Über die Induction in rotirenden Kugeln

Hertz, Heinrich

1880

§ 6. Rotation magnetischer Kugeln

urn:nbn:de:bsz:31-279842

heit die Arbeit $2\pi\omega D$, diese Arbeit ist gleich der erzeugten Wärme, also

$$D = \frac{W}{2\pi\omega}.$$

Es ist aber dies Drehungsmoment gleich demjenigen, welches umgekehrt die rotirende Kugel den ruhenden Magneten ertheilt. Man erkennt leicht, dass für kleine ω, D proportional mit $\frac{\omega}{\varkappa}$ wächst, für grosse ω nimmt es ab mit wachsendem ω, und zwar ist es proportional mit $\sqrt{\frac{\varkappa}{\omega}}$, schliesslich wird es unendlich klein. (Das hindert nicht, dass es eine Arbeit von der Ordnung $\sqrt{\omega}$ leistet). Andererseits sahen wir schon, dass bei unendlichen ω die auf die inducirenden Magnete ausgeübten Kräfte endlich sind, da dieselben nun ein Drehungsmoment um die Rotationsaxe nicht hervorrufen, so müssen ihre Resultanten in einer durch die Axe gelegten Ebene wirken. Drehungsmoment, welches auf die inducirenden Magnete ausgeübt wird.

In der That verhält sich bei unendlichen ω die Kugel zu den äussern Magneten ähnlich, wie eine leitende Kugel zu elektrischen Massen, eine leitende Kugel kann aber inducirenden Massen keine Rotation um eine durch ihren Mittelpunkt gehende Achse ertheilen.

§ 6.

Rotation magnetischer Kugeln.

Ich mache jetzt die Annahme, dass die Masse der Kugel fähig sei, magnetische Polarität anzunehmen. Von dem Vorhandensein einer Coercitivkraft sehe ich ab.

Zunächst sind die für diesen Fall geltenden Formen der elektromotorischen Kräfte zu bilden. Nach Anleitung des § 1,6 haben wir, um die Wirkung der Magnetismen zu erhalten, in den allgemeinen Formeln für die elektromotorischen Kräfte zu ersetzen:

$$U \text{ durch } \frac{\partial M}{\partial z} - \frac{\partial N}{\partial y}$$
$$V \quad \frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial L}{\partial z}$$
$$W \quad \frac{\partial L}{\partial y} - \frac{\partial M}{\partial x}.$$

Danach ist weiter zu ersetzen:

$$\frac{\partial V}{\partial x} - \frac{\partial U}{\partial y} \text{ durch } \Delta N + \frac{\partial \chi}{\partial z}$$

1) $$\frac{\partial U}{\partial z} - \frac{\partial W}{\partial x} \qquad \Delta M + \frac{\partial \chi}{\partial y}$$

$$\frac{\partial W}{\partial y} - \frac{\partial V}{\partial z} \qquad \Delta L + \frac{\partial \chi}{\partial x},$$

da

2) $$\frac{\partial L}{\partial x} + \frac{\partial M}{\partial y} + \frac{\partial N}{\partial z} = -\chi \text{ ist.}$$

Nun ist aber

3) $$\Delta L = -4\pi\lambda$$
$$\Delta M = -4\pi\mu$$
$$\Delta N = -4\pi\nu$$

4) $$\frac{\lambda}{\theta} = \frac{\partial V}{\partial z} - \frac{\partial W}{\partial y} - \frac{\partial \chi}{\partial x}$$
$$\frac{\mu}{\theta} = \frac{\partial W}{\partial x} - \frac{\partial U}{\partial z} - \frac{\partial \chi}{\partial y}$$
$$\frac{\nu}{\theta} = \frac{\partial U}{\partial y} - \frac{\partial V}{\partial x} - \frac{\partial \chi}{\partial z}.$$

Indem man hiernach L, M, N aus den Ausdrücken 1) eliminirt, und die von den Strömen direct ausgeübten Kräfte

Die Differentialgleichungen.

