{1+\alpha+\alpha^2}{3}\, l$$

also
$$B = \frac{\lambda}{2g}\left(\frac{4V_0}{\pi d^2}\right)^2\frac{l}{d}\,\frac{1+\alpha+\alpha^2}{3};$$
$\frac{\lambda}{2g}\left(\frac{4V_0}{\pi d^2}\right)^2$ ist nämlich d. Widerstandshöhe wenn d. Wassermenge constant bliebe und zwar vom Anfang bis zum Ende d. Röhre.

Beispiel: Eine zusammengesetzte Wasserleitung soll berechnet werden von einem gemeinsamen Hochreservoir aus, d.h.: d. Anfangsrohr leitet d. Wasser zunächst in ein festgelegtes Gebiet und von hier aus geht ein einziger Rohrstrang, d. sich nach und nach verzweigt. Die erste gemeinschaftliche Teilstrecke sei bezeichnet mit $A_0 A_1$, wo A_0 d. Anfangsquerschnitt d. ganzen Leitung ist, A_1 d. Querschnitt, wo zuerst eine Abzweigung stattfindet. Die Länge dieser Strecke $A_0 A_1$ sei $= l_1$. Dem vorhandenen Bedürfnis gemäß sind d. Wassermengen gegeben, die von d. ersten Verzweigungsstelle A_1 in d. verschiedenen Rohrsträngen hindurch fließen sollen. Man kann also unter d. verschiedenen Zweigen, d. von A_1 abzweigen, denjenigen betrachten, durch welchen d. größte Wassermenge hindurchfließt; diese Strecke sei $A_1 A_2$ mit d. Länge l_2; an d. Stelle A_2 findet eine abermalige Verzweigung statt, es soll dann wieder d. Strecke betrachtet werden, d. d. größte Wassermenge hindurchleitet, nämlich $A_2 A_3$ von d. Länge l_3 u.s.w. — bis zur Strecke $A_{n-1} A_n$ von d. Länge l_n. — Von jedem d. Knotenpunkte aus kann man nun wieder d. abzweigenden Röhren in ähnlicher Weise verfolgen, worauf jedoch nicht weiter eingegangen werden soll. — d. Längen $l_1\ l_2 \ldots\ l_n$ sind natürlich als gegeben zu betrachten. Diese einzelnen Strecken sollen mit verschiedenen Durchmessern d. betreffenden Röhren angeordnet werden; an jeder Knotenstelle kann jedoch eine Änderung d. Rohrweite eintreten und es seien d. Durchmesser d. n Strecken d. Hauptstranges resp. $y_1\ y_2\ y_3 \ldots\ y_n$. Diese Größen sind aber nicht gegeben. d. Widerstandshöhe d. Wassers in d. ersten Strecke sei bezeichnet mit B_1, die d. folgenden mit $B_2 \ldots B_3 \ldots B_n$. Diese Größen sind auch nicht gegeben, da sie wesentlich von d. betreffenden Durchmessern abhängen. An d. Stellen $A_0\ A_1\ A_2 \ldots\ A_n$ seien d. Druckhöhen im Innern d. Röhren $b_0\ b_1\ b_2 \ldots\ b_n$, welche also kürzere Bezeichnungen für $\frac{p_n}{\gamma}$ sind. Von diesen Druckhöhen sind d. erste und d. letzte gegeben und zwar b_0 durch d. Höhe d. Hochreservoirs und b_n dadurch, daß sobald am Ende d. Rohrleitung noch eine geeignete Druckhöhe übrig bleiben soll, um d. Wasser in d. höchsten Stockwerke hinauf zu treiben; d. übrigen dazwischen liegenden Druckhöhen sind jedoch vorläufig noch nicht bekannt. — Was d. ganze Anordnung d. Röhrennetzes betrifft, so sind d. Bedürfnisse nach nicht nur d. einzelnen Längen d. verschiedenen Rohrstrecken gegeben, sondern auch d. Höhenlage d. einzelnen Knotenpunkte durch Nivellement d. Terrains. Es sei demnach h_1 d. Höhe von A_0 über A_1, h_2 d. von A_0 über A_2 ……… h_n d. von A_0 über A_n. Analog d. früheren Bezeichnungen sei nun H_1 d. wirksame Druckhöhe für d. ganze Rohrstrecke $A_0 A_1$, H_2 d. für d. Strecke $A_1 A_2$, H_n d. von A_0 bis A_n. Diese wirksamen Druckhöhen sind natürlich von d. vorhergehenden Höhen abhängig, nämlich: $H_m = h_m + b_0 - b_m$. —

d. Wasservolumen, welches p. Sek. in d. Rohrstrecke $A_0 A_1$ hineinfließt sei V_1; V_2 sei d. Wasservolumen, welches in d. folgende Strecke $A_1 A_2$ hineinfließt, während W_1 d. Wasservolumen ist, welches durch d. sonstigen hier in A_1 abzweigenden Rohrstränge abfließt. d. Größe V_1 kann schon unterwegs während d. Strecke $A_0 A_1$ kleine Abzweigungen erleiden durch kleinere Hausleitungen, so daß d. bei A_1 herausfließende Wasser $= \alpha_1 V_1$ geworden ist. Dieses Wasservolumen $\alpha_1 V_1$ verzweigt sich nun an d. Stelle A_1 in d. Volumen V_2 und in W_1; das aus d. Strecke $A_1 A_2$ hinausfließende Wasservolumen sei $= \alpha_2 V_2$; von diesem geht d. Wasservol. V_3 in d. 3te Strecke $A_2 A_3$, während W_2 in d. übrigen in A_2 sich abzweigenden Leitungen geht. u.s.w. — schließlich ist V_n d. Wasservolumen, welches in d. nte Strecke hineinfließt, W_n sei dasjenige Wasservolumen welches am Ende d. nten Strecke noch übrig bleibt zur irgend einer späteren oder anderweitigen Verwendung. V_n geht bis gegen d. Ende d. Strecke l_n über in $\alpha_n V_n$. d. Größen α stehen natürl. in Beziehung zu d. gegebenen Größen V u. W, denn es ist: $\alpha_1 V_1 = W_1 + V_2$

also $\alpha_1 = \frac{W_1 + V_2}{V_1}$ $\alpha_2 = \frac{W_2 + V_3}{V_2}$ ……… $\alpha_n = \frac{W_n}{V_n}$

Es sind also:

	A_0A_1	A_1A_2	A_2A_3	....	$A_{n-1}A_n$	d. Strecken d. Hauptstrangs
	l_1	l_2	l_3	....	l_n	d. Längen derselben.
	y_1	y_2	y_3	....	y_n	d. entsprechenden Durchmesser
	B_1	B_2	B_3	....	B_n	d. Widerstandshöhen
A_0	A_1	A_2	A_3	....	A_n	d. Knotenpunkte
b_0	b_1	b_2	b_3	....	b_n	d. Druckhöhen daselbst
	h_1	h_2	h_3	....	h_n	d. Höhenlagen über A_0
	H_1	H_2	H_3	....	H_n	d. entsprechenden Druckhöhen für A_0A_n
	V_1	V_2	V_3	....	V_n	d. in $A_{n-1}A_n$ einfließende Wassermenge.
	W_1	W_2	W_3	....	W_{n-1}	W_n das in A_n abgezweigte Wasserquant.
	α_1V_1	α_2V_2	α_3V_3	....	α_nV_n	das aus $A_{n-1}A_n$ ausfließende Wasserquant.

Letztere unveränderlich sollen nun d. Durchmesser y bestimmt werden und zwar so, daß d. Anlagekosten ein minim. werden, wobei untergeordnete Widerstände unberücksichtigt bleiben sollen, also nur d. Leitungswiderstand betrachtet werden soll, indem man sich vorbehalten kann, d. Coeff. λ etwas größer zu veranschlagen. Es sind bei einer solchen Leitung in d. That andere Leitungswiderstände von sehr untergeordneter Art, so daß man dies wohl thun kann. Die Anlagekosten sind nun vorzugsweise bedingt durch d. Rohrgewicht d. ganzen Röhrenleitung und dieser annähernd d. Gew. proportional sein. Für eine Strecke von d. Länge l, Weite y und Wandstärke δ ist d. Volumen proportional $l y \delta$ also d. Gew. d. ganzen Röhrenstrangs proportional $\Sigma\, l y \delta$. d. Wandstärke eines solchen Rohres wird gewöhnlich nach einer empirischen Formel bestimmt: $\delta = \alpha + \beta y$, wo α constant ist, β aber mit d. Pressung wächst. Im vorliegenden Fall sind d. Pressungen in d. einzelnen Theilen an d. verschiedenen Stellen d. ganzen Röhrenstrangs wenig genug verschieden, so daß auch β als Constante betrachtet werden kann, da auch am Ende d. ganzen Leitung d. Pressung noch so groß sein muß, daß d. Wasser in d. obersten Stockwerke hinaufsteigt. Damit sind d. Anlagekosten proportional: $\Sigma\, l y(\alpha + \beta y)$. Behufs einer ersten Annäherung soll zunächst so gerechnet werden, als ob $\beta = 0$ wäre, indem d. Kosten nicht nur bedingt sind durch d. Kosten d. Röhrenstrangs selbst sondern auch durch d. Verlegungskosten, welche ein anderes Abhängigkeitsverhältnis haben könnten. Jedenfalls ist β nur sehr klein, es sei also behufs einer ersten Näherung gesetzt: $\Sigma\, l y = \text{minim.}$ Soll dieses ein minim bezüglich d. veränderlichen y sein, so muß d. erste Differentialquotient $= 0$ sein, also:

$$\Sigma\, l\, dy = 0$$

d. n verschiedenen Differentiale $dy_1\ dy_2\ dy_3 \ldots$ stehen in einer gewissen Beziehung zu einander. Da keine andern Widerstände als d. Leitungswiderstand berücksichtigt sind und auch diese Leitungswiderstandshöhe viel größer als d. Geschw.-Höhe d. an irgend einer Stelle fließenden Wassers ist, so kann wegen d. Gl.: $\frac{u^2 - u_0^2}{2g} = H - B$, wo nun d. Geschw.-Höhe links gegen d. viel größere Höhe B vernachlässigt werden kann:

$$H = B.$$

Nach Seite 93 ist dann d. Widerstandshöhe irgend einer dieser n Strecken:

$$B = \frac{lP}{y^5} \quad \text{worin} \quad P = \frac{\lambda}{2g}\left(\frac{4V}{\pi}\right)^2 \frac{1+\alpha+\alpha^2}{3} \text{ ist.}$$

Dieses P hat für jede d. n Strecken einen besonderen Werth, der sich aber nie vorweg berechnen läßt, wenn für λ vorläufig ein constanter Mittelwerth, etwa 0,03, gesetzt wird, man hat nur zu setzen in d. allgemeinen Formel: $V = V_1$, $\alpha = \alpha_1$ so findet man $P_1 =$ d. Werth von P für diese erste Rohrstrecke, dann ist $B_1 = \frac{l_1 P_1}{y_1^5}$ u. s. w. —

Nun ist aber d. Summe d. Widerstandshöhen aller n Strecken zusammengenommen $= B = \Sigma \frac{lP}{y^5}$ eine gegebene größte, denn es muß doch $= H_n$ sein; wenn nun auch d. verschiedenen H_n unbekannt sind so ist doch H_n bekannt, nämlich:

$$H_n = h_n + b_0 - b_n$$

Es sind also d. n Differentiale an d. Bedingung gebunden, daß $\Sigma \frac{lP}{y^5} = const = H_n$ sein muß, d. Bedingung ist also:

$$\Sigma B = \Sigma \frac{lP}{y^5} = H_n = h_n + b_0 - b_n.$$

differentiirt giebt diese Gl.: $\Sigma \frac{lP}{y^6}\, dy = 0.$

Zwischen dieser Gl. und d. Gl. $\Sigma l\, dy = 0$ könnte man nun von d. n Differentialen $dy_1\ dy_2 \dots dy_n$ eins eliminiren, so daß eine Gl. entstünde, d. nur d. übrigen $n-1$ Differentiale enthielte; da diese $n-1$ übrig bleibenden Werthe von dy ganz unabhängig von einander sind, so müßte d. entstehende Gl. identisch erfüllt sein für alle Werthe von y, es müßte also d. Coeff. d. einzelnen y gleich sein. Dieses würde $n-1$ Gln. ergeben, welche zusammen mit d. Gl. für P d. erforderliche Zahl von n Gln. geben, womit d. verschiedenen Durchmesser zu finden sind. Es ist aber zweckmäßiger dieses Eliminationsverfahren mit einem zweiten Coeff. auszuführen; zu dem Ende multipliciren wir d. Gl. mit μ^6 und addiren sie zu $\Sigma l\, dy = 0$, so erhalten wir d. Gl.:

$$\Sigma l \left(1 - \mu^6 \frac{P}{y^6}\right) dy = 0$$

Nun kann man so schließen, daß diese n Glieder d. Summe einzeln jedes für sich $= 0$ wird, also d. Gl. in n Theilgleichungen zerlegen, wobei nur μ passend bestimmt werden muß. Nimmt man d. Coeff. μ, d. dieser Bedingung entspricht, so ergiebt sich $y = \mu P^{\frac{1}{6}}$. Man braucht dann nur noch d. Werthe $\mu P^{\frac{1}{6}}$ zu bilden, um d. verschiedenen n Durchmesser y zu finden. D. n verschiedenen Werthe von P sind aber bekannt für einen Mittelwerth von k, so daß es sich nur um d. Bestimmung von μ handelt, dieses kann aber geschehen vermittelst d. Bedingung: $\Sigma \frac{lP}{y^5} = H_n$, dieses aber eingesetzt liefert:

$$\Sigma \frac{lP}{\mu^5 P^{\frac{5}{6}}} = H_n$$

Hierin sind bei P für d. n verschiedenen einzelnen Glieder verschieden, μ war aber ein für alle Glieder gemeinschaftlicher Coeff. so daß $\frac{1}{\mu^5}$ herausgeschrieben werden kann, also:

$$\mu = \left(\frac{\Sigma l P^{\frac{1}{6}}}{H_n}\right)^{\frac{1}{5}}$$

dieser Werth von μ ist dann nur zu multipliciren mit $P^{\frac{1}{6}}$, um y zu finden.

Jetzt kann man eine Correctionsrechnung in zweifacher Richtung anstellen, einmal insofern, als k nicht immer $= 0{,}03$ ist und dann in so fern, als es nicht ganz d. Aufgabe entspricht, d. Summe d. Producte $l y$ zu einem min. zu machen, sondern daß

$$\Sigma l y (\alpha + \beta y)$$ zu einem min. gemacht werden soll.

