Über die Induction in rotirenden Kugeln

Hertz, Heinrich

1880

§ 5. Kräfte, welche die inducirten Strömungen ausüben

urn:nbn:de:bsz:31-279842

Ich erinnere hier an die Bemerkung, welche wir schon auf Seite 30 betreffs der Vernachlässigung der Selbstinduction gemacht haben.

Es würde ein Leichtes sein, die für Hohlkugeln gewonnenen Resultate auf ebene Platten von endlicher Dicke auszudehnen; um Weitläufigkeiten zu vermeiden, verzichte ich hierauf. Das Wesentliche der Erscheinung lässt sich übrigens ohne Rechnung aus dem Besprochenen abnehmen.

§ 5.

Kräfte, welche die inducirten Strömungen ausüben.

Es sollen jetzt die von den inducirten Strömungen ausgeübten Kräfte und die von denselben erzeugte Wärme berechnet werden. Der letzteren ist die Arbeit gleich, welche geleistet werden muss, um die Rotation zu erhalten.

Das Potential der inducirten Ströme.

A. Das Potential der inducirten Strömungen.

1. Wir berechnen dasselbe zunächst für den äusseren Raum. Der Theil, welcher von der zwischen $\varrho = a$ und $\varrho = a + da$ liegenden Kugelschicht herrührt, ist

Werth desselben im äussern Raum.

$$d\,\Omega_a = \frac{4\pi n}{2n+1}\left(\frac{a}{\varrho}\right)^{n+1} \psi_{ni}(a)\,da\,,$$

wenn wir das Glied ψ_{ni} der gesammten Strömungsfunktion ψ betrachten.

Nun ist

$$\psi(a)\,da = -A\,\frac{\omega}{\varkappa}\,a\left(\frac{a}{R}\right)^n \frac{i}{n+1}\,(f_1 a \sin i\omega + f_2 a \cos i\omega)\,P_{ni}\,da.$$

Setzt man diesen Werth in $d\Omega$ ein, und versucht die Integration nach den a auszuführen, so trifft man auf die Integrale

$$\int_r^R a^{2n+2} f(a)\,da.$$

Man hat aber

$$\int_r^R a^{2n+2} f_1\, a\, da$$

$$= \frac{(2n+1)\, R^{2n+1}}{4\pi}\, F_1\,(R)\,,$$

nach der Definition für F (Seite 38);

$$= -\frac{(2n+1)\,\varkappa}{4\pi i\omega} f_2\,(R)$$

nach den Gleichungen, welchen $f_1\, f_2\, F_1\, F_2$ genügen (Seite 39); und ebenso

$$\int_r^R a^{2n+2}\, f_2\, a\, da$$

$$= \frac{(2n+1)\, R^{2n+1}}{4\pi}\, F_2\, R$$

$$= -\frac{(2n+1)\,\varkappa}{4\pi i\omega}\,(1-f_1\,(R)).$$

Mit Benutzung dieser Ausdrücke findet man:

$$\Omega_a = \frac{n}{n+1}\, A\left(\frac{R}{\varrho}\right)^{n+1} (f_2 R \sin i\omega + (1-f_1 R)\cos i\omega)\, P_{ni}.$$

Für sehr kleine Drehungsgeschwindigkeiten ist $f_2 = 0$, $f_1 = 1$, also $\Omega = 0$;

für sehr grosse ist $f_1 = f_2 = 0$, slso an der Oberfläche der Hohlkugel

$$\overline{\Omega} = \frac{n}{n+1}\, \overline{\chi}_n.$$

2. In ganz derselben Weise lassen sich die Rechnungen für den innern Raum der Hohlkugel ausführen, man findet: Werth im Hohlraum.

$$\Omega_i = -\left(\frac{\varrho}{R}\right)^n A\, \{f_2 r \sin i\omega + (1-f_1 r)\cos i\omega\}\, P_{ni}$$

also für das Gesammtpotential:

$$\Omega_i + \chi_n = A\left(\frac{\varrho}{R}\right)^n \{f_1 r \cos i\omega - f_2 r \sin i\omega\}\, P_{ni}.$$

Für verschwindende Drehungsgeschwindigkeiten wird dieser Ausdruck $= \chi$, für grosse $= 0$, genauer findet sich für grosse μ aus einer Formel, welche wir schon früher angewandt haben (Seite 50)

$$f_1 r + f_2 r \sqrt{-1} = \frac{2(2n+1)}{\lambda\mu}\left(\frac{R}{r}\right)^{n+1}\frac{1}{e^{\lambda(S-s)} - e^{-\lambda(S-s)}}$$

$$= 2\,(2n+1)\left(\frac{R}{r}\right)^{n+1}\frac{1}{\lambda\mu}\,e^{-\lambda\mu\,(R-r)}.$$

Daraus folgt dann

$$\Omega_i + \chi_n$$

$$= A\,\frac{2(2n+1)}{\mu r}\left(\frac{\varrho}{r}\right)^n e^{-\frac{\mu}{\sqrt{2}}(R-r)} \cos\left(i\omega - \frac{\pi}{4} - \frac{\mu}{\sqrt{2}}(R-r)\right)P_{ni}.$$

Es nimmt also das Potential im Innern bei wachsender Geschwindigkeit ausserordentlich schnell ab, gleichzeitig aber haben seine Niveauflächen die Eigenthümlichkeit, um einen der Rotationsgeschwindigkeit proportionalen Winkel gedreht zu erscheinen, die durch das Potential bedingten Kräfte nehmen also bei allmählig wachsender Geschwindigkeit nach und nach alle Richtungen der Windrose an, und zwar bei beliebig wachsender Geschwindigkeit beliebig oft.

Eigenthümliches Verhalten der magnetischen Kräfte im Hohlraum.

Erzeugte Wärme.

B. Erzeugte Wärme.

Es sei R der Radius einer sehr dünnen Kugelschaale, es herrsche in derselben die Strömungsfunktion

$$\psi = \Sigma\,\psi_n.$$

Der Widerstand der Schaale sei k, es wird die in ihr erzeugte Wärme W gesucht.

Wärmeerzeugung in einer Kugelschaale.

Wir bestimmen die u, v, w, welche zu ψ gehören, speciell diejenigen, welche zu dem Gliede

$$\psi_{ni} = A \sin i\omega\, P_{ni}$$

gehören. Sind $u\,v\,w$ gefunden, so folgt die erzeugte Wärme

$$W = k\int (u^2 + v^2 + w^2)\,ds,$$

das Integral über die ganze Kugelfläche ausgedehnt.

Führen wir die Bezeichnungen Ω und Θ ein für die Strömungen längs der Breiten- und Meridiankreise in Richtung der wachsenden θ und ω, so haben wir:

$$\Omega = -\frac{1}{R}\frac{\partial\psi}{\partial\theta}$$

$$\Theta = -\frac{1}{R\sin\theta}\frac{d\psi}{\partial\omega}$$

$$u = \Theta\cos\theta\cos\omega + \Omega\sin\omega$$

$$v = \Theta\cos\theta\sin\omega - \Omega\cos\omega$$

$$w = -\Theta\sin\theta.$$

Setzt man hierin den angeführten Werth von ψ_{ni} ein, so erhält man:

$$u = \frac{A}{R}\{-\cos i\omega\cos\omega\,(i\,P_{ni}\operatorname{cotg}\theta) + \sin i\omega\sin\omega\,P'_{ni}\}$$

$$v = \frac{A}{R}\{-\cos i\omega\sin\omega\,(i\,P_{ni}\operatorname{cotg}\theta) - \sin i\omega\cos\omega\,P'_{ni}\}$$

$$w = \frac{A}{R}\,i\cos i\omega\,P_{ni}.$$

Nun ist aber:

$$i\,P_{ni}\operatorname{cotg}\theta = \tfrac{1}{2}(P_{n,i+1} + (n+i)(n-i+1)\,P_{n,i-1}$$

$$P'_{ni} = \tfrac{1}{2}(-P_{n,i+1} + (n+i)(n-i+1)\,P_{n,i-1}).$$

Durch Einsetzung dieser Werthe in $u\,v\,w$ folgt:

$$u = -\frac{A}{2R}\{\cos(i+1)\,\omega\,P_{n,i+1} + (n+i)(n-i+1)\cos(i-1)\,\omega\,P_{n,i+1}\}$$

$$v = -\frac{A}{2R}\{\sin(i+1)\,\omega\,P_{n,i+1} - (n+i)(n-i+1)\sin(i-1)\,\omega\,P_{n,i+1}\}$$

$$w = \frac{A}{R}\,i\cos i\omega\,P_{ni}.$$

Hierdurch sind die $u\,v\,w$ nach Kugelflächenfunktionen entwickelt. In gleicher Form denken wir uns die $u\,v\,w$ für alle Glieder bestimmt, und den Ausdruck

$$\int(u^2 + v^2 + w^2)\,ds$$

gebildet. Bei der Integration geben diejenigen Glieder, welche Producte aus Kugelfunktionen verschiedener Ordnung sind, das Resultat 0, wir können also für jedes ψ_n das entsprechende W_n besonders bestimmen und die Resultate addiren. Eine nähere Betrachtung zeigt dann, dass wir auch für jedes ψ_{ni} die Wärme besonders berechnen und die Resultate addiren können. Es werden allerdings nicht alle Integrale, welche Combinationen aus verschiedenen ψ_i entsprechen, gleich Null werden; aber die Integrale in $\int u^2\,ds$, für welche dies eintritt, werden sich gegen ihnen gleiche in $\int v^2\,ds$ aufheben.