$\frac{\partial V}{\partial x} - \frac{\partial U}{\partial y}$ etc. addirt, erhält man für die Ausdrücke, welche jetzt an Stelle der $\frac{\partial V}{\partial x} - \frac{\partial U}{\partial y}$ etc. zu treten haben die folgenden:

$$(1 + 4\pi\theta)\left(\frac{\partial V}{\partial x} - \frac{\partial U}{\partial y} - \frac{\partial \chi}{\partial z}\right)$$

$$5) \qquad (1 + 4\pi\theta)\left(\frac{\partial U}{\partial z} - \frac{\partial W}{\partial x} - \frac{\partial \chi}{\partial y}\right)$$

$$(1 + 4\pi\theta)\left(\frac{\partial W}{\partial y} - \frac{\partial V}{\partial z} - \frac{\partial \chi}{\partial x}\right).$$

In denselben bedeutet χ das Gesammtpotential. Dasselbe besteht aber:

1. aus dem gegebenen äusseren Potential der inducirenden Magnete,

2. aus dem Eigenpotential χ_0 der magnetisirten Kugel. Für das letztere gelten die Bedingungen:

Im Innern

$$6) \qquad \Delta \chi_0 = 0,$$

wie aus Gleichung 2) und 4) folgt; an der Grenze:

$$7) \qquad 4\pi\theta\, N_\varrho = (1 + 4\pi\theta)\frac{\partial \chi_{oi}}{\partial \varrho} - \frac{\partial \chi_{oa}}{\partial \varrho},$$

wenn N_ϱ die von den äussern Magnetismen und den inducirten Strömungen in Richtung des Radius ausgeübte Kraft ist.

In Worten kann man die Wirkung der Polarisirbarkeit des Mediums so aussprechen:

Die Polarisirbarkeit verändert einmal die magnetisirenden Kräfte im Innern in der Weise, wie dies die allgemeine Theorie des Magnetismus angiebt, sie vergrössert zweitens die von den magnetisirenden Kräften verursachten Wirkungen im Verhältniss $1 + 4\pi\theta$. Beide Theile der Wirkung haben entgegengesetzte Tendenz; der Erfolg ist, dass die Wirkung auch für sehr grosse θ nur in endlichem Verhältniss vergrössert erscheint.

Es werde wieder zunächst von der Selbstinduction abgesehen. Es muss aber bemerkt werden, dass dies nur dann erlaubt ist, wenn **Vernachlässigung der Selbstinduction.**

$$R\sqrt{\frac{4\pi\omega(1 + 4\pi\theta)}{\varkappa}}$$

sehr klein ist; bei grossen θ und R muss ω auch absolut betrachtet, sehr klein sein, um diese Bedingung zu erfüllen.

Ist das äussere Potential

$$\chi_n = A\varrho^n Y_n,$$

so kann das Eigenpotential der Hohlkugel in der Form dargestellt werden

$$\chi_0 = \left(C + \frac{B r^{2n+1}}{\varrho^{2n+1}}\right)\chi_n$$

und also das Gesammtpotential in der Form

$$\chi = \left(A + B\left(\frac{r}{\varrho}\right)^{2n+1}\right)\chi_n.$$

Nach dem Vorigen verhält sich nun die magnetische Hohlkugel genau so, wie eine nicht polarisirbare von gleichem Widerstand, welche unter dem Einfluss des Potentials

$$(1 + 4\pi\theta)\left(A + B\left(\frac{r}{\varrho}\right)^{2n+1}\right)\chi_n$$

steht.

Da dies Potential aus zwei Kugelfunktionen besteht, so lassen sich die Strömungen nach dem vorigen als bekannt ansehen.

Für die Strömungsfunktion erhalten wir:

$$\psi = -\frac{\omega}{\varkappa}(1 + 4\pi\theta)\left(\frac{A}{n+1} - \frac{B}{n}\left(\frac{r}{\varrho}\right)^{2n+1}\right)\varrho\,\frac{\partial\chi_n}{\partial\omega}.$$

Wären alle Umstände dieselben, nur $\theta = 0$, so würden wir für die Strömungsfunktion ψ_o erhalten haben

$$\psi_o = -\frac{\omega}{\varkappa}\,\frac{\varrho}{n+1}\,\frac{\partial\chi_n}{\partial\omega}.$$

Durch Division folgt:

$$\psi = (1 + 4\pi\theta)\left(A - \frac{n+1}{n}B\left(\frac{r}{\varrho}\right)^{2n+1}\right)\psi_0.$$

Die Form der Strömungen in den einzelnen Schichten ist also nicht geändert, nur ist die Intensität anders vertheilt. Es wird bequem sein, die Erscheinungen durch Vergleichung von ψ mit ψ_0 zu beschreiben. Die Grössen A und B sind durch die Gleichungen 6) 7) gegeben, setzt man $\frac{r}{R} = \varepsilon$, so werden sie gefunden:

$$A = \frac{(2n+1)\{(2n+1)(1+4\pi\theta) - 4\pi\theta n\}}{n(n+1)\,16\pi^2\theta^2(1-\varepsilon^{2n+1}) + (2n+1)^2(1+4\pi\theta)}$$

$$B = \frac{4\pi\theta n(2n+1)}{n(n+1)\,16\pi^2\theta^2(1-\varepsilon^{2n+1}) + (2n+1)^2(1+4\pi\theta)}.$$

Da diese Ausdrücke eine leichte Uebersicht nicht gestatten, so sollen dieselben auf vereinfachte Fälle angewandt werden.

1. Es sei θ sehr klein. Dann wird durch Entwickelung: **Besondere Fälle:**

$$A = 1 - \frac{n}{2n+1}\,4\pi\theta$$

$$B = \frac{n}{2n+1}\,4\pi\theta$$

also

$$\psi = \psi_0 + \frac{n+1}{2n+1}\,4\pi\theta\left(1 - \left(\frac{r}{\varrho}\right)^{2n+1}\right)\psi_0.$$ **θ sehr klein.**

Die Intensität der Strömung erscheint also an der Innenfläche der Hohlkugel gar nicht verändert, in den übrigen Theilen der Kugel erscheint sie überall verstärkt, wenn θ positiv ist. Die Verstärkung ist mit θ proportional. In diamagnetischen Kugeln ist die Intensität überall schwächer als in unmagnetischen. Die Drehung magnetischer Kugeln erfordert mehr, die diamagnetischer weniger Arbeit, als die unmagnetischer.

2. Es sei θ sehr gross, und nicht gleichzeitig ε sehr nahe an 1. Dann wird

$$A = \frac{2n+1}{4\pi\theta n(1-\varepsilon^{2n+1})}$$ **θ sehr gross.**

$$B = \frac{2n+1}{4\pi\theta(n+1)(1-\varepsilon^{2n+1})}$$

und also:

$$\psi = \frac{2n+1}{n}\,\frac{1-\left(\frac{r}{\varrho}\right)^{2n+1}}{1-\left(\frac{r}{R}\right)^{2n+1}}\,\psi_0.$$

Es ist also hier die Strömung in der innersten Schicht gleich Null, wächst dann aber rasch nach aussen und wird in der Grenzfläche $\frac{2n+1}{n}$ mal so stark, als in der nichtmagnetischen Kugel. Ist θ überhaupt gross, so ist die Verstärkung der Strömung von seinem absoluten Werthe nahezu unabhängig.

3. Es sei ε unendlich nahe gleich 1.

Dünne Hohlkugel.

Dann wird

$$A = \frac{(2n+1)(1+4\pi\theta) - 4\pi\theta n}{(2n+1)(1+4\pi\theta)}$$

$$B = \frac{4\pi\theta n}{(2n+1)(1+4\pi\theta)}.$$

Also wird

$$\psi = \frac{2n+1}{2n+1}\psi_0 = \psi_0.$$

In unendlich dünnen Hohlkugeln ist die Magnetisirbarkeit ohne Einfluss auf die inducirten Strömungen, (obgleich die Polarisationen nicht verschwinden, und die magnetisirenden Kräfte in der Schaale Aenderungen erleiden). Ich bemerke gleich, dass dies Resultat Gültigkeit behalten wird, auch dann, wenn auf die Selbstinduction Rücksicht genommen wird.

4. Es sei $\varepsilon = 0$, das ist der Fall in der Vollkugel.

Das Glied mit negativem Exponenten von ϱ fällt fort; es wird erhalten

Vollkugel.

$$A = \frac{1}{1 + \frac{4\pi\theta n}{2n+1}}$$

$$\psi = \frac{1+4\pi\theta}{1 + \frac{n}{2n+1}4\pi\theta}\psi_0.$$

Für grosse θ folgt daraus

$$\psi = \frac{2n+1}{n}\psi_0.$$

Die Grösse $\frac{2n+1}{n}$ liegt zwischen 2 und 3.

In Eisenkugeln sind die Strömungen also 2 bis 3 mal stärker als in einem gleich gut leitenden, nicht magnetischen Metall; die entwickelte Wärme, die gebrauchte Arbeit und bewirkte Dämpfung sind 4—9 mal grösser als in jenem.

5. Ebene Platten.

Eine sehr dünne ebene Platte kann als Theil einer sehr dünnen Hohlkugel angesehen werden, für eine solche ist daher

$$\psi = \psi_o.$$

Eine sehr dicke Platte kann als Theil einer unendlichen Vollkugel angesehen werden, für eine solche ist, da n sehr gross zu setzen ist: Ebene Platten.

$$\psi = \frac{1+4\pi\theta}{1+2\pi\theta}\,\psi_o.$$

In beiden Grenzfällen bleibt auch die gesammte Strömungsform ungeändert; in dem zuletzt genannten ist bei grossen θ die Intensität durch die Magnetisirbarkeit verdoppelt.

Bei mittleren Dicken der Platten gelten mittlere Werthe, die Rechnungen lassen sich leicht durchführen, geben aber keine sehr einfachen Resultate, weshalb sie hier wegbleiben mögen.

Es werde jetzt die Selbstinduction in Betracht gezogen, jedoch sollen die Rechnungen nur für Vollkugeln durchgeführt werden. Analytische Schwierigkeiten besonderer Natur bieten auch Hohlkugeln nicht, die Rechnungen werden aber äusserst complicirt. Berücksichtigung der Selbstinduction.

Wir finden die Strömung durch folgende Ueberlegungen: Beschränkung auf Vollkugeln.

Sei das inducirende Potential

$$\chi_{ni} = A\left(\frac{\varrho}{R}\right)^n \cos i\omega\, P_{ni}.$$

Sei ψ_o die von χ_{ni} direct inducirte Strömungsfunktion, dann ist:

$$\psi_0 = -\frac{1+4\pi\theta}{1+\frac{n}{2n+1}\,4\pi\theta}\cdot\frac{\omega}{\varkappa}\,A\varrho\left(\frac{\varrho}{R}\right)^n\frac{i}{n+1}\sin i\omega\, P_{ni}.$$

Sei

$$\psi = -\frac{\omega}{\varkappa} A\varrho\left(\frac{\varrho}{R}\right)^n \frac{i}{n+1}(f_1 \sin i\omega + f_2 \cos i\omega) P_{ni}$$

die thatsächlich stattfindende Strömungsfunktion. Es handelt sich darum, die von dieser inducirte Strömung zu finden. Hierzu ist zunächst die Kenntniss des von ψ in der magnetischen Masse inducirten Potentiales χ_θ erforderlich.

Die von der Strömungsfunktion

$$\psi = \varrho\left(\frac{\varrho}{R}\right)^n f(\varrho)\, Y_n$$

in Richtung des Radius ausgeübte magnetische Kraft ist

$$N_\varrho = \frac{x}{\varrho}\left(\frac{\partial W}{\partial y} - \frac{\partial V}{\partial z}\right) + \frac{y}{\varrho}\left(\frac{\partial U}{\partial z} - \frac{\partial W}{\partial x}\right) + \frac{z}{\varrho}\left(\frac{\partial V}{\partial x} - \frac{\partial U}{\partial y}\right)$$

$$= \frac{O}{\varrho} \qquad \text{(Seite 32)}$$

$$= -\frac{n(n+1)}{\varrho} F\left(\frac{\varrho}{R}\right)^n Y_n, \qquad \text{(Seite 34)}$$

wenn F und f den auf Seite 38 angegebenen Zusammenhang haben.

Hieraus und aus den Bedingungsgleichungen für χ_θ (Gleichung 6) 7) Seite 65) ergiebt sich χ_θ im allgemeinen und in unserm speciellen Falle, und wir erhalten für letzteren:

$$\chi_\theta = \frac{4\pi\theta n(n+1)}{2n+1+4\pi\theta n}$$

$$\cdot \frac{\omega}{\varkappa} A \frac{i}{n+1}\left(\frac{\varrho}{R}\right)^n \{F_1(R)\sin i\omega + F_2(R)\cos i\omega\} P_{ni}.$$

Verstehen wir nun unter ψ' diejenige Strömungsfunktion welche ψ und χ_θ zusammen in der unmagnetischen Kugel erzeugen würden, so veranlassen sie in der magnetischen Masse die Funktion

$$\psi'_\theta = (1 + 4\pi\theta)\,\psi',$$

und die Bedingung des stationären Zustandes wird werden:

$$\psi = \psi_o + \psi'_\theta.$$

ψ' ist genau so zu bilden, wie früher, also ist auch ψ'_θ bekannt. Setzt man die Werthe von ψ, ψ_o, ψ'_θ in die letzte Gleichung ein und macht die Coefficienten von $\cos i\omega$ und $\sin i\omega$ einzeln der Null gleich, so folgen für die f_1, f_2, F_1 und F_2 die Gleichungen:

$$f_1 \varrho = \frac{(2n+1)(1+4\pi\theta)}{2n+1+4\pi\theta n} - \frac{\omega i}{\varkappa} \frac{4\pi\theta n(1+4\pi\theta)}{2n+1+4\pi\theta n} F_2(R) + \frac{\omega i}{\varkappa}(1+4\pi\theta) F_2(\varrho)$$

$$f_2(\varrho) = \frac{\omega i}{\varkappa} \frac{4\pi\theta n(1+4\pi\theta)}{2n+1+4\pi\theta n} F_1(R) - \frac{\omega i}{\varkappa}(1+4\pi\theta) F_1(\varrho).$$

Setzt man hier

$$\frac{4\pi i\omega(1+4\pi\theta)}{\varkappa} = \mu^2$$

$$f_1(\varrho) = \varphi_1(\mu\varrho) = \varphi_1\sigma$$

$$f_2(\varrho) = \varphi_2(\mu\varrho) = \varphi_2\sigma$$

so werden für die φ_1 und φ_2 hier genau dieselben Differentialgleichungen erhalten, wie früher (Seite 41). Da wir eine Vollkugel behandeln, brauchen wir nur diejenigen Lösungen beizubehalten, welche im Mittelpunkte endlich sind, wir können also setzen:

$$\varphi_1 = A p_n(\lambda_1\sigma) + B p_n(\lambda_2\sigma)$$

$$\varphi_2 = -\lambda_1^2 A p_n(\lambda_1\sigma) - B\lambda_2^2 p_n(\lambda_2\sigma)$$

$$\lambda = \lambda_1 = \sqrt{\tfrac{1}{2}}(1+\sqrt{-1})$$

$$\lambda_2 = \sqrt{\tfrac{1}{2}}(1-\sqrt{-1}).$$

Die Bestimmung der Constanten hat hier genau nach derselben Methode zu geschehen, wie oben. Die Integrale, welche zu bilden sind, sind nicht verschieden von den früheren, nur durch die Weitläufigkeit der Constanten wird die Rechnung etwas verwickelter. Das Resultat aber ist ein relativ einfaches, es wird gefunden:

Die Lösung.

$$f_1 \varrho + f_2 \varrho \sqrt{-1} = \frac{(2n+1)\,(1+4\pi\theta)\, p_n(\lambda\mu\varrho)}{2n\, p_{n-1}(\lambda\mu R) + 4\pi\theta n\, p_n(\lambda\mu R)}.$$

Wir verificiren zunächst dies Resultat. Für verschwindende θ giebt es

$$f_1 + f_2 \sqrt{-1} = \frac{2n+1}{2n} \; \frac{p_n(\lambda\mu\varrho)}{p_{n-1}(\lambda\mu R)},$$

was mit dem für unmagnetische Vollkugel erhaltenen (Seite 45) übereinstimmt.

Vergleich mit früheren Resultaten.

Für verschwindende ω ergiebt es ferner, da

$$p_n(0) = \frac{2^{n+1}\, n!}{1\,.\,3\,\ldots\,2n+1}$$

$$f_1 + f_2 \sqrt{-1} = \frac{(2n+1)\,(1+4\pi\theta)}{2n+1+4\pi\theta n},$$

was wir gleichfalls gefunden haben. (Seite 68).

Im Allgemeinen ist ersichtlich, dass die Form der Strömung in der magnetischen Kugel dieselbe ist, wie diejenige, welche in einer unmagnetischen Kugel von gleichem Widerstand entsteht, wenn letztere $(1+4\pi\theta)$ mal schneller rotirt als die magnetische Kugel. Beide Strömungen unterscheiden sich dann aber noch dadurch von einander, dass sie, als Ganzes gedacht, um einen gewissen Winkel gegen einander gedreht sind, sowie durch ihre verschiedene Intensität.

Ich wende die Formel auf zwei specielle Fälle an.

Kleine Rotationsgeschwindigkeiten.

1. Es sei $4\pi\theta$ sehr gross, ω aber hinreichend klein, dass $\mu^2 R^2$ gegen die Einheit verschwindet. Es soll die Formel entwickelt werden und nur die erste Potenz dieser Grösse beibehalten werden. Man hat:

$$f_1 + f_2 \sqrt{-1} = \frac{2n+1}{n} \; \frac{p_n(\mu\varrho\lambda)}{p_n(\mu R\lambda)}$$

$$= \frac{2n+1}{n} \cdot \frac{2\,(2n+3) + \mu^2\varrho^2 \sqrt{-1}}{2\,(2n+3) + \mu^2 R^2 \sqrt{-1}} \qquad \text{(Seite 47).}$$

Für den Drehungswinkel erhalten wir unter Vernachlässigung von Gliedern höherer Ordnung:

$$\delta = \operatorname{arctg}\left(\frac{f_2}{f_1}\right) = -\frac{\mu^2}{2\,(2n+3)}\,(R^2-\varrho^2)$$

$$\frac{\delta}{i} = -\frac{16\,\pi^2\omega\,\theta}{2\,(2n+3)\,\varkappa}\,(R^2-\varrho^2).$$

Die Drehung ist also Null in der äussersten Schicht*), im Allgemeinen ist sie bedeutend vergrössert gegen die unmagnetische Kugel, nahezu im Verhältniss $4\pi\theta$.

In Figur d, Tafel 1 sind für eine Eisenkugel die Curven dargestellt, welche den auf Seite 50 für eine Kupferkugel gegebenen entsprechen. Dabei ist der Widerstand des Eisens gleich dem 6fachen des Kupfers angenommenen, und $4\pi\theta = 200$ gesetzt. Die dargestellten Geschwindigkeiten sind äusserst geringe, nämlich eine Umdrehung in 10 Sekunden und eine Umdrehung in 5 Sekunden; schon hier macht sich also die Selbstinduction recht bemerklich. Vgl. Taf. 7b.

2. Wird ω sehr gross, während θ einen endlichen, übrigens beliebigen Werth behält, so wird, wie man leicht aus den Formeln ableitet, die Erscheinung derjenigen in unmagnetischen Kugeln durchaus ähnlich werden. Auch hier ist schliesslich der Drehungswinkel in der äussersten Schicht $\frac{\pi}{4i}$. Die Erscheinung ist identisch mit derjenigen, welche in der unmagnetischen Kugel bei einer $(1+4\pi\theta)$ fachen Geschwindigkeit besteht. Die erzeugte Wärme ist dann $\sqrt{1+4\pi\theta}$ mal grösser als in der mit gleicher Geschwindigkeit bewegten unmagnetischen Kugel. Grosse Geschwindigkeiten.

§ 7.

Verwandte Probleme.

Es sollen in diesem Paragraphen einige Probleme besprochen werden die mit den früher behandelten in engem Zusammenhange stehen.

---

*) Eine Folge davon, dass in dieser Schicht für grosse θ, nach den Gleichungen für χ_θ

$$N_r - \frac{\partial \chi_\theta}{\partial r} = 0 \quad \text{ist.}$$