Was zunächst k betrifft, so kann man, da jetzt d. Durchmesser angenähert bestimmt sind, sowie auch d. Wassermengen, d. durch d. einzelnen Strecken hindurchfließen, so kennt man auch d. mittl. Geschw. in diesen Strecken, also kennt man auch $u y$ und es ist nun im Allgemeinen: $u y = \frac{4V}{\pi y}$; V ist aber am Anfang $= V$ und am Ende αV, so daß man setzen kann statt $4V$: $2V(1+\alpha)$ also:

$$u y = \frac{2V(1+\alpha)}{\pi y}$$

Setzt man hierin d. Werthe von $V = V_1\ V_2 \dots$ $\alpha = \alpha_1\ \alpha_2 \dots$ $y = y_1\ y_2 \dots$, so kann man d. mittl. Werthe von $u y$ für d. einzelnen Strecken berechnen; damit findet man nun entsprechend d. corrigirten Werth von k. War etwa k' d. vorläufig angenommene Mittelwerth von k, so braucht man nur d. früher berechneten Werthe von P zu multipliciren mit $\frac{k}{k'}$ um d. corrigirten Werthe von P zu erhalten. Angenommen dieses sei geschehen, so daß nun unter P d. corrigirte Werth von P verstanden werde, dann soll d. Zweckmäßigkeit gemäß gesetzt werden: $\frac{\beta}{\alpha} = \frac{m}{2}$

Die Aufgabe ist dann: $\sum l y \left(1 + \frac{m y}{2}\right)$ = min zu machen. Zu dem Ende muss d. Differential bezüglich d. unabhängigen $y = 0$ sein, also:

$$\sum l(1+my)\,dy = 0$$

Wenn nun wieder d. Bedingungsgl. $\sum \frac{lP}{y^6}\,dy = 0$ mit d. Coeff. μ^6 multipliziert und d. Gl. von dieser subtrahiert wird, so ergibt sich:

$$\sum l\left(1+my - \mu^6 \frac{P}{y^6}\right) dy = 0.$$

Hier kann nun wieder μ so bestimmt werden, daß diese Gl. in n einzelne Gln. zerfällt. Wenn d. Coeff. μ so bestimmt, so würden sich d. n einzelnen Werthe von y ergeben aus dieser Gl. Dieselbe würde aber sehr zeitraubend sein, da diese Gln. durch Probiren aufzulösen sind, welches bei n Gln. vom 6ten Grad nicht so einfach ist. Wenn es sich aber nun nur hier um eine Correctionsrechnung handelt und m immer sehr klein ist, so kann man in my dem y d. vorher schon bestimmten Näherungswerth beilegen, welcher aber mit y' bezeichnet sei, also y' = Näherungswerth für d. Rohrdurchmesser. Dann ergibt sich, wenn μ bestimmt ist:

$$y = \mu\left(\frac{P}{1+my'}\right)^{\frac{1}{6}}$$

d. Werthe von $\frac{P}{1+my'}$ können für d. n Rohrstrecken berechnet werden, da d. n Werthe von P bekannt sind. Es handelt sich also nur noch um d. Bestimmung von μ. Dieser Coeff. ergibt sich aus: $\sum \frac{lP}{y^5} = H_n$; setzt man hier ein, so folgt:

$$\sum \frac{lP}{\mu^5 \left(\frac{P}{1+my'}\right)^{\frac{5}{6}}} = H_n.$$

und daraus μ:

$$\mu = \left(\frac{\sum \left[l \left(\frac{P}{1+my'}\right)^{\frac{1}{6}} (1+my')^{\frac{5}{6}}\right]}{H_n}\right)^{\frac{1}{5}}$$

Nachdem man nun so d. einzelnen Weiten d. Strecken d. Hauptleitungen gefunden hat, kann zu d. Nebensträngen geschritten werden, d. sich an d. Knotenpunkten abzweigen. Um diese Nebenstränge nun genau so weiter behandeln zu können, ist weiter nichts nötig, als zunächst d. Druckhöhen $b_1\, b_2 \ldots$ für d. n Knotenstellen zu berechnen, denn dann treten diese bezüglich d. Nebenstränge an Stelle von b_0 in d. Formel für d. Hauptstrang und kann man genau so wie vorhin verfahren. Die Größen $b_1\, b_2 \ldots\ldots b_{n-1}$ können nun leicht gefunden werden, b_0 und b_n waren bekannt, b_1 bis b_{n-1} müssen berechnet werden. Es kann nun aber, nachdem d. Durchmesser y für d. sämtlichen n Strecken d. Hauptstranges bestimmt sind, d. Größe B für d. n Strecken berechnet werden:

$$B_1 = \frac{l_1 P_1}{y_1^5} \quad \ldots\ldots \quad B_n = \frac{l_n P_n}{y_n^5}.$$

Ist dies geschehen, so ist d. Druckhöhe H_1 für A_0 bis $A_1 = B_1$ ferner $H_2 = B_1 + B_2$ $H_3 = B_1 + B_2 + B_3$ etc. – es ist aber $H_1 = h_1 + b_0 - b_1$ und hieraus also b_1, da H_1 und b_0 bekannt sind. Ferner ist $H_2 = h_2 + b_0 - b_2$, woraus wiederum b_2 gefunden werden kann u. s. w. –

Nachdem nun also d. Druckhöhen an d. n Knotenpunkten bekannt sind, kann man d. Nebenstränge ebenso wie d. Hauptstrang berechnen. —

Permanente strömende Bewegung der Luft oder eines Gases in Gefäßen oder Röhren.

Um zunächst gewisse Fundamentalgln. für diesen Fall aufzustellen, muß zunächst erinnert werden an d. früher aufgestellten allgemeinen Gln. für d. permanente strömende Bew. einer beliebigen Flüssigkeit. D. Fundamentalgln., bei denen gar nichts bezüglich d. Art d. strömenden Flüssigkeit vorausgesetzt, waren folgende:

1.) d. Continuitätsgl.:

$$Fu = Gv$$

wo F = Querschnitt d. Flüssigkeitsstroms an einer gewissen Stelle, u mittlere Geschw. in F, G = Flüssigkeitsgew., welches p. Sek. durch F fließt und v = Volumen d. Gewichtseinheit. —

2.) d. Gl. d. lebendigen Kraft:

$$\frac{u\,du}{g} + v\,dp = dM - dB$$

Diese Gl. ist bezogen auf ein Längenelement ds d. Röhre und auf 1 kgr. d. Flüssigkeit; ferner bedeutet g d. Beschl. d. Schwere, p d. mittl. Pressung in F, dM d. Arbeit d. äußeren Massenkräfte p. 1 kgr. strömender Flüssigkeit auf d. Wege ds und dB d. Arbeitsverlust durch d. Bew.-Widerstände p. 1 kgr. Flüssigkeit auf d. Wege ds.

3.) d. Wärmegleichung:

$$dU + p\,dv = W\,d\Theta + dB.$$

Hierin bedeutet U d. spez. innere Arbeitsvermögen d. Flüssigkeit p. 1 kgr., dU d. Änderung desselben auf d. Wege ds, $d\Theta$ bedeutet d. Wärme, welche p. 1 kgr. strömender Flüssigkeit durch d. Wand d. Röhrenelements von d. Länge ds von außen nach innen zugeführt wird, W d. Arbeitswert d. Wärmeeinheit, also d. Zahl 424 wenn 1 kgrm. d. Arbeitseinheit ist, vermittelst welcher d. Temperatur von 1 kgr. Wasser um 1° C. erhöht wird.
Aus 2 und 3 ergibt sich d. Gl. d. innern Arbeitsvermögens:

4.) . . . .

$$\frac{u\,du}{g} + dU + d(pv) = dM + W\,d\Theta.$$

Zur näheren Bestimmung von dM, dB und $d\Theta$ ist zu bemerken, daß dM, also d. Arbeit d. äußeren Massenkräfte, wenn diese Kräfte bestehen aus d. Schwerkraft und d. Trägheitskräften d. rel. Bew., folgende Gl. hat:

$$dM = \left(\cos\psi - \frac{f}{g}\cos\varphi\right)ds\,;$$

hierin ist ψ d. Winkel, den an d. betreffenden Stelle d. Mittellinie d. Rohrs d. Richtung d. Schwere mit d. Tangente an d. Mittellinie d. Rohrs im Sinne d. Bew. bildet, also $0 < \psi < 180°$; f bedeutet hier, für d. Fall d. eignen Bew. d. Systems, d. Beschl. d. Mittellinie d. Rohres an d. betreffenden

Stelle und φ d. Winkel zwischen d. Richtung von f mit d. Richtung d. Tangente an d. Mittellinie. —

Was d. Größe dB betrifft, so können auch hier d. Lei-Widerstände zweierlei Art sein, theils Leitungswiderstände längs d. ganzen Röhre theils besondere Widerstände, verursacht durch Richtungs- und Querschnittsänderungen. In dieser differentiellen [illegible] kann aber nur d. [illegible] auf d. ganzen Länge enthaltenen Leitungswiderstände [illegible] werden, da diese diff.-Gl. nur im Ganzen betrachtet werden können, nicht für einzelne Stücke ds. [illegible] sonstige Widerstände können erst nachträglich berücksichtigt werden, wobei [illegible] ist, wenn an irgend einer Stelle ein besonderer Widerstand stattfindet, [illegible] u. s. w. — Für d. Leitungswiderstand kann man dieselbe Gl. zu Grunde legen wie beim Wasser, also:

$$dB = \lambda \frac{ds}{\delta} \frac{u^2}{2g}$$

wo man sich nur vorbehält λ durch Versuche zu bestimmen. Schließlich ist:

$$g\,dQ = k\,(T' - T)\,dF'$$

, worin bedeutet T d. absolute Temperatur im Innern d. Röhre an d. betrachteten Stelle, T' d. Temperatur d. Mediums an d. entsprechenden äusseren Stelle und dF' d. Wandfl. d. Röhre entsprechend d. Längenelement ds; k ist d. betreffende Wärmeübertragungscoeff., also d. Wärmemenge, d. durch eine Wandfl. F' in d. Zeiteinheit für jeden Grad d. innern und äussern Temp.-differenz hindurchfließt. —

Zu diesen 3 Gln. müssen jedoch noch 2 hinzukommen, um 5 Unbekannte zu bestimmen. Diese 2 Gln. sind von d. Art d. Flüssigkeit abhängig; zunächst d. Zustandsgl.:

$$pv = RT \qquad 4)$$

Die letzte Gl. endlich bezieht sich auf d. innere Arbeitsvermögen eines Gases. Aus d. Principien d. Wärmetheorie ist bekannt, daß d. ∞ kleine Änderung d. [illegible], also d. Wärmemenge einer unendl. kl. Änderung d. Arbeitsvermögens $A\,dU$ einfach proportional ist d. Temperaturänderung. Diese [illegible] innere Arbeit ist beim Gas $= 0$; eine Änderung d. [illegible] ist nur bedingt durch eine Änderung d. inneren lebendigen Kraft nicht bezüglich d. [illegible], es ist also:

$$A\,dU = c\,dT. \qquad \text{wenn } c \text{ d.}$$

spec. Wärme bei constantem Volumen bedeutet. Nun ist bekanntlich: $AR = C_p - c$ wo C_p d. spec. Wärme eines Gases bei constantem Druck ist. Wird nun $C_p - c = c(n-1)$ gesetzt, wo bekanntlich für atm. Luft $n = 1{,}41$ ist, so ist: $\frac{c}{A} = \frac{R}{n-1}$ also:

$$dU = \frac{R}{n-1}\,dT \qquad 5)$$

Jetzt haben wir 5 Beziehungen, wenn auch nur in Form von Diff.-Gln., womit nun d. 5 Unbekannten gefunden werden können als Functionen von s, wenn nur d. Anfangs- und Endzustand, also d. Grenzbedingungen in d. erforderlichen Zahl gegeben sind zur Bestimmung d. Constanten.

Von vornherein sollen diese Versuche jedoch dadurch vereinfacht werden, daß von diesen 5 Größen 2 eliminirt werden und zwar d. spec. Volumen und d. innere Arbeitsvermögen, so daß nur 3 Gln. bleiben zwischen Pr. Temp. und Geschw.

Zunächst läßt sich Gl. 1 mit Gl. 4 so combiniren, daß v herausfällt, [illegible] nämlich:

$$\frac{Fu}{G} = \frac{RT}{p} \qquad \text{ferner ist mit} \qquad \mathrm{I}$$

Rücksicht auf Gl. 4 u. Gl. 5:

$$dU + d(pv) = \frac{R}{n-1}\,dT + R\,dT = \frac{n}{n-1}\,R\,dT.$$

Es soll auch ein [illegible] von einer äusseren Arb. d. Systems abstrahirt werden, also:

$$dM = \cos\psi \, ds$$

dann lautet d. Gl. d. Arbeitsvermögens:

II $$\frac{u\,du}{g} + \frac{n}{n-1} R \, dT = \cos\psi \, ds + W \, dQ$$

Aus ferner Gl. 3 [illegible] folgt: $p\,dv = pv\frac{dv}{v} = RT\frac{dv}{v} = RT\frac{dv\,g}{g\,v} = RT\frac{d(Fu)}{Fu}$

III und folgt: $$\frac{R}{n-1}\,dT + RT\frac{d(Fu)}{Fu} = W\,dQ + \lambda\frac{ds}{\delta}\frac{u^2}{2g}$$

Hierzu soll noch hinzugefügt werden d. Gl. d. bewegten Punkts also II–III:

IV $$\frac{u\,du}{g} + R\,dT - RT\frac{d(Fu)}{Fu} = \cos\psi\,ds - \lambda\frac{ds}{\delta}\frac{u^2}{2g}$$

Durch diese Gl. können nun p T und u als Funktionen von s bestimmt werden, wenn dieselben für einen bestimmten Werth von s bekannt sind und d. Gestalt und Lage d. Röhre gegeben ist.

Zunächst sollen diese Formeln angewandt werden für d. Fall, daß verschiedene d. hier vorkommenden Größen ohne erheblichen Fehler vernachlässigt werden können. Man [illegible] es sich handelt um d. Zustandsänderung, d. das Gas bezüglich d. Wärme- und Lw.-Widerstandes erfährt, auf einer kurzen Wegstrecke, wo jedenfalls nur bedeutende Querschnittsänderungen vorkommen können, so kann für diese kurze Strecke abstrahirt werden von Einfluß d. Schwere, die dieselbe bei d. Gasen überhaupt schon eine viel untergeordnetere Rolle spielt, wie beim Wasser; ferner kann abgesehen werden von d. Wärmeleitung durch d. Wandung, da dieselbe doch nur vorkommt bei d. Lw. in längeren Röhren und Canälen. Ferner liegt es in d. Natur d. Sache, daß auch abstrahirt werden kann von dem Leitungswiderstand, man kann also abstrahiren von $W\,dQ$, $\cos\psi$ und d. Gliedern mit λ. Dann lautet Gl. II:

$$\frac{u\,du}{g} = -\frac{n}{n-1} R\,dT$$

Dieselbe integrirt liefert: $\frac{u^2 - u_0^2}{2g} = \frac{n}{n-1} R (T_0 - T)$, wenn T_0 u. u_0 d. zusammengehörigen Werthe für d. Anfangsquerschnitt bedeuten.

Gl. III lautet nun, wenn man sie durch $\frac{TR}{n-1}$ dividirt: $\frac{dT}{T} = -(n-1)\frac{d(Fu)}{Fu}$ wie d. Zeichen [illegible] andeuten soll, daß auch noch [illegible] widerstand [illegible] werden können. Wird d. Gleichgültigkeit [illegible] genommen, [illegible] d. $Fu = Gv$ ist:

$$\frac{dT}{T} = -(n-1)\frac{dv}{v}$$

und durch Integration:

$$\frac{T}{T_0} = \left(\frac{v_0}{v}\right)^{n-1}$$

Dies ist d. Beziehung zwischen [illegible] Volumen und Temp. in 2 Zuständen d. Gases ohne Mittheilung od. Entziehung von Wärme. Verbindet man diese Gl. mit $Gv = pT$, so findet man:

$$\frac{T}{T_0} = \left(\frac{p}{p_0}\right)^{\frac{n-1}{n}}$$

Diese Beziehung gilt aber nur bei Abstraction von d. Lw.-Widerstand. Es ist ohne Weiteres zu ersehen, in welchem Sinne sich diese Gl. durch d. Lw.-Widerstand ändert. Durch d. Lw. wird Arbeit in Wärme verwandelt, es würde also T größer sein, es wird also:

$$\frac{T}{T_0} \geqq \left(\frac{v_0}{v}\right)^{n-1} \text{ od. } \geqq \left(\frac{p}{p_0}\right)^{\frac{n-1}{n}}.$$

Wenn man nun noch aus obiger Gl. für $\frac{u^2-u_0^2}{2g}$ u entwickelt, so ergiebt sich:

$$u = \sqrt{u_0^2 + \frac{n}{n-1}\,2g\,R\,T_0\left(1 - \frac{T}{T_0}\right)}$$

Nun ist $\frac{T}{T_0}$ im Allgemeinen größer als $\left(\frac{p}{p_0}\right)^{\frac{n-1}{n}}$, folglich $1 - \frac{T}{T_0} < 1 - \left(\frac{p}{p_0}\right)^{\frac{n-1}{n}}$. Es wird also d. ganze

Ausdruck zu groß, wenn man $\left(\frac{p}{p_1}\right)^{\frac{n-1}{n}}$ an Stelle von $\frac{T}{T_1}$ setzt. Es muß also, um diesen Unterschied auszugleichen, d. ganze Ausdruck mit einem echten Bruch φ multiplicirt werden, welcher ein Correctionscoeff. ist; also:

$$u = \varphi\sqrt{u_1^2 + \frac{n}{n-1}2g\Re T_1\left[1-\left(\frac{p}{p_1}\right)^{\frac{n-1}{n}}\right]}$$

Hierin bedeutet φ wieder nicht allein d. Geschw.-Coeff., wie bei d. Lehre d. Wassers, denn d. Ungleichheit ist diejenige Werth von u, welcher stattfinden würde, wenn keine Lst.-Widerstände vorhanden wären. Aus d. vorigen Gl. folgt ferner:

$$T = T_1 - \frac{n-1}{n}\frac{u^2-u_1^2}{2g}$$

Nimmt man d. letzten 2 Gl. für u und T zusammen mit Gl. I, so hat man 3 Gln., vermittelst welcher in diesem Falle d. unbekannten Größen gefunden werden können und zwar sind diese Beziehungen jetzt aber in endlicher Form vorhanden. Wenn es sich also handelt um d. Lst. eines Gefäßes aus einer weiten Mündung, so daß von d. Wiedereinleitung, d. Querschnitte und d. Contractionsstärke abgesehen werden kann, so bestehen diese 3 Beziehungen.

In diesen Gln. ist d. Größe $1-\left(\frac{p}{p_1}\right)^{\frac{n-1}{n}}$, welche mit $f(p)$ bezeichnet werden soll, recht unbequem, weshalb dieselben zweckmäßig tabellarisch ausgerechnet sind. Für atm. Luft mit $n = 1,41$ ist $\frac{n-1}{n} = 0,2908$ und hierfür finden sich d. Werthe von $f(p)$ für $\frac{p}{p_1} = 0,95$ bis $0,1$ in Redtenbacher's Resultate Seite 530. In d. meisten Fällen ist jedoch $\frac{p}{p_1}$ wenig von d. Einheit verschieden, d. h. wenn man $\frac{p}{p_1} = 1-\delta$ setzt, δ ein kleiner Bruch wird. In einem solchen Fall kann man dann $f(p)$ nach Potenzen von δ in eine Reihe entwickeln, von welcher es genügt wenige Glieder zu nehmen. Also:

$$f(p) = 1 - \left[1 - \frac{n-1}{n}\delta + \frac{\frac{n-1}{n}\left(\frac{n-1}{n}-1\right)}{1\cdot 2}\delta^2\right] = \frac{n-1}{n}\delta + \frac{n-1}{2n^2}\delta^2 = \frac{n-1}{n}\delta\left(1+\frac{\delta}{2n}\right)$$

Insbesondere für atm. Luft ist:

$$f(p) = 0,2908\,\delta(1+0,355\,\delta).$$

Diese Formeln finden eine hauptsächliche Anwendung bei d. Berechnung d. Ausflusses eines Gases aus einer Mündung in einer Gefäßwand. In einem solchen Fall pflegen gegeben zu sein d. Pr. p_1 und d. Temp. T_1 im Innern d. Gefäßes, ferner d. Pr. p, welche im äußeren Raume stattfindet, in welchen hinein d. Ausfluß d. Gases stattfindet, also im kleinsten Querschnitt d. contrahirten Strahls. Ferner ist gegeben d. Größe d. Mündung $= A$; d. Contraction ist hier ähnlich wie beim Wasser, α sei d. Contractions-Coeff., also αA d. kleinste Querschnitt d. contrahirten Strahls. Außerdem kann hier noch ein besonderer Widerstand in Betracht kommen und es sei d. darauf bezügliche Geschw.-Coeff. $= \varphi$, und ζ = Widerstandscoeff. und $\mu = \alpha\varphi$ = Ausflußcoeff. Wenn nun d. Ausflußgeschw. einigermaßen groß ist, so kann von d. Lst. d. Gases im Innern d. Gefäßes abgesehen werden, also $u_1 = 0$ gesetzt werden, man hat dann:

$$u = \varphi\sqrt{\frac{n}{n-1}2g\Re T_1 f(p)}$$

Ist φ nun durch Versuche bestimmt, so ist nach dieser Gl. u vollkommen bestimmt.

Bei diesem Ausfluß kann unter Umständen eine bedeutende Temp.-Änderung stattfinden und zwar eine Erniedrigung. Wenn man z. B. Luft, d. unter 2 Atm. Pr. aus einem gleichmäßigen metallenen Behälter ausströmen läßt, so findet man, daß d. Röhre so kalt wird, daß darauf gespritztes Wasser zu Eis erstarrt. —

Setzt man in d. Gl. für T diesen Werth von u und $u_1 = 0$, so folgt:

$$T = T_1\left[1-\varphi^2 f(p)\right]$$

Außer d. Ausflußgeschw. und d. Temp. d. ausströmenden Luft ist ferner noch von Interesse d. Ausflußmenge, welche aber hier besser d. Gew. nach und nicht d. Volumen nach zu bestimmen ist und zwar, um Verwechslungen zu vermeiden, soll noch angegeben werden, unter welchen Umständen dies gemessen ist. G sei d. p. Sec. ausströmende Luftgew., dann ist, wenn d. Gl. auf d. Hauptquerschnitt bezogen wird:

$$F = A\alpha \quad \text{und} \quad G = \alpha A u \frac{p}{\Re T}.$$

Setzt man hier für u seinen Ausdruck und $\Re T = \Re T_1(1-\varphi^2 f(p))$ und $\alpha\varphi = \mu$, so ist:

$$G = \mu A p \frac{\sqrt{\frac{n}{n-1}\,\frac{2g}{R T_1}\,f(p)}}{1-\varphi^2 f(p)}$$ — p. Sek. ausströmendes Luftgew.

In welchem Grade d. ausströmende Luft eine Temp.-Erniedrigung erfahren kann, mag an einem Beispiel erläutert werden: Es sei etwa $\frac{p}{p_1} = \frac{1}{2}$, dann ist $f(p) = 0{,}1825$ (d. h. wenn d. Dr. im Gefäss 2 mal so gross als äussere ist). Es ströme d. Luft aus einer kurzen cylindr. Ansatzröhre; dann ist erfahrungsmässig für $\frac{p}{p_1} = \frac{1}{2}$, d. Geschw.-Coeff. = Ausfluss-Coeff. $\varphi = 0{,}9$ u. $\varphi^2 = 0{,}81$ und $\varphi^2 f(p) = 0{,}81 \cdot 0{,}1825$. Es sei d. Temp. d. Luft im Innern d. Behälters = 27°C, so dass d. absolute Temperatur = 300° ist, dann ist: $T = 300(1-0{,}81 \cdot 0{,}1825) = 255{,}7$.
und d. entsprechende thermometrische Temp.: $t = T - 273 = -17{,}3°C$. Infolgedessen d. Ansatzröhre aus Metall, so kann d. auf diese Weise gefrorenes Wasser gefrieren. —

Man kann d. Formel für d. atm. Luft auf eine einfachere Form bringen, indem man $n = 1{,}41$ $R = 29{,}3$ und $g = 9{,}81$ setzt, dann ist:

$$u = 44{,}46\,\varphi \sqrt{T_1 f(p)} \quad \text{und} \quad G = 1{,}517\,\mu A p \frac{\sqrt{\frac{f(p)}{T_1}}}{1-\varphi^2 f(p)}$$

Was d. hier zu brauchenden Erfahrungscoeff. betrifft, so liegen über d. Grösse d. Contractionscoeff. irgendwie zuverlässige Erfahrungen nicht vor. D. Ausflusscoeff. μ, d. in manchen Fällen identisch mit d. Geschw.-Coeff. φ ist, ist allerdings häufiger gesucht worden, indessen nicht so häufig wie beim Wasser. Es ergibt sich hier im Gegensatz zum Wasser, dass μ in hohem Grade abhängt von $\frac{p}{p_1}$ und zwar in d. Weise, dass mit wachsendem Ueberdruck, also mit abnehmendem Verhältniss $\frac{p}{p_1}$ d. Ausflusscoeff. zunimmt. Dieser Ueberdruck $\frac{p_1}{p}$ ist aber im Verhältniss zu p grösser, je kleiner $\frac{p}{p_1}$ ist. D. Werthe von μ finden sich in Redtenbachers Resultate Seite 532. —

Eine Anwendung dieser Formel kann vornehmlich gemacht werden für d. Ausfluss d. Luft wie z. B. bei d. erforderlichen Düsenöffnung eines Gebläses. Dazu dient d. Gl. für G. Allerdings ist für d. Dr. p an einer solchen Stelle an d. Windleitung unmittelbar vor d. Düsen gemessen zu werden, woselbst d. Geschw. d. Luft nicht = 0 ist. Misst man also p unmittelbar vor d. Düsen, aus denen d. Luft herauskommt, so darf eigentlich nicht ohne Weiteres $u_1 = 0$ gesetzt werden, da hier eine Geschw. bis zu 20 mtr p. Sek. vorkommen kann. Jedoch lehrt eine Untersuchung, dass wenn d. Geschw. dort, wo p gemessen wird, auch 20 mtr beträgt, dieselbe dennoch vernachlässigt werden kann, indem dieselbe doch nur eine Vergrösserung d. Düsenöffnung um 2% ausmacht. Man findet d. Ausflussgeschw. etwas zu klein, also ergibt sich dementsprechend bei gegebener Luftmenge d. Düsenöffnung zu gross. Dieses hat aber nur wenig zu sagen, da durch unvermeidliche Ansätze an d. Düsen d. reine Düsenöffnung etwas grösser sein muss als sie beim Betrieb durchschnittlich bleiben muss. — Wenn man zweitens diese Formel zu Grunde legt, so fragt es sich ferner, welche Zahlenwerthe man d. Grössen μ u. φ beilegen muss. Solche Düsen sind conische Ansatzröhren mit schwacher Convergenz. Man kann erfahrungsmässig setzen, wenn man ihn d. Sicherheit wegen eher zu klein als zu gross nimmt: $\mu = 0{,}95$. Zwar wird man ferner wenig irren, wenn man annimmt, dass dieser Werth zu gleichen Theilen von α und φ herkommt; eine zweite äussere Contraction findet statt, und auch rührt dieselbe zum Theil von d. Reib.-Widerständen her. Angenommen es rühre dies zu gleichen Theilen von α und φ her, so ist also auch dieser Werth = φ^2 gesetzt werden kann; ferner sei vorausgesetzt, dass p, also d. Dr. gemessen ist in Klgr. p. □m. Für d. äusseren normalen Atm.-Dr. ist $p = 10333$ oder wenn man unter b d. Verhältniss d. mittleren Barometerstandes d. Aufstellungsortes zum Normalstand bezeichnet, ist allgemeiner zu setzen $p = 10333\,b$. Strömt d. Luft in d. Hochofen aus, so kann man allerdings nicht behaupten, dass hier in d. Hochofen d. Atm.-Druck herrscht; diesem Umstand ist jedoch schon Rechnung getragen, indem μ und φ kleiner gesetzt sind, als sie streng genommen sein sollten.

Setzt man diese Zahlenwerte in G ein, so findet man:

$$\frac{G}{bA} = \frac{13324}{1-0{,}85\,f(p)}\sqrt{\frac{f(p)}{T_1}}$$

[illegible] $f(p)$ [illegible]

[illegible] $f(p) = 0{,}291\,\delta(1+0{,}355\,\delta)$ und zwar [illegible] δ [illegible] $0{,}2$ [illegible]

$\delta = \frac{p_1-p}{p_1}$. [illegible]

[illegible] 2,5 kg. [illegible] $G = 2{,}5$. [illegible] $b = 0{,}74$, [illegible] $\frac{1}{b} = \frac{76}{74} = 1{,}027$. [illegible] 88 [illegible] $88-74 = 14$ [illegible]

$$\delta = \frac{88-74}{88} = 0{,}159$$

[illegible] $= 300$ [illegible]:

$$f(p) = 0{,}04888$$

[illegible]:

$$A = 1{,}027 \cdot 2{,}5\,\frac{1-0{,}85 \cdot 0{,}04888}{13324}\sqrt{\frac{300}{0{,}04888}} = 0{,}01447 \text{ □m.}$$

Bewegung der Luft in längeren Röhren.

[illegible]:

$$\frac{Tu}{g} = \frac{RT}{p}$$

$$\frac{u\,du}{g} + \frac{n}{n-1}R\,dT = ds\cos\psi + W\,dQ$$

$$\frac{R}{n-1}\,dT + RT\,\frac{d(Tu)}{Tu} = W\,dQ + \lambda\frac{ds}{\delta}\frac{u^2}{2g}$$

$$\frac{u\,du}{g} + R\,dT - RT\,\frac{d(Tu)}{Tu} = ds\cos\psi - \lambda\frac{ds}{\delta}\frac{u^2}{2g}.$$

[illegible] $dQ = 0$ und $\cos\psi = 0$.

[illegible] p_1 [illegible] $= T_1$ [illegible] $= u_1$, [illegible] s [illegible]

[illegible] $\frac{u^2}{2g} = h$ und $\frac{u_1^2}{2g} = h_1$; [illegible]:

$dT = -\frac{n-1}{n}\frac{dh}{R}$ [illegible]: $T = T_1 - \frac{n-1}{n}\frac{h-h_1}{R}$.

[illegible] s [illegible] h [illegible]

[illegible] $\frac{d(Tu)}{Tu} = \frac{du}{u} = \frac{u\frac{du}{g}}{\frac{u^2}{g}} = \frac{dh}{2h}$ d.h.

und wenn [illegible] dT [illegible] $\psi = 0$ [illegible]:

$$\div\frac{dh}{n} + RT\frac{dh}{2h} = -\lambda\frac{ds}{\delta}h.$$

[illegible] T [illegible]:

$$\left(\mathfrak{R}T_1 + \frac{n-1}{n}h_1\right)\frac{dh}{h^2} - \frac{n+1}{n}\frac{dp}{p} = 2\lambda\frac{ds}{d}$$

Diese Gl. kann nun integrirt werden, dabei ist $\frac{dh}{h^2} = d\left(-\frac{1}{h}\right)$ und $\frac{dh}{h} = d[\ln h]$.

also:

$$\left(\mathfrak{R}\frac{T_1}{h_1} - \frac{n-1}{n}\right)\left(1-\frac{h_1}{h}\right) - \frac{n+1}{n}\ln\frac{h}{h_1} = 2\lambda\frac{s}{d}.$$

Durch diese Gl. ist h bestimmt. Bei d. [illegible], erfordert diese Gl. allerdings d. unbequeme Lösung durch allmähliges Probiren. Hierbei läßt sich nun aber bemerken, daß selbst bei verhältnißmäßig sehr langen Röhrenleitungen d. Änderung d. Temp. immer eine so äußerst geringe ist, daß man sehr wenig fehlt, wenn man im [illegible] eine constante Temp. zu Grunde legt, welches an einem Beispiel gezeigt werden soll. Zu d. Zweck sei zunächst etwas bezüglich λ vorausgeschickt. Gewöhnlich hat man denselben mit Versuchen [illegible], wo d. Geschw. ungefähr 20 mtr betrug, wie dies bei Gebläsen vorzukommen pflegt, es ergab sich dann: $\lambda = 0{,}025$. Weisbach hat namentlich für größere Geschw. bis zu 150 m p. Sek. Versuche angestellt und fand:

$$\lambda = \frac{0{,}12}{\sqrt{u}},\ \text{d. h.:}$$

für $u = 9 \quad 16 \quad 25 \quad 36$
$\lambda = 0{,}04 \quad 0{,}03 \quad 0{,}024 \quad 0{,}02.$

Weil aber diese Weisbach'schen Versuche angestellt sind für Geschw. von wenigstens 25 m so wird es doch fraglich sein, ob man sich für d. kleineren Geschw. darauf stützen kann. Jedenfalls bei sehr kleinen Geschw. wie 9 m p. Sek. würde es nicht rathsam sein λ größer als 0,04 zu nehmen. – Es sei nun z. B.: $u_1 = 16$ m. Gegen d. Ende d. Röhre hin nimmt d. Geschw. zu, indem d. Gew. abnimmt, [illegible] also dasselbe durch denselben Querschnitt hindurchströmen kann, muß d. Geschw. vergrößert werden und es sei demzufolge $u = 20$ m; es würde λ entsprechend $u_1 = 16$ zu 0,03 angenommen werden und es sei d. absolute Temp. zu Anfang, also $T_1 = 300$, also ist: $\frac{u_1}{u} = 0{,}8$ und folgl.: $\frac{h_1}{h} = 0{,}64$. Dies in d. letzte Gl. eingesetzt giebt:

$$\left(\frac{29{,}3\cdot 300}{\frac{1}{2\cdot 9{,}81}\cdot 256} + \frac{41}{141}\right)0{,}36 - \frac{241}{141}\ln\frac{1}{0{,}64} = 0{,}06\frac{s}{d}$$

und also $\frac{s}{d} = 4031.$

ferner bekommt man:

$$T_1 - T = \frac{41}{141}\frac{h}{\mathfrak{R}}\left(1-\frac{h_1}{h}\right) = \frac{41}{141}\frac{400}{2\cdot 9{,}81\cdot 29{,}3}0{,}36 = 0{,}073^\circ.$$

Man ersieht hieraus daß d. Voraussetzung einer sehr langen Röhre am Platze ist und daß in derselben d. Änderung d. Temp. noch nicht $\frac{1}{10}{}^\circ$ beträgt, dieses erscheint sich schon d. gewöhnlichen Beobachtungen, so daß man gerechtfertigt ist, wenn d. einfachere Voraussetzung constanter Temperatur [illegible]. – Es bleiben nun also nur 2 Unbekannte übrig, weshalb es für zulässig sein wird, gleichzeitig d. [illegible] Einfluß d. Schwere zu berücksichtigen, wie dies bei nicht horizontalen Röhren d. Fall ist. Also

$$dT = 0 \quad \text{und} \quad d\mathfrak{T} = 0$$

so lautet nun Gl. 4 wenn wie oben $\frac{u\,du}{g} = dh$ und $\frac{d\,\partial u}{\partial u} = \frac{dh}{2h}$ gesetzt wird:

$$dh - \mathfrak{R}T\frac{dh}{2h} = ds\cos\psi - \lambda\frac{ds}{d}h$$

od. $$\left(\frac{\mathfrak{R}T}{2h} - 1\right)dh = \left(\lambda\frac{h}{d} - \cos\psi\right)ds.$$

Dazu kommt: $$\frac{\partial u}{g} = \frac{\mathfrak{R}T}{p}.$$ Dann hat man 2 Gln, worin ∂u, h gegeben sind, wenn sie für einen bestimmten Querschnitt bekannt sind. Man kann d. erste Gl. dadurch vereinfachen, daß man 1 gegen $\frac{\mathfrak{R}T}{2h}$ vernachlässigt, denn es ist im Allgemeinen $\frac{\mathfrak{R}T}{2h}$ eine sehr große Zahl, es ist nämlich $\frac{\mathfrak{R}T}{2h} \geq 100$, so daß man d. Fehl. [illegible] d. Vernachlässigung [illegible] ganz gerechtfertigt, da λ ohnehin nicht genau auf 1% angegeben werden kann.

Ist $\frac{RJ}{2h} > 100$ wenn $h < \frac{RJ}{200}$ oder J mit d. Durchschnittswerth 300 angenommen und mit $R = 29,8$: wenn $h < \frac{29,8 \cdot 300}{200}$ also wenn $h < 43,95$ oder demnach wenn $u < \sqrt{2 \cdot 9,81 \cdot 43,95}$ also wenn $u < 29,4$ ist. Wird aber in d. That selten größer als dieser Werth, so daß man 1 gegen $\frac{RJ}{2h}$ vernachlässigen kann. Will man dies, so kann man d. Gl. integriren unter d. Voraussetzung, daß ψ eine Constante ist, daß also d. Röhre constant steigt od. fällt oder wenn ψ ein constanter Mittelwerth; dann folgt, da $ds = \frac{\frac{RJ}{2h}\,dh}{\lambda\frac{h}{d} - \cos\psi}$ oder $\frac{2\cos\psi}{RJ}\,ds = \frac{dh}{\left(\frac{\lambda}{d\cos\psi}h-1\right)h}$

$$\frac{2\cos\psi}{RJ}\,ds = \left(\frac{\frac{\lambda}{d\cos\psi}}{\frac{\lambda}{d\cos\psi}h-1} - \frac{1}{h}\right)dh = \left(\frac{1}{h-\frac{d\cos\psi}{\lambda}} - \frac{1}{h}\right)dh$$

dieses integrirt von 0 bis S giebt:

$$\frac{2\cos\psi}{RJ}\,S = \ln\frac{h-\frac{d\cos\psi}{\lambda}}{h_1-\frac{d\cos\psi}{\lambda}} - \ln\frac{h}{h_1} = \ln\frac{1-\frac{d\cos\psi}{\lambda h}}{1-\frac{d\cos\psi}{\lambda h_1}}$$

Für d. Specialfall, daß d. Röhre horizontal ist, also $\psi = 90°$ würde diese Gl. eine identische Gl. liefern, man muß dann auf d. ursprüngl. Diff.-Gl. zurückgehen; diese lautet für $\psi = 90°$:

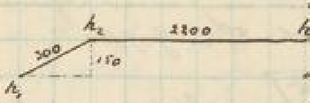
$$ds = \frac{RJ}{2h}\,\frac{d}{\lambda h}\,dh$$

und hieraus durch Integration:

da $\frac{dh}{h^2} = -d\frac{1}{h}$ ist: $\lambda\frac{S}{d} = \frac{RJ}{2}\left(-\frac{1}{h}+\frac{1}{h_1}\right)$

oder $\frac{RJ}{2}\left(\frac{1}{h_1}-\frac{1}{h}\right) = \lambda\frac{S}{d}$. In dem einen wie in dem andern Fall ist nun d. Geschw.-Höhe h und damit d. Geschw. selbst bestimmt und durch d. Continuitätsgl. auch d. Pressung. —

Beispiel. Größere Leitungen von Luft kommen unter Anderem bei Tunnelarbeiten, wo es darauf ankommt Luft fortzuleiten zum Betrieb d. Steinbohrmaschinen, wozu d. alte Luft sich besonders gut eignet indem dieselbe nach d. Gebrauch auch noch zur Ventilation verwendet werden kann. Angenommen, es sei d. Bohrung eines größeren Tunnels fortgeschritten bis auf eine solche Strecke, daß d. Luftleitungsröhre eine Länge von 2500 m hat. Diese Röhre habe einen Durchmesser $d = 0,2$ m und es werde durchschnittlich 1 kgr gepreßte Luft p. Sec. verbraucht also $G = 1$. Angenommen nun d. Trace d. Röhrenleitung sei wie nebenstehend (M. Cenis-Tunnel) daß d. Compressionsmaschinen stehen im Thale und d. Röhre muß erst 300 m lang und 150 m in d. Höhe steigen also bis d. Tunnelanfang erreicht, wo nehmen sie nun in einer Strecke von 2200 m horizontal weiter läuft.



D. Compressionsmaschinen spannen d. Luft auf 5 Atm. und es fragt sich, mit welcher Pr. d. Luft am anderen Ende d. Röhre anlangt. Zu dem Ende fragt sich zunächst wie groß unter diesen Umständen d. Anfangsgeschw. u_1 ist. Ein Cubm. Luft wiegt nun bekanntlich bei d. Temp. 0 und bei normalem Atm.-Druck 1,293 kgr. umgekehrt hat also unter denselben Bedingungen 1 kgr Luft ein Volumen $= \frac{1}{1,293}$ Cubm. Es soll hier aber d. Luft mit einer Pr. von 5 Atm eintreten, es ist also d. Volumen nur $\frac{1}{5}$ so groß; ferner sei d. constante Temp. $= 27°$C so ist d. absolute Temp. $= 300$ vorausgesetzt und. Dann ist d. Volumen von diesem kgr Luft von 5 Atm. Pr. mit Rücksicht auf diese etwas höhere Temp.: $= \frac{1}{1,293}\cdot\frac{1}{5}\cdot\frac{300}{273} = 0,170$ Cbm.

D. Röhrenquerschnitt ist: $= \frac{\pi d^2}{4} = 0,0314$ cubm.

und demnach d. Anfangsgeschw.: $u_1 = \frac{0,17}{0,0314} = 7,33$ m. Demnach kann d. Coeff. λ in runder Zahl $= 0,04$ angenommen werden.

Ferner ist d. Geschw.-Höhe $h_1 = 1,49$.

Es fragt sich nun, in welchem Grad nimmt d. Geschw.-Höhe ab bis zu d. Stelle, wo d. Röhrenleitung in d. Tunnel hineingeht, also h_2. Hierzu dient d. Gl. in ψ nicht $= 90°$ war, Es ist nämlich im vorliegenden Fall $\cos\psi = \frac{150}{300} = \frac{1}{2}$. Multipliziert man nun noch d. Gl. mit d. Modulus d. Briggs'schen Logarithmensystems 0,4343, so lautet dieselbe

$$\log \frac{1+\frac{0,1}{0,4\,h_2}}{1+\frac{0,1}{0,4\cdot 149}} = -\,0,4343\,\frac{300}{29,3\cdot 300}$$

$$\text{Also: } \frac{1+\frac{2,5}{h_2}}{2,678} = 0,9664 \text{ und somit } h_2 = 1,574$$

Um nun d. Geschw.-Höhe h zu finden, muß d. Gl. für $\psi = 90°$ benutzt werden, also:

$$\frac{29,3\cdot 300}{2\cdot 1,574}\left(1-\frac{h_2}{h}\right) = 0,04\,\frac{2200}{92}$$

$$\text{somit } \frac{h_2}{h} = 0,843 \text{ also } \frac{h_1}{h} = 0,843\,\frac{h_1}{h_2} = 0,843\cdot\frac{1,49}{1,574} = 0,798$$

Durch dieses Verhältnis ist nun auch d. Pressungsverhältnis bestimmt nach Gl.: $\frac{\mathfrak{F}u}{g} = \frac{RT}{p}$. In unserem Falle ist auch pu constant und folgt

$$\frac{p}{p_1} = \frac{u_1}{u} = \sqrt{\frac{h_1}{h}} = 0,894$$

und folgt d. Pr. p am Ende d. Röhre:

$$p = 0,894\cdot p_1 = 0,894\cdot 5 = 4,47 \text{ Atm.}$$

es geht also etwas mehr als eine halbe Atm. verloren. —

Wenn bei einer solchen langen Röhrenleitung ein besonderer Widerstand vorkommen soll, d. im Allgemeinen mit einer Querschnittsänderung verbunden sein kann, so kann man auch hier von d. Temp.-Änderung absehen und es handelt sich nur darum, näherungsweise d. Pr.-Änderung zu untersuchen. Jedenfalls nimmt an einer solchen Stelle, wo besondere Widerstände vorkommen, d. Pr. ab, jedoch nur in einem solchen Grade, daß man sich mit einer näherungsweisen Rechnung begnügen kann.

Es sei etwa an einer solchen Stelle, unmittelbar vor derselben d. Pr. $= p_1$ d. Geschw. $= u_1$ und unmittelbar hinter d. fraglichen Stelle d. Pr. $= p_2$ und d. Geschw. $= u_2$; vor d. fraglichen Stelle sei d. Röhrenquerschnitt $= F_1$ u. hinter derselben $= F_2$. Außer diesen plötzlichen Querschnittsänderungen kann auch noch ein besonderer Widerstand vorkommen, d. gemessen werden soll durch d. Widerstandscoeff. ζ. Setzt man $p_2 = p_1(1-\delta)$ so darf dieses δ nur als eine sehr kleine Größe betrachtet werden. Nun war nach einer allgemeinen Formel, d. sich bezog auf d. Ausfl. d. Luft in irgend einem beliebigen Punkte d. Geschw.:

$$u = \varphi\sqrt{u_1^2 + \frac{n}{n-1}\,2g\,R\,T_1\left[1-\left(\frac{p}{p_1}\right)^{\frac{n-1}{n}}\right]}$$

Dieses war d. Formel für d. Ausflußgeschw. aus einer Öffnung in d. Gefäßwand; dieselbe war unter solchen Umständen abgeleitet, daß von d. Wärmeleitung durch d. Wand abgesehen war, ferner von d. Einfluß d. Schwere und endlich von ζ, also vom Leitungswiderstand d. Röhre. Diese Abweichungen kann man auch hier machen für d. betrachtete mehr od. weniger kurze Strecke, nur muß u_2 statt u, p_2 statt p und T statt T_1 gesetzt werden. Dividiert man dann d. Gl. durch φ, quadriert dieselbe und setzt schließlich $\frac{1}{\varphi^2} = 1+\zeta$, so ergibt sich:

$$\frac{n}{n-1}\left[1-\left(\frac{p_2}{p_1}\right)^{\frac{n-1}{n}}\right] = \frac{(1+\zeta)u_2^2 - u_1^2}{2g\,RT} = \frac{h_1}{RT}\left[(1+\zeta)\left(\frac{u_2}{u_1}\right)^2-1\right]$$

Setzt man $p_2 = p_1(1-\delta)$ wo δ nur klein ist, so ist: $1-\left(\frac{p_2}{p_1}\right)^{\frac{n-1}{n}} = \frac{n-1}{n}\,\delta$ und es wird

$$\delta = \frac{h_1}{RT}\left[(1+\zeta)\left(\frac{F_1}{F_2}\right)^2-1\right]$$

da $\frac{u_2}{u_1}$ von d. Pr. und d. Querschnitten abhängt, wenn Abhängigkeit davon sehr gering ist.

Nun kann p_2 und p_1 berechnet werden.

Bewegung des Leuchtgases in einer Stadtleitung.

[illegible] $30\,mm$ [illegible] $10\,m$ [illegible] $= 0{,}003$ Atm. [illegible] p [illegible] s [illegible] p_1 [illegible] $\frac{p}{p_1} = \sqrt{\frac{h_1}{h}}$ [illegible] $\frac{du}{g} = \frac{R\,dT}{p}$ [illegible]

$$\frac{RT}{2h}\left(1-\frac{h_1}{h}\right) = \lambda\frac{s}{d}$$

[illegible]

$$\frac{p}{p_1} = \sqrt{1-\lambda\frac{s}{d}\frac{2h_1}{RT}}$$

[illegible] $\frac{p}{p_1}$ [illegible]

$$\frac{p}{p_1} = 1-\lambda\frac{s}{d}\frac{u_1^2}{2gRT}$$

[illegible]

$$1-\frac{p}{p_1} = \frac{p_1-p}{p_1} = \lambda\frac{s}{d}\frac{u_1^2}{2gRT}$$

[illegible] V [illegible] p_1, T_1 [illegible]

$$u_1 = \frac{4V}{\pi d^2}$$

[illegible]

$$d^5 = \lambda s\left(\frac{4}{\pi}\right)^2\frac{V^2}{2gRT}\frac{p_1}{p_1-p}$$

[illegible] $g = 9{,}81$ [illegible] ρ [illegible] ($\rho = 0{,}4 - 0{,}45$) [illegible] $R = \frac{29{,}27}{\rho}$. [illegible] $= 12°C$ [illegible] $T = 285$, [illegible]

$$d^5 = \frac{\lambda\rho}{100960}\,s\,V^2\frac{p_1}{p_1-p}.$$

[illegible] $p_1 - p$ [illegible] $\frac{p_1}{p_1-p} = \frac{10096}{h}$, [illegible] p_1 [illegible] 10096. [illegible]

$$d^5 = 0{,}1\lambda\rho\frac{sV^2}{h}.$$

[illegible] V [illegible] $= \alpha V$ [illegible] s [illegible]

$$\frac{V-\varphi}{(1-\alpha)V} = \frac{s}{l}$$

[illegible] φ [illegible] s [illegible] $V-\varphi$ [illegible] $(1-\alpha)V$ [illegible]

$$\varphi = V\left(1-\frac{(1-\alpha)}{l}s\right).$$

[illegible] dh [illegible] ds [illegible] nimmt dh mit d. Gl. für d^5, so muss für V jetzt geschrieben werden $V\left(1-\frac{1-\alpha}{l}s\right)$ also:

$$dh = 0{,}1\lambda\rho\,\frac{ds}{d^5}\,V^2\left(1-2\,\frac{1-\alpha}{l}\,s+\frac{1-2\alpha+\alpha^2}{l^2}\,s^2\right)$$

Integrirt man diese Gl. von $s=0$ bis $s=l$, so erhält man d. ganzen Druckverlust für d. Strecke l:

$$h = 0{,}1\lambda\rho\,\frac{V^2}{d^5}\left[l-(1-\alpha)\,l+\frac{1-2\alpha+\alpha^2}{3}\,l\right]$$

o. $$h = 0{,}1\lambda\rho\,\frac{lV^2}{d^5}\,\frac{1+\alpha+\alpha^2}{3}.$$

Es ergibt sich hier genau so, wie bei d. Wasserleitung, nur daß V^2 d. Factor $\frac{1+\alpha+\alpha^2}{3}$ bekommen hat. Es ist also nun d. gesuchte Formel, welche d. stetig längs d. ganzen Länge l erfolgenden Gasabgabe Rechnung trägt:

$$d^5 = 0{,}1\lambda\rho\,\frac{lV^2}{h}\,\frac{1+\alpha+\alpha^2}{3}.$$

Es war in dieser Formel d. Druckverlust h gemessen durch eine in mm ausgedrückte Wassersäule. Man könnte nun streng genommen in derselben Weise vorgehen, wie bei d. Wasserleitung, daß also d. Leitungskosten ein Min. würden; jedoch würde dies eine sehr umständliche Rechnung liefern, indem einmal für λ sehr wenig bekannt und ferner ρ eine ziemlich wechselnde Größe ist, endlich kommen für d. Herstellungskosten wesentlich dieselben Punkte in Betracht wie bei d. Wasserleitung, die für d. Kosten viel weniger [illegible] sind; es wird also zulässig sein eine einfachere Annahme zu machen.
Es läßt sich an annehmen, daß man d. wohlfeilsten Anlage ziemlich nahe kommt, wenn man d. Rohrweite so einrichtet, daß d. Druck ziemlich gleichförmig von einem bis zum andern Ende abnimmt; ist also L d. ganze Länge d. zunächst zu berechnenden Hauptstrangs d. Röhrenleitung und H d. gegebene zulässige Druckverlust von einem bis zum andern Ende in Folge d. Leitungswiderstandes, dann wird d. Forderung eines gleichförmigen Druckverlustes d. Proportion entsprechen:

$$\frac{l}{h} = \frac{L}{H}$$

dabei sind L u. H gegebene Größen, H pflegt $=20$ höchstens $=30$ mm Wassersäule angenommen zu werden; setzt man dies ein, so folgt:

$$d^5 = 0{,}1\lambda\rho\,\frac{L}{H}\,V^2\,\frac{1+\alpha+\alpha^2}{3}.$$

Es sind nun V u. α gegebene Größen für jede Strecke d. Hauptstrangs u. man kann also hiernach d. erforderlichen Durchmesser dieses Hauptstrangs berechnen zwischen je 2 Abzweigstellen. Gewöhnlich wird man jedoch nicht an jeder Abzweigstelle einen andern Durchmesser wählen, um so mehr als d. Leitung d. Durchmesser nach sämtlichen Abzweigungen u. nicht genau d. Rechnung gemäß angenommen werden kann. – Es fragt sich nun, was man für λ u. ρ einzusetzen hat. Zunächst sollen zu d. Zweck d. Formeln umgestaltet werden mit Rücksicht auf d. hier zu Grunde liegenden Einheiten. In d. Formel ist vorausgesetzt, daß d. m zu Grunde liegt mit Ausnahme von H, welches in mm ausgedrückt ist; V bedeutet d. Gasvolumen in cbm. p. Sek.; es pflegt jedoch gewöhnl. d. Gasverbrauch in cbm. p. Stunde ausgedrückt zu werden und außerdem pflegt d. Durchmesser in cm ausgedrückt zu werden; dann ist:

$$\frac{d^5}{10^{10}} = 0{,}1\lambda\rho\,\frac{L}{H}\,\frac{V^2}{3600}\,\frac{1+\alpha+\alpha^2}{3}$$

$$\text{also } d^5 = \frac{\lambda\rho}{0{,}01296}\,\frac{L}{H}\,V^2\,\frac{1+\alpha+\alpha^2}{3}.$$

Was nun d. Werth $\frac{\lambda\rho}{0{,}01296}$ betrifft, so ist derselbe durchschnittlich $=2$ also: $d^5 = 2\,\frac{L}{H}\,V^2\,\frac{1+\alpha+\alpha^2}{3}$. $\left\{\begin{array}{l}d \text{ in ctm, } L \text{ in m, } H \text{ in mm}\\ V \text{ in Cbm p. Stunde.}\end{array}\right.$

Was nämlich λ betrifft, so liegen darüber spezielle Versuche von Blochmann vor, wonach sich für d. Leuchtgas ergab: $\lambda = 0{,}009 + \frac{0{,}0653}{\sqrt{u}}$ also in hohem Grade abhängig von d. Geschw.; letztere ist nun in einer städtischen Röhrenleitung im Allgemeinen nur gering; setzt man $\frac{\lambda\rho}{0{,}01296} = 2$, so würde dieses entsprechen $\lambda\rho = 0{,}02592$ u. wenn man durchschnittl. d. Dichtigkeit

d. Leuchtgases ist $\delta = 0{,}42$ setzt, so würde dieser Annahme entsprechen: $\lambda = 0{,}062$ und dies stimmt mit d. Blochmann'schen Versuchen in Uebereinstimmung, wenn d. durchschnittl. Geschw. = 1 m p. Sek. war. Wenn man also ein für allemal d. Coeff. $\frac{L}{H}$ u. für d. einzelnen Strecken zwischen 2 Verzweigungsstellen d. Werthe von $\frac{1+d+d^2}{3}$ berechnet, so findet man d. Durchmesser d. einzelnen Rohrstrecken in Ctm. Findet man, daß d. Durchmesser von einem Punkt bis zum Andern nur wenig ändern, so wird man dieselbe Rohrweite beibehalten. —

Nun ist es auch leicht, zu d. abgezweigten Rohrstrecken überzugehen, es seien dann d. Hauptstrange bezeichnet mit $A_0\ A_1\ A_2 \ldots\ A_n$. Geht man nun von d. ersten Verzweigungsstelle A_1 aus und verfolgt man von d. gesammten d. abgezweigten Leitungen und nimmt man dann an, daß H d. zulässige Druckverlust von d. Gasometer bis zu d. äußersten Punkte sei, so wird man für d. hier ins Auge gefaßten Seitenstrang dieselbe Formel brauchen können, wenn nur an Stelle von L gesetzt wird $A_0A_1 + L_1$, unter L_1 d. Länge d. abgezweigten Seitenleitung verstanden; ist L_2 d. Länge d. von A_2 ausgehenden Hauptzweigleitung, so wird man auch von hier ausgehen können, wenn man nur statt L setzt $A_0A_2 + L_2$. —

Es frägt sich weiter, einen wie großen Ueberdruck man im Gasometer d. Gasanstalt erhalten muß. In d. Hinsicht muß verlangt werden, daß an allen Stellen d. ganzen Leitung ein genügender Ueberdruck d. Gases vorhanden bleibt, um d. Widerstand zu überwinden, d. d. Gasmesser und d. Brennern hervorrufen und um d. Gase in d. Brennern hervorzubringen; mit Rücksicht auf diese Widerstände pflegt man gewöhnlich einen Ueberdruck von 20 mm Wassersäule zu rechnen. Wird nun zunächst angenommen, es sei d. ganze Leitung horizontal, dann muß d. manometrische Ueberdruck d. Gases im Gasometer = H + 20 mm sein; nimmt man also H auch = 20 m[m], so muß im Gasometer 40 mm Ueberdruck sein. Ist d. Terrain bedeutend hügelig, so kann es sich in dieser Beziehung wesentlich anders verhalten. Angenommen es liege eine Stelle X in d. Entfernung x vom Gasometer um y m höher als d. Gasfabrik. Es sei nun G_1 d. absolute Gasdruck im Gasometer, derselbe nimmt dann in Folge d. Lei. Widerstände bis zu dieser Stelle ab um $\frac{x}{L}H$. Wenn nun aber d. Gasleitung vom Gasometer bis zu d. betrachteten Stelle ansteigt, so nimmt in Folge d. eigenen Schwere d. Gases auch aus diesem Grunde d. absolute Druck bis zu diesem Punkte ab. In d. atm. Luft selbst beträgt d. Druckabnahme bei d. Erhebung um 1 m so viel, daß d. Druckhöhe gemessen wird mit einer Wassersäule von 1,24, indem ein Cbm Luft bei 12–15° C = 1,24 kgr wiegt; wenn man sich in d. unteren Regionen d. Atm. um 1 m empor hebt, so nimmt d. Druck auf 1 qm Grundfl. um 1,24 kgr ab, eine Wasserschicht von 1 mm Höhe aber drückt auf 1 qm durchschn. Grundfl. mit 1 kgr; also eine Druckabnahme von 1,24 kgr entspricht einer Wassersäule von 1,24 mm. Höhe. Ist d. Dichtigkeit d. Leuchtgases um δ kleiner als d. d. Luft, wenn man also in einer Leuchtgasmasse sich um 1 m erhebt, so wird derjenige d. Druck um weniger als 1,24 mm Wassersäule abnehmen, nämlich um $1{,}24\,\delta$ mm. Wenn man sich also um y m erhebt, so ist d. Druckabnahme $1{,}24\,\delta y$. Es ist also d. absolute Druck gemessen in mm Wassersäule an d. fraglichen Stelle, welche um x m von d. Gasometer entfernt liegt und y m höher liegt, ausgedrückt durch:

$$G = G_1 - \frac{x}{L}H \mp 1{,}24\,\delta y$$

Liegt d. Stelle um y m tiefer, so gilt d. + Zeichen und umgekehrt. Bezeichnet L_1 d. absoluten, gleichfalls in mm Wassersäule gemessenen Luftdruck außen an d. Gasfabrik, so ist d. Luftdruck L an d. hier betrachteten Stelle:

$$L = L_1 \mp 1{,}24\,y$$

da $\delta = 1$ ist.

Was man nun unmittelbar mit d. Manometer mißt, ist d. Unterschied d. Gasdrucks über d. Luftdruck, derselbe sei mit M bezeichnet $= G - L$; an d. betrachteten Stelle wird dieser Unterschied $= M_1$ sein und:

$$M = M_1 - \frac{x}{L}H \pm 1{,}24\,(1-\delta)\,y$$

od. für $\delta = 0{,}42$:

$$M = M_1 - \frac{x}{L}H \pm 0{,}7\,y.$$

Es ist nun d. erforderliche

Unterdruck d. Gases im Gasometer berücksichtigt, daß sein kleinster Werth = 20 sein soll, also muß sein:

$$\min\left(M. - \frac{x}{l} H \pm 0{,}7\, y\right) = 20.$$

Wo dieser ungünstigste Umstand stattfindet, kann man von vornherein nicht angeben, man müßte denselben aufsuchen. Am vortheilhaftesten würde es sein, wenn man es so richten könnte, daß d. Unterdruck in d. ganzen Leitung constant = 20 mm wäre, denn es ist immer ungünstig, wenn ein zu großer Unterdruck in d. Leitung vorkommt. Dieses würde möglich sein, wenn beim Fortschreiten d. Zunahme + y und d. Glieder $-\frac{x}{l}H$ und $+0{,}7\,y$ sich überall aufheben, wenn also überall: $\frac{y}{x} = \frac{H}{0{,}7\, l}$

Es könnte dann $M.$ selbst = 20 sein, also d. Unterdruck constant in d. ganzen Leitung = 20. Ist nun H wie es gewöhnlich d. Fall ist = 21, so folgt: $\frac{y}{x} = \frac{30}{l}$

Ferner ist nun l d. durchschnittl. Luftdruck in mm Wassersäule = 1000, da derselbe in Mtr = 10 ist und somit $\frac{y}{x} = 0{,}003.$

Es würde also am vortheilhaftesten sein, wenn man sich so einrichtet, daß d. Röhren d. Gasleitung vom Gasometer an beständig ansteigen und zwar 3 : 1000, denn dann wäre in d. ganzen Leitung d. Unterdruck constant = 20 mm. Wassersäule. —

Bewegung eines Gases in einer Röhre, deren Wand eine wesentliche Wärmeübertragung nach Aussen hin oder von Aussen her vermittelt.

Diese Fälle kommen namentlich bei d. Lei. d. Gase einer Feuerung vor. D. gasförmigen Verbrennungsprodukte steigen zunächst durch d. Feuerkanal hindurch, welcher äußerlich od. innerlich von Kessel umgeben sein kann u. schließlich strömen sie weiter aufwärts durch d. Kamin ab. Hier handelt es sich also um d. Lei. eines Gasgemenges durch eine Röhre od. Canal, wo ein ganz bedeutender Wärmeabfl. stattfindet, es wird also auch d. Temp. d. Gasgemenges auf seinem ganzen Wege bedeutend veränderl. sein. Es ist dies ein Fall, wo d. Wärmeübergang von Innen nach Außen stattfindet, es können jedoch auch umgekehrte Fälle stattfinden, wie bei einem Hochofen, wo d. Gebläseluft erwärmt zugeführt, hier findet eine Wärmeabgabe von außen nach Innen statt. — Um solche Fälle rechnungsmäßig zu verfolgen, muß auf d. allgemeinen Fundamentalgleichungen Bezug genommen werden: Es kommen 3 allgemeine Gln. zur Verfügung, um p, T und u als Functionen von s für jeden Querschnitt d. Röhre zu bestimmen. Hier werden wir brauchen:

d. Continuitätsgl.: $$\frac{F u}{G} = \frac{R T}{p}$$

d. Gl. d. Arbeitsvermögens: $$\frac{u\,du}{g} + \frac{\kappa}{\kappa - 1} R\,dT = ds \cos\psi + W\,dQ$$

u. d. Gl. d. lebendigen Kraft: $$\frac{u\,du}{g} + R\,dT - RT\,\frac{d(Fu)}{Fu} = ds\cos\psi - \lambda \frac{ds}{d}\frac{u^2}{2g}$$

D. Querschnitt d. Röhre sei = F, d. Umfang derselben = P und d. Winkel ψ, unter welchem d. Mittellinie gegen d. Richtung d. Schwere geneigt ist, sei constant für d. ganze Röhrenstrecke, widrigenfalls soll derselbe als Mittelwerth eingeführt werden. Es ist nun d. mittlere Durchmesser:

$$d = \frac{4F}{P}$$

und was d. Glied mit dQ betrifft, so ist bekanntlich:

$$g\,dQ = k(\vartheta'-\vartheta)\,d\vartheta'$$

wo ϑ' d. äußerliche Temp., ϑ d. innere absolute Temp. ist, $d\vartheta'$ d. Umfangstheil, an welchem Wärmeübergang stattfindet. Es kann nun im Allgemeinen d. Fall sein, daß d. Wärmeabgabe nur durch einen Theil d. Umfangs stattfindet, wie dies d. Fall ist, wo d. Heizkanal außen d. Kessel berührt, so findet d. Wärmeübergang nur durch d. Theil d. Umfangs statt, welcher durch d. Kesselwand gebildet ist, während durch d., vom Mauerwerk begrenzten Theil nur wenig übergeht. Bezeichnet man ϑ' d. Theil d. Umfangs ϑ, an d. d. Wärmeübertragung stattfindet, so ist:

$$d\vartheta' = \vartheta'\,ds, \text{ also: } \quad g\,dQ = k\vartheta'(\vartheta'-\vartheta)\,ds.$$

zwischen $W = \frac{1}{A}$ u. R besteht nun d. Beziehung:

$$AR = C_1 - c$$

worin c d. spec. Wärme bei constantem Volumen und C_1 d. spec. Wärme bei constantem Dr. bedeutet u. A d. Wärme, welche d. Arbeitseinheit also W d. Arbeitswerth d. Wärmeeinheit bedeutet, also:

$$AR = C_1\left(1-\frac{1}{n}\right) = C_1\,\frac{n-1}{n} \qquad \text{worin } n = \frac{C_1}{c} \text{ ist.}$$

$$\text{und} \quad W = \frac{1}{A} = \frac{n}{n-1}\,\frac{R}{C_1}$$

Aus d. Gl. für $W\,dQ$ folgt nun:

$$W\,dQ = \frac{n}{n-1}\,\frac{R\,k\,\vartheta'}{g\,C_1}(\vartheta'-\vartheta)\,ds$$

Es seien hier k u. ϑ' constant für d. ganze Länge d. betreffenden Rohrstrecke, dann ist, wenn zur Abkürzung d. Ausdr.: $\frac{gC_1}{k\vartheta'} = a$ gesetzt wird:

$$W\,dQ = \div\frac{n}{n-1}(\vartheta-\vartheta')\,\frac{ds}{a}$$

Setzt man diesen Ausdruck in d. 2te u. 3te d. 3 Hauptgln. ein, u. setzt man ferner wieder $\frac{u^2}{2g} = h$ so folgt: $\frac{u\,du}{g} = dh$ u. $\frac{du}{u} = \frac{dh}{2h}$ also:

$$2)\quad dh + \frac{n}{n-1}\,R\,d\vartheta + \frac{n}{n-1}\,R(\vartheta-\vartheta')\,\frac{ds}{a} = ds\cos\psi$$

$$\text{und } 3)\quad dh + R\,d\vartheta - R\vartheta\,\frac{dh}{2h} + 2\,\frac{ds}{\vartheta}\,h = ds\cdot\cos\psi.$$

Es sind also nun zur Bestimmung d. Gl. 1. 2 3, u. d. Gln 2 u. 3 kommen von d. vierten Größen, d. als Functionen von s bestimmt werden sollen nur d. Temp. und d. Geschw. [illegible] vor, so daß dieselben 2 simultane, partielle Differentialgl. erster Ordnung zwischen d. unabhängig Veränderl. s u. d. abhängig Veränderl. h u. ϑ bilden. Um diese Gln. zu integriren, würde d. allgemeine Verfahren darin bestehen, daß man eine d. abhängig Veränderl. eliminirt und dann eine Gl. erhält, in d. nur eine abhängige Variable vorkommt; es könnte dies geschehen, indem man jede d. Gln. noch einmal bezüglich s differentiirt, dadurch würde man 2 neue Differentialgl., d. von d. 2ten Ordnung wären; man erhält dann im Ganzen 4 Diff.-Gl. mit d. Größen $h\ h'\ h''\ \vartheta\ \vartheta'\ \vartheta''$, wo d. Striche d. betreffenden Differentialquotienten bedeuten. Zwischen diesen Gln. könnte man dann d. 3 Größen $\vartheta\ \vartheta'\ \vartheta''$ eliminiren und man erhielt eine Gl. zwischen $h\ h'\ h''$ u. s, also eine Diff.-Gl. 2ter Ordnung von h als Function von s, oder man könnte d. umgekehrte Verfahren anwenden mit h u. erhält $\vartheta\ \vartheta'\ \vartheta''$ u. s. Auf alle Fälle würde dies Verfahren zu ganz außerordentlichen Weitläufigkeiten führen, d. zu d. hier überhaupt erreichbaren Genauigkeit in keinem Verhältniß stünden; es wird sich also darum handeln, d. Aufgabe zu vereinfachen, um zu praktisch brauchbaren Formeln zu gelangen. d. Gl. 2 ist diejenige, welche d. Wärmeleitung d. Rohrwand allein berücksichtigt, dieselbe ist bedingt durch $\vartheta-\vartheta'$; von dieser Wärmeleitung d. Rohrwand hängt in erster Stufe d. Temp.-Änderung d. Luftstroms von Querschnitt zu Querschnitt ab. Im Vergleich mit d. 2 hauptsächlichsten Gliedern dieser Gl. ist d. Glied dh u. d. Glied $ds\cos\psi$ so klein, daß dieselben vernachlässigt werden können; dies kommt darauf hinaus, daß d. Temp. d. Stroms nur in ganz untergeordnetem Grade von d. Geschw. u. von d. Schwere abhängt. Daß dies richtig, ist implicite schon früher dadurch berücksichtigt worden, daß im Allgemeinen

d. Temp. d. Gases constant gesetzt wurde; was zunächst d. Einfluss d. Schwere betrifft, so lässt sich leicht einsehen, dass eine Erhebung von mehr als 100 m erst 1° C. verursacht; nämlich, wenn eben H d. Höhe ist, bis zu welcher eine Gasbildung emporsteigt, so wird, um 1 kg. Gas auf diese Höhe zu heben, eine Arbeit = 1. H verbraucht. d. Wärmewerth dieser Arbeit ist A H Wärmeeinheiten; soll nun diese Arbeit dadurch geleistet werden, dass d. Gas eine entsprechende Wärmemenge entzogen wird, so ist d. Wärmewerth A H dieser zur Erhebung d. Gases verbrauchten Arbeit = d. Product aus spec. Wärme d. Gases und d. entsprechenden Temp.-erniedrigung:

$$A H = c_p$$

diejenige Erhebung, d. in Folge d. Einflusses d. Schwere erst eine Temp.-erniedrigung um 1° bedingen würde, so für atm. Luft, wo $c_p = 0,2375$:

$$H = 0,2375 \cdot 424 = 100,7 \text{ m}.$$

Also erst bei einer Höhendifferenz von 100,7 m würde eine Temp.-erniedrigung von 1° bedingt werden; eine solche Höhenänderung kommt schon kaum vor; d. diese Temp.-Differenz ist so gering gegen d. Temp.-Änderung durch d. Wärmeleitung, dass also d. Glied $A s \cos \psi$ vernachlässigt werden kann. Ganz dasselbe gilt auch von d. Glied $d h$, ist nämlich Δh eine gewisse Änderung in d. Geschw.-Höhe, so soll nun eine solche Änderung Δh d. Geschw.-Höhe, wenn sie beispielsweise in d. atm. Luft bei constantem p eine Temp.-Änderung von 1° C verursacht, d. Gl. entsprechen:

$$A \cdot \Delta h = c_p$$

so wäre also auch $\Delta h = 100,7$ m u. dem entsprechend $\Delta(u^2) = 1976$; also erst bei dieser Änderung käme eine Änderung um 1° vor; wäre aber d. Anfangsgeschw. = 20 m. pro Sek. u. sollte durch einen Zuwachs an Geschw. u. d. dadurch bedingten Wärmeverbrauch d. Gases selbst eine Temp.-Änderung um 1° verursacht werden, so müsste d. Geschw.-Zuwachs um $\sqrt{400 + 1976}$ also von 20 m. bis auf 48,7 m wachsen; solche bedeutende Geschw.-Änderungen kommen jedoch auch kaum zu [illegible]. [illegible] d. Gl.:

$$\frac{d\vartheta}{\vartheta - \vartheta'} = \div \frac{ds}{a}$$

d. Temp. ϑ', welche d. Röhre an [illegible] besitzt, kann an verschiedenen Stellen verschieden sein, es kann ϑ' selbst eine Function von s sein wie ϑ, namentlich wenn d. Wärmeentziehung [illegible] durch eine Flüssigkeitsstrom stattfindet, d. äusserlich [illegible]; es sei jedoch hier d. Einfachheit wegen angenommen, dass d. Temp. d. Mediums, welches d. Röhre von aussen umgibt, so wenig verschieden ist, dass man eine mittlere Temp. ϑ' annehmen darf, also constant. Setzt man dies, so ergibt sich aus dieser Gl., wenn ϑ_1 d. absolute Temp. im Anfangsquerschnitt bedeutet, durch Integration:

$$l\left(\frac{\vartheta - \vartheta'}{\vartheta_1 - \vartheta'}\right) = \div \frac{s}{a}$$

oder es ist d. absolute Temp. d. Gasstroms in d. Entfernung s vom Anfang d. Röhre:

$$\vartheta = \vartheta' + (\vartheta_1 - \vartheta')\, e^{-\frac{s}{a}}$$

Hierin ist ϑ_1 u. ϑ' gegeben, so dass ϑ für jeden Querschnitt gefunden werden kann. Es soll nun d. Gl. 3 weiter dazu benutzt werden, um d. Geschw. d. Gasstroms als Function von s zu finden, od. um p als Function von s u. ϑ zu entwickeln:

Zunächst kann d. 2te u. 3te Glied zusammengefasst werden. Aus d. Continuitätsgl., in welcher ϑ, G u. ϑ' constant sind, folgt:

$$\vartheta = \text{const.}\; p u,$$

also $l(\vartheta) = \text{Const.} + lp + lu$

differentiirt man dies, so folgt:

$$\frac{d\vartheta}{\vartheta} = \frac{dp}{p} + \frac{du}{u}$$

wie $\frac{du}{u} = \frac{dh}{2h}$ ist, also:

$$R\vartheta\left(\frac{d\vartheta}{\vartheta} - \frac{dh}{2h}\right) = R\vartheta\,\frac{dp}{p}.$$

Wird dies eingesetzt, dann d. Gl. durch h dividirt, und d. rechte Seite auf 0 gebracht, so folgt:

$$\frac{dh}{h} + \frac{R\vartheta}{h}\,\frac{dp}{p} + \left(\frac{\lambda}{\delta} - \frac{\cos\psi}{h}\right) ds = 0$$

Setzt man hier:

$$\frac{dh}{h} = 2\left(\frac{d\vartheta}{\vartheta} - \frac{dp}{p}\right)$$

u. ferner $ds = \div a \frac{d\vartheta}{\vartheta - \vartheta'}$, so folgt:

$$2\,\frac{d\vartheta}{\vartheta} + \left(\frac{R\vartheta}{h} - 2\right)\frac{dp}{p} - \left(\lambda\,\frac{a}{\delta} - \frac{a}{h}\cos\psi\right)\frac{d\vartheta}{\vartheta - \vartheta'} = 0$$

Hierbei lässt sich nun zunächst eine Vernachlässigung vornehmen nämlich eine schon früher erwähnte: es war schon bei einer Röhre, wo keine Wärmeleitung durch d. Wand stattfindet gezeigt, dass im Allgemeinen $\frac{R\vartheta}{2h}$ eine so grosse Zahl ist, dass man dagegen 1 vernachlässigen kann.

es zeigt sich, daß dieser Coeff. größer als 100 cm, wenn u > 30 m zu 80 cm; im vorliegenden Falle wird diese Vernachlässigung noch kleiner; sie ist im Allgemeinen d. Länge größer wegen d. Wirbelbildung durch d. Reibung u. es wird durch d. Vernachlässigung von 1 gegen $\frac{\Re\sigma}{2h}$ dasselbe erreicht, wie durch $\frac{\Re\sigma}{h}$ gegen 2. Theilt man dies und multiplicirt d. ganze Gl. mit σ, so folgt:

$$2\,d\sigma + \frac{\Re\sigma^2}{h}\frac{dp}{p} - \left(\lambda\frac{a}{\partial} - \frac{a}{h}\cos\psi\right)\frac{\sigma\,d\sigma}{\sigma-\sigma'} = 0$$

Setzen wir d. Nenner weg und setzen $\frac{\sigma}{\sigma-\sigma'} = 1+\frac{\sigma'}{\sigma-\sigma'}$, so folgt:

$$-\frac{\Re\sigma^2}{h}\frac{dp}{p} = \left(2-\lambda\frac{a}{\partial}\right)d\sigma - \lambda\frac{a}{\partial}\frac{\sigma'\,d\sigma}{\sigma-\sigma'} + \frac{a}{h}\cos\psi\frac{\sigma\,d\sigma}{\sigma-\sigma'}$$

u. wenn im dritten Glied $\frac{d\sigma}{\sigma-\sigma'} = \div\frac{ds}{a}$ gesetzt wird:

$$-\frac{\Re\sigma^2}{h}\frac{dp}{p} = \lambda\frac{ds}{\partial}\sigma' - \left(\lambda\frac{a}{\partial}-2\right)d\sigma + \frac{a}{h}\cos\psi\frac{\sigma\,d\sigma}{\sigma-\sigma'}$$

Ferner ist $\frac{\Re\sigma^2}{h} = 2g\Re\left(\frac{\sigma}{u}\right)^2$, weil d. Continuitätsgl. ist d. Quotient $\frac{\sigma}{u}$ proportional d. Spr. p, wenn also d. Werthe von σ, u u. p im Anfangsquerschnitt mit σ_1, u_1 u. p_1 bezeichnet werden, so ist: $2g\Re\left(\frac{\sigma}{u}\right)^2 = 2g\Re\left(\frac{\sigma_1}{u_1}\right)^2\left(\frac{p}{p_1}\right)^2 = \alpha\sigma'\left(\frac{p}{p_1}\right)^2$ wenn $\alpha = \frac{2g\Re}{\sigma'}\left(\frac{\sigma_1}{u_1}\right)^2$ ist.
Setzt man dies ein, so folgt:

$$-\alpha\sigma'\frac{p\,dp}{p_1^2} = \lambda\frac{ds}{\partial}\sigma' - \left(\lambda\frac{a}{\partial}-2\right)d\sigma + \frac{a}{\Re}\left(\frac{p}{p_1}\right)^2 a\cos\psi\frac{\sigma'\,d\sigma}{(\sigma-\sigma')\sigma}.$$

Was d. letzte Größe betrifft, so ist: $\frac{\sigma'\,d\sigma}{\sigma(\sigma-\sigma')} = \left(\frac{1}{\sigma-\sigma'} - \frac{1}{\sigma}\right)d\sigma = \div\frac{ds}{a} - d\,l(\sigma)$.
dies eingesetzt u. d. ganze Gl. durch $\alpha\sigma'$ dividirt, liefert:

$$-\frac{1}{2}\,d\left(\frac{p}{p_1}\right)^2 = \frac{1}{\alpha}\left\{\lambda\frac{ds}{\partial} - \left(\lambda\frac{a}{\partial}-2\right)\frac{d\sigma}{\sigma'}\right\} - \frac{\cos\psi}{\Re\sigma'}\left(\frac{p}{p_1}\right)^2\left(ds + a\,d\,l(\sigma)\right).$$

Bei d. Integration macht nun d. Factor $\frac{p}{p_1}$ einige Schwierigkeit, weshalb hierfür eine Vereinfachung gemacht werden soll; es soll im letzten Glied statt d. eigentlich veränderlichen Factors $\frac{p}{p_1}$ ein constanter Mittelwerth gesetzt werden. Versteht man nun unter p d. Spr. in d. Entfernung s vom Anfang d. Röhre, so ist d. Mittelwerth von $\left(\frac{p}{p_1}\right)^2$ für d. ganze Röhrenlänge $s = \frac{1}{2}\left[1+\left(\frac{p}{p_1}\right)^2\right]$, denn für d. Anfang ist $\left(\frac{p}{p_1}\right)^2 = 0$ und am Ende $= \left(\frac{p}{p_1}\right)^2$. Dies eingesetzt, so erhält man durch Integration:

$$\frac{1}{2}\left[1-\left(\frac{p}{p_1}\right)^2\right] = \frac{1}{\alpha}\left[\lambda\frac{s}{\partial} + \left(\lambda\frac{a}{\partial}-2\right)\frac{\sigma_1-\sigma}{\sigma'}\right] - \frac{1}{2}\frac{\cos\psi}{\Re\sigma'}\left[1+\left(\frac{p}{p_1}\right)^2\right]\left(s + a\,l\left(\frac{\sigma}{\sigma_1}\right)\right).$$

Setzt man nun: $1+\left(\frac{p}{p_1}\right)^2 = 2-\left[1-\left(\frac{p}{p_1}\right)^2\right]$, so folgt durch Umformung:

$$\frac{1}{2}\left[1-\left(\frac{p}{p_1}\right)^2\right] = \frac{\frac{1}{\alpha}\left[\lambda\frac{s}{\partial} + \left(\lambda\frac{a}{\partial}-2\right)\frac{\sigma_1-\sigma}{\sigma'}\right] - \cos\psi\left(s + a\,l\left(\frac{\sigma}{\sigma_1}\right)\right)}{1 - \frac{\cos\psi}{\Re\sigma'}\left(s + a\,l\left(\frac{\sigma}{\sigma_1}\right)\right)}.$$

Hiernach kann man nun, da σ als Function von s bereits gefunden, auch für jeden Werth von s d. Größe rechts berechnen, wodurch dann auch d. Werth von p gefunden ist. In d. Regel wird hierbei d. Änderung d. Drucks nur von mäßiger Größe sein wie z. B.: wenn es sich handelt um d. Ldt. d. Heizgase in d. Canal einer Dampfkesselfeuerung, so kann d. Spr. vom Rost d. Feuerung bis zum Kessel sich nur wenig ändern, sie kann nur verschieden sein durch d. Änderung d. Luftdrucks an d. verschiedenen Stellen. Unter solchen Umständen kann

$$p = p_1(1-\delta)$$

gesetzt werden, wo δ ein sehr kleiner Bruch ist, von welchem d. höheren Potenzen vernachlässigt werden können, so ist also:

$$\left(\frac{p}{p_1}\right)^2 = 1-2\delta \quad\text{und}\quad \frac{1}{2}\left[1-\left(\frac{p}{p_1}\right)^2\right] = \delta.$$

Ebenso kann im Nenner d. kleine Glied mit $\cos\psi$ gegen 1 vernachlässigt werden. Später werden wir diesen Ausdruck noch näher zu betrachten haben, nämlich bei d. Theorie d. Feuerungen; dabei wird, sofern es sich um d. Ldt. d. Heizgase im Canalsystem d. Feuerung selbst handelt, auch d. 2te Glied im Zähler fortzulassen sein, indem dieses Canalsystem gewöhnl. in einer Horizontalebene sich befindet, also $\cos\psi = 0$. Handelt es sich um d. Ldt. d. Heizgases im Kamin, so ist $\psi = 180°$ und mithin $\cos\psi = \div 1$ zu setzen. –

Ist nun auf diese Weise d. Dr. bekannt, so findet man auch d. Continuitäts-Gl. d. Geschw., denn es sind d. Geschw. direct proportional d. absoluten Temp. u. umgekehrt proportional d. Dr.; sind also für d. Anfangsquerschnitt u_1, T_1 u. p_1, so ist:

$$\frac{u}{u_1} = \frac{T}{T_1}\,\frac{p_1}{p}.$$

Was diese Berechnung d. Druckgefälles d. äusseren u. inneren Zustandes von Querschnitt zu Querschnitt betrifft, so war nur d. allgemeine Leitungswiderstand berücksichtigt worden; es können aber auch hier besondere Widerstände in Betracht kommen, wie z. B.: bei d. Best. eines Gasgesetzes einer Änderung an d. Ende d. Rohres, wo d. Kanal eine plötzliche Richtungsänderung erfährt, sowie auch eine Querschnittsänderung; in solchen Fällen ist es in d. Regel notwendig, d. ganze Strecke, auf welche d. Gasmenge sich strömend bewegt, in einzelne Teile zu teilen, die durch diese Stellen, wo Änderungen eintreten, getrennt sind, u. es muss dann d. Änderung d. Gas-Zustandes für jede Strecke für sich behandelt werden. Was d. Zustandsänderung betrifft, d. durch einen besonderen Widerstand hervorgebracht wird, so genügt es, d. Druckänderung zu betrachten, denn auf einer solchen kurzen Strecke wird keine wesentliche Wärmeleitung als stattfindend betrachtet werden können; es kann also ganz dieselbe Widerstandsformel benutzt werden, wie bei d. Best. d. Gasmenge durch einen Kanal, wo keine Wärmeleitung stattfand. D. Formel war folgende:
Geht an einer solchen Stelle d. Dr. von p_1 zu p_2 über und wenn ferner gleichzeitig eine Querschnittsänderung von F_1 zu F_2 vorkommt u. wenn man d. Dr. p_2 an d. fraglichen Stelle setzt:

$$p_2 = p_1(1-\delta)$$

so kann man setzen:

$$\delta = \frac{k}{RT}\left[(1+\zeta)\left(\frac{F_1}{F_2}\right)^2 - 1\right]. —$$

Was d. Best. d. Dämpfe betrifft, so soll nur eine Formel über d. Ausflussgeschw. u. Ausflussmenge angegeben werden; es können hier ganz analoge Formeln benutzt werden, wie beim Ausfluss d. Gase. Es war bekanntlich d. Ausflussgeschw. eines Gases beim Ausströmen aus einer Mündung:

$$u = \varphi\sqrt{2g\,\frac{n}{n-1}\,R\,T_1\left[1-\left(\frac{p}{p_1}\right)^{\frac{n-1}{n}}\right]}$$

wo p_1 d. Dr. im Innern u. p d. im Äussern d. Gefässes bedeutet, T_1 d. absolute Temp. im Innern d. Gefässes, n d. Verhältnis d. spez. Wärme bei constantem Dr. zur spez. Wärme bei constantem Volumen, φ d. Geschw.-Coeff. Es war d. Formel auf d. Weise erhalten worden, dass man u_0 berechnete wie es sein würde, wenn keine Widerstände stattfinden u. d. Zustandsänderung nach d. adiabatischen Curve stattfindet und dieser Ausdruck wurde dann mit φ multipliziert. Bei einer solchen Zustandsänderung d. Gases stehen bekanntlich d. Dr. u. d. spez. Vol. in d. Beziehung zu einander, dass: $p v^n = p_1 v_1^n$ ist.
Nun gilt erfahrungsgemäss dieselbe Beziehung für d. Zustandsänderung von Dämpfen ohne Mitteilung u. Entziehung von Wärme, nur dass n eine andere Bedeutung hat. Wenn es sich zunächst um überhitzte Dämpfe handelt, so folgt aus d. Versuchen von Hirn u. Cazin, dass, wenn d. Wasserdampf ohne Mitteilung od. Entziehung von Wärme seinen Zustand ändert, wenn auch eine solche Beziehung stattfindet u. zwar ergibt sich für Wasserdampf $n = \frac{4}{3}$. Für gesättigte Dämpfe hat sich gezeigt, dass man auch hier d. Gesetz zu Grunde legen darf, dass d. Dr. sich proportional ändert einer gewissen Potenz d. spez. Vol., nur hat d. Potenz wieder einen anderen Wert, sie war nämlich abhängig von d. Mischungsverhältnis. Wenn im Anfangszustand in 1 kgr. d. Gemenges x_1 kgr Dampf enthalten ist, so konnte gesetzt werden:

$$n = 1{,}035 + 0{,}1\,x.$$

Es werden also d. betreffenden Formeln einfach übertragen werden können, so fern nur in d. Formel p u. v vorkommen u. nicht d. Temp., weil letztere bedeutend anders ist.

Es ließe sich nun d. Formel für d. Ausflußgeschw. d. Gase so umgestalten, daß d. Temp. nicht mehr darin vorkommt, da $R_1 T_1 = p_1 v_1$ ist, also:

$$u = \varphi \sqrt{2g \frac{n}{n-1} p_1 v_1 \left[1-\left(\frac{p_0}{p_1}\right)^{\frac{n-1}{n}}\right]}$$

Was nun d. pr. Sek. ausströmende Gasmenge betrifft, so sei A wie früher d. Flächeninhalt d. Ausflußöffnung; indem aber hier ebenso, wie bei tropfbaren Flüssigkeiten im Allgemeinen auch eine Contraction stattfinden kann, so wird d. kleinste Querschnitt d. contrahirten Strahls auch hier $= \alpha A$ sein und hierdurch strömt nun d. Gas mit d. Geschw. u, es ist also d. hierdurch strömende Gasvolumen $= \alpha A u$. Multiplicirt man dies mit d. Gew. d. Volumeneinheit od. dividirt man durch d. Volumen d. Gewichtseinheit, so erhält man d. pr. Sek. ausfließende Gasgewicht. Dieses ergibt sich streng genommen nicht aus dieser Gl., in Wirklichkeit findet d. Zustandsänderung nicht ohne Mittheilung von Wärme statt, sondern wenn überhaupt ein Gas-Zustand [illegible], so hat derselbe zur Folge, daß eine gewisse Arbeit sich in Wärme umsetzt u. diese wird d. ausströmenden Gas zurückgeführt. Es ist also streng genommen d. vorliegende Aufgabe die, diejenige Änderung d. spec. Vol. zu ermitteln, welche stattfindet mit Rücksicht auf d. Ergänzung d. Wärmemittheilung; jedoch würde es sich kaum verlohnen, hierauf näher einzugehen, man kann einfach setzen: $G = \alpha A u$, dividirt durch d. Vol. u. d. Fehler auf α übertragen, welches doch nicht berechnet werden kann, sondern nur durch Versuchen zu bestimmen ist; d. Vol. ist aber, da $p v^n = p_1 v_1^n$ ist, $v = \left(\frac{p_1}{p}\right)^{\frac{1}{n}} v_1$, also:

$$G = \alpha A u \left(\frac{p_0}{p_1}\right)^{\frac{1}{n}} \frac{1}{v_1}.$$

Nur hat α jetzt einen zusammengesetzten Werth; setzt man für u seinen Ausdruck und setzt $\alpha\varphi = \mu$, so folgt:

$$G = \mu A \left(\frac{p_0}{p_1}\right)^{\frac{1}{n}} \sqrt{2g \frac{n}{n-1} \frac{p_1}{v_1} \left[1-\left(\frac{p_0}{p_1}\right)^{\frac{n-1}{n}}\right]}.$$

Nicht permanente Bewegung des Wassers.

Es sollen für d. nicht permanente Bew. einige Fälle behandelt werden, nämlich solche, die sich beziehen auf d. Ausfluß d. Wassers aus Gefäßen, d. keinen Zufluß erhalten od. wenigstens nur einen solchen, d. nicht = d. gleichzeitigen Abfluß ist, so daß also d. Wasserhöhe im Gefäß variabel ist.

Es sei wieder A d. Größe d. Ausflußöffnung, d. horizontale Querschnitt d. Gefäßes in d. Höhe h über d. Schwerpunkt dieser Mündung sei $= F$, wobei im Allgemeinen F irgend eine gegebene Function von h sein kann. Anfangs liege d. freie Wasseroberfl. in d. Höhe h_0 über d. Schwerpunkt d. Mündung und in dieser Höhe sei d. horizontale Querschnitt d. Gefäßes $= F_0$. Gewöhnlich handelt es sich nun hier um d. Aufgabe, diejenige Zeit t zu berechnen, welche unter gegebenem Gesetz d. Wasserzuflusses verstreicht von d. Augenblick an, wo d. Wasserstand $= h_0$ ist bis zu d. Augenblick wo d. Wasserstand sich bis zu h_1 vermindert hat. Wenn d. Mündung A einigermaßen klein ist im Vergleich mit d. horizontalen Querschnitt F an einer beliebigen Stelle, so kann man sich durch eine specielle Untersuchung davon überzeugen, daß man nur einen kleinen Fehler begeht, wenn man d. Ausflußgeschw. in jedem einzelnen Augenblick gleich derjenigen setzt, wenn d. Wasserhöhe constant bliebe; es würde also dann:

$u = \varphi \sqrt{2gh}$ sein. Im vorliegenden Fall, wo k nur einen unveränderten, vorübergehenden Wert hat, wird streng genommen dies nicht d. Fall sein, indessen zeigt eine spezielle Untersuchung, daß man, falls nur d. Öffnung ziemlich klein ist im Vergleich mit d. Querschnitt $\mathfrak{T}$ und natürlich $p_0 = p$ ist, einen geringen Fehler begeht. –

Es soll nun zunächst vorausgesetzt werden, d. Gefäß erhalte keinen Zufluß, es muß dann während d. Abflusses d. Wassers d. Oberfl. desselben sich senken. Ist in irgend einem Augenblick h d. Wasserstand im Gefäß, so ändert sich derselbe im nächstfolgenden Zeitelement dt um dh und zwar ist dann dh eine negative Größe und stellt $-dh$ d. absolute Senkung d. Wasserspiegels und d. verschwindende Wasservolumen $= +\mathfrak{T}\,dh$. Dieses Volumen kann aber auch gleich gesetzt werden $-\mu A\sqrt{2gh}\,dt$ und somit:

$$dt = -\frac{1}{\mu A\sqrt{2g}}\,\frac{\mathfrak{T}\,dh}{\sqrt{h}}$$

und folgt hieraus durch Integration d. Zeit, in welcher d. Wasserstand von h_0 auf h herabsinkt:

$$t = \frac{1}{\mu A\sqrt{2g}}\int_h^{h_0}\frac{\mathfrak{T}\,dh}{\sqrt{h}}$$

Wird ein Gefäß von konstantem Horizontalschnitt vorausgesetzt, so folgt:

$$t = \frac{2\mathfrak{T}}{\mu A\sqrt{2g}}\left(\sqrt{h_0}-\sqrt{h}\right) = \frac{\mathfrak{T}}{\mu A}\left(\sqrt{\frac{2h_0}{g}}-\sqrt{\frac{2h}{g}}\right).$$

Es ist also d. Zeit, d. d. Wasser braucht, um bis zur vollen Höhe d. Mündung abzufließen:

$$\tau = \frac{\mathfrak{T}}{\mu A}\sqrt{\frac{2h}{g}}.$$

Erfolgt d. Ausfluß mit einer kurzen Ausflußröhre, so ist h d. Höhe d. Wasserspiegels über d. Mündung d. Röhre u. es fällt dann d. Widerstand in dieser Röhre mit zu berücksichtigen. Natürlich bemerkt man, besonders wenn d. Ausflußröhre geneigt ist, d. Wasserspiegel im Gefäß nicht bis $h = 0$ herabsinken.

Hat d. Ausflußgefäß eine beliebige Gestalt, so kann in d. meisten Fällen gesetzt werden:

$$\mathfrak{T} = p + qh + rh^2$$

Hierzu gehören alle cylindrischen Gefäße bzw. Gruben und alle prismatischen Gefäße; zu d. letzteren gehören alle Gefäße, deren Wände Umdrehungsflächen sind. Unter einem Prismatoid pflegt ein Körper verstanden zu werden, d. auf folgende Art entstanden zu denken ist: Hat man irgend ein ebenes Netz und legt durch d. Ecken desselben gerade Linien und denkt sich nun d. Netz fortbewegt, daß seine Ebene beständig parallel bleibt und seine Eckpunkte beständig auf diesen geraden Linien bleiben, so beschreibt dieses Netz ein Prismatoid. –

Setzt man letzteren Ausdruck für $\mathfrak{T}$ in d. Gl. für τ, so folgt:

$$\tau = \frac{1}{\mu A\sqrt{2g}}\int_0^h\left(p z^{-\frac{1}{2}} + q z^{\frac{1}{2}} + r z^{\frac{3}{2}}\right)dz$$

$$= \frac{1}{\mu A\sqrt{2g}}\left(\frac{p h^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} + \frac{q h^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + \frac{r h^{\frac{5}{2}}}{\frac{5}{2}}\right)$$

$$\tau = \frac{1}{\mu A}\sqrt{\frac{2h}{g}}\left(p + \tfrac{1}{3} q h + \tfrac{1}{5} r h^2\right)$$

Hier können d. Coeff. p, q u. r auch ersetzt werden durch 3 an gewissen Stellen bekannte Horizontalschnitte d. Gefäßes, dazu eignet sich namentlich d. Horizontalschnitt in d. Höhe h über d. Mündung, in d. Höhe h_1 und in d. Höhe 0. Bezeichnet man d. Querschnitte dieser Schnitte mit $\mathfrak{T}$, G u. H, so hat man nun:

$$\mathfrak{T} = p + qh + rh^2 \qquad G = p + \tfrac{1}{2} q h + \tfrac{1}{4} r h^2 \quad \text{und} \quad H = p.$$

und demnach ergibt sich:

$$T = \frac{1}{\mu A}\sqrt{\frac{2h}{g}}\left\{H + \frac{1}{3}(-F + 4G - 3H) + \frac{2}{5}(F - 2G + H)\right\}$$

$$T = \frac{F + 8G + 6H}{15\,\mu A}\sqrt{\frac{2h}{g}}$$

Soll d. Zeit t gefunden werden, binnen welcher d. Anfangswasserstand h_0 sich reducirt auf h, so ist

$$t = T_0 - T = \frac{1}{\mu A}\left\{\frac{F_0 + 8G_0 + 6H_0}{15}\sqrt{\frac{2h_0}{g}} - \frac{F + 8G + 6H}{15}\sqrt{\frac{2h}{g}}\right\}$$

Wenn d. Gestalt d. Gefäßes nach außen bestimmt ist, so wird man einen dieser 3 Horizontalschnitte durch d. Dimensionen d. beiden andern ausdrücken können, so daß dann, um d. Zeit für d. Niedersinken d. Wasserspiegels zu bestimmen nur d. Kenntniß von 2 resp. 3 verschiedenen Horizontalschnitten nöthig ist.

Ist also z. B. d. Ausflußbehälter eine obeliskenförmige Gestalt, also ein Prisma mit parallelen Seiten, die aber im Allgemeinen nicht einander ähnlich sind; es sei:

$F = ab$ u. $H = a'b'$

dann ist für d. mittleren Querschnitt: $G = \frac{a+a'}{2}\cdot\frac{b+b'}{2}$

und sofort: $F + 8G + 6H = 3ab + 8a'b' + 2(ab' + a'b)$

so daß man nur d. Dimensionen von F u. H zu kennen braucht, um T zu berechnen; um t zu berechnen müßte man noch d. Dimensionen von F_0 kennen. –

Wäre d. Gefäß [illegible], so würde auch irgend eine Dimension d. Querschnitts d. arithmetische Mittel d. jeweiligen Dimension d. Querschnitts F u. H sein; in einem solchen Falle würden auch d. jeweiligen Dimensionen proportional d. Wurzel aus d. Inhalt d. Querschnitts; wenn also irgend eine Dimension d. Querschnitts G d. arithmetische Mittel d. analogen Dimensionen von F u. H ist, so ist mithin d. Wurzel aus d. mittleren Querschnitt G d. arithmetische Mittel aus d. Wurzel von F und H, also: $\sqrt{G} = \frac{\sqrt{F} + \sqrt{H}}{2}$

und sofort: $F + 8G + 6H = 3F + 8H + 4\sqrt{FH}$

Es wird mit Rücksicht auf derartige ~~[illegible]~~ Aufgaben nicht selten vorkommen, daß d. Gestalt d. Ausflußbehälters so complicirt ist, daß man sich mit einer angenäherten Berechnung dieses Inhaltes behelfen muß. Als erste Annäherung kann dazu d. Voraussetzung dienen, es seien d. Querschnitte [illegible] Handelt es sich also um d. Ausfluß aus einem Teich, so wird in d. Regel d. Gestalt dieses Behälters so complicirt, daß man sich mit einem solchen Näherungsverfahren behelfen muß, dabei kann es d. Fall sein, daß man von d. Teiche weiter nichts kennt, als d. Oberfl. u. allenfalls d. größte Tiefe desselben. In einem solchen Falle wird man d. Wahrheit ziemlich nahe kommen, wenn man annimmt, daß d. Horizontalschnitte eines solchen Teichs d. Höhen bis zum tiefsten Punkt proportional wären, wie es d. Fall wäre, wenn d. Boden d. Teiches nach einem Umdrehungsparaboloid gestaltet wäre. Wenn eine [illegible] sich um d. verticale Linie dreht, so ist jeder Querschnitt desselben ein Kreis, d. d. Eigenschaft hat, daß irgend ein Horizontalschnitt proportional d. Abstande bis zum tiefsten Punkte ist. Kennt man also vom Teich nur d. Größe d. Oberfl. und d. größte Tiefe, so wird man meistens am wenigsten fehl greifen, wenn man annimmt, es sei d. Grundfl. d. Teiches nahezu einem Umdrehungsparaboloid gestaltet. Auf Grund dieser Voraussetzung würde man dann folgende Formel herstellen können, um d. Zeit = t [illegible] zu berechnen bis zu welcher ein ursprünglicher Wasserstand in einen kleineren übergeht; es sei d. ursprünglich vorhandene Wasseroberfl. = F_0 und d. Höhe desselben über d. Schwerpunkt d. Ausflußmündung = h_0. Diese Ausflußmündung liege noch um a höher als d. tiefste Punkt d. Teiches, so daß also d. größte Wassertiefe = $h_0 + a$ ist; es handelt sich nun um d. Größe $F + 8G + 6H$. Zu dem Ende ist:

$$\Omega_0 : G_0 : H = (a+h_0) : (a+\tfrac{1}{2}h_0) : a$$

also $$G = \frac{a+\frac{1}{2}h_0}{a+h_0}\,\Omega_0 \quad \text{und} \quad H = \frac{a}{a+h_0}\,\Omega_0.$$

demnach $$\Omega_0 + 8G_0 + 6H = \frac{15a+5h_0}{a+h_0}\,\Omega_0$$

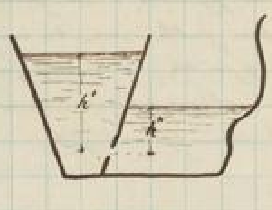
ebenso $$\Omega + 8G + 6H = \frac{15a+5h}{a+h}\,\Omega = \frac{15a+5h}{a+h_0}\,\Omega_0$$

also $$t = \frac{\Omega_0}{\mu A}\left(\frac{a+\frac{1}{3}h_0}{a+h_0}\sqrt{\frac{2h_0}{g}} - \frac{a+\frac{1}{3}h}{a+h}\sqrt{\frac{2h}{g}}\right).$$

Geschieht d. Abfluß durch eine Röhre, so muß bei d. Wahl von μ natürlich auf d. Widerstand für d. Abflußröhre mit Rücksicht genommen werden, es bedeutet dann μ einen resultierenden Geschw.-Coeff.; ist ζ d. resultierende Widerstandscoeff., so ist:

$$\zeta = \frac{1}{\varphi^2} - 1 = \frac{1}{\mu^2} - 1 \quad \text{also:} \quad \frac{1}{\mu} = \sqrt{1+\zeta}. \text{ –}$$

Es war bei allen diesen Aufgaben vorausgesetzt worden, daß d. Ausfluß aus d. Behälter unmittelbar in d. freie Luft erfolge. Ein anderer Fall, d. auch von Wichtigkeit ist, betrifft d. Ausfluß d. Wassers aus einem Gefäß in ein anderes, welche mit einander communicieren durch eine Öffnung in ihrer gemeinschaftlichen Scheidewand; statt dieser Öffnung kann jedoch auch eine Communicationsröhre vorhanden sein. Würde d. eine nach d. anderen Gefäß sich entleeren, so bei einem Zufluß od. Abfluß, so daß ein gegenseitiger Austausch stattfindet.



Anfangs stehe in d. ersten Gefäß d. Wasser in d. Höhe h' über d. Schwerpunkt d. Communicationsmündung, im zweiten in d. Höhe h''; d. Differenz dieser beiden Höhen sei h; es fragt sich nun, binnen welcher Zeit wird diese anfängliche Niveaudifferenz übergehen in 0. Es sei irgend ein Horizontalschnitt d. ersten Gefäßes bezeichnet mit Ω', derselbe ist eine gegebene Function d. Höhe z' dieses Schnittes über d. Schwerpunkt d. Mündung. Es sei ebenso irgend ein Horizontalschnitt d. 2ten Gefäßes in d. Höhe z'' über d. Schwerpunkt d. Mündung mit Ω'' bezeichnet, so Ω'' gleichfalls eine gegebene Function von z'' ist. Irgend eine beliebige Niveaudifferenz d. beiden Wasserspiegel sei mit z bezeichnet; ist während d. Abflusses d. Wassers d. Niveaudifferenz in irgend einem Augenblick $= z$ geworden, dann würde, wenn dieses z eine Zeit lang unverändert bliebe, d. ausfließende Wasservolumen $= \mu A\sqrt{2gz}$ sein; diesen Zustand kann man wenigstens für ein unendl. kleines Zeitelement dt festhalten, dann ist dieses Volumen $= A\mu\sqrt{2gz}\,dt$. Dieses Volumen kann aber auch auf eine 2te Weise ausgedrückt werden, wenn nämlich in diesem Augenblick d. Höhe d. Wasserspiegels über d. Schwerpunkt d. Mündung $= z'$ geworden ist, so wird im nächst folgenden Zeitelement dt d. Wasservolumen, welches aus diesem Gefäß herausfließt, $= \div\,\Omega'\,dz'$ sein, also:

$$\mu A\sqrt{2gz}\,dt = \div\,\Omega'\,dz'$$

Aus d. Gl. $z' - z'' = z$, wo z' u. z'' veränderliche Höhen sind, folgt: $dz' - dz'' = dz$. Andererseits kann durch z' u. z'' d. Wasservolumen ausgedrückt werden, welches in einem Zeitelement überfließt; wie schon gezeigt ist dieses Wasservol. $= \div\,\Omega'\,dz'$; es ist aber auch $= +\,\Omega''\,dz''$, also: $$\Omega'\,dz' + \Omega''\,dz'' = 0.$$

Multiplicirt man d. vorletzte Gl. mit Ω'' und addirt sie zur letzteren, so folgt:

$$(\Omega' + \Omega'')\,dz' = \Omega''\,dz$$

also $$\Omega'\,dz' = \frac{\Omega'\Omega''}{\Omega' + \Omega''}\,dz$$

und demnach: $$\mu A\sqrt{2gz}\,dt = \div\,\frac{\Omega'\Omega''}{\Omega' + \Omega''}\,dz.$$

Wenn man hieraus dt entwickelt, so ist nun, um diejenige Zeit zu erhalten, binnen welcher

d. anfängliche Höhe h übergeht in 0, d. Integration zu erstrecken links von $t=0$ bis $t=\tau$ und rechts von $z=0$ bis $z=h$, dann findet man:

$$\tau = \frac{1}{\mu A\sqrt{2g}}\int_0^h \frac{\tau' \cdot \tau''}{\tau' + \tau''} \cdot \frac{dz}{\sqrt{z}}$$

Bevor d. Integration ausgeführt werden kann, müssen τ' u. τ'' als Functionen von z ausgedrückt werden. Dazu dienen d. Gl.:

$$z' - z'' = z \quad \text{und} \quad \int_{h'}^{z'} \tau' dz' + \int_{h''}^{z''} \tau'' dz'' = 0.$$

mit denen z' u. z'' durch z, h' u. h'' ausgedrückt werden können. D. Integration obiger Gl. wird aber gewöhnlich so umständlich, daß man sich mit einem Näherungswerth begnügen muß. Nur wenn d. Querschnitte constant sind, wie bei Schleusenkammern, kann man d. Factor $\frac{\tau'\tau''}{\tau'+\tau''}$ herausschaffen und erhält dann:

$$\tau = \frac{2}{\mu A\sqrt{2g}}\frac{\tau'\tau''}{\tau'+\tau''}\sqrt{h} = \frac{1}{\mu A}\frac{\tau'\tau''}{\tau'+\tau''}\sqrt{\frac{2h}{g}}.$$

Dieser Ausdruck unterscheidet sich von d. Formel für d. Ausfließzeit d. Wassers aus einfachen prismatischen Gefäßen nur dadurch, daß an Stelle d. constanten Horizontalschnitts für d. Fall harmonische Mittel d. constanten Querschnitte beider Gefäße getreten ist. Unter d. harmonischen Mittel verschiedener Größen versteht man nämlich d. Größe, deren reciproker Werth = d. arithmetischen Mittel aus d. reciproken Werthen aller einzelnen Größen ist, also z. B.:

$$\frac{1}{a} = \frac{1}{n}\left(\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \ldots\ldots \frac{1}{a_n}\right).$$

Es ist also d. harmonische Mittel aus 2 Größen a_1 u. a_2 folgendermaßen zu bestimmen.

$$\frac{1}{a} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2}\right) = \frac{1}{2}\,\frac{a_1 + a_2}{a_1 a_2} \quad \text{also} \quad a = 2\,\frac{a_1 a_2}{a_1 + a_2}$$

Soll wieder d. Zeit t berechnet werden, binnen welcher d. anfängliche Niveaudifferenz h_0 übergeht in h, so hat man $t = \tau_0 - \tau$ zu setzen also:

$$t = \frac{1}{\mu A}\frac{\tau'\tau''}{\tau'+\tau''}\left(\sqrt{\frac{2h_0}{g}} - \sqrt{\frac{2h}{g}}\right)$$

Diese Formel ist namentlich d. von τ bereits erwähnten in Anwendung bei d. Füllen und Leeren von Schleusenkammern; hierbei können dreierlei Fragen vorkommen, wenn ein Schwimmer eine doppelte Schleuse gegeben ist mit 2 Kammern.

nämlich 1) wenn d. obere Schleusenkammer gegen d. Oberwasser abgesperrt ist und d. untere gegen d. Unterwasser, dann dient diese Formel zur Berechnung d. Zeit, binnen welcher d. Höhendifferenz in beiden Kammern = 0 ist.

2) wenn d. untere Kammer gegen d. obere abgesperrt ist, hier aber d. Wasser höher steht als d. Unterwasserspiegel u. man d. Schützen am unteren Thor öffnen würde. So handelt es sich um d. Berechnung d. Zeit, in welcher sich d. Wasserstand in d. untersten Kammer bis zum Unterwasserstand vermindert hat; letzterer ist aber constant, so daß $\tau'' = \infty$ gesetzt werden kann und demnach ist: $\tau = \frac{\tau'}{\mu A}\sqrt{\frac{2h}{g}}$

3) kann es d. Fall sein, daß d. Zeit berechnet werden soll, binnen welcher d. obere Schleusenkammer, wenn sie gegen d. untere abgesperrt ist, sich bis zum Oberwasserspiegel füllen würde; zu d. Zweck hat man $\tau' = \infty$ zu setzen u. es wird dann: $\tau = \frac{\tau''}{\mu A}\sqrt{\frac{2h}{g}}$, es bleibt also nur τ'' an Stelle von τ'!

Es kann nun ein weiterer complicirter Fall vorkommen, in sofern als ein Gefäß, durch welches Wasser abfließt, zugleich einen gewissen Zufluß hat, d. aber nicht beständig = d. Abfluß an d. Mündung ist. Es sei ein Gefäß gegeben, welches einen constanten Wasserzufluß hat und zwar fließe p. Sekunde ein Wasservolumen V ein. Es fließe andererseits durch eine Öffnung Wasser aus d. Gefäße ab. Anfangs sei d. Wasserstand im Gefäß = h_0

und es fragt sich, in welcher Zeit wird sich diese anfängliche Höhe h_0 ändern in h. Sei irgend einen Augenblick z d. Höhe d. Wasserspiegels im Gefäß über d. Schwerpunkt d. Mündung oder über d. Unterwasserspiegel. Bliebe diese Höhe z eine Sekunde hindurch unverändert, so würde ein Wasservolumen ausfließen $= \mu A\sqrt{2gz}$; weil aber gleichzeitig d. Wasservolumen V in d. Gefäß hineinfließt, so würde d. Wasserverlust $= \mu A\sqrt{2gz} - V$ sein; ein negativer Werth dieses Verhältnisses würde einem Zuwachs entsprechen. Wenn diese Annahme auch thatsächlich nie eintrifft, so kann man doch annehmen, es bliebe dieser Zustand während eines Zeitelements dt constant, dann erhalten wir als Wasserverlust in diesem Zeitelement: $(\mu A\sqrt{2gz} - V)dt$. Ist nun δ d. Flächeninhalt d. Querschnitts d. Gefäßes in d. Höhe z, so ist d. verschwundene Wasservolumen auch hier $= -\delta\,dz$, also:

$$(\mu A\sqrt{2gz} - V)\,dt = -\delta\,dz.$$

Entwickelt man hieraus dt, so muß man, um d. Zeit t zu erhalten, binnen welcher sich z von h_0 bis h ändert, d. Ausdruck rechts integriren von h_0 bis h; statt dessen kann man wieder wie früher integriren von h bis h_0 u. d. $-$ Zeichen in $+$ verwandeln.

also:

$$t = \int_h^{h_0} \frac{\delta\,dz}{\mu A\sqrt{2gz} - V} = \frac{1}{\mu A\sqrt{2g}} \int_h^{h_0} \frac{\delta\,dz}{\sqrt{z} - \sqrt{k}}$$

wenn $\sqrt{k} = \dfrac{V}{\mu A\sqrt{2g}}$ ist; also $k = \dfrac{1}{2g}\left(\dfrac{V}{\mu A}\right)^2$.

Folglich ist k d. Druck-Höhe, welche d. mittleren Geschw. entspricht, vermöge welcher V durch d. Querschnitt μA hindurchfließen würde; es also k eine Constante.

Ist δ constant, so ist:

$$t = \frac{\delta}{\mu A}\sqrt{\frac{2}{g}} \int_h^{h_0} \frac{\frac{1}{2}dz}{\sqrt{z} - \sqrt{k}}$$

Nun ist:

$$\frac{\frac{1}{2}dz}{\sqrt{z} - \sqrt{k}} = \frac{\frac{1}{2}dz}{\sqrt{z}} + \sqrt{k}\,\frac{\frac{1}{2}dz/\sqrt{z}}{\sqrt{z} - \sqrt{k}} = d\sqrt{z} + \sqrt{k}\,d\left[l(\sqrt{z} - \sqrt{k})\right]$$

also:

$$t = \frac{\delta}{\mu A}\sqrt{\frac{2}{g}}\left\{\sqrt{h_0} - \sqrt{h} + \sqrt{k}\;l\left(\frac{\sqrt{h_0} - \sqrt{h}}{\sqrt{h} - \sqrt{k}}\right)\right\}.$$

Wäre $h = k$, so müßte $t = \infty$ sein d.h.: es nähert sich d. Höhe d. Wasserspiegels asymptotisch d. Größe k. Diese Annäherung kann mit steigendem od. mit sinkendem Wasserspiegel hergestellt werden; ja wenn diese Grenze erreicht wird, dann aber ändert sich d. ganze Zustand d. Wassers einem permanenten Lauf. Setzt man $V=0$, so muß man wieder auf eine bekannte Formel kommen, dies ist auch thatsächlich d. Fall, denn für $V=0$ ist auch $k=0$, also d. ganze letzte Glied $=0$.