Für das oben angegebene ψ_{ni} erhalten wir nun:

$$
\begin{aligned}
W_{ni} &= k \int (u^2 + v^2 + w^2)\,ds \\
&= \frac{k A^2}{2 R^2} \Big\{ \int (\cos\,(i+1)\,\omega\; P_{ni})^2\,ds \\
&\quad + (n+i)^2\,(n-i+1)^2 \int (\cos\,(i-1)\,\omega\; P_{n,i-1})^2\,ds \\
&\quad + 2\,i^2 \int (\cos\,i\omega\; P_{ni})^2\,ds \Big\},
\end{aligned}
$$

was nach bekannten Formeln und einfachen Reductionen ergiebt:

$$
\begin{aligned}
W_{ni} &= k A^2 \cdot \frac{2\pi n\,(n+1)}{2n+1}\,(n-i+1)\,(n-i+2)\ldots(n+i) \\
&= k A^2\,(n,i),
\end{aligned}
$$

wo jetzt (n, i) eine leicht verständliche Abkürzung ist. Da wir weiter haben:

$$
W = \sum_n \sum_i W_{ni}
$$

so ist unsere Aufgabe gelöst. Man erkennt leicht, dass dem Resultat die Formen gegeben werden können:

$$
W = \frac{k}{R^2} \sum_n n\,(n+1) \sum_i \int \psi_{ni}^{\,2}\,ds
$$

oder

$$
W = \frac{k}{R^2} \sum_n n\,(n+1) \int \psi_n^{\,2}\,ds.
$$

Der vorliegende Satz hätte, vielleicht einfacher, mittelst einer aus dem Green'schen Satze abgeleiteten Betrachtung bewiesen werden können; in dem hier gegebenen Beweise sind implicite die Formeln enthalten:

Analytische Formeln.

$$\int \left\{ \left(\frac{\partial \psi_n}{\partial \omega_x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \psi_n}{\partial \omega_y} \right)^2 + \left(\frac{\partial \psi_n}{\partial \omega_z} \right)^2 \right\} \, ds = n(n+1) \int \psi_n^2 \, ds$$

$$\frac{\partial}{\partial \omega_x} (\sin i\omega \, P_{ni})$$

$$= - \tfrac{1}{2} \cos (i+1) \omega \, P_{n,i+1} - \tfrac{1}{2} (n+i)(n-i+1) \cos (i-1) \omega \, P_{n,i-1}$$

$$\frac{\partial}{\partial \omega_y} (\sin i\omega) \, P_{ni})$$

$$= - \tfrac{1}{2} \sin (i+1) \omega \, P_{n,i+1} + \tfrac{1}{2} (n+i)(n-i+1) \sin (i-1) \omega \, P_{n,i-1}$$

$$\frac{\partial}{\partial \omega_z} (\sin i\omega \, P_{ni}) = i \cos i\omega \, P_{ni},$$

an welche sich leicht ähnliche anschliessen lassen. Beziehen sich ω, θ und ω', θ' auf Polarcoordinatensysteme mit verschiedenen Achsen, so erlauben die zuletzt angeführten Gleichungen, Integrale von der Form

$$\int \cos i\omega \, P_{ni}(\theta) \cos j\omega' \, P_{nj}(\theta') \, ds',$$

(in welchen die ω', θ' als die Integrationsvariabelen betrachtet sind) aus dem bekannten

$$\int P_{no}(\theta) \cos j\omega' \, P_{nj}(\theta') \, ds' = \frac{4\pi}{2n+1} \cos j\omega \, P_{nj}(\theta)$$

abzuleiten, allerdings im Allgemeinen nur mittelst weitläufiger Rechnungen.

Ich bestimme jetzt die in der rotirenden Kugel durch das Glied χ_{ni} der inducirenden Potentialfunktion erzeugte Wärme. Zu χ_{ni} gehört

Wärmeerzeugung in der rotirenden Kugel.

$$\psi_{ni} = - \frac{\omega}{\varkappa} \Lambda \varrho \left(\frac{\varrho}{R} \right)^n \frac{i}{n+1} (f_1 \sin i\omega + f_2 \cos i\omega) P_{ni},$$

also die Wärme

$$W_{ni} = \frac{\omega^2}{\varkappa} \Lambda^2 \frac{i^2 (n, i)}{(n+1)^2} \int_r^R \left(\frac{\varrho}{R} \right)^{2n} (f_1^2 + f_2^2) \varrho^2 \, d\varrho.$$

Das Integral kann ausgeführt werden für kleine und für grosse Drehungsgeschwindigkeiten. Für erstere ist $f_1 = 1$, $f_2 = 0$, und es wird daher die erzeugte Wärme in diesem Fall:

Bei kleinen Geschwindigkeiten.

$$W_{ni} = A^2 \frac{R^3 \omega^2}{\varkappa} \frac{i^2 (n, i)}{(n+1)^2 (2n+3)} \left(1 - \left(\frac{r}{R}\right)^{2n+3}\right).$$

Für sehr grosse Drehungsgeschwindigkeiten hingegen war

$$f_1^2 + f_2^2 = \frac{(2n+1)^2}{\mu^2} \frac{R^{2n}}{\varrho^{2n}} e^{-\mu\sqrt{2}(R-\varrho)}.$$

Es wird daher das in W_{ni} vorkommende Integral, welches von $r = 0$ an genommen werden kann, gleich

Bei grossen Geschwindigkeiten.

$$\int_0^R \frac{(2n+1)^2}{\mu^2} e^{-\mu\sqrt{2}(R-\varrho)}\, d\varrho$$

$$= \frac{(2n+1)^2}{\mu^3 \sqrt{2}},$$

da $R\mu$ als sehr gross betrachtet wird. Wir erhalten sonach für sehr grosse ω:

$$W_{ni} = A^2 \frac{(2n+1)^2 (n, i)}{8 (n+1)^2} \sqrt{\frac{\varkappa \omega i}{2\pi^3}}$$

W ist von R noch insofern abhängig, als dasselbe in A enthalten ist.

Die entwickelte Wärme wächst also ins Unendliche mit wachsendem ω*), und zwar wie $\sqrt{\omega}$. Das gleiche gilt von der zur Erhaltung der Rotation erforderten Arbeit. Bilden die inducirenden Magnete ein fest verbundenes System, so wird demselben ein Drehungsmoment um die Rotationsachse ertheilt, welches sich aus der erzeugten Wärme berechnen lässt. Denkt man sich nämlich die Kugel ruhend, die äussern Magnete rotirend mit der Winkelgeschwindigkeit ω, so leistet das Drehungsmoment D, welches die Bewegung erhält, in der Zeitein-

*) Wegen des scheinbaren Widerspruchs mit dem für ∞ dünne Kugelschaalen erhaltenen Resultate gilt die Bemerkung auf Seite 52 unten.

heit die Arbeit $2\pi\omega D$, diese Arbeit ist gleich der erzeugten Wärme, also

$$D = \frac{W}{2\pi\omega}.$$

Es ist aber dies Drehungsmoment gleich demjenigen, welches umgekehrt die rotirende Kugel den ruhenden Magneten ertheilt. Man erkennt leicht, dass für kleine ω, D proportional mit $\frac{\omega}{\varkappa}$ wächst, für grosse ω nimmt es ab mit wachsendem ω, und zwar ist es proportional mit $\sqrt{\frac{\varkappa}{\omega}}$, schliesslich wird es unendlich klein. (Das hindert nicht, dass es eine Arbeit von der Ordnung $\sqrt{\omega}$ leistet). Andererseits sahen wir schon, dass bei unendlichen ω die auf die inducirenden Magnete ausgeübten Kräfte endlich sind, da dieselben nun ein Drehungsmoment um die Rotationsaxe nicht hervorrufen, so müssen ihre Resultanten in einer durch die Axe gelegten Ebene wirken. Drehungsmoment, welches auf die inducirenden Magnete ausgeübt wird.

In der That verhält sich bei unendlichen ω die Kugel zu den äussern Magneten ähnlich, wie eine leitende Kugel zu elektrischen Massen, eine leitende Kugel kann aber inducirenden Massen keine Rotation um eine durch ihren Mittelpunkt gehende Achse ertheilen.

§ 6.

Rotation magnetischer Kugeln.

Ich mache jetzt die Annahme, dass die Masse der Kugel fähig sei, magnetische Polarität anzunehmen. Von dem Vorhandensein einer Coercitivkraft sehe ich ab.

Zunächst sind die für diesen Fall geltenden Formen der elektromotorischen Kräfte zu bilden. Nach Anleitung des § 1,6 haben wir, um die Wirkung der Magnetismen zu erhalten, in den allgemeinen Formeln für die elektromotorischen Kräfte zu ersetzen: