Über die Induction in rotirenden Kugeln

Hertz, Heinrich

1880

§ 7. Verwandte Probleme

$$\delta = \operatorname{arctg}\left(\frac{f_2}{f_1}\right) = -\frac{\mu^2}{2(2n+3)}(R^2 - \varrho^2)$$

$$\frac{\delta}{i} = -\frac{16\pi^2\omega\theta}{2(2n+3)\varkappa}(R^2 - \varrho^2).$$

Die Drehung ist also Null in der äussersten Schicht*), im Allgemeinen ist sie bedeutend vergrössert gegen die unmagnetische Kugel, nahezu im Verhältniss $4\pi\theta$.

In Figur *d*, Tafel 1 sind für eine Eisenkugel die Curven dargestellt, welche den auf Seite 50 für eine Kupferkugel gegebenen entsprechen. Dabei ist der Widerstand des Eisens gleich dem 6fachen des Kupfers angenommenen, und $4\pi\theta = 200$ gesetzt. Die dargestellten Geschwindigkeiten sind äusserst geringe, nämlich eine Umdrehung in 10 Sekunden und eine Umdrehung in 5 Sekunden; schon hier macht sich also die Selbstinduction recht bemerklich. Vgl. Taf. 7b.

2. Wird ω sehr gross, während θ einen endlichen, übrigens beliebigen Werth behält, so wird, wie man leicht aus den Formeln ableitet, die Erscheinung derjenigen in unmagnetischen Kugeln durchaus ähnlich werden. Auch hier ist schliesslich der Drehungswinkel in der äussersten Schicht $\frac{\pi}{4i}$. Die Erscheinung ist identisch mit derjenigen, welche in der unmagnetischen Kugel bei einer $(1 + 4\pi\theta)$ fachen Geschwindigkeit besteht. Die erzeugte Wärme ist dann $\sqrt{1 + 4\pi\theta}$ mal grösser als in der mit gleicher Geschwindigkeit bewegten unmagnetischen Kugel. Grosse Geschwindigkeiten.

§ 7.

Verwandte Probleme.

Es sollen in diesem Paragraphen einige Probleme besprochen werden die mit den früher behandelten in engem Zusammenhange stehen.

---

*) Eine Folge davon, dass in dieser Schicht für grosse θ, nach den Gleichungen für χ_θ

$$N_r - \frac{\partial \chi_\theta}{\partial r} = 0 \quad \text{ist.}$$

I.

Sehen wir von der Selbstinduction ab, so können wir die Kenntniss der Strömung in einer Kugel dazu benutzen, um die Strömung in einem beliebig gestalteten Rotationskörper zu bestimmen, oder doch deren Bestimmung auf eine einfachere Aufgabe zurückzuführen.

Beliebige Rotationskörper.

Es sei S der Rotationskörper, n seine nach innen gekehrte Normale. Wir beschreiben um ihn eine Kugel von beliebigem Radius. Seien $u_1\, v_1\, w_1$ die Strömungen, welche in letzterer stattfinden würden, und

$$N = u_1 \cos a + v_1 \cos b + w_1 \cos c$$

die Strömung in Richtung der n an der Oberfläche von S. Bestimmen wir $u_2\, v_2\, w_2$ so, dass

$$\varkappa u_2 = -\frac{\partial \varphi_2}{\partial x}$$

$$\varkappa v_2 = -\frac{\partial \varphi_2}{\partial y}$$

$$\varkappa w_2 = -\frac{\partial \varphi_2}{\partial z}$$

$$\frac{\partial u_2}{\partial x} + \frac{\partial v_2}{\partial y} + \frac{\partial w_2}{\partial z} = 0$$

$$u_2 \cos a + v_2 \cos b + w_2 \cos c = -N,$$

so sind offenbar

$$u_1 + u_2,\ v_1 + v_2,\ w_1 + w_2$$

die gesuchten Strömungen in S. Die Aufgabe ist also auf die einfachere zurückgeführt:

Eine Funktion φ_2 so zu bestimmen, dass im Innern von S $\Delta \varphi_2 = 0$ und an der Oberfläche $\frac{\partial \varphi}{\partial n} = \varkappa N$, gleich einer gegebenen Funktion, ist.

1. Es sei beispielsweise eine geradlinig bewegte Platte einseitig begrenzt durch die Gerade $\xi = b$. Es sei die äussere Potentialfunktion aufgelöst und ein Glied derselben

$$A\, e^{-\zeta n} \cos r \eta \cos s \xi.$$

Dann fanden wir für die Strömung in der unendlichen Platte

$$\psi_1 = \frac{r}{n} \cdot \frac{\alpha}{\varkappa} \cdot \sin r\eta \cos s\xi.$$

Also ist die Strömung senkrecht zur Grenze

Geradlinig begrenzte Platten.

$$-\frac{\partial \psi}{\partial \eta} = -\frac{r^2}{n} \cdot \frac{\alpha}{\varkappa} \cdot r\eta \cos s b.$$

Daraus folgen für φ_2 die Bedingungen:

$$\frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial y_2} = 0,$$

und für $\xi = b$:

$$\frac{\partial \varphi_2}{\partial \xi} = \frac{r^2}{n} \; \frac{\alpha}{\varkappa} \cos r\eta \cos s b.$$

Also ist:

$$\varphi_2 = \frac{r}{n} \alpha \, e^{r(\zeta - b)} \cos r\eta \cos s b.$$

Zu φ_2 gehört die Strömungsfunktion

$$\psi_2 = -\frac{r}{n} \cdot \frac{\alpha}{\varkappa} \cdot e^{-r(b-\zeta)} \sin r\eta \cos s b,$$

und es wird daher die gesammte Strömungsfunktion

$$\psi_1 + \psi_2 = \frac{r}{n} \cdot \frac{\alpha}{\varkappa} \cdot e^{-rb} \sin r\eta \, (e^{r\xi} \cos s b - e^{rb} \cos s\xi).$$

Durch Summation über alle Glieder folgt die vollständige Lösung. Aehnlich ist die Lösung für beiderseitig begrenzte Streifen.

2. Um die Strömung in einer begrenzten rotirenden Scheibe zu bestimmen, sei ein Glied der äussern Potentialfunktion

$$A \, e^{-n\zeta} \cos i\omega \, J^i(n\varrho).$$

Dann war:

$$\psi_1 = \frac{\omega}{\varkappa} \; \frac{i}{n} \sin i\omega \, J^i(n\varrho).$$

Also die Strömung in Richtung des Radius nach innen für die Grenze, für $\varrho = R$:

$$\frac{\partial \psi}{R \partial \omega} = \frac{\omega}{\varkappa} \; \frac{i^2}{n} \cos i\omega \, \frac{J^i(nR)}{R}.$$

Daraus folgt, wie oben:

Begrenzte Scheibe.

$$\varphi_2 = -\,\omega\,\frac{i}{n}\,J^i(nR)\left(\frac{\varrho}{R}\right)^i \cos i\omega.$$

Nach Bestimmung der diesem φ_2 entsprechenden Strömung ψ_2 folgt die gesammte Strömung:

$$\psi_1 + \psi_2 = \frac{\omega}{\varkappa}\;\frac{i}{n}\;\frac{\sin i\omega}{R^i}\,\{R^i J^i(n\varrho) - \varrho^i J^i(nR)\}.$$

Durch Summation sind wieder die vollständigen Integrale zu erhalten. In gleicher Weise lässt sich die Strömung für Ringe bestimmen, die von concentrischen Kreisen begrenzt sind.

Im Allgemeinen wird weder die Auflösung nach einzelnen Gliedern, noch die Bestimmung des Potentials φ_2 zur Lösung der Aufgabe erforderlich sein, es wird genügen, ψ_2 so zu bestimmen, dass es in der Platte der Gleichung

$$\frac{\partial^2 \psi_2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi_2}{\partial y^2} = 0$$

genügt und an der Grenze derselben $= -\,\psi_1$ wird. Einige einfache Beispiele werden in § 9 gegeben.

II.

Dielektrische Kugeln.

In Leitern bringen die elektromotorischen Kräfte elektrodynamischen Ursprungs dieselben Wirkungen hervor, wie die ihnen numerisch gleichen Kräfte elektrostatischen Ursprungs. Findet das Gleiche in dielektrischen Mitteln statt, so müssen Kugeln aus dielektrischem Material, welche im magnetischen Felde rotiren, eine Polarisation annehmen. Seien

$$\begin{array}{ll} \mathfrak{x} & \\ \mathfrak{y} & \dfrac{mm^{\frac{1}{2}}\,mgr^{\frac{1}{2}}}{\sec^2}\ *) \\ \mathfrak{z} & \end{array}$$

die Componenten derselben,

$$\varepsilon \qquad (\text{Zahl})\ *)$$

die Dielektricitätsconstante.

---

*) Die Einheiten sind wieder derart, dass die Lichtgeschwindigkeit $\frac{1}{A}$ nicht auftritt, die entsprechenden Grössen in magnetischem Maasse sind gleich $A^2\mathfrak{x}$, $A^2\mathfrak{y}$, $A^2\mathfrak{z}$, $A^2\varepsilon$.

Dann gelten für $\mathfrak{x}\,\mathfrak{y}\,\mathfrak{z}$ die Gleichungen:

$$\mathfrak{x} = -\varepsilon \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \varepsilon \mathfrak{X}$$

$$\mathfrak{y} = -\varepsilon \frac{\partial \varphi}{\partial y} + \varepsilon \mathfrak{Y}$$

$$\mathfrak{z} = -\varepsilon \frac{\partial \varphi}{\partial z} + \varepsilon \mathfrak{Z}$$

$$\frac{\partial \mathfrak{x}}{\partial x} + \frac{\partial \mathfrak{y}}{\partial y} + \frac{\partial \mathfrak{z}}{\partial z} = \frac{1}{4\pi} \Delta \varphi;$$

für $\varrho = R$

$$\mathfrak{x} x + \mathfrak{y} y + \mathfrak{z} z = \frac{\varrho}{4\pi}\left[\frac{\partial \varphi_i}{\partial \varrho} - \frac{\partial \varphi_a}{\partial \varrho}\right].$$

Daraus folgt für φ:

$$\Delta \varphi = \frac{4\pi\varepsilon}{1+4\pi\varepsilon}\left(\frac{\partial \mathfrak{X}}{\partial x} + \frac{\partial \mathfrak{Y}}{\partial y} + \frac{\partial \mathfrak{Z}}{\partial z}\right)$$

und für $\varrho = R$:

$$(1+4\pi\varepsilon)\frac{\partial \varphi_i}{\partial \varrho} - \frac{\partial \varphi_a}{\partial \varrho} = \frac{4\pi\varepsilon}{\varrho}(x\mathfrak{X} + y\mathfrak{Y} + z\mathfrak{Z}).$$

Im äussern Raum muss sein $\Delta \varphi = 0$.

Ist wieder χ_n das $n$te Glied des äussern Potentiales, so ist, wie oben (Seite 10):

$$\frac{\partial \mathfrak{X}}{\partial x} + \frac{\partial \mathfrak{Y}}{\partial y} + \frac{\partial \mathfrak{Z}}{\partial z} = 2\omega \frac{\partial \chi_n}{\partial z}$$

$$x\mathfrak{X} + y\mathfrak{Y} + z\mathfrak{Z} = \omega\left(\varrho^2 \frac{\partial \chi_n}{\partial z} - n z \chi_n\right).$$

Um die Bedingungsgleichungen zu erfüllen, setzen wir:

$$\varphi = \varphi^0 + \varphi'$$

$$\varphi^0{}_i = \frac{4\pi\varepsilon}{1+4\pi\varepsilon}\frac{\omega}{n+1}\left(\varrho^2 \frac{\partial \chi_n}{\partial z} - n z \chi_n\right)$$

$$\varphi^0{}_a = \frac{4\pi\varepsilon}{1+4\pi\varepsilon}\frac{\omega}{n+1}\left[\left(\frac{R}{\varrho}\right)^{n+2}\frac{n}{n+1}\overline{\left(\frac{\varrho^2}{2n+1}\frac{\partial \chi_n}{\partial z} - z\chi_n\right)} + \left(\frac{R}{\varrho}\right)^n \frac{R^2}{2n+1}\overline{\frac{\partial \chi_n}{\partial z}}\right]$$

$\overset{\circ}{\varphi}_i$ genügt der partiellen Differentialgleichung, welcher φ genügen soll. $\overset{\circ}{\varphi}_a$ ist so gebildet, dass es 1. der Gleichung

$$\Delta\, \overset{\circ}{\varphi}_a = 0$$

genügt, 2. an der Oberfläche der Kugel mit $\overset{\circ}{\varphi}_i$ zusammenfällt. Dass erstere Bedingung erfüllt ist, erkennt man daraus, dass die überstrichenen Ausdrücke Kugelflächenfunktionen $(n+1)$ten und $(n-1)$ten Grades sind, wie man leicht nachweist. Durch Einsetzung von $\varphi^0 + \varphi'$ in die Bedingungen für φ erhält man für φ' die Gleichungen:

$$\Delta \varphi' \text{ überall } = 0, \quad \varphi' \text{ stetig,}$$

für $\varrho = R$:

$$(1 + 4\pi\varepsilon)\frac{\partial \varphi_i'}{\partial \varrho} = \frac{\partial \varphi_a'}{\partial \varrho} + \frac{\partial \overset{\circ}{\varphi}_a}{\partial \varrho},$$

deren Erfüllung keine Schwierigkeit hat, da wir φ^0 schon als Summe von Kugelfunktionen dargestellt haben.

Von besonderem Interesse ist der Fall, dass ein kugelförmiger Magnet in einem, ihn umgebenden ruhenden Dielektrikum rotirt, da die Erde ein rotirender Magnet und der Weltraum nach der Annahme vieler Physiker ein Dielektricum ist. Um in diesem Falle das elektrische Potential zu bestimmen, haben wir zu beachten, dass die Erde ein Leiter ist, es wird daher auch in ihr eine Vertheilung eintreten, die auf das Dielektricum zurückwirkt, und zur Folge hat, dass an der Oberfläche der Erde das Potential constant wird.

Erde im dielektrischen Raum.

Ist $\chi = \Sigma \chi_n$ das Potential der Erde, so ist die Aufgabe diese:

φ so zu bestimmen, dass im äussern Raum

$$\Delta \varphi = \frac{4\pi\varepsilon}{1 + 4\pi\varepsilon} \cdot 2\omega \frac{\partial \chi}{\partial z},$$

und an der Oberfläche $\varphi = \text{const}$ ist.

Man findet leicht:

$$\varphi = \frac{4\pi\varepsilon}{1 + 4\pi\varepsilon}\, \omega \sum \frac{R^2 - \varrho^2}{2n+1} \frac{\partial \chi_n}{\partial z}.$$

Für die Steigung des Potentials an der Erdoberfläche folgt daraus:

$$-\frac{\partial \varphi}{\partial \varrho} = \frac{4\pi\varepsilon}{1+4\pi\varepsilon} 2R\omega \sum \frac{1}{2n+1} \overline{\frac{\partial \chi_n}{\partial z}}.$$

Bei Weitem der grösste Theil der erdmagnetischen Kraft rührt von den Gliedern her, für welche $n = -2$, oder doch klein ist. Annähernd können wir daher setzen

$$\frac{\partial \varphi}{\partial \varrho} = \frac{4\pi\varepsilon}{1+4\pi\varepsilon} \frac{2}{3} R\omega \overline{\frac{\partial \chi}{\partial z}}.$$

$\overline{\frac{\partial \chi}{\partial z}}$ ist die gegen den Nordpol des Himmels gewandte Componente der erdmagnetischen Kraft.

Nimmt man an, dass für den Weltraum $\frac{4\pi\varepsilon}{1+4\pi\varepsilon}$ sehr nahe an 1 sei, so erhält man für die elektrischen Steigungen Werthe, die von der Ordnung von 1 Daniell auf 50 m., also ausserordentlich klein, sind. Zu dem obigen Werthe von φ kann übrigens noch ein Glied von der Form $\frac{\text{const}}{\varrho}$ hinzutreten. Der Werth desselben hängt ab von der Menge der freien Elektricität, welche die Erde mit sich führt, und ist nicht Null, wenn diese Menge Null ist; die Ordnung der berechneten Kräfte wird aber durch dieses Glied nicht geändert.

III.

Rotirt eine beliebig magnetisirte Kugel in einer Flüssigkeit, die selber leitet und die Oberfläche der Kugel leitend berührt, so wird die Kugel in der Flüssigkeit Ströme verursachen, die im Allgemeinen nicht mehr in concentrischen Kugelschaalen erfolgen, sondern den Magneten durchsetzen.

Die Bestimmung dieser Ströme hat, von der Selbstinduction abgesehen, keine Schwierigkeit mehr, ich will auf die Rechnungen nicht eingehen. Figur e, Tafel 1 soll den einfachsten Fall veranschaulichen: Eine homogen magnetisirte Kugel ro- Kugelförmiger Magnet in einer Flüssigkeit.

tirt um ihre magnetische Axe. Die gezeichnete Figur stellt die Strömungslinien in einem Meridianschnitt dar. Die Form derselben ist hier unabhängig von den Widerständen der Flüssigkeit und des Magneten. Die Intensität aber wird Null, wenn einer derselben unendlich wird.

§ 8.

Lösung für die Formeln des Potentialgesetzes.

Ich habe bisher für die inducirten elektromotorischen Kräfte diejenigen Formen angenommen, welche Herr Jochmann für dieselben aus dem Weber'schen Grundgesetze abgeleitet hat. Ich will jetzt untersuchen, welche Aenderungen die Resultate erleiden durch Anwendung der aus dem Potentialgesetz folgenden Formeln, welche im 78. Bande des Borchardt'schen Journales gegeben sind.

Bezeichnen $\mathfrak{X}$, $\mathfrak{Y}$, $\mathfrak{Z}$ die bisher angenommenen elektromotorischen Kräfte, $\mathfrak{X}'$, $\mathfrak{Y}'$, $\mathfrak{Z}'$ die aus dem Potentialgesetz folgenden, so ist

$$\mathfrak{X}' = \mathfrak{X} - \omega \frac{\partial}{\partial x}(Vx - Uy)$$

$$\mathfrak{Y}' = \mathfrak{Y} - \omega \frac{\partial}{\partial y}(Vx - Uy)$$

$$\mathfrak{Z}' = \mathfrak{Z} - \omega \frac{\partial}{\partial z}(Vx - Uy).$$

Wir haben aber auf Seite 36 gesehen, dass für alle in der Untersuchung vorkommenden $U\ V\ W$ wird:

$$\varphi = \omega\,(Vx - Uy).$$

Man übersieht sofort, dass wir die bisherigen Lösungen in Bezug auf u, v, w, ψ, Ω, unverändert beibehalten können. Die einzige Aenderung, welche wir vorzunehmen haben, ist die, dass wir für das Potential der freien Elektricität φ' jetzt zu setzen haben

$$\varphi' = \text{const.},$$

und, wenn ursprünglich freie Elektricität nicht vorhanden war:

$$\varphi' = 0.